

# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 88, вып. 3



НАУКА

— 1727 —



# Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 88. Iss. 3

---

## EDITORIAL BOARD

**I. G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member,  
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

**V. G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,  
Moscow, Russia)

**J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Łódź, Poland),

**N. N. Bolotnik** (Professor, Corresponding RAS member,  
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

**F. M. Borodich** (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),

**A. B. Freidin** (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),

**A. M. Gaifullin** (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute  
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),

**M. L. Kachanov** (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),

**Ju. D. Kaplunov** (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),

**A. A. Korobkin** (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),

**A. M. Kovalev** (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Donetsk, Russia),

**V. V. Kozlov** (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),

**A. M. Krivtsov** (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic  
University, St. Petersburg, Russia),

**A. G. Kulikovskii** (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),

**Yu. Yu. Makhovskaya** (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

**N. F. Morozov** (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),

**T. J. Pedley** (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),

**F. Pfeiffer** (Professor, FRS, Foreign RAS member,

Technische Universität München, Munich, Germany),

**V. V. Pukhnachev** (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,  
RAS, Novosibirsk, Russia),

**G. Rega** (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),

**S. A. Reshmin** (Professor, Corresponding RAS member,

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

**V. A. Sabelnikov** (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),

**Ye. I. Shifrin** (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

**F. E. Udvardia** (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),

**S. E. Yakush** (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,  
Moscow, Russia),

**V. F. Zhuravlev** (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,  
Moscow, Russia),

**K. Zimmermann** (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N. I. Amelkin, I. M. Anan'evskii, A. S. Andreev, V. A. Babeshko,  
A. M. Formalskii, Yu. P. Gupalo, A. P. Ivanov, A. N. Kraiko, A. P. Markeev, S. A. Nazarov,  
S. V. Nesterov, V. S. Patsko, A. G. Petrov, N. N. Rogacheva, V. V. Sazonov, A. P. Seyranian,  
I. A. Soldatenkov, S. Ya. Stepanov, V. N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

---

*Учредитель:* РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

*Редакция:*

В. Г. Байдулов — отв. секретарь

Е. В. Есина — зав. редакцией

*Адрес редакции:* 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

*Телефон редакции:* 8 (495) 434-21-49

*E-mail:* pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

*URL:* <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте [Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU](http://eLIBRARY.RU) доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала «Прикладная математика и механика» в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

---

Founder: Russian Academy of Sciences

*The Editorial Staff:*

V. G. Baydulov — executive secretary

E. V. Esina — head of Editorial office (manager editor)

*The Editorial Board Address:* 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

*Phone:* 8 (495) 434-21-49

*E-mail:* pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

*URL:* <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

## СОДЕРЖАНИЕ

---

Памяти Андрея Геннадьевича Куликовского (18.03.1933–30.05.2024)	345
К задаче о нелинейных колебаниях консервативной системы при отсутствии резонанса <i>А. П. Маркеев</i>	347
Регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и кватернионных оскулирующих элементах <i>Ю. Н. Челноков</i>	359
К расчету неустойчивости заряженной поверхности стратифицированной жидкости <i>Д. Ф. Белоножко</i>	383
Фазовая структура волновых возмущений, возбуждаемых пульсирующим источником на поверхности раздела потока жидкости конечной глубины и ледяного покрова <i>В. В. Булатов, И. Ю. Владимиров</i>	392
Интегральные представления решения в задаче о наклонном падении поверхностной волны на прямолинейный берег прибрежного водного клина <i>М. А. Лялинов, С. В. Полянская</i>	406
Численное исследование влияния граничных условий на расчеты динамики полидисперсной газозвеси <i>Д. А. Тукмаков</i>	422
О фильтрации в геофизической переемычке с участком высачивания <i>К. Н. Анахаев</i>	434
Эванесцентные акустические волны <i>А. И. Каракозова</i>	447
Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): баланс энергии для системы индентор – слой – подложка <i>И. А. Солдатенков</i>	456
Особенности распространения волн Лэмба в функционально-градиентном слое <i>Е. А. Каспарова, С. В. Кузнецов</i>	483
Системы включений в пространственном упругом клине <i>Е. Д. Пожарская, Д. А. Пожарский, Б. В. Соболев</i>	494

---

---

# CONTENTS

---

In memory of A. G. Kulikovsky (18.03.1933–30.05.2024)	345
On The Problem of Nonlinear Oscillations of a Conservative System in the Absence of Resonance <i>A. P. Markeev</i>	347
Regular Quaternion Equations of the Spatial Hill Problem in Kustaanheimo–Stiefel Variables and Quaternion Osculating Elements <i>Yu. N. Chelnokov</i>	359
To the Charged Surface Instability Calculation of a Stratified Fluid <i>D. F. Belonozhko</i>	383
The Phase Structure of Wave Disturbances Excited By a Pulsating Source at the Interface of a Liquid Flow of Finite Depth and an Ice Sheet <i>V. V. Bulatov, I. Yu. Vladimirov</i>	392
Integral Representations of Solution in the Problem on Skew Incidence of a Surface Wave on the Straight Shoreline Water Wedge <i>M. A. Lyalinov, S. V. Polyanskaya</i>	406
Numerical Study of the Influence of Boundary Conditions on Calculations of the Dynamics of Polydisperse Gas Suspension <i>D. A. Tukmakov</i>	422
About Filtration in a Geophysical Bridge with a Seepage Site <i>K. N. Anakhaev</i>	434
Evanescence Acoustic Waves <i>A. I. Karakozova</i>	447
Contact with Intermolecular Interaction Forces for a Viscoelastic Layer (Self-Consistent Approach): The Energy Balance for the System of Indenter–Layer–Substrate <i>I. A. Soldatenkov</i>	456
Peculiarities of Lamb waves propagating in functionally graded layers <i>E. A. Kasparova, S. V. Kuznetsov</i>	483
Systems of Inclusions in a Spatial Elastic Wedge <i>E. D. Pozharskaya, D. A. Pozharskii, B. V. Sobol</i>	494

---

---



## ПАМЯТИ АНДРЕЯ ГЕННАДЬЕВИЧА КУЛИКОВСКОГО

(18.03.1933–30.05.2024)

30 мая 2024 г. ушел из жизни Андрей Геннадьевич Куликовский – выдающийся российский ученый, академик РАН, член редколлегии журнала Прикладная математика и механика с 2000 г.

Андрей Геннадьевич Куликовский – известный во всем мире ученый в области механики сплошных сред, автор фундаментальных исследований по магнитной гидродинамике, теории разрывных решений в задачах механики сплошных сред, теории устойчивости течений жидкости и газа.

Выпускник механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, ученик академика Л.И. Седова, Андрей Геннадьевич более 50 лет работал на механико-математическом факультете (с 1976 г. – профессором кафедры гидромеханики), читал обязательные курсы, спецкурсы, руководил работой научно-исследовательских семинаров, студентами и аспирантами. Под его научным руководством защищено 17 кандидатских диссертаций и подготовлено 9 докторов наук. За большую научную и педагогическую деятельность ему было присвоено звание Заслуженного профессора МГУ им. М.В. Ломоносова.

---

С 1958 г. и до конца жизни он также являлся сотрудником МИАН РАН, а с 1988 по 2003 гг. возглавлял Отдел механики этого института.

А.Г. Куликовский – автор пяти научных монографий, более 150 научных работ. За свои научные заслуги он был удостоен Государственной премии РФ (2003 г., в составе авторского коллектива), премии РАН им. С.А. Чаплыгина (1967 г.), медали им. П.Л. Капицы РАЕН (1987), премии и медали им. Л.И. Седова Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике (2002 г.).

Андрей Геннадьевич останется в нашей памяти как образец настоящего ученого, внесшего значительный вклад в развитие науки, искреннего, доброжелательного и мудрого человека.

Коллеги, ученики и все, кому посчастливилось жить и работать с этим замечательным человеком, глубоко скорбят о постигшей утрате.

---

---

УДК 531.36

## К ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ РЕЗОНАНСА

© 2024 г. А. П. Маркеев<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

\*e-mail: anat-markeev@mail.ru

Поступила в реакцию 17.05.2024 г.

После доработки 20.06.2024 г.

Принята к публикации 24.06.2024 г.

Разработан аналитический алгоритм нахождения частот нелинейных колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы вблизи ее устойчивого положения равновесия. Предполагалось, что в системе нет резонансов до четвертого порядка включительно, т.е. отношение частот малых линейных колебаний не равняется единице, двум или трем. В качестве приложения рассмотрена задача о нелинейных колебаниях материальной точки на неподвижной абсолютно гладкой поверхности в однородном поле тяжести; указана оценка меры колмогоровского множества начальных условий, для которых движение точки является условно-периодическим. Рассмотрена также нелинейная консервативная система, в которой отсутствуют резонансы любого порядка. Система представляет собой маятник, образованный двумя скрепленными шарниром тонкими стержнями одинаковой длины и веса. Изучен характер нелинейных колебаний этого маятника в окрестности его устойчивого равновесия на вертикали.

*Ключевые слова:* консервативная система, устойчивость, условно-периодические колебания

DOI: 10.31857/S0032823524030017 ZBCTUY

**1. Введение.** На этапе предварительного проектирования многих машин и механизмов инженеру – конструктору важно заранее, до проведения дорогостоящих (а часто и совсем невозможных) экспериментов, знать, как может зависеть динамика проектируемой системы от ее параметров.

В статье получены явные формулы для частот нелинейных колебаний автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы с точностью до второй степени относительно начальных отклонений системы от ее устойчивого положения равновесия.

В случае консервативной системы, представляющей собой материальную точку, движущуюся по неподвижной абсолютно гладкой поверхности в однородном поле тяжести, изучен характер нелинейных колебаний в предположении об отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно. Дано приближенное аналитическое представление колмогоровского множества условно – периодических колебаний и указана оценка меры этого множества.

В качестве конкретного примера нерезонансной задачи исследованы нелинейные колебания двойного маятника в окрестности его устойчивого равновесия на верти-



кали. Показано, что для большинства начальных условий движение маятника является условно – периодическим, а относительная мера множества, дополнительного к этому большинству, экспоненциально мала.

Проведенный анализ опирается на современные методы исследования нелинейных динамических систем [1,2]. При проведении необходимых вычислений используются преобразование Биркгофа [3] и его модификации [4,5], удобные для применения методов компьютерной алгебры.

*Нормальные (главные) координаты.* Рассмотрим консервативную систему с двумя степенями свободы, положение которой определяется обобщенными координатами  $x_1, x_2$ . Пусть начало координат  $x_1 = x_2 = 0$  является положением равновесия, а потенциальная энергия  $\Pi(x_1, x_2)$  – аналитическая функция в его окрестности. Функция  $\Pi$  может еще зависеть от одного или нескольких параметров. Без ограничения общности будем считать, что  $\Pi(0,0) = 0$  и предположим, что разложение  $\Pi$  в ряд начинается с определенно-положительной квадратичной формы. Тогда точка  $x_1 = x_2 = 0$  будет точкой строгого локального минимума функции  $\Pi$  и, следовательно, согласно теореме Лагранжа, положение равновесия устойчиво [6].

Кинетическая энергия системы  $T$  является квадратичной формой относительно обобщенных скоростей  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  и имеет вид

$$T = a_{20}\dot{x}_1^2 + a_{11}\dot{x}_1\dot{x}_2 + a_{02}\dot{x}_2^2$$

Коэффициенты  $a_{20}, a_{11}, a_{02}$  – функции  $x_1, x_2$  и, как и функция  $\Pi$ , могут еще зависеть от одного или нескольких параметров. Предположим, что они – аналитические функции от  $x_1, x_2$  и что при  $x_1 = x_2 = 0$  кинетическая энергия  $T$  – определенно-положительная квадратичная форма относительно  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ .

Если вместо обобщенных координат  $x_1, x_2$  ввести, следуя [6,7], нормальные (главные) координаты  $\theta_1, \theta_2$ , то потенциальная энергия запишется в виде ряда

$$\Pi = \frac{1}{2}(\omega_1^2\theta_1^2 + \omega_2^2\theta_2^2) + \sum_{k=3}^{\infty} \Pi_k, \quad \Pi_k = \sum_{v_1+v_2=k} p_{v_1v_2} \theta_1^{v_1} \theta_2^{v_2} \quad (1.1)$$

Здесь и всюду далее  $v_1$  и  $v_2$  – целые неотрицательные числа. Через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  обозначены частоты малых (линейных) колебаний. Будем считать их различными ( $\omega_1 > \omega_2 > 0$ ).

Кинетическая энергия в нормальных координатах запишется в виде

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \sum_{v_1+v_2=1}^{\infty} t_{v_1v_2,20} \theta_1^{v_1} \theta_2^{v_2} \dot{\theta}_1^2 + \quad (1.2)$$

$$+ \sum_{v_1+v_2=1}^{\infty} t_{v_1v_2,11} \theta_1^{v_1} \theta_2^{v_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \sum_{v_1+v_2=1}^{\infty} t_{v_1v_2,02} \theta_1^{v_1} \theta_2^{v_2} \dot{\theta}_2^2$$

Коэффициенты  $p_{v_1v_2}$  в (1.1) и  $t_{v_1v_2,20}, t_{v_1v_2,11}, t_{v_1v_2,02}$  в (1.2) зависят только от параметров системы.

**2. Функция Гамильтона.** При анализе нелинейных колебаний будем использовать гамильтонову форму уравнений движения. Импульсы  $p_{\theta_j}$  определяются равенствами

$$p_{\theta_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j}; \quad j = 1, 2 \quad (2.1)$$

Отсюда, с учетом выражения (1.2) для функции  $T$ , находятся величины  $\dot{\theta}_1$  и  $\dot{\theta}_2$  как функции от  $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$ . Эти функции линейны по импульсам. При этом, если пренебречь в выражениях  $\dot{\theta}_j(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$  величинами выше первой степени относительно  $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$ , то справедливы равенства  $\dot{\theta}_j = p_{\theta_j}$  ( $j = 1, 2$ ).

Подставив найденные из (2.1) величины  $\dot{\theta}_1$  и  $\dot{\theta}_2$  в функцию  $H = T + \Pi$  (см. равенства (1.1) и (1.2)), получим функцию Гамильтона  $H(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$ , аналитическую по  $\theta_j, p_{\theta_j}$  ( $j = 1, 2$ ). Уравнения движения системы запишутся в виде канонических уравнений

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_j}}, \quad \frac{dp_{\theta_j}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_j}; \quad j = 1, 2 \quad (2.2)$$

Для удобства дальнейших вычислений целесообразно сделать каноническую унитарную замену переменных  $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2} \rightarrow q_1, q_2, p_1, p_2$  по формулам [7]

$$\theta_j = \frac{1}{\sqrt{\omega_j}} q_j, \quad p_{\theta_j} = \sqrt{\omega_j} p_j; \quad j = 1, 2 \quad (2.3)$$

Подставив эти выражения в функцию  $H(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$ , получим функцию  $\Gamma(q_1, q_2, p_1, p_2)$ , соответствующую каноническим уравнениям движения в новых переменных

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial q_j}; \quad j = 1, 2 \quad (2.4)$$

Функция  $\Gamma$  аналитична относительно  $q_1, q_2, p_1, p_2$  и ее разложение в ряд записывается в виде

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{2} \omega_1 (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (q_2^2 + p_2^2) + \sum_{v_1+v_2=1}^{\infty} \gamma_{v_1 v_2 20} q_1^{v_1} q_2^{v_2} \cdot p_1^2 + \\ & + \sum_{v_1+v_2=1}^{\infty} \gamma_{v_1 v_2 11} q_1^{v_1} q_2^{v_2} \cdot p_1 p_2 + \sum_{v_1+v_2=1}^{\infty} \gamma_{v_1 v_2 02} q_1^{v_1} q_2^{v_2} \cdot p_2^2 + \sum_{v_1+v_2=3}^{\infty} \gamma_{v_1 v_2} q_1^{v_1} q_2^{v_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Зависящие только от параметров системы коэффициенты  $\gamma_{v_1 v_2}$ ,  $\gamma_{v_1 v_2 20}$ ,  $\gamma_{v_1 v_2 11}$ ,  $\gamma_{v_1 v_2 02}$  выражаются через коэффициенты разложений (1.1) и (1.2).

Для коэффициентов членов третьей степени можно получить следующие выражения:

$$\gamma_{30} = \frac{p_{30}}{\omega_1^{3/2}}, \quad \gamma_{21} = \frac{p_{21}}{\omega_1 \omega_2^{1/2}}, \quad \gamma_{12} = \frac{p_{12}}{\omega_1^{1/2} \omega_2}, \quad \gamma_{03} = \frac{p_{03}}{\omega_2^{3/2}} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{1020} = -\omega_1^{1/2} t_{1020}, \quad \gamma_{0120} = -\frac{\omega_1}{\omega_2^{1/2}} t_{0120}, \quad \gamma_{1011} = -\omega_2^{1/2} t_{1011} \quad (2.7)$$

$$\gamma_{0111} = -\omega_1^{1/2} t_{0111}, \quad \gamma_{1002} = -\frac{\omega_2}{\omega_1^{1/2}} t_{1002}, \quad \gamma_{0102} = -\omega_2^{1/2} t_{0102}$$

Коэффициенты членов четвертой степени в (2.5) выражаются через коэффициенты разложений (1.1), (1.2) по таким формулам:

$$\gamma_{40} = \frac{p_{40}}{\omega_1^2}, \quad \gamma_{31} = \frac{p_{31}}{\omega_1^{3/2} \omega_2^{1/2}}, \quad \gamma_{22} = \frac{p_{22}}{\omega_1 \omega_2}, \quad \gamma_{13} = \frac{p_{13}}{\omega_1^{1/2} \omega_2^{3/2}}, \quad \gamma_{04} = \frac{p_{04}}{\omega_2^2} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{2020} &= -t_{2020} + 2t_{1020}^2 + \frac{1}{2}t_{1011}^2, \quad \gamma_{1120} = \frac{\omega_1^{1/2}}{\omega_2}(-t_{1120} + t_{1011}t_{0111} + 4t_{0120}t_{1020}) \\
 \gamma_{0220} &= \frac{\omega_1}{\omega_2}(-t_{0220} + 2t_{0120}^2 + \frac{1}{2}t_{0111}^2), \quad \gamma_{2011} = \frac{\omega_2^{1/2}}{\omega_1^{1/2}}[-t_{2011} + 2t_{1011}(t_{1020} + t_{1002})] \\
 \gamma_{1111} &= -t_{1111} + 2t_{0111}(t_{1020} + t_{1002}) + 2t_{1011}(t_{0102} + t_{0120}) \\
 \gamma_{0211} &= \frac{\omega_1^{1/2}}{\omega_2^{1/2}}[-t_{0211} + 2t_{0111}(t_{0102} + t_{0120})], \quad \gamma_{2002} = \frac{\omega_2}{\omega_1}(-t_{2002} + 2t_{1002}^2 + \frac{1}{2}t_{1011}^2) \\
 \gamma_{1102} &= \frac{\omega_2^{1/2}}{\omega_1^{1/2}}(-t_{1102} + t_{1011}t_{0111} + 4t_{0102}t_{1002}), \quad \gamma_{0202} = -t_{0202} + 2t_{0102}^2 + \frac{1}{2}t_{0111}^2
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Выражения для коэффициентов членов пятой и более высоких степеней не выписываем из-за их громоздкости.

**3. Об алгоритме нормализации.** Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы, не обязательно являющуюся консервативной. Пусть ее функция Гамильтона записывается в виде ряда

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \omega_j (q_j^2 + p_j^2) + \sum_{k=3}^{\infty} \Gamma_k(q_1, q_2, p_1, p_2), \quad \Gamma_k = \sum_{\substack{m_1+m_2+ \\ +n_1+n_2=k}} h_{m_1 m_2 n_1 n_2} q_1^{m_1} q_2^{m_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2}, \tag{3.1}$$

где  $m_j, n_j$  – целые неотрицательные числа,  $h_{m_1 m_2 n_1 n_2}$  – коэффициенты, зависящие только от параметров системы, а  $\omega_1 > \omega_2 > 0$ .

Следуя [3,4], введем вместо переменных  $q_j, p_j$  новые переменные  $z_j, Z_j$  при помощи близкого к тождественному канонического унивалентного преобразования  $q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow z_1, z_2, Z_1, Z_2$ , задаваемого неявно формулами

$$z_j = \frac{\partial S}{\partial Z_j}, \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}; \quad j = 1, 2, \tag{3.2}$$

где

$$S = q_1 Z_1 + q_2 Z_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_k + \dots, \tag{3.3}$$

а  $S_k$  – форма степени  $k$  относительно  $q_1, q_2, Z_1, Z_2$

$$S_k = \sum_{\substack{m_1+m_2+ \\ +n_1+n_2=k}} s_{m_1 m_2 n_1 n_2} q_1^{m_1} q_2^{m_2} Z_1^{n_1} Z_2^{n_2} \tag{3.4}$$

Из (3.2), (3.3) следует, что  $q_j, p_j$  выражаются через новые переменные  $z_j, Z_j$  при помощи рядов по степеням  $z_1, z_2, Z_1, Z_2$ :

$$q_j = z_j - \frac{\partial S_3^*}{\partial Z_j} + \frac{\partial^2 S_3^*}{\partial Z_j \partial z_1} \frac{\partial S_3^*}{\partial Z_1} + \frac{\partial^2 S_3^*}{\partial Z_j \partial z_2} \frac{\partial S_3^*}{\partial Z_2} - \frac{\partial S_4^*}{\partial Z_j} + O_4; \quad j = 1, 2 \tag{3.5}$$

$$p_j = Z_j + \frac{\partial S_3^*}{\partial z_j} - \frac{\partial^2 S_3^*}{\partial z_j \partial z_1} \frac{\partial S_3^*}{\partial Z_1} - \frac{\partial^2 S_3^*}{\partial z_j \partial z_2} \frac{\partial S_3^*}{\partial Z_2} + \frac{\partial S_4^*}{\partial z_j} + O_4; \quad j = 1, 2 \tag{3.6}$$

Здесь  $S_k^*$  – функции  $S_k$  из (3.3), (3.4), в которых  $q_1, q_2$  заменены на  $z_1, z_2$  (т.е.  $S_k^* = S_k(z_1, z_2, Z_1, Z_2)$ ); через  $O_n$  здесь и далее обозначается совокупность членов не ниже  $n$ -й степени относительно  $z_1, z_2, Z_1, Z_2$ .

Функция Гамильтона в новых переменных получается подстановкой  $q_j, p_j$  из (3.5), (3.6) в исходную функцию (3.1). Надлежащим подбором коэффициентов  $s_{m_1 m_2 n_1 n_2}$  форм  $S_3, S_4, \dots, S_k$  можно уничтожить в новой функции Гамильтона большинство одночленов и в результате получить функцию, нормализованную до членов  $k$ -й степени включительно относительно  $z_1, z_2, Z_1, Z_2$ .

Если в системе нет резонансов до  $k$ -го порядка включительно, т.е.  $k_1 \omega_1 \neq k_2 \omega_2$ , где  $k_1, k_2$  – натуральные числа, причем  $k_1 + k_2 = k$  и  $k_2 > k_1$ , то в симплектических полярных координатах  $\varphi_j, r_j$ , вводимых равенствами

$$z_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, Z_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j; j = 1, 2, \tag{3.7}$$

нормализованная функция Гамильтона запишется в виде

$$K = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \sum_{2 \leq i+j \leq k/2} c_{ij} r_1^i r_2^j + O((r_1 + r_2)^{(k+1)/2}), \tag{3.8}$$

где  $i, j$  – целые неотрицательные числа. Если же есть резонанс порядка  $k$ , то к правой части равенства (3.8) добавятся еще и слагаемые вида

$$r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2} [\alpha_{k_1 k_2} \sin(k_1 \varphi_1 - k_2 \varphi_2) + \beta_{k_1 k_2} \cos(k_1 \varphi_1 - k_2 \varphi_2)] \tag{3.9}$$

Коэффициенты  $c_{ij}$  в (3.8) и  $\alpha_{k_1 k_2}, \beta_{k_1 k_2}$  в (3.9) зависят только от параметров системы.

Если в правой части равенства (3.8) отбросить последнее слагаемое, то величины

$$\Omega_j = \frac{\partial K}{\partial r_j}; j = 1, 2 \tag{3.10}$$

будут задавать приближенные значения частот нелинейных колебаний системы в окрестности ее устойчивого положения равновесия.

*Замечание.* Описанную процедуру нормализации и нахождения частот нелинейных колебаний удобнее проводить, используя вместо вещественных переменных  $q_j, p_j$ , комплексно сопряженные переменные  $u_j, U_j$ , вводимые каноническим преобразованием (с валентностью, равной  $2i$ ;  $i$  – мнимая единица)

$$u_j = p_j + iq_j, U_j = p_j - iq_j; j = 1, 2$$

Исходную функцию Гамильтона (3.1), записанную в переменных  $u_j, U_j$ , можно привести к нормальной форме классическим преобразованием Биркгофа или при помощи какой-либо из модификаций метода Депри–Хори [3,4]. Соответствующая каноническая унивалентная замена переменных  $u_1, u_2, U_1, U_2 \rightarrow v_1, v_2, V_1, V_2$  близка к тождественной. Затем осуществляется переход к вещественным канонически сопряженным переменным  $z_j, Z_j$  при помощи канонической (с валентностью, равной  $1/(2i)$ ) замены

$$z_j = \frac{v_j - V_j}{2i}, Z_j = \frac{v_j + V_j}{2}; j = 1, 2,$$

и делается замена (3.7), чтобы получить нормальную форму в переменных  $\varphi_j, r_j$ .

Вычисления показывают, что если  $k = 4$ , то явные выражения коэффициентов нормальной формы из (3.8), (3.9) через коэффициенты исходной функции Гамильтона (3.1) можно выписать следующим образом. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 a_{3000} &= \frac{1}{4}(h_{0030} - h_{2010}), & b_{3000} &= \frac{1}{4}(h_{3000} - h_{1020}) \\
 a_{0300} &= \frac{1}{4}(h_{0003} - h_{0201}), & b_{0300} &= \frac{1}{4}(h_{0300} - h_{0102}) \\
 a_{2010} &= -\frac{1}{4}(3h_{0030} + h_{2010}), & b_{2010} &= \frac{1}{4}(3h_{3000} + h_{1020}) \\
 a_{0201} &= -\frac{1}{4}(3h_{0003} + h_{0201}), & b_{0201} &= \frac{1}{4}(3h_{0300} + h_{0102}) \\
 a_{2001} &= \frac{1}{4}(h_{2001} - h_{1110} - h_{0021}), & b_{2001} &= \frac{1}{4}(h_{2100} + h_{1011} - h_{0120}) \\
 a_{2100} &= -\frac{1}{4}(h_{2001} + h_{1110} - h_{0021}), & b_{2100} &= \frac{1}{4}(h_{2100} - h_{1011} - h_{0120}) \\
 a_{1011} &= \frac{1}{2}(h_{2001} + h_{0021}), & b_{1011} &= \frac{1}{2}(h_{2100} + h_{0120}) \\
 a_{1200} &= -\frac{1}{4}(h_{1101} + h_{0210} - h_{0012}), & b_{1200} &= \frac{1}{4}(h_{1200} - h_{1002} - h_{0111}) \\
 a_{1101} &= -\frac{1}{2}(h_{0210} + h_{0012}), & b_{1101} &= \frac{1}{2}(h_{1200} + h_{1002}) \\
 a_{1002} &= \frac{1}{4}(h_{1101} - h_{0210} + h_{0012}), & b_{1002} &= \frac{1}{4}(h_{1200} - h_{1002} + h_{0111}) \\
 a_{1003} &= \frac{1}{8}(h_{1201} + h_{0112} - h_{1003} - h_{0310}), & b_{1003} &= \frac{1}{8}(h_{1300} + h_{0211} - h_{1102} - h_{0013})
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= -\frac{2}{5}(a_{2001}a_{1200} + b_{2001}b_{1200}) + (a_{1002}a_{1011} - b_{1002}b_{1011}) - \\
 &\quad - (a_{0300}a_{1101} + b_{0300}b_{1101}) + 2(a_{0201}a_{1002} + b_{0201}b_{1002}) \\
 \kappa_2 &= -\frac{2}{5}(a_{2001}b_{1200} - a_{1200}b_{2001}) - (a_{1002}b_{1011} + a_{1011}b_{1002}) + \\
 &\quad + (a_{0300}b_{1101} - a_{1101}b_{0300}) - 2(a_{0201}b_{1002} - a_{1002}b_{0201})
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

При отсутствии резонансов третьего и четвертого порядков ( $\omega_1 \neq 2\omega_2$  и  $\omega_1 \neq 3\omega_2$ ) нормализованная функция Гамильтона (3.1) имеет вид

$$K = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}), \tag{3.13}$$

где коэффициенты  $c_{ij}$  вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 c_{20} &= \frac{1}{2}(3h_{4000} + h_{2020} + 3h_{0040}) - 2\left[\frac{3}{\omega_1}(a_{3000}^2 + b_{3000}^2 + a_{2010}^2 + b_{2010}^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\omega_1 - \omega_2}(a_{2001}^2 + b_{2001}^2) + \frac{1}{\omega_2}(a_{1011}^2 + b_{1011}^2) + \frac{1}{2\omega_1 + \omega_2}(a_{2100}^2 + b_{2100}^2)\right] \\
 c_{11} &= h_{2200} + h_{0220} + h_{2002} + h_{0022} - 8\left[\frac{1}{\omega_1 + 2\omega_2}(a_{1200}^2 + b_{1200}^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\omega_1 + \omega_2}(a_{2100}^2 + b_{2100}^2) - \frac{1}{\omega_1 - 2\omega_2}(a_{1002}^2 + b_{1002}^2) + \frac{1}{2\omega_1 - \omega_2}(a_{2001}^2 + b_{2001}^2) + (3.14) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\omega_1}(a_{2010}a_{1101} + b_{2010}b_{1101}) - \frac{1}{\omega_2}(a_{0201}a_{1011} - b_{0201}b_{1011})\right] \\
 c_{02} &= \frac{1}{2}(3h_{0400} + h_{0202} + 3h_{0004}) - 2\left[\frac{3}{\omega_2}(a_{0300}^2 + b_{0300}^2 + a_{0201}^2 + b_{0201}^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\omega_1 - 2\omega_2}(a_{1002}^2 + b_{1002}^2) + \frac{1}{\omega_1}(a_{1101}^2 + b_{1101}^2) + \frac{1}{\omega_1 + 2\omega_2}(a_{1200}^2 + b_{1200}^2)\right]
 \end{aligned}$$

При резонансе третьего порядка  $\omega_1 = 2\omega_2$  нормальная форма такова

$$K = 2\omega_2 r_1 + \omega_2 r_2 + 2r_2 \sqrt{2r_1} [a_{1002} \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) - b_{1002} \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2)] + O((r_1 + r_2)^2) \quad (3.15)$$

Если нет резонанса третьего порядка, но есть резонанс  $\omega_1 = 3\omega_2$  четвертого порядка, то нормальная форма функции Гамильтона (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 K &= 3\omega_2 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 - \\
 &\quad - 4r_2 \sqrt{r_1 r_2} \left[ (a_{1003} + \frac{1}{\omega_2} \kappa_2) \sin(\varphi_1 - 3\varphi_2) + (b_{1003} + \frac{1}{\omega_2} \kappa_1) \cos(\varphi_1 - 3\varphi_2) \right] + \quad (3.16) \\
 &\quad + O((r_1 + r_2)^{5/2})
 \end{aligned}$$

**4. О нормальной форме функции Гамильтона (2.5) консервативной системы.** В случае консервативной системы многие коэффициенты форм  $\Gamma_k$  в разложении (3.1) равны нулю. Так, из (2.5) и (3.1) видно, что из 20-ти коэффициентов формы  $\Gamma_3$  отличны от нуля только следующие 10 коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 h_{3000} &= \gamma_{30}, \quad h_{2100} = \gamma_{21}, \quad h_{1200} = \gamma_{12}, \quad h_{0300} = \gamma_{03} \\
 h_{1020} &= \gamma_{1020}, \quad h_{1011} = \gamma_{1011}, \quad h_{1002} = \gamma_{1002} \\
 h_{0120} &= \gamma_{0120}, \quad h_{0111} = \gamma_{0111}, \quad h_{0102} = \gamma_{0102},
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

а из 35-ти коэффициентов формы  $\Gamma_4$  отличны от нуля только 14 коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 h_{4000} &= \gamma_{40}, \quad h_{3100} = \gamma_{31}, \quad h_{2200} = \gamma_{22}, \quad h_{1300} = \gamma_{13}, \quad h_{0400} = \gamma_{04} \\
 h_{2020} &= \gamma_{2020}, \quad h_{2011} = \gamma_{2011}, \quad h_{2002} = \gamma_{2002} \\
 h_{1120} &= \gamma_{1120}, \quad h_{1111} = \gamma_{1111}, \quad h_{1102} = \gamma_{1102} \\
 h_{0220} &= \gamma_{0220}, \quad h_{0211} = \gamma_{0211}, \quad h_{0202} = \gamma_{0202}
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

В данной статье мы не будем рассматривать нелинейные колебания при наличии резонансов. Получим только, предполагая что  $\omega_1 \neq 2\omega_2$  и  $\omega_1 \neq 3\omega_2$ , выражения для частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  нелинейных колебаний (3.10). При этом ограничимся получением только первых поправок к частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  малых колебаний. Эти поправки квадратичны относительно начальных значений величин  $q_j, p_j$  ( $j = 1, 2$ ) (или, что одно и то же, линейны относительно начальных значений величин  $r_1$  и  $r_2$ ). А нормализующую замену переменных (3.5), (3.6) для краткости выпишем только до членов второй степени относительно  $z_j, Z_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Из (3.10)–(3.14) и (4.1), (4.2) получаем

$$\Omega_1 = \omega_1 + 2c_{20}r_1 + c_{11}r_2, \quad \Omega_2 = \omega_2 + c_{11}r_1 + 2c_{02}r_2, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{3}{2}\gamma_{40} + \frac{1}{2}\gamma_{2020} - \frac{3(\gamma_{30} + \gamma_{1020})^2 + 4\gamma_{30}^2}{4\omega_1} + \frac{1(\gamma_{21} - \gamma_{0120} + \gamma_{1011})^2}{8(2\omega_1 - \omega_2)} - \\ &\quad - \frac{1(\gamma_{21} + \gamma_{0120})^2}{2\omega_2} - \frac{1(\gamma_{21} - \gamma_{0120} - \gamma_{1011})^2}{8(2\omega_1 + \omega_2)} \\ c_{11} &= \gamma_{22} + \gamma_{0220} + \gamma_{2002} - \frac{1(\gamma_{12} - \gamma_{1002} - \gamma_{0111})^2}{2(\omega_1 + 2\omega_2)} - \frac{1(\gamma_{21} - \gamma_{1011} - \gamma_{0120})^2}{2(2\omega_1 + \omega_2)} + \\ &\quad + \frac{1(\gamma_{12} - \gamma_{1002} + \gamma_{0111})^2}{2(\omega_1 - 2\omega_2)} - \frac{1(\gamma_{21} + \gamma_{1011} - \gamma_{0120})^2}{2(2\omega_1 - \omega_2)} - \\ &\quad - \frac{(3\gamma_{30} + \gamma_{1020})(\gamma_{12} + \gamma_{1002})}{\omega_1} - \frac{(3\gamma_{03} + \gamma_{0102})(\gamma_{21} + \gamma_{0120})}{\omega_2} \\ c_{02} &= \frac{3}{2}\gamma_{04} + \frac{1}{2}\gamma_{0202} - \frac{3(\gamma_{03} + \gamma_{0102})^2 + 4\gamma_{03}^2}{4\omega_2} - \frac{1(\gamma_{12} - \gamma_{1002} + \gamma_{0111})^2}{8(\omega_1 - 2\omega_2)} - \\ &\quad - \frac{1(\gamma_{12} + \gamma_{1002})^2}{2\omega_1} - \frac{1(\gamma_{12} - \gamma_{1002} - \gamma_{0111})^2}{8(\omega_1 + 2\omega_2)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (2.6)–(2.9) и (4.3), (4.4) величины  $\Omega_1, \Omega_2$  выражаются через коэффициенты рядов (1.1) и (1.2). И тем самым определяется явная зависимость частот нелинейных колебаний от параметров системы.

Проведя вычисления по описанному в п. 3 алгоритму, найдем, что нормализующую замену переменных (3.5), (3.6) можно представить в виде

$$q_j = z_j - \frac{\partial S_3^*}{\partial Z_j} + O_3, \quad p_j = Z_j + \frac{\partial S_3^*}{\partial z_j} + O_3; \quad j = 1, 2, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} S_3^* &= \sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 + \sigma_{111} Z_1^3 + \sigma_{112} Z_1^2 Z_2 - \sigma_{122} Z_1 Z_2^2 + \sigma_{222} Z_2^3 \quad (4.6) \\ \sigma_1 &= \frac{\gamma_{30}}{\omega_1} z_1^2 + \frac{2\omega_1(\gamma_{21} - \gamma_{0120}) + \gamma_{1011}\omega_2}{4\omega_1^2 - \omega_2^2} z_1 z_2 + \\ &\quad + \frac{\gamma_{12}(\omega_1^2 - 2\omega_2^2) - 2\gamma_{1002}\omega_2^2 + \gamma_{0111}\omega_1\omega_2}{\omega_1(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} z_2^2 \\ \sigma_2 &= \frac{2\omega_1^2(\gamma_{21} + \gamma_{0120}) - \gamma_{1011}\omega_1\omega_2 - \gamma_{21}\omega_2^2}{\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} z_1^2 - \\ &\quad - \frac{2\omega_2(\gamma_{12} - \gamma_{1002}) + \gamma_{0111}\omega_1}{\omega_1^2 - 4\omega_2^2} z_1 z_2 + \frac{\gamma_{03}}{\omega_2} z_2^2 \\ \sigma_{111} &= \frac{1}{3} \frac{2\gamma_{30} + \gamma_{1020}}{\omega_1}, \quad \sigma_{112} = \frac{2\omega_1^2(\gamma_{21} + \gamma_{0120}) + \gamma_{1011}\omega_1\omega_2 - \gamma_{0120}\omega_2^2}{\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} \\ \sigma_{122} &= \frac{2\omega_2^2(\gamma_{12} + \gamma_{1002}) + \gamma_{0111}\omega_1\omega_2 - \gamma_{1002}\omega_1^2}{\omega_1(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)}, \quad \sigma_{222} = \frac{1}{3} \frac{2\gamma_{03} + \gamma_{0102}}{\omega_2} \end{aligned}$$

**5. Условно-периодические колебания при отсутствии резонансов до четвертого порядка.** Рассмотрим приближенную систему с функцией Гамильтона  $K^{(0)}$ , получаемой из функции (3.13) полной системы отбрасыванием членов выше четвертой степени относительно  $r_1^{1/2}, r_2^{1/2}$

$$K^{(0)} = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 \tag{5.1}$$

Пусть функция  $K^{(0)}$  является невырожденной, т. е. определитель

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 K^{(0)}}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 K^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \frac{\partial^2 K^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 K^{(0)}}{\partial r_2^2} \end{vmatrix} = 4c_{20}c_{02} - c_{11}^2 \tag{5.2}$$

отличен от нуля. Тогда, согласно КАМ-теории [1,2], в малой окрестности положения равновесия  $r_1 = r_2 = 0$  движения полной системы с функцией Гамильтона (3.13) будут для большинства начальных значений  $r_j(0)$  величин  $r_j$  ( $j = 1, 2$ ) условно – периодическими с рационально независимыми частотами, задаваемыми равенствами (4.3), в которых  $r_j = r_j(0)$ . Это большинство начальных значений образует множество, называемое колмогоровским. Мера множества начальных значений, не принадлежащих колмогоровскому множеству, является малой. В окрестности  $r_1 + r_2 < \varepsilon$  его отнесенная мера имеет порядок  $\varepsilon^{(k-3)/4}$ , где  $k$  – порядок до которого отсутствуют резонансы  $k_1 \omega_1 = k_2 \omega_2$ .

*Пример 1. Колебания материальной точки на неподвижной поверхности.* В качестве иллюстрации рассмотрим конкретную задачу. Пусть материальная точка весом  $mg$  движется в однородном поле тяжести, все время оставаясь на неподвижной абсолютно гладкой поверхности. Движение отнесем к системе координат  $Oxyz$ , ось  $Oz$  которой направлена вертикально вверх, а оси  $Ox$  и  $Oy$  параллельны линиям кривизны поверхности в начале координат. Уравнение поверхности запишется в виде сходящегося ряда

$$z = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} \right) + \sum_{k=3}^{\infty} Z_k, \quad Z_k = \sum_{v_1+v_2=k} z_{v_1 v_2} x^{v_1} y^{v_2}, \tag{5.3}$$

где  $\rho_1, \rho_2$  – главные радиусы кривизны поверхности (полагаем, что  $\rho_2 > \rho_1 > 0$ ), а  $v_1, v_2$  – целые неотрицательные числа.

Потенциальная и кинетическая энергии точки вычисляются по формулам

$$\Pi = mgz, \quad T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y} \tag{5.4}$$

Нормальные координаты  $\theta_1, \theta_2$  введем равенствами

$$\theta_1 = \sqrt{m} x, \quad \theta_2 = \sqrt{m} y \tag{5.5}$$

Для частот  $\omega_1, \omega_2$  малых линейных колебаний имеем следующие выражения

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\rho_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\rho_2}; \quad \omega_1 > \omega_2 > 0 \tag{5.6}$$

Потенциальная и кинетическая энергии (5.4) в нормальных координатах  $\theta_1, \theta_2$  запишутся в виде рядов (1.1) и (1.2). Коэффициенты членов ряда (1.1) до четвертой степени включительно таковы:

$$p_{30} = \frac{g}{\sqrt{m}} z_{30}, \quad p_{21} = \frac{g}{\sqrt{m}} z_{21}, \quad p_{12} = \frac{g}{\sqrt{m}} z_{12}, \quad p_{03} = \frac{g}{\sqrt{m}} z_{03} \tag{5.7}$$



$$p_{40} = \frac{g}{m} z_{40}, p_{31} = \frac{g}{m} z_{31}, p_{22} = \frac{g}{m} z_{22}, p_{13} = \frac{g}{m} z_{13}, p_{04} = \frac{g}{m} z_{04} \quad (5.8)$$

Коэффициенты всех шести членов третьей степени относительно  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  в (1.2) равны нулю, а из девяти коэффициентов членов четвертой степени отличны от нуля только три коэффициента:

$$t_{2020} = \frac{1}{2m\rho_1^2}, t_{1111} = \frac{1}{m\rho_1\rho_2} \cdot t_{0202} = \frac{1}{2m\rho_2^2} \quad (5.9)$$

Рассмотрим случай, когда отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно, т.е.  $\omega_1 \neq 2\omega_2$  и  $\omega_1 \neq 3\omega_2$  (или, что то же самое,  $\rho_2 \neq 4\rho_1$  и  $\rho_2 \neq 9\rho_1$ ). Из (5.6)–(5.9), (2.3), (2.6)–(2.9) и формул (4.4) находим выражения для величин  $c_{ij}$ , нужных для вычисления частот (4.3) нелинейных колебаний:

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{\rho_1}{2m} \left[ 3z_{40} - \frac{1}{2\rho_1^3} - \frac{15}{2}\rho_1 z_{30}^2 - \frac{\rho_2(3\rho_1 - 8\rho_2)}{2(\rho_1 - 4\rho_2)} z_{21}^2 \right] \\ c_{11} &= \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{m} \left[ z_{22} + \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 - 4\rho_2} z_{21}^2 - \frac{2\rho_1\rho_2}{4\rho_1 - \rho_2} z_{12}^2 - 3\rho_1 z_{30} z_{12} - 3\rho_2 z_{03} z_{21} \right] \\ c_{02} &= \frac{\rho_2}{2m} \left[ 3z_{04} - \frac{1}{2\rho_2^3} - \frac{15}{2}\rho_2 z_{03}^2 - \frac{\rho_1(8\rho_1 - 3\rho_2)}{2(4\rho_1 - \rho_2)} z_{12}^2 \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Если определитель (5.2) отличен от нуля, то движение материальной точки для большинства начальных условий будет условно-периодическим с частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , задаваемыми равенствами (4.3). В окрестности  $r_1 + r_2 < \varepsilon$  относительная мера дополнения к этому большинству имеет порядок  $\varepsilon^{1/4}$ .

*Пример 2. О нелинейных колебаниях двойного маятника.* Маятник образован двумя твердыми стержнями, которые соединены своими концами при помощи шарнира. Первый из стержней подвешен его свободным концом к неподвижной точке. В остальном стержни могут свободно перемещаться в одной вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса первого стержня. Движение происходит в однородном поле тяжести.

Существует устойчивое положение равновесия маятника, когда стержни висят вдоль вертикали снизу от точки подвеса. Вблизи положения равновесия первый и второй стержни отклонены от вертикали на малые углы  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно.

Система имеет две степени свободы, величины  $\varphi$  и  $\psi$  примем за обобщенные координаты. Пусть стержни являются тонкими и однородными, имеют одинаковую длину  $l$  и одинаковый вес  $mg$ . Для потенциальной и кинетической энергий можно получить следующие выражения [7]:

$$\Pi = mgl \left( 3\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right), T = \frac{1}{2} ml^2 \left[ \frac{4}{3} \dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi - \psi) \dot{\varphi} \dot{\psi} + \frac{1}{3} \dot{\psi}^2 \right] \quad (5.11)$$

В нормальных координатах  $\theta_1, \theta_2$ , вводимых по формулам [7]

$$\varphi = -\frac{1}{2l} \sqrt{\frac{3}{7m}} [(1 + \sqrt{7})\theta_1 + (1 - \sqrt{7})\theta_2], \psi = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{3}{7m}} [(5 + \sqrt{7})\theta_1 + (5 - \sqrt{7})\theta_2], \quad (5.12)$$

потенциальная энергия  $\Pi$  представляется рядом (1.1), в котором

$$\omega_1^2 = 3 \left( 1 + \frac{2\sqrt{7}}{7} \right) \frac{g}{l}, \omega_2^2 = 3 \left( 1 - \frac{2\sqrt{7}}{7} \right) \frac{g}{l}, \quad (5.13)$$

а формы  $\Pi_k$  имеют четную степень; коэффициенты формы  $\Pi_4$  задаются равенствами

$$\begin{aligned}
 p_{40} &= -\frac{3(125 + 46\sqrt{7})}{784} \frac{g}{ml^3}, p_{31} = -\frac{27(3 + \sqrt{7})}{196} \frac{g}{ml^3}, p_{22} = -\frac{243}{392} \frac{g}{ml^3} \\
 p_{13} &= -\frac{27(3 - \sqrt{7})}{196} \frac{g}{ml^3}, p_{04} = -\frac{3(125 - 46\sqrt{7})}{784} \frac{g}{ml^3}
 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Кинетическая энергия  $T$  в нормальных координатах записывается в виде ряда (1.2), в котором коэффициенты при  $\dot{\theta}_1^2, \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_2^2$  – четные функции  $\theta_1, \theta_2$ , причем

$$\begin{aligned}
 t_{2020} &= \frac{27}{196} \frac{37 + 14\sqrt{7}}{ml^2}, t_{1120} = \frac{27}{98} \frac{2 + \sqrt{7}}{ml^2}, t_{0220} = -\frac{27}{196} \frac{5 - 2\sqrt{7}}{ml^2} \\
 t_{2011} &= -\frac{9}{98} \frac{8 + 3\sqrt{7}}{ml^2}, t_{1111} = -\frac{9}{49ml^2}, t_{0211} = -\frac{9}{98} \frac{8 - 3\sqrt{7}}{ml^2} \\
 t_{2002} &= -\frac{27}{196} \frac{5 + 2\sqrt{7}}{ml^2}, t_{1102} = \frac{27}{98} \frac{2 - \sqrt{7}}{ml^2}, t_{0202} = \frac{27}{196} \frac{37 - 14\sqrt{7}}{ml^2}
 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Опираясь на описанную структуру разложений (1.1), (1.2) и равенства (2.6)–(2.9), (4.3), (4.4) и (5.13)–(5.15), получаем коэффициенты функции  $K^{(0)}$  из (5.1):

$$c_{20} = -\frac{3}{1568} \frac{1409 + 528\sqrt{7}}{ml^2}, c_{11} = \frac{9\sqrt{21}}{392ml^2}, c_{02} = -\frac{3}{1568} \frac{1409 - 528\sqrt{7}}{ml^2} \quad (5.16)$$

Условие невырожденности функции  $K^{(0)}$  выполнено, так как для определителя (5.2) из равенств (5.16) имеем такое выражение

$$D_2 = \frac{297333}{614656m^2l^4} \neq 0$$

Отметим следующее важное обстоятельство: рассматриваемая задача о нелинейных колебаниях двойного маятника в окрестности его устойчивого равновесия на вертикали является нерезонансной. Действительно, если  $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$ , то из (5.13) следует, что

$$\sqrt{7} = \frac{3k_2^2 - 11k_1^2}{4k_1^2},$$

но последнее равенство невозможно, так как число  $\sqrt{7}$  иррациональное.

Для большинства начальных значений  $r_j(0)$  колебания маятника будут условно-периодическими с частотами (4.3), вычисляемыми при  $r_j = r_j(0)$ . Дополнение к этому колмогоровскому большинству начальных условий имеет малую относительную меру в окрестности  $r_1 + r_2 < \varepsilon$ . Ввиду отмеченной выше нерезонансности задачи о колебаниях, эта мера экспоненциально мала [1]: она имеет порядок  $\exp(-\frac{c_1}{\varepsilon^2})$ ,  $c_1, c_2 - \text{const} > 0$ .

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00162, <https://rscf.ru/project/24-11-00162/> в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Неиштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
2. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
3. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
4. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

5. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. 592 с.

**On The Problem of Nonlinear Oscillations of a Conservative System  
in the Absence of Resonance**

**A. P. Markeev<sup>a,#</sup>**

<sup>a</sup>*Moscow Aviation Institute (NRU), Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: anat-markeev@mail.ru*

An analytical algorithm is developed for finding the frequencies of nonlinear oscillations of a conservative system with two degrees of freedom near its stable equilibrium position. It is assumed that there are no resonances in the system up to the fourth order inclusive, i.e. the ratio of frequencies of small linear oscillations is not equal to two or three. As an application, the problem of nonlinear oscillations of a material point on a stationary absolutely smooth surface in a uniform gravitational field is considered. An estimate of the Kolmogorov set measure of initial conditions is indicated for which the motion of the point is conditionally periodic. A nonlinear conservative system is also considered in which there are no resonances of any order. The system is a pendulum formed by two thin rods of equal length and weight connected by a hinge. The nature of nonlinear oscillations of this pendulum in the vicinity of its stable equilibrium on the vertical is studied.

*Keywords:* conservative system, stability, conditionally periodic oscillations

REFERENCES

1. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopedia Math. Sci. Vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
2. *Moser J.K.* Lectures on Hamiltonian systems // Mem. Amer. Math. Soc., no. 81, Providence R.I.: AMS, 1968.
3. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. Vol. 9. Providence R.I.: AMS Coll., 1966.
4. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.: Springer, 1972. 369 p.
5. *Nayfeh A.X.* Perturbation Methods. N.Y.: Wiley, 1973. 425 p.
6. *Gantmacher F.R.* Lectures on Analytical Mechanics. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 296 p. (in Russian)
7. *Markeev A.P.* Theoretical mechanics. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2007. 592 p. (in Russian)

УДК 521.1, 629

**РЕГУЛЯРНЫЕ КВАТЕРНИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ХИЛЛА В ПЕРЕМЕННЫХ КУСТААНХЕЙМО–ШТИФЕЛЯ И КВАТЕРНИОННЫХ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ**

© 2024 г. Ю. Н. Челноков\*

*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия**\*e-mail: chelnokovyun@gmail.com*

Поступила в редакцию 17.01.2024 г.

После доработки 28.05.2024 г.

Принята к публикации 10.06.2024 г.

Получены регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла (варианта ограниченной задачи трех тел (Солнце, Земля, Луна (или другое изучаемое движущееся космическое тело с малой массой)), когда расстояние между двумя телами с конечными массами считается весьма большим, в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля ( $KS$ -переменных) в рамках эллиптической и круговой пространственной ограниченной задачи трех тел, а также регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла в двухмерных переменных Леви-Чивита. В этих уравнениях в качестве переменных выступают  $KS$ -переменные или переменные Леви-Чивита и энергия относительного движения изучаемого тела или переменная, обращающаяся для круговой задачи Хилла в константу движения этого тела (постоянную интегрирования Якоби), а также планетоцентрическое расстояние Солнца и реальное время, связанное с новой независимой переменной дифференциальным преобразованием времени Зундмана или другим более сложным дифференциальным соотношением. Эти уравнения дополнены уравнением орбиты Земли в полярных координатах и уравнением для истинной аномалии, характеризующей положение Земли на орбите. Установлен первый интеграл полученных уравнений в  $KS$ -переменных в случае круговой задачи. Другим первым частным интегралом в общем случае является билинейное соотношение, связывающее  $KS$ -переменные и их первые производные. Предложены три новые формы регулярных уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся кватернионных переменных). Предложенные регулярные кватернионные уравнения имеют осцилляторный вид или вид уравнений с медленно изменяющимися переменными, что позволяет эффективно использовать при исследовании задачи Хилла аналитические и численные методы теории колебаний и методы нелинейной механики.

*Ключевые слова:* пространственная и плоская задачи Хилла, регулярные кватернионные уравнения, переменные Кустаанхеймо–Штифеля и Леви-Чивита, круговая и эллиптическая задачи, энергия относительного движения, интеграл Якоби, кватернионные оскулирующие элементы

DOI: 10.31857/S0032823524030022 ZBBOLD

**1. Введение.** В основе небесной механики и астродинамики (механики космического полета) лежат ньютоновские дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенной пространственной ограниченной задачи трех

тел в декартовых (прямоугольных) координатах [1–4]. Ньютоновские уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел вырождаются при соударении второго (изучаемого) тела с первым (центральным) телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает в задаче двух тел в этих случаях не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности. Ньютоновские уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел вырождаются при соударении изучаемого тела (тела с пренебрежимо малой массой) с одним из двух других тел, имеющих конечные массы, что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения тела с малой массой в окрестности первого или второго гравитирующего тела и также создает не только теоретические, но и вычислительные трудности в ограниченной задаче трех тел в этих случаях.

Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) классических (ньютоновских) уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых силами гравитации, получило название “регуляризация” (Леви-Чивита), а уравнения, не имеющие этих особенностей, называются регулярными.

Проблема регуляризации уравнений задачи двух тел, восходит к Эйлеру и Леви-Чивита, которые дали решения одномерной и двумерной задачам о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Наиболее эффективная регуляризация дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел (спиновая или матричная, или каноническая  $KS$ -регуляризация) была предложена Кустанхаймо и Штифелем. Она представляет собой обобщение регуляризации Леви-Чивита уравнений плоского движения и наиболее полно изложена в широко цитируемой монографии [5].

Отметим основные хорошо известные достоинства уравнений Кустанхаймо–Штифеля. Они, в отличие от ньютоновских уравнений:

- регулярны в центре притяжения;
- линейны для невозмущенных кеплеровских движений (для эллиптического кеплеровского движения, когда полная энергия в задаче Кеплера постоянна и меньше нуля эти уравнения в  $KS$ -переменных эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора в новом времени (квадрат частоты этого осциллятора равен половине этой полной энергии, взятой со знаком минус));
- позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;
- близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;
- позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Эти обстоятельства позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Так, во многих работах, например, в [5–11], показано, что использование регулярных уравнений в  $KS$ -переменных позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики от двух до семи порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании ньютоновских уравнений. Это во многом связано со структурой регулярных уравнений и их замечательными свойствами линейности для невозмущенных кеплеровских движений.

Исследование возмущенного кеплеровского движения проводится в книге [5] не только с использованием регулярных уравнений в осцилляторной форме (с исполь-

зованием в качестве переменных четырехмерных специальных квадратных матриц ( $KS$ -матриц, введенных Штифелем)) и методов теории колебаний, но также с использованием регулярных уравнений в канонической форме, для чего ими разработана теория канонического  $KS$ -преобразования. Такой канонический подход к проблеме регуляризации, использующий  $KS$ -преобразование, развит в работах [12–14] и широко используется в настоящее время.

Среди методов регуляризации и регулярных моделей небесной механики и астродинамики в последнее время широкое распространение получили кватернионные методы и модели, основанные на использовании четырехмерных гиперкомплексных переменных – кватернионов Гамильтона, компонентами (элементами) которых являются четырехмерные  $KS$ -переменные [5]. Эти методы и модели имеют ряд преимуществ аналитического и вычислительного характера перед другими методами и моделями.

В работах автора статьи [15, 16] показано, что кватернионный подход к регуляризации позволяет:

- дать прямой и наглядный вывод регулярных уравнений в  $KS$ -переменных (что ставилось Штифелем и Шейфеле под сомнение [5] из-за неоднозначности  $KS$ -преобразования),

- дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризуемому  $KS$  преобразованию,

- раскрыть геометрический смысл его неоднозначности,

- получить более общие регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля,

- использовать при решении проблем регуляризации удобный аппарат кватернионов, имеющий наглядность векторного исчисления.

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием четырехмерных  $KS$ -переменных посвящены многие работы зарубежных авторов, а также работы автора статьи. Среди зарубежных работ отметим статьи Вальдфогеля [17, 18], который утверждает [18], что “кватернионы для регуляризации небесной механики – верный (правильный) путь” и что кватернионы “являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике”.

Обзоры работ, посвященных кватернионной регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, с различной степенью детализации даны в статьях [19–21].

$KS$ -переменные и кватернионы были эффективно использованы также для регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи трех тел (в неограниченном и ограниченном вариантах) [22–26]. История регуляризации задачи трех тел начинается со знаменитых работ Пуанкаре и Зундмана. В работах [22, 23] с использованием канонического формализма Гамильтона и двух  $KS$ -преобразований предложена регуляризация уравнений возмущенной пространственной неограниченной задачи трех тел. Приведенная в этих работах восьмимерная регуляризация общей задачи трех тел, основанная на двойной  $KS$ -регуляризации, обладает следующими свойствами: 1) уравнения движения являются регулярными при столкновении двух тел; 2) уравнения движения хорошо решаются для случаев, близких к тройным столкновениям.

В книге [6] двойное  $KS$ -преобразование предлагается использовать для построения канонических уравнений возмущенной ограниченной задачи трех тел (со ссылкой на регуляризирующие алгоритмы, полученные Арсезом, Заре и Хегги). В работах автора статьи [24–26] разработан кватернионный метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех

тел, методологически тесно связанный с кватернионным методом регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в  $KS$ -переменных, предложенным ранее [15, 16].

Отметим, что неограниченная и ограниченная задачи трех тел имеют существенное различие. Если в невозмущенной неограниченной задаче трех тел существует интеграл энергии, то в невозмущенной ограниченной задаче трех тел такого интеграла не существует. Это затрудняет построение регулярных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. (Более того, по словам Арсеца и Заре, предложенный в их работе [22] новый метод регуляризации неограниченной задачи трех тел, использующий в качестве одной из дополнительных переменных энергию системы, нельзя использовать для изучения задачи трех тел, в которой одна из частиц не имеет массы, т. е. для изучения ограниченной задачи трех тел.)

В предложенной нами в работах [24–26] кватернионной регуляризации уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел в качестве дополнительной переменной вместо обычно используемой энергии системы использована (в силу выше указанной причины) переменная, являющаяся интегралом Якоби в невозмущенной пространственной ограниченной круговой задаче трех тел (точнее, являющаяся константой движения Якоби в этой задаче). Такой подход используется нами и в настоящей работе при построении регулярных кватернионных уравнений плоской и пространственной задач Хилла.

В работе [12] развивается теория преобразований гамильтоновых систем уравнений, рассматривается проблема канонического увеличения размерности этих систем. Результаты общей теории иллюстрируются выводом основных соотношений в случае регуляризирующего  $KS$ -преобразования. Говорится, что общий подход упрощает доказательства и делает более естественными некоторые утверждения, сформулированные для  $KS$ -преобразования. В другой работе [13] предложен метод построения пространственных периодических орбит в задаче Хилла с использованием четырехмерных  $KS$ -переменных. Метод выявления и построения орбит систематическим путем и исследование их устойчивости опирается [14] на вычислительную процедуру. Уравнения задачи Хилла записываются в  $KS$ -переменных в канонической (Гамильтоновой) форме. Отмечается [13], что “ $KS$ -переменные существенно используются при вычислениях в анализе. Они позволяют обойти ряд численных и аналитических трудностей, возникающих при рассмотрении орбит, близких к орбите  $B_0$ , которая всегда проходит через особую точку  $|x| = 0$  (тело меньшей массы), и сокращают затраты времени ЭВМ на численное интегрирование). ... Характер поведения орбит семейства  $L_0$ , близких к  $B_0$  в окрестности особой точки  $|x| = 0$  представляет самостоятельный интерес. Эта задача анализируется в разделе 13”.

Автором настоящей статьи предлагаются новые регулярные кватернионные дифференциальные уравнения пространственной задачи Хилла в четырехмерных  $KS$ -переменных, из которых вытекают, как частные, приводимые в статье регулярные кватернионные дифференциальные уравнения плоской задачи Хилла в двухмерных переменных Леви-Чивита. Предложены три новые формы регулярных уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся кватернионных переменных).

**2. Уравнения пространственной задачи Хилла в прямоугольных координатах.** Задача Хилла [1–4] — это вариант ограниченной эллиптической задачи трех тел, рассматриваемых как материальные точки  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$ , получаемый из нее, если Солнце (точка  $M_0$ ) удаляется на большое расстояние таким образом, чтобы оставалось справедливым соотношение (по третьему закону Кеплера [3])

$$n_0^2 a_0^3 = f(m_0 + m_1),$$

где  $a_0$  – большая полуось орбиты Солнца,  $n_0$  – среднее движение Солнца,  $m_0$  и  $m_1$  – массы точек  $M_0$  и  $M_1$  (Солнца и Земли),  $f$  – гравитационная постоянная; масса точки  $M_2 = M$  (например, Луны или астероида, космического аппарата), движение которой изучается, считается пренебрежимо малой в сравнении с массами точек  $M_0$  и  $M_1$ .

Отметим, что неравномерностью движения Солнца пренебрегается.

В планетоцентрической прямоугольной вращающейся системе координат  $M_1xuz$ , ось  $M_1x$  которой проходит через Солнце  $M_0$ , уравнения пространственного движения изучаемой точки  $M$  имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + fm_1 \frac{x}{r^3} - 3n_0^2 x &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + fm_1 \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + fm_1 \frac{z}{r^3} + n_0^2 z &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} n_0^2 \left[ 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x^2 - 3x^2 + r^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) \right], \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= -2n_0^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) x, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = n_0^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = n_0^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) z, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$x$ ,  $y$  и  $z$  – планетоцентрические координаты изучаемой точки,  $r$  – планетоцентрическое расстояние этой точки,  $r_1$  – планетоцентрическое расстояние Солнца  $M_0$ .

В рамках круговой пространственной ограниченной задачи трех тел функция  $\Omega = 0$  и уравнения (2.1) задачи Хилла принимают вид (2.3) [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + fm_1 \frac{x}{r^3} - 3n_0^2 x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + fm_1 \frac{y}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + fm_1 \frac{z}{r^3} + n_0^2 z &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) имеют интеграл Якоби [1, 2]

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 - 2 \frac{fm_1}{r} - 3n_0^2 x^2 + n_0^2 z^2 = 2H, \tag{2.4}$$

где  $H$  – произвольная постоянная интегрирования.

Уравнения плоского движения изучаемой точки  $M$  имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + fm_1 \frac{x}{r^3} - 3n_0^2 x &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + fm_1 \frac{y}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= -2n_0^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) x, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = n_0^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) y; \quad r^2 = x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Классические дифференциальные уравнения Хилла [2] являются частным случаем уравнений (2.1), получаются из них при  $\Omega = 0$  и  $z = 0$  и имеют вид системы двух дифференциальных уравнений (2.6):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + fm_1 \frac{x}{r^3} - 3n_0^2 x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + fm_1 \frac{y}{r^3} = 0 \tag{2.6}$$



Эти уравнения положены Хиллом в основу построенной им теории движения Луны [2].

В справочнике по небесной механике и астродинамике [1, Гл. 10] излагается теория движения Луны. Говорится (с. 443) что “Наиболее совершенной с практической точки зрения явилась теория Хилла ... Работы Хилла ... послужили основой для полной теории движения Луны, которая была построена в 1904–1909 гг. Брауном ... С 1960 г. эфемериды Луны для астрономических ежегодников вычисляются непосредственно по тригонометрическим рядам Брауна без помощи его таблиц ... Теория Хилла–Брауна с учетом внесенных в нее поправок наиболее полно учитывает в пределах точности, принятой при вычислениях, гравитационные эффекты в движении Луны. В этой главе мы изложим результаты теории Делоне и теории Хилла–Брауна”.

Если теория Хилла строится на основе уравнений (2.6), то теория Хилла–Брауна строится на основе уравнений, имеющих вид уравнений (2.1), (2.2).

Отметим, что классические уравнения Хилла (2.6) являются предметом многих исследований, например, работы [27, 28]. Также отметим, что рассматриваемые в статье исходные уравнения (2.1), (2.2), называемые в справочнике [1] и в книге [2] уравнениями задачи Хилла, находят многие приложения к конкретным задачам теории движения естественных и искусственных небесных тел (в частности, для построения пространственных периодических орбит [13, 14]).

Уравнения (2.1) движения изучаемой точки  $M$  необходимо дополнить уравнением орбиты Земли в полярных координатах  $r_E$  и  $\vartheta$  в инерциальной системе координат с началом в центре масс Солнца, имеющим вид (2.7):

$$r_E = r_1 = \frac{(c^2/\mu)}{1 + (f/\mu)\cos\vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos\vartheta} \quad (2.7)$$

Это уравнение описывает изменение величины  $r_1$  (планетоцентрического расстояния Солнца  $M_0$ , равному расстоянию  $r_E$  Земли от Солнца). В нем  $\mu = f(m_0 + m_1)$  – гравитационный параметр,  $c$  – константа площадей;  $\vartheta$  – истинная аномалия, характеризующая положение Земли на орбите;  $p_E = c^2/\mu$  и  $e_E = f/\mu$  – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты Земли.

Уравнение орбиты (2.7) дополняется полярной формой интеграла площадей, записываемой нами в форме дифференциального уравнения (2.8):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r_E^2} \quad (2.8)$$

### 3. Регулярные кватернионные уравнения задачи Хилла в $KS$ -переменных и переменных Леви-Чивита

3.1. *Регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла в  $KS$ -переменных, построенные с использованием энергии изучаемой точки.* Уравнения задачи Хилла (2.1) и (2.2) могут быть записаны в виде дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, правые части которых содержат слагаемые (“возмущения”), пропорциональные малой величине  $n_0$  (среднему движению Солнца) или  $n_0^2$ . Поэтому регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла, описываемой в декартовых координатах уравнениями (2.1) и (2.2), в четырехмерных  $KS$ -переменных  $u_j$  ( $j = 0, 3$ ) [5] имеют вид регулярных кватернионных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел (3.1)–(3.3), полученных автором статьи [16]:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = \mathbf{f} = \frac{1}{2}r\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} \quad (3.1)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2\text{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q}\right) = 2\left(q_0 \frac{du_0}{d\tau} + q_1 \frac{du_1}{d\tau} + q_2 \frac{du_2}{d\tau} + q_3 \frac{du_3}{d\tau}\right) \quad (3.2)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_1\mathbf{i} - u_2\mathbf{j} - u_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{f} = f_0 + f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k},$$

в правых частях которых в рассматриваемом случае (задаче Хилла) фигурируют возмущения  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$  (проекции вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  на оси вращающейся системы координат  $M_1xyz$ ), определяемые в соответствии с уравнениями (2.1) и (2.2) соотношениями (3.4):

$$\begin{aligned} p_x &= 2n_0 \frac{dy}{dt} + 3n_0^2 x + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 2n_0 \frac{dy}{dt} + n_0^2 x + 2n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \\ p_y &= -2n_0 \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -2n_0 \frac{dx}{dt} + n_0^2 y - n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} y \\ p_z &= -n_0^2 z + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = -n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} z \end{aligned} \quad (3.4)$$

В этих соотношениях декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки  $M$  и проекции

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt$$

ее вектора относительной скорости должны быть выражены через  $KS$ -переменные  $u_j$  и их производные  $du_j/d\tau$  с помощью соотношений (3.5) и (3.6):

$$x = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad y = 2(u_1 u_2 - u_0 u_3), \quad z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2}{r} \left( u_0 \frac{du_0}{d\tau} + u_1 \frac{du_1}{d\tau} - u_2 \frac{du_2}{d\tau} - u_3 \frac{du_3}{d\tau} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2}{r} \left( u_1 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_2 - u_0 \frac{du_3}{d\tau} - \frac{du_0}{d\tau} u_3 \right) \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{2}{r} \left( u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Кватернион  $\mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}$ , фигурирующий в основном кватернионном уравнении (3.1), с учетом соотношений (3.4) принимает вид (3.7):

$$\mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} = n_0^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r \mathbf{u} - \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[ 2n_0 \left( \frac{dy}{dt} \mathbf{i} - \frac{dx}{dt} \mathbf{j} \right) + n_0^2 \left( 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \mathbf{i} - z \mathbf{k} \right) \right] \quad (3.7)$$

Здесь и далее  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – векторные мнимые единицы Гамильтона (орты четырехмерного гиперкомплексного пространства).

Фигурирующая в регулярном кватернионном уравнении (3.1) скалярная переменная  $h$  определяется соотношениями

$$h = \frac{1}{2} v^2 - \frac{fm_1}{r}, \quad v^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (3.8)$$

и удовлетворяет (в исходных переменных) дифференциальному уравнению

$$\frac{dh}{dt} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z, \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости относительного движения изучаемой точки  $M$  (вектор скорости точки в системе координат  $M_1xyz$ ).

При  $\mathbf{p} = 0$ , когда  $n_0 = 0$ , переменная  $h$  является полной энергией точки  $M$ . В этом случае  $h = h(t_0) = h_0 = \text{const}$ .

С использованием  $KS$ -переменных энергия  $h$  определяется соотношением

$$h = \frac{2}{r} \left[ \sum_{j=0}^3 \left( \frac{du_j}{d\tau} \right)^2 - fm_1 \right]; \quad r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (3.10)$$

При использовании  $KS$ -переменных основное регулярное кватернионное дифференциальное уравнение (3.1) дополняется нами скалярными дифференциальными уравнениями (3.2) и (3.3) для энергии  $h$  и времени  $t$ .

Уравнения (3.1)–(3.3) также необходимо дополнить уравнениями (3.11):

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2/\mu)}{1 + (f/\mu)\cos\vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos\vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2}, \quad (3.11)$$

которые описывают (в соответствии с уравнениями (2.7), (2.8) и (3.3)) изменение расстояния  $r_1$ , как функции истинной аномалии  $\vartheta$ , и изменение во “времени”  $\tau$  истинной аномалии  $\vartheta$ .

Декартовы координаты  $x, y, z$  точки  $M$  и проекции  $v_x, v_y, v_z$  ее вектора относительной скорости находятся через  $KS$ -переменные  $u_j$  и их производные  $du_j/d\tau$  с помощью скалярных соотношений (3.5) и (3.6) или с помощью кватернионных соотношений (3.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \end{aligned} \quad (3.12)$$

*Замечание.* Отметим, что регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел были получены автором статьи в работах [15, 16] в двух различных формах. В [15] эти уравнения были получены в матричной форме с использованием классических кватернионных матриц, а не  $KS$ -матриц, введенных Штифелем и Шейфеле и используемых в их теории регуляризации [5]. В [16] эти уравнения были получены в кватернионной форме с использованием кватернионов Гамильтона. Отметим также, что в работах [15, 16] автором статьи были получены более общие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел (в сравнении с регулярными уравнениями Кустанхеймо–Штифеля) в предположении, что не выполняется билинейное соотношение Штифеля и Шейфеле

$$u_0 \frac{du_1}{d\tau} - u_1 \frac{du_0}{d\tau} - u_3 \frac{du_2}{d\tau} + u_2 \frac{du_3}{d\tau} = 0,$$

накладываемое на  $KS$ -переменные и их первые производные (это соотношение Штифель и Шейфеле называют основным в своей теории). В частном случае (при выполнении этого билинейного соотношения) полученные автором статьи в работе [16] общие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел принимают вид уравнений (3.1)–(3.3).

Правая часть  $\mathbf{f}$  кватернионного дифференциального уравнения (3.1) для четырехмерной переменной  $\mathbf{u}$ , определяемая соотношениями  $\mathbf{f} = (1/2)r\mathbf{q}$  и (3.7), может быть преобразована с учетом соотношения

$$\frac{dy}{dt}\mathbf{i} - \frac{dx}{dt}\mathbf{j} = \left( \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \right) \circ \mathbf{k} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{r} \frac{dz}{d\tau}$$

к другому, более удобному виду (3.13):

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}n\mathbf{q} = 2n_0r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{2}n_0^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r^2 \mathbf{u} - \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[ n_0 \frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2}n_0^2 r \left( 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x\mathbf{i} - z\mathbf{k} \right) \right], \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= 2 \left( u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \\ x &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \end{aligned}$$

В регулярных кватернионных дифференциальных уравнениях (3.1)–(3.3) пространственной задачи Хилла, дополненных уравнениями (3.11) и соотношением (3.13), в качестве зависимых переменных выступают  $KS$ -переменные  $u_j$  ( $j = 0, 3$ ) (компоненты кватернионной переменной  $\mathbf{u}$ ) и энергия  $h$  относительного движения изучаемой точки  $M$ , а также планетоцентрическое расстояние Солнца  $r_1 = r_E$ , реальное время  $t$  и истинная аномалия  $\vartheta$ . В этих уравнениях независимой переменной является “фиктивное” время  $\tau$ , связанное с временем  $t$  дифференциальным уравнением (3.3) (дифференциальным преобразованием времени Зундмана).

В скалярной записи регулярное кватернионное уравнение пространственной задачи Хилла (3.1), дополненное уравнениями (3.11) и соотношением (3.13), принимает вид (3.14) и (3.15):

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_j = f_j; \quad j = \overline{0, 3} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} f_0 &= n_0 \left( -2r \frac{du_3}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} u_1 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[ \left( \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right) u_0 - z u_2 \right] \\ f_1 &= n_0 \left( 2r \frac{du_2}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau} u_0 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[ \left( \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right) u_1 - z u_3 \right] \\ f_2 &= n_0 \left( -2r \frac{du_1}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} u_3 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[ \left( \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r - 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right) u_2 - z u_0 \right] \\ f_3 &= n_0 \left( 2r \frac{du_0}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau} u_2 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[ \left( \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r - 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right) u_3 - z u_1 \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} r &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, x = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \\ \frac{dz}{d\tau} &= 2 \left( u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение (3.2) для энергии  $h$  с учетом соотношения (3.7) для кватерниона  $\mathbf{q}$  может быть записано в следующем виде:

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{1}{2} n_0^2 \left[ \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) \frac{dr^2}{d\tau} + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} \frac{dx^2}{d\tau} - \frac{dz^2}{d\tau} \right], \quad (3.16)$$

где расстояние  $r$  и координаты  $x, z$  определены (как функции переменных  $u_j$ ) выше приведенными соотношениями.

Таким образом, в скалярной записи регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла (3.1)–(3.3), (3.11), (3.13) имеют вид дифференциальных уравнений (3.14), (3.16) и (3.3), дополненных уравнениями (3.11) и соотношениями (3.15).

В рамках круговой пространственной задачи Хилла, когда расстояние  $r_1 = a_0 = \text{const}$ , дифференциальное уравнение (3.16) для энергии  $h$  принимает более простой вид (3.17):

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left( 3 \frac{dx^2}{d\tau} - \frac{dz^2}{d\tau} \right) \quad (3.17)$$

Из этого уравнения следует интеграл Якоби (2.4) в форме (3.18):

$$h = \frac{1}{2}n_0^2 (3x^2 - z^2) + H; \quad H = \text{const} \quad (3.18)$$

В полученных регулярных дифференциальных уравнениях (3.1)–(3.4), (3.11) и (3.14)–(3.16), (3.3), (3.11) основное кватернионное уравнение (3.1) и соответствующие ему скалярные уравнения (3.14) в  $KS$ -переменных имеют вид уравнений движения четырехмерного возмущенного осциллятора, что позволяет построить (см. разд. 5) соответствующие им уравнения в медленно изменяющихся переменных (в четырехмерных кватернионных оскулирующих элементах).

3.2. *Регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла в двухмерных переменных Леви-Чивита  $u_0$  и  $u_3$ , построенные с использованием энергии  $h$  изучаемой точки.* Эти уравнения (в рамках эллиптической ограниченной задачи трех тел) получаются из выше приведенных регулярных кватернионных уравнений пространственной задачи Хилла (3.1)–(3.3) и имеют вид уравнений (3.19):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{u} &= \mathbf{f} = \frac{1}{2} r \mathbf{q} \\ \frac{dh}{d\tau} &= 2 \text{scal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right) = 2 \left( q_0 \frac{du_0}{d\tau} + q_3 \frac{du_3}{d\tau} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_3^2 \\ r_1 &= r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu) \cos \vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

дополненных соотношениями (3.20)–(3.23)

$$\mathbf{u} = u_0 + u_3 \mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} \quad (3.20)$$

$$p_x = 2n_0 \frac{dy}{dt} + 3n_0^2 x + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 2n_0 \frac{dy}{dt} + n_0^2 x + 2n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \quad (3.21)$$

$$p_y = -2n_0 \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -2n_0 \frac{dx}{dt} + n_0^2 y - n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} y$$

$$x = u_0^2 - u_3^2, \quad y = -2u_0 u_3 \quad (3.22)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{r} \left( u_0 \frac{du_0}{d\tau} - u_3 \frac{du_3}{d\tau} \right), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{r} \left( u_0 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_3 \right) \quad (3.23)$$

Кватернион  $\mathbf{f}$ , стоящий в правой части первого кватернионного уравнения из системы (3.19), может быть записан в виде (3.24):

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{2} r \mathbf{q} = 2n_0 r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{2} n_0^2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r^2 \mathbf{u} + \frac{3}{2} \frac{a_0^3}{r_1^3} n_0^2 r x \bar{\mathbf{u}} = \\ &= 2n_0 r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{2} n_0^2 r \left\{ \left[ r + 2 \frac{a_0^3}{r_1^3} u_0^2 - 4 \frac{a_0^3}{r_1^3} u_3^2 \right] u_0 + \left[ r - 4 \frac{a_0^3}{r_1^3} u_0^2 + 2 \frac{a_0^3}{r_1^3} u_3^2 \right] u_3 \mathbf{k} \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Отметим, что в регулярных кватернионных уравнениях плоской задачи Хилла (3.19), дополненных соотношениями (3.20)–(3.23) или кватернионным соотношением (3.24), переменными являются переменные Леви-Чивита  $u_0$  и  $u_3$ , являющиеся компонентами двухмерной кватернионной переменной  $\mathbf{u} = u_0 + u_3\mathbf{k}$ , энергия  $h$  относительного движения изучаемой точки  $M$ , а также реальное время  $t$ .

В скалярной записи регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла, построенные в рамках эллиптической плоской ограниченной задачи трех тел, принимают вид уравнений (3.25):

$$\frac{d^2u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_k = f_k; \quad k = 0,3$$

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left[ \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) \frac{dr^2}{d\tau} + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} \frac{dx^2}{d\tau} \right], \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_3^2 \quad (3.25)$$

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu) \cos \vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2},$$

где

$$f_0 = -2m_0 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{1}{2}n_0^2 r \left[ \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right] u_0$$

$$f_3 = 2m_0 \frac{du_0}{d\tau} + \frac{1}{2}n_0^2 r \left[ \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r - 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right] u_3$$

$$x = u_0^2 - u_3^2, \quad r = u_0^2 + u_3^2$$

Для круговой плоской задачи Хилла расстояние  $r_1 = a_0$  и скалярные регулярные дифференциальные уравнения этой задачи принимают вид уравнений (3.26):

$$\frac{d^2u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_k = f_k; \quad k = 0,3, \quad \frac{dh}{d\tau} = \frac{3}{2}n_0^2 \frac{dx^2}{d\tau}, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_3^2 \quad (3.26)$$

или вид уравнений (3.27):

$$\frac{d^2u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_k = f_k; \quad k = 0,3, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_3^2 \quad (3.27)$$

$$h = \frac{3}{2}n_0^2 x^2 + H; \quad x = u_0^2 - u_3^2, \quad H = \text{const},$$

где

$$f_0 = -2m_0 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{3}{2}n_0^2 r x u_0, \quad f_3 = 2m_0 \frac{du_0}{d\tau} - \frac{3}{2}n_0^2 r x u_3$$

$$x = u_0^2 - u_3^2, \quad r = u_0^2 + u_3^2$$

*3.3. Регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла в KS-переменных, построенные с использованием переменной Якоби.* Рассматривая пространственную задачу Хилла в общем случае (для некруговой задачи), введем вместо энергии  $h$  новую переменную  $H$ , называемую автором статьи переменной Якоби и определяемую соотношением

$$H = h - \frac{1}{2}n_0^2 (3x^2 - z^2) \quad (3.28)$$

Эта переменная обращается для круговой задачи Хилла в соответствии с (3.18) в константу движения изучаемой точки  $M$ , фигурирующую в интеграле Якоби.

В соответствии с уравнением (3.16) и соотношением (3.28) для энергии  $h$  переменная  $H$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \left(\frac{dr^2}{d\tau} - 3\frac{dx^2}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \frac{d}{d\tau}(r^2 - 3x^2)$$

Кватернионные уравнения эллиптической пространственной задачи Хилла (3.1)–(3.3), (3.11), дополненные соотношением (3.13), с использованием новой переменной  $H$  принимают вид уравнений (3.29) и (3.30):

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}H\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.29)$$

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \frac{d}{d\tau}(r^2 - 3x^2), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (3.30)$$

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu) \cos \vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{4}n_0^2(3x^2 - z^2)\mathbf{u} + \mathbf{f} = \frac{1}{4}n_0^2(3x^2 - z^2)\mathbf{u} + \frac{1}{2}r\mathbf{q} = \\ &= \frac{1}{4}n_0^2(3x^2 - z^2)\mathbf{u} - \frac{1}{2}r\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} = \\ &= 2n_0r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{4}n_0^2 \left[ 3x^2 - z^2 + 2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) r^2 \right] \mathbf{u} - \\ &- n_0\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[ \frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2}n_0r \left( 3\frac{a_0^3}{r_1^3}x\mathbf{i} - z\mathbf{k} \right) \right] \\ &x = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1u_3 + u_0u_2) \\ &\frac{dz}{d\tau} = 2 \left( u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

В дифференциальных уравнениях (3.29)–(3.31) пространственной задачи Хилла в качестве зависимых переменных выступают  $KS$ -переменные  $u_j$ ,  $j = 0, 3$  и переменная Якоби  $H$ , определяемая соотношением (3.28) и обращающаяся для круговой задачи Хилла в константу движения, планетоцентрическое расстояние Солнца  $r_1 = r_E$ , а также время  $t$  и истинная аномалия  $\vartheta$ . В этих уравнениях независимой переменной, по-прежнему, является “фиктивное” время  $\tau$ , связанное с временем  $t$  вторым из дифференциальных уравнений (3.30).

*3.4. Регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла в переменных Леви-Чивита  $u_0$  и  $u_3$ , построенные с использованием переменной Якоби.* Эти уравнения получаются из регулярных кватернионных уравнений пространственной задачи Хилла (3.29)–(3.31) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}H\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad \frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \frac{d}{d\tau}(r^2 - 3x^2) \\ \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_3^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu) \cos \vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2},$$

где

$$\mathbf{u} = u_0 + u_3\mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_0 + F_3\mathbf{k} = 2n_0r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{4}n_0^2 \left[ 3x^2 + 2 \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r^2 \right] \mathbf{u} + \frac{3}{2}n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} rx\bar{\mathbf{u}} \quad (3.33)$$

$$x = u_0^2 - u_3^2, \quad y = -2u_0u_3, \quad r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_3^2$$

**4. Регулярные кватернионные уравнения круговой пространственной задачи Хилла в KS-переменных.** Для этой задачи проекции вектора возмущающего ускорения

$$p_x = 2n_0 \frac{dy}{dt} + 3n_0^2x, \quad p_y = -2n_0 \frac{dx}{dt}, \quad p_z = -n_0^2z$$

С их учетом соотношение (3.7) для кватерниона  $\mathbf{q}$  принимает вид (4.1):

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[ 2n_0 \left( \frac{dy}{dt} \mathbf{i} - \frac{dx}{dt} \mathbf{j} \right) + n_0^2(3xi - zk) \right] \quad (4.1)$$

При этом правая часть  $\mathbf{f}$  кватернионного уравнения (3.1), определяемая соотношением (3.13), упрощается и принимает вид (4.2):

$$\mathbf{f} = f_0 + f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k} = \frac{1}{2}r\mathbf{q} = 2n_0r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} - \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[ n_0 \frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2}n_0^2r(3xi - zk) \right] \quad (4.2)$$

В этом случае дифференциальное уравнение (3.16) для энергии  $h$  принимает вид (3.17), из которого, как уже отмечалось, следует интеграл Якоби (3.18).

Регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла (3.1)–(3.3), (3.11), (3.13), в которых используется энергия точки  $h$ , для круговой задачи с учетом соотношений (4.2) и (3.18) принимают вид (4.3) и (4.4):

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = \mathbf{f} = \frac{1}{2}r\mathbf{q} = 2n_0r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} - \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[ n_0 \frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2}n_0^2r(3xi - zk) \right] \quad (4.3)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad h = \frac{1}{2}n_0^2(3x^2 - z^2) + H; \quad H = \text{const} \\ x &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1u_3 + u_0u_2) \\ \frac{dz}{d\tau} &= 2 \left( u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

В скалярной записи эти уравнения имеют вид (4.6):

$$\frac{d^2u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_j = \frac{1}{2}rq_j = f_j; \quad j = \overline{0,3}, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad (4.6)$$

где

$$h = \frac{1}{2}n_0^2(3x^2 - z^2) + H; \quad H = \text{const}$$



$$\begin{aligned}
f_0 &= n_0 \left( -2r \frac{du_3}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} u_1 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r (3xu_0 - zu_2) \\
f_1 &= n_0 \left( 2r \frac{du_2}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau} u_0 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r (3xu_1 - zu_3) \\
f_2 &= n_0 \left( -2r \frac{du_1}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} u_3 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r (3xu_2 - zu_0) \\
f_3 &= n_0 \left( 2r \frac{du_0}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau} u_2 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r (3xu_3 - zu_1) \\
x &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \\
\frac{dz}{d\tau} &= 2 \left( u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Отметим, что правые части  $f_j$  уравнений (4.6) (компоненты кватерниона  $\mathbf{f}$ ), определяемые соотношениями (4.7), могут быть представлены в виде (4.8):

$$\begin{aligned}
f_0 &= au_0 + bu_3 - cu_2, \quad f_1 = au_1 - bu_2 - cu_3 \\
f_2 &= au_2 - bu_1 - cu_0, \quad f_3 = -au_3 + bu_0 - cu_1 \\
a &= r \left( n_0 \frac{dy}{dt} + \frac{3}{2} n_0^2 x \right) = 2n_0 \left( u_1 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_2 - u_0 \frac{du_3}{d\tau} - \frac{du_0}{d\tau} u_3 \right) + \\
&+ \frac{3}{2} n_0^2 r (u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) \\
b &= n_0 r \frac{dx}{dt} = 2n_0 \left( u_0 \frac{du_0}{d\tau} + u_1 \frac{du_1}{d\tau} - u_2 \frac{du_2}{d\tau} - u_3 \frac{du_3}{d\tau} \right) \\
c &= \frac{1}{2} n_0^2 r z = n_0^2 r (u_1 u_3 + u_0 u_2)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла (3.30)–(3.31), в которых используется в явном виде переменная  $H$ , для круговой задачи принимают вид (4.9):

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} H \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \tag{4.9}$$

где  $H = \text{const}$  – постоянная Якоби,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{1}{4} n_0^2 (3x^2 - z^2) \mathbf{u} + \mathbf{f} = \\
&= \frac{1}{4} n_0^2 (3x^2 - z^2) \mathbf{u} + 2n_0 r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} - n_0 \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[ \frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2} n_0 r (3x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \right] \\
x &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \\
\frac{dz}{d\tau} &= 2 \left( u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

В скалярной записи эти уравнения принимают вид (4.11):

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} H u_j = F_j; \quad j = \overline{0,3}, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \tag{4.11}$$

где

$$F_j = f_j + \frac{1}{4}n_0^2(3x^2 - z^2)u_j; \quad x = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1u_3 + u_0u_2), \quad (4.12)$$

компоненты  $f_j$  определяются соотношениями (4.7) или (4.8).

Умножим  $j$ -е уравнение системы (4.11) на  $du_j/d\tau$  и сложим левые и правые части полученных уравнений, учитывая соотношения (4.7). Интегрируя найденное соотношение, получим первый интеграл уравнений пространственной задачи Хилла в  $KS$ -переменных для круговой задачи, имеющий вид (4.13):

$$\left(\frac{du_0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du_2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du_3}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}r\left[\frac{1}{2}n_0^2(3x^2 - z^2) + H\right] = c_h, \quad (4.13)$$

где  $c_h$  – произвольная постоянная интегрирования,

$$r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad x = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1u_3 + u_0u_2); \quad H = \text{const}$$

Можно показать, что постоянная  $c_h = (1/2)fm_1$ .

Отметим, что уравнения пространственной задачи Хилла в  $KS$ -переменных в общем случае (не только для круговой задачи) имеют первый частный интеграл

$$u_0 \frac{du_1}{d\tau} - u_1 \frac{du_0}{d\tau} - u_3 \frac{du_2}{d\tau} + u_2 \frac{du_3}{d\tau} = 0, \quad (4.14)$$

называемый в пространственной задаче двух тел билинейным соотношением [5].

**5. Регулярные уравнения пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся кватернионных переменных)**

*5.1. Первая форма уравнений в кватернионных оскулирующих элементах.* Полагая правую часть  $\mathbf{f}$  кватернионного уравнения (3.1), определяемую соотношением (3.13), в котором может быть вынесен общий малый постоянный множитель  $n_0$  (среднее движение Солнца), равной нулю, получаем:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = 0; \quad h = \text{const} \quad (5.1)$$

Общее решение этого уравнения, имеющего вид регулярного кватернионного дифференциального уравнения невозмущенной пространственной задачи двух тел, для энергии  $h < 0$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = \alpha \cos(k\tau) + \beta \sin(k\tau), \quad \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = k[-\alpha \sin(k\tau) + \beta \cos(k\tau)]; \quad k = \left(-\frac{1}{2}h\right)^{1/2}, \quad (5.2)$$

где  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$  и  $\beta = \beta_0 + \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$  – произвольные кватернионные постоянные интегрирования.

Полагая  $\mathbf{f} \neq 0$ , а энергию  $h$  переменной величиной, будем рассматривать соотношения (5.2) как формулы замены кватернионных переменных  $\mathbf{u}$  и  $d\mathbf{u}/d\tau$  на новые кватернионные переменные  $\alpha$  и  $\beta$  (кватернионные оскулирующие (медленно изменяющиеся) переменные).

Формулы обратного перехода от переменных  $\alpha$  и  $\beta$  к переменным  $\mathbf{u}$  и  $d\mathbf{u}/d\tau$  имеют вид (5.3):

$$\alpha = \cos(k\tau)\mathbf{u} - \frac{1}{k}\sin(k\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}, \quad \beta = \sin(k\tau)\mathbf{u} + \frac{1}{k}\cos(k\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}; \quad k = \left(-\frac{1}{2}h\right)^{1/2} \quad (5.3)$$

Первая форма уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах  $\alpha$  и  $\beta$  для  $h < 0$  в соответствии с уравнениями (3.1)–(3.3) и соотношениями (5.3) имеет вид уравнений (5.4)–(5.6):

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \left[ -\frac{1}{k} \sin(k\tau) \right] \mathbf{f}, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \left[ \frac{1}{k} \cos(k\tau) \right] \mathbf{f}; \quad k = \left( -\frac{1}{2} h \right)^{1/2} \quad (5.4)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{1}{2} n_0^2 \left[ \left( 1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) \frac{dr^2}{d\tau} + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} \frac{dx^2}{d\tau} - \frac{dz^2}{d\tau} \right] \quad (5.5)$$

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2/\mu)}{1 + (f/\mu) \cos \vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} = r &= \cos^2(k\tau) \alpha \circ \bar{\alpha} + \sin(k\tau) \cos(k\tau) (\alpha \circ \bar{\beta} + \beta \circ \bar{\alpha}) + \sin^2(k\tau) \beta \circ \bar{\beta} = \\ &= \cos^2(k\tau) (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 2 \sin(k\tau) \cos(k\tau) (\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3) + \\ &\quad + \sin^2(k\tau) (\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где кватернионная функция  $\mathbf{f}$  имеет вид (3.13) для некруговой задачи и вид (4.2) для круговой задачи.

Для нахождения расстояния  $r$ , декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и производных  $dx/d\tau$ ,  $dy/d\tau$ ,  $dz/d\tau$ , входящих в функцию  $\mathbf{f}$ , фигурирующую в правых частях кватернионных уравнений (5.4), а также входящих в правую часть скалярного уравнения (5.5) для энергии  $h$ , необходимо воспользоваться скалярными соотношениями (3.5) и (3.6) (или кватернионными соотношениями (3.12)) и кватернионными формулами замены переменных (5.2).

Для круговой задачи Хилла имеет место соотношение (3.18) (интеграл Якоби):

$$h = \frac{1}{2} n_0^2 (3x^2 - z^2) + H; \quad H = \text{const}$$

Поэтому дифференциальное уравнение (5.5) для энергии  $h$  выпадает из системы дифференциальных уравнений движения точки (5.4)–(5.6).

Планетоцентрические координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки  $M$  и проекции  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  ее относительной скорости находятся через компоненты кватернионных оскулирующих элементов  $\alpha$  и  $\beta$  с помощью кватернионных соотношений (5.7) и (5.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= [\bar{\alpha} \cos(k\tau) + \bar{\beta} \sin(k\tau)] \circ \mathbf{i} \circ [\alpha \cos(k\tau) + \beta \sin(k\tau)] = \\ &= \cos^2(k\tau) \bar{\alpha} \circ \mathbf{i} \circ \alpha + \cos(k\tau) \sin(k\tau) (\bar{\alpha} \circ \mathbf{i} \circ \beta + \bar{\beta} \circ \mathbf{i} \circ \alpha) + \sin^2(k\tau) \bar{\beta} \circ \mathbf{i} \circ \beta \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} &= \frac{2k}{r} [\bar{\alpha} \cos(k\tau) + \bar{\beta} \sin(k\tau)] \circ \mathbf{i} \circ [\alpha \sin(k\tau) + \beta \cos(k\tau)] = \\ &= \frac{2k}{r} [\cos(k\tau) \sin(k\tau) (\bar{\alpha} \circ \mathbf{i} \circ \alpha + \bar{\beta} \circ \mathbf{i} \circ \beta) + \cos^2(k\tau) \bar{\alpha} \circ \mathbf{i} \circ \beta + \sin^2(k\tau) \bar{\beta} \circ \mathbf{i} \circ \alpha], \end{aligned} \quad (5.8)$$

где верхняя черта, по-прежнему, символ сопряжения.

*5.2. Вторая и третья формы регулярных уравнений в кватернионных оскулирующих элементах.* Полагая равной нулю правую часть  $\mathbf{F}$  кватернионного уравнения (3.29), определяемую соотношением (3.31) и рассматриваемую как возмущение, содержащее общий малый постоянный множитель  $n_0$ , получаем уравнение

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} H \mathbf{u} = 0; \quad H = \text{const} \quad (5.9)$$

Общее решение этого уравнения для постоянной Якоби  $H < 0$  имеет вид (5.10), аналогичный соотношениям (5.2):

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cos(K\tau) + \mathbf{B} \sin(K\tau), \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = K[-\mathbf{A} \sin(K\tau) + \mathbf{B} \cos(K\tau)]; K = \left(-\frac{1}{2}H\right)^{1/2}, \quad (5.10)$$

где  $\mathbf{A} = A_0 + A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B} = B_0 + B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$  – произвольные кватернионные постоянные интегрирования.

Полагая  $\mathbf{F} \neq 0$ , а  $H$  переменной величиной, будем рассматривать соотношения (5.10) как формулы замены кватернионных переменных  $\mathbf{u}$  и  $d\mathbf{u}/d\tau$  на новые кватернионные переменные  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  (кватернионные оскулирующие переменные).

Формулы обратного перехода от переменных  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  к переменным  $\mathbf{u}$  и  $d\mathbf{u}/d\tau$  имеют вид, аналогичный (5.3):

$$\mathbf{A} = \cos(K\tau)\mathbf{u} - \frac{1}{K}\sin(K\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}, \mathbf{B} = \sin(K\tau)\mathbf{u} + \frac{1}{K}\cos(K\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}; K = \left(-\frac{H}{2}\right)^{1/2} \quad (5.11)$$

Вторая форма уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  для  $H < 0$  в соответствии с уравнениями (3.29)–(3.31) и соотношениями (5.10) имеет вид уравнений (5.12)–(5.14):

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} = \left[-\frac{1}{K}\sin(K\tau)\right]\mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\tau} = \left[\frac{1}{K}\cos(K\tau)\right]\mathbf{F}; \quad K = \left(-\frac{1}{2}H\right)^{1/2} \quad (5.12)$$

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \frac{d}{d\tau}(r^2 - 3x^2) \quad (5.13)$$

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu)\cos\vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos\vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r = \cos^2(K\tau)\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} + \sin(K\tau)\cos(K\tau)(\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \circ \bar{\mathbf{A}}) +$$

$$+ \sin^2(K\tau)\mathbf{B} \circ \bar{\mathbf{B}} = \cos^2(K\tau)(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) +$$

$$+ 2\sin(K\tau)\cos(K\tau)(A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + \sin^2(K\tau)(B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2), \quad (5.14)$$

где кватернионная функция  $\mathbf{F}$  имеет вид (3.31) для некруговой задачи и вид (4.10) для круговой задачи.

Для нахождения расстояния  $r$ , координат  $x, y, z$  и производных  $dx/d\tau, dy/d\tau, dz/d\tau$ , входящих в функцию  $\mathbf{F}$ , фигурирующую в правых частях кватернионных уравнений (5.12), а также входящих в правую часть скалярного уравнения (5.13) для переменной  $H$ , необходимо воспользоваться скалярными соотношениями (3.5) и (3.6) (или кватернионными соотношениями (3.12)) и кватернионными формулами замены переменных (5.10).

Для круговой задачи Хилла переменная  $H = \text{const}$ . Поэтому первое дифференциальное уравнение из (5.13) для этой переменной выпадает из системы уравнений движения точки (5.12)–(5.14). При этом фигурирующая в этих уравнениях величина  $K = (-H/2)^{1/2} = \text{const}$ .

Планетоцентрические координаты  $x, y, z$  точки  $M$  и проекции  $v_x, v_y, v_z$  ее относительной скорости находятся через компоненты кватернионных оскулирующих элементов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  с помощью кватернионных соотношений (5.7) и (5.8), в которых вместо элементов  $\alpha$  и  $\beta$  следует положить элементы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  соответственно.

Для круговой задачи Хилла в дифференциальных уравнениях (5.12) и (5.14) целесообразно перейти к новой независимой переменной  $\varphi$  в соответствии с соотношениями

$$\varphi = K\tau, d\varphi = Kd\tau, d\tau = (1/K)d\varphi; K = (-H/2)^{1/2} = \text{const}, H < 0$$

Переменная  $\varphi$  связана с временем  $t$  дифференциальным соотношением  $dt = (r/K)d\varphi$ .

В итоге получим третью форму уравнений пространственной задачи Хилла для круговой задачи в кватернионных оскулирующих элементах  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , имеющую вид (5.15) и (5.16):

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -\left(\frac{1}{K^2}\sin\varphi\right)\mathbf{F}, \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = \left(\frac{1}{K^2}\cos\varphi\right)\mathbf{F}; K^2 = -\frac{1}{2}H = \text{const} > 0 \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r}{K} &= \frac{1}{K}[\cos^2\varphi\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} + \sin\varphi\cos\varphi(\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \circ \bar{\mathbf{A}}) + \sin^2\varphi\mathbf{B} \circ \bar{\mathbf{B}}] = \\ &= \frac{1}{K}[\cos^2\varphi(\mathbf{A}_0^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2) + \\ &+ 2\sin\varphi\cos\varphi(\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3) + \sin^2\varphi(\mathbf{B}_0^2 + \mathbf{B}_1^2 + \mathbf{B}_2^2 + \mathbf{B}_3^2)], \end{aligned} \quad (5.16)$$

где кватернионная функция  $\mathbf{F}$  имеет вид (4.10).

Планетоцентрические координаты  $x, y, z$  точки  $M$  и проекции  $v_x, v_y, v_z$  ее относительной скорости находятся через компоненты кватернионных оскулирующих элементов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  с помощью кватернионных соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = [\cos\varphi\bar{\mathbf{A}} + \sin\varphi\bar{\mathbf{B}}] \circ \mathbf{i} \circ [\cos\varphi\mathbf{A} + \sin\varphi\mathbf{B}] = \\ &= \cos^2\varphi\bar{\mathbf{A}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{A} + \cos\varphi\sin\varphi(\bar{\mathbf{A}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{B} + \bar{\mathbf{B}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{A}) + \sin^2\varphi\bar{\mathbf{B}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{B} \\ \mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{2K}{r}[\cos\varphi\bar{\mathbf{A}} + \sin\varphi\bar{\mathbf{B}}] \circ \mathbf{i} \circ [\sin\varphi\mathbf{A} + \cos\varphi\mathbf{B}] = \\ &= \frac{2K}{r}[\cos\varphi\sin\varphi(\bar{\mathbf{A}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{A} + \bar{\mathbf{B}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{B}) + \cos^2\varphi\bar{\mathbf{A}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{B} + \sin^2\varphi\bar{\mathbf{B}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{A}] \end{aligned}$$

**6. Анализ полученных результатов.** В работе получены новые регулярные кватернионные дифференциальные уравнения пространственной задачи Хилла, когда расстояние между двумя телами с конечными массами считается весьма большим, в четырехмерных  $KS$ -переменных  $u_j, j = 0, 3$  с использованием энергии  $h$  относительного движения изучаемого тела малой массы в случаях эллиптической и круговой задач кватернионные уравнения (3.1), (3.3), (3.11), (3.13), (3.16) и соответствующие им скалярные уравнения (3.14)–(3.16), (3.3), дополненные уравнениями (3.11), (3.13), в случае эллиптической задачи; кватернионные уравнения (4.3)–(4.5) и соответствующие им скалярные уравнения (4.6), (4.7) (или (4.8)) в случае круговой задачи), а также регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла в двумерных переменных Леви-Чивита  $u_0$  и  $u_3$  в случаях эллиптической и круговой задач (кватернионные уравнения (3.19)–(3.23) и соответствующие им скалярные уравнения (3.25) в случае эллиптической задачи, скалярные уравнения (3.26) или (3.27) в случае круговой задачи).

Также получены (с использованием переменной Якоби  $H$  вместо энергии  $h$ ) для пространственной эллиптической задачи Хилла новые регулярные кватернионные дифференциальные уравнения (3.29)–(3.31) в четырехмерных  $KS$ -переменных  $u_j$  и регулярные кватернионные дифференциальные уравнения (3.32), (3.33) плоской задачи Хилла в двумерных переменных Леви-Чивита  $u_0$  и  $u_3$ . Переменная  $H$  обращается для круговой задачи Хилла в константу движения изучаемого тела малой массы (постоянную интегрирования Якоби).

В полученных уравнениях реальное время  $t$  выступает в качестве зависимой переменной, а независимой переменной является “фиктивное” время  $\tau$ , связанное с временем  $t$  дифференциальным уравнением (3.3) (дифференциальным преобразованием времени Зундмана).

Установлен первый интеграл (4.13) полученных уравнений пространственной задачи Хилла в  $KS$ -переменных в случае круговой задачи. Другим первым частным интегралом в общем случае является билинейное соотношение (4.14), связывающее  $KS$ -переменные и их первые производные.

Левые части полученных кватернионных дифференциальных уравнений пространственной задачи Хилла в  $KS$ -переменных, во многом характеризующие динамику системы, имеют вид левых частей регулярных кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в  $KS$ -переменных, полученных автором статьи в работах [15, 16], а их правые части содержат слагаемые, пропорциональные малой величине  $n_0$  (среднему движению Солнца) или  $n_0^2$ , что позволяет говорить о близости свойств этих уравнений с точки зрения эффективности и точности их численного интегрирования в сравнении с уравнениями в прямоугольных (декартовых) координатах.

Полученные кватернионные уравнения (3.1), (3.3), (3.11), (3.13), (3.16) и соответствующие им скалярные уравнения и соотношения (3.14)–(3.16), (3.3), (3.11), (3.13) в  $KS$ -переменных в отличие от исходных уравнений (2.1), (2.2) в декартовых координатах, имеют осцилляторный вид (вид уравнений четырехмерного возмущенного осциллятора в  $KS$ -переменных).

Они близки к линейным уравнениям и являются регулярными. Отметим, что свойство регулярности этих уравнений для изучения ограниченной эллиптической задачи таких трех тел, как Солнце, Земля и Луна, не является существенным, однако при изучении ограниченной эллиптической задачи таких трех тел, как Солнце, Земля и тело с малой массой (например, астероид, спутник, космический аппарат), движущееся по высокоэллиптической орбите, это свойство позволяет существенно повысить точность численного решения уравнений этой задачи (прогноза орбитального движения этого тела). Лидовым [13], как уже отмечалось во введении, предложен метод построения пространственных периодических орбит в задаче Хилла с использованием  $KS$ -переменных, который опирается на вычислительную процедуру (уравнения задачи Хилла записываются Лидовым в  $KS$ -переменных в Гамильтоновой форме). Лидовым и Ляховой установлено [13, 14], что “ $KS$ -переменные ... позволяют в задаче Хилла обойти ряд численных и аналитических трудностей, возникающих при рассмотрении орбит, близких к орбите  $B_0$ , которая всегда проходит через особую точку  $|x| = 0$  (тело меньшей массы), и сокращают затраты времени ЭВМ на численное интегрирование”.

Как известно, регулярные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в  $KS$ -переменных позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Использование регулярных уравнений в  $KS$ -переменных позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики (например, задачи о возмущенном движении искусственного спутника Земли по орбитам с большими эксцентриситетами) от двух до семи порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании классических (ньютоновских) уравнений; приводит к эффективной схеме интегрирования уравнений орбитального движения, повышающей точность и скорость численного интегрирования.

Полученные регулярные кватернионные дифференциальные уравнения пространственной задачи Хилла в  $KS$ -переменных имеют вид регулярных дифференциальных

уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в  $KS$ -переменных, что позволяет говорить о близости (в смысле точности численного интегрирования) этих уравнений.

Осцилляторный вид полученных кватернионных дифференциальных уравнений пространственной задачи Хилла в  $KS$ -переменных позволяет эффективно построить (с использованием метода вариации произвольных постоянных интегрирования) уравнения этой задачи в кватернионных оскулирующих элементах (четырёхмерных кватернионных медленно изменяющихся переменных), чего не позволяют сделать исходные уравнения пространственной задачи Хилла в декартовых координатах.

В статье предложены три новые нормальные формы уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах:

1) уравнения (5.4)–(5.6) в элементах  $\alpha$  и  $\beta$  с использованием энергии  $h < 0$  ( $h$  – переменная),

2) уравнения (5.12)–(5.14) в элементах  $A$  и  $B$  с использованием переменной Якоби  $H < 0$  ( $H$  – переменная),

3) уравнения (5.15) и (5.16) в элементах  $A$  и  $B$  для круговой задачи Хилла, когда постоянная Якоби  $H = \text{const} < 0$ .

Элементы  $\alpha$  и  $\beta$  являются произвольными кватернионными постоянными интегрирования уравнений (3.1)–(3.4) пространственной задачи Хилла в  $KS$ -переменных для случая, когда влиянием Солнца на движение изучаемого тела  $M$  пренебрегается. В этом случае эти уравнения имеют вид уравнений движения четырёхмерного одночастотного гармонического осциллятора, собственная (круговая) частота которого  $k = (-h/2)^{1/2}$  ( $h$  в этом случае – постоянная кеплеровская энергия).

Элементы  $A$  и  $B$  являются произвольными кватернионными постоянными интегрирования уравнений (3.29)–(3.31) пространственной задачи Хилла в  $KS$ -переменных, принимающих вид четырёхмерного одночастотного гармонического осциллятора, собственная частота которого  $K = (-H/2)^{1/2}$  ( $H$  в этих уравнениях – постоянная интегрирования Якоби уравнений круговой задачи Хилла).

В первых двух формах уравнений в оскулирующих элементах независимой переменной является “фиктивное” время  $\tau$ , связанное с временем  $t$  дифференциальным соотношением  $dt = r d\tau$  (преобразованием времени Зундмана, где  $r$  – планетоцентрическое расстояние изучаемого движущегося тела  $M$ ), а в третьей форме уравнений – новая независимая переменная  $\varphi$ , связанная с “фиктивным” временем  $\tau$  и реальным временем  $t$  другим более сложным дифференциальным соотношением

$$dt = (r/K)d\varphi, \quad d\varphi = Kd\tau; \quad K = (-H/2)^{1/2} = \text{const}$$

Отметим, что в предложенных уравнениях задачи Хилла можно легко учесть другие действующие возмущения. Для этого достаточно их включить в возмущения  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$ , определяемые соотношениями (3.4).

**Заключение.** Предложены регулярные кватернионные дифференциальные уравнения пространственной и плоской задачи Хилла (варианта уравнений ограниченной задачи таких трех тел, как Солнце, Земля и Луна или другое естественное, или искусственное космическое тело с малой массой, когда расстояние между двумя телами с конечными массами считается весьма большим) в  $KS$ -переменных и в переменных Леви-Чивита, а также уравнения пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся кватернионных переменных). В отличие от уравнений этой задачи в декартовых координатах, регулярные уравнения в  $KS$ -переменных и в переменных Леви-Чивита имеют осцилляторную форму (форму уравнений четырёхмерного или двухмерного возмущенного осциллятора), что позволило эффективно построить уравнения пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах.

Предложенные уравнения имеют компактную и симметричную форму, характерную для кватернионных моделей аналитической механики, удобную для анализа и численного решения. Они позволяют эффективно использовать при исследовании задачи Хилла аналитические и численные методы теории нелинейных колебаний и методы нелинейной механики.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978.
3. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
4. *Себехей.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 656 с.
5. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975.
6. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
7. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
8. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // *Astron. J.* 2005. V. 129. №5. Art. No. 2496. <https://doi.org/10.1086/429546>
9. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // *Astron. J.* 2007. V. 133. №6. Art. No. 2815.
10. *Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю.* Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сб. матер.: XXVIII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург, 2021. С. 292–295.
11. *Челноков Ю.Н., Сапунков Я.Г., Логинов М.Ю., Щекутьев А.Ф.* Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустанхеймо–Штифеля и изохронных производных // *ПММ.* 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 124–156.
12. *Лидов М.Л.* Увеличение размерности гамильтоновых систем. *KS-преобразование, использование частных интегралов* // *Космич. исслед.* 1982. Т. 20. №2. С. 163–176.
13. *Лидов М.Л.* Метод построения семейства пространственных периодических орбит в задаче Хилла // *Космич. исслед.* 1982. Т. 20. №6. С. 787–807.
14. *Лидов М.Л., Ляхова В.А.* Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость // *Космич. исслед.* 1983. Т. 21. №1. С. 3–11.
15. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1981. №6. С. 12–21.
16. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. №1. С. 151–158.
17. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2006. V. 95. P. 201–212.
18. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing celestial mechanics: the right way // *Mech.&Dyn. Astron.* 2008. V. 102. №1. P. 149–162.
19. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // *Appl. Math.&Mech.* 2022. V. 43. №1. P. 21–80. <https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
20. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные методы и регулярные модели аналитической механики (обзор) // *ПММ.* 2023. Т. 87. Вып. 4. С. 519–556. <https://doi.org/10.31857/S0032823523040033>
21. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация особенностей моделей астродинамики, порождаемых гравитационными силами (обзор) // *ПММ.* 2023. Т. 87. Вып. 6. С. 915–953. <https://doi.org/10.31857/S0032823523060036>
22. *Aarseth S.J., Zare K.A.* Regularization of the three-body problem // *Celest. Mech.* 1974. V. 10. P. 185–205.



23. *Aarseth S.J.* Gravitational N-Body Simulations. New York: Cambridge Univ. Press, 2003. 408 p.
24. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. №6. С. 24–54.
25. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // Изв. РАН. МТТ. 2018. №6. С. 41–63.
26. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы и регулярные модели небесной механики и механики космического полета: локальная регуляризация особенностей уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, порождаемых гравитационными силами // Изв. РАН. МТТ. 2023. №5. С. 27–57.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600591>
27. *Батхин А.Б., Батхина Н.В.* Периодические решения второго рода в окрестности семейства  $g$  задачи Хилла // Вестн. ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика. 2003. №8. С. 167–181.
28. *Батхин А.Б.* Порождающие плоские периодические орбиты задачи Хилла // Препринт ИПМ им. Келдыша РАН. 2010. №47.

### Regular Quaternion Equations of the Spatial Hill Problem in Kustaanheimo–Stiefel Variables and Quaternion Osculating Elements

Yu. N. Chelnokov<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Institute for Problems of Precision Mechanics and Control RAS, Saratov, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: chelnokovyun@gmail.com*

Regular quaternion equations of the spatial Hill problem (a variant of the limited three-body problem (Sun, Earth, Moon (or another low-mass moving cosmic body under study)) are obtained, when the distance between two bodies with finite masses is considered very large, in four-dimensional Kustaanheimo–Stiefel variables (KS-variables) within the framework of the elliptical and circular spatial bounded three-body problem, as well as the regular quaternion equations of the planar Hill problem in two-dimensional Levi–Civita variables. In these equations, the variables are KS-variables or Levi–Civita variables and the energy of relative motion of the body under study, or a variable that converts for the circular Hill problem into a constant of motion of this body (the Jacobi integration constant), as well as the planetocentric distance of the Sun and real time associated with a new independent variable by the Sundman differential transformation of time or other more complex differential ratio. These equations are supplemented by the equation of the Earth’s orbit in polar coordinates and the equation for the true anomaly characterizing the Earth’s position in the orbit. The first integral of the obtained equations in KS-variables in the case of a circular problem is established. Another first partial integral in the general case is a bilinear relation connecting KS-variables and their first derivatives. Three new forms of regular equations of the spatial Hill problem in quaternion osculating elements (slowly changing quaternion variables) are proposed. The proposed regular quaternion equations have an oscillatory form or the form of equations with slowly changing variables, which makes it possible to effectively use analytical and numerical methods of oscillation theory and methods of nonlinear mechanics in the study of the Hill problem.

*Keywords:* spatial and planar Hill problems, regular quaternion equations, Kustaanheimo–Stiefel and Levi–Civita variables, circular and elliptic problems, energy of relative motion, Jacobi integral, quaternion osculating elements

#### REFERENCES

1. *Abalakin V.K., Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G., Ryabov Yu.A.* Reference Guide to Celestial Mechanics and Astrodynamics. Moscow: Nauka, 1976. (in Russian)
2. *Duboshin G.N.* Celestial Mechanics. Analytical and Qualitative Methods. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
3. *Subbotin M.F.* Introduction to Theoretical Astronomy. Moscow: Nauka, 1968. 800 p. (in Russian)

4. *Szebehely V.* Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies. N.Y.: Acad. Press, 1967. 668 p.
5. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.
6. *Bordovitsyna T.V.* Modern Numerical Methods in Problems of Celestial Mechanics. Moscow: Nauka, 1984. 136 p. (in Russian)
7. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* The Theory of Motion of Artificial Earth Satellites. Analytical and Numerical Methods. Tomsk: Izd-vo Tom. un-ta, 2007. 178 p. (in Russian)
8. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // *Astron. J.*, 2005, vol. 129, no. 5, art. no. 2496. <https://doi.org/10.1086/429546>
9. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // *Astron. J.*, 2007, vol. 133, no. 6, art. no. 2815.
10. *Chelnokov Y.N., Loginov M.Y.* New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space // 28th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2021, 9470806.
11. *Chelnokov Yu.N., Sapunkov Ya.G., Loginov M.Yu., Schekutev A.F.* Prediction and correction of the orbital motion of spacecraft using regular quaternion equations and their solutions in the Kustaanheimo–Stiefel variables and isochronic derivatives // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 7. pp. 2478–2503.
12. *Lidov M.L.* Increasing the dimension of Hamiltonian systems. KS-transformation, the use of partial integrals // *Kosmich. Issled.*, 1982, vol. 20, no. 2, pp. 163–176. (in Russian)
13. *Lidov M.L.* A method for constructing a family of spatial periodic orbits in the Hill problem // *Kosmich. Issled.*, 1982, vol. 20, no. 6. pp. 787–807. (in Russian)
14. *Lidov M.L., Lyakhova V.A.* Families of spatial periodic orbits of the Hill problem and their stability // *Kosmich. Issled.*, 1983, vol. 21, no. 1, pp. 3–11. (in Russian)
15. *Chelnokov Yu.N.* On the regularization of the equations of the spatial problem of two bodies // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1981, no. 6, pp. 12–21. (in Russian)
16. *Chelnokov Yu.N.* On the regular equations of the two-body spatial problem // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1984, no. 1, pp. 151–158. (in Russian)
17. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2006, vol. 95, pp. 201–212.
18. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing celestial mechanics: the right way // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2008, vol. 102, no. 1, pp. 149–162.
19. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // *Appl. Math.&Mech.*, 2022, vol. 43, no. 1, pp. 21–80. <https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
20. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and biquaternion methods and regular models of analytical mechanics (review) // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 2450–2477. <https://doi.org/10.3103/S0025654423070051>
21. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of singularities of astrodynamics models generated by gravitational forces (review) // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 8, pp. 2855–2883. <https://doi.org/10.3103/S0025654423080071>
22. *Aarseth S.J. and Zare K.A.* Regularization of the Three-Body Problem // *Celest. Mech.*, 1974, vol. 10, pp. 185–205.
23. *Aarseth S.J.* Gravitational N-Body Simulations. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2003. 408 p.
24. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // *Mech. of Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 613–639.
25. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II // *Mech. of Solids*, 2018, vol. 53, no. 6. pp. 633–650.
26. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and regular models of celestial mechanics and space flight mechanics: local regularization of the singularities of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem generated by gravitational forces // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1458–1482. <https://doi.org/10.3103/S0025654422601264>

27. *Batkin A.B., Batkina N.V.* Periodic solutions of the second genre in the vicinity of Hill's problem family  $g$  // Sci. J. of Volgograd State Univ. Math. Phys., 2003, no. 8, pp. 167–181. (in Russian)
28. *Batkin A.B.* Generating planar periodic orbits of the Hill's problem // Preprint of the Keldysh Inst. of Appl. Math. of RAS, Moscow, 2010. no. 47. (in Russian)

---

---

УДК 532.5+537.2

## К РАСЧЕТУ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. Д. Ф. Белоножко<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

\*e-mail: belonozhko@mail.ru

Поступила в редакцию 12.02.2024 г.

После доработки 17.04.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Аналитически рассчитаны условия развития неустойчивости заряженной поверхности стратифицированной жидкости по отношению к избытку поверхностного заряда. Сформулировано правило отбора корней дисперсионного уравнения для правильного описания спектра волновых движений на свободной поверхности.

*Ключевые слова:* заряженная поверхность, стратифицированная жидкость, неустойчивость, капиллярные силы

DOI: 10.31857/S0032823524030035 ZAZUUD

**1. Введение.** В последние годы отмечается всплеск интереса к теоретическим исследованиям течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью [1–5]. Даже для хорошо известных классических задач введение в модель феномена стратификации оказывается удивительно продуктивным: обнаруживаются пропущенные прежде структурные компоненты течений [1–2], раскрываются новые черты уже известных решений [3–5].

В настоящей работе эффект стратификации добавляется в классическую модель неустойчивости поверхности проводящей жидкости, вызванной избытком поверхностного электрического заряда [7, 8]. Классическое представление о механизме этого явления сформировалось еще в первой половине прошлого столетия. Один теоретический подход был реализован американцем Л. Тонксом [6], а другой – советским физиком Я.И. Френкелем [7]. На практике неустойчивость Тонкса–Френкеля приводит к разрушению закритически заряженной свободной поверхности жидкости [8]: за счет преобладания электрических пондеромоторных сил над лапласовскими на ней образуются конусообразные выступы – конусы Тейлора – с которых происходит сброс избыточного заряда, часто в виде струйки, дробящейся на большое количество маленьких сильно заряженных капелек [9, 10].

Использованная Я.И. Френкелем методика расчета критического значения поверхностной плотности электрического заряда, превышение которой запускает процесс развития неустойчивости, является результатом анализа спектра малых волновых возмущений заряженной свободной поверхности жидкости. Соответствующая схема решения в рамках простейшей модели разбирается в восьмом томе курса теоретического физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица в виде упражнения к пятому па-

раграфу первой главы [11]. Демонстрируемый подход успешно справляется и с более сложными моделями явления (см. [12, 13] и ссылки там).

В нижеследующем изложении разбирается один любопытный пример обобщения задачи Я.И. Френкеля [7] – рассматривается поверхность заряженная проводящая жидкость со стратификацией плотности по глубине. В этом случае формальное использование традиционного подхода [7, 11] приводит к набору решений, нуждающихся в сортировке на физически достоверные и ложные. В дальнейшем изложении демонстрируется логика отбора нужных решений и, как результат, корректное описание спектра малых волновых возмущений заряженной свободной поверхности стратифицированной жидкости. Выявление неустойчивых компонент спектра, как и в классической задаче, позволяет четко сформулировать условия развития неустойчивости.

**2. Математическая формулировка задачи.** Пусть идеальная, идеально проводящая жидкость в декартовой прямоугольной системе координат  $Oxyz$  заполняет слой  $-d < z < 0$ . Ось  $Oz$  ориентирована вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести  $g$ . По свободной горизонтальной жидкости равномерно распределен электрический заряд с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma_0$ , индуцированной вертикальным однородным электрическим полем с напряженностью  $E_0 = 4\pi\sigma_0$ . Коэффициент поверхностного натяжения жидкости равен  $\gamma$ . Плотность жидкости линейно растет с глубиной  $\rho = \rho_s(1 - Rz)$  ( $\rho_s$  – значение плотности на поверхности,  $R = (\rho_d - \rho_s)/(\rho_s d)$ ,  $\rho_d$  – плотность на дне). Эффектами вязкости, диффузии и теплопроводности пренебрегалось. Описанное равновесное состояние системы исследовалось на устойчивость к малым волновым возмущениям  $z = \xi(t, x)$  свободной поверхности. Для простоты, возмущенное движение жидкости считалось независимым от второй горизонтальной координаты  $y$ .

Полная математическая формулировка задачи расчета гидродинамического поля скоростей  $\mathbf{U} = u(x, z, t)\mathbf{e}_x + v(x, z, t)\mathbf{e}_z$  в жидкости и электрического потенциала  $\Phi \equiv \Phi(x, z, t)$  над ней имеет вид:

$$\begin{aligned} z > \xi : \Delta\Phi &= 0 \\ z < \xi : \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} &= -\nabla P - \rho\mathbf{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) &= 0 \\ z = \xi : \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}u &= v, \quad P + P_E + P_\gamma = 0, \quad \Phi = \text{const} \\ z \rightarrow \infty : \Phi &\rightarrow -E_0 z; \quad z = -d : v = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u \equiv u(x, z, t)$  и  $v \equiv v(x, z, t)$  – горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей в жидкости;  $\nabla \equiv \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_z \partial_z$ ,  $\Delta \equiv \partial_{xx} + \partial_{zz}$  – двумерные дифференциальные операторы Гамильтона и Лапласа;  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_z$  – орты координатных осей. В условии баланса давлений на свободной поверхности помимо гидродинамического давления  $P$  учтены: давление электрических пондеромоторных сил  $P_E \equiv (\nabla\Phi)^2/(8\pi)$  [11] и лапласовское давление  $P_\gamma \equiv -\gamma\nabla \cdot \mathbf{n}$  [15, 16] ( $\mathbf{n}$  – единичная внешняя нормаль к искаженной свободной поверхности).

Задача решалась в линейном приближении по малому параметру, равному отношению амплитуды простейшего периодического волнового искажения свободной поверхности к его характерной горизонтальной длине [17]. Далее для краткости этот малый параметр называется просто малой амплитудой. Все величины разлагались на компоненты нулевого (значение в равновесном состоянии) и первого по малой амплитуде порядков малости (возмущений). В частности, плотность представлялась выражением  $\rho = \rho_s(1 - Rz + s)$ , где  $s = s(x, z, t)$  – деленная на  $\rho_s$  компонента первого порядка малости. Кроме того, использовалось приближение Буссинеска [14],

подразумевающее игнорирование отклонения плотности от среднего значения  $\rho_* = (\rho_s + \rho_d)/2$  всюду, кроме массовых сил.

В нулевом приближении равновесные распределения плотности, давления и электрического потенциала описываются соотношениями:

$$z < 0 : \rho_0 = \rho_s(1 - Rz), P_0 = -\rho_s g z \left(1 - R \frac{z}{2}\right) - 2\pi\sigma_0^2$$

$$z > 0 : \Phi_0 = -4\pi\sigma_0 z = -E_0 z$$

На возмущенной поверхности  $z = \xi(t, x)$  давление с требуемой точностью выражалось через свои значения и значения производной по  $z$ , вычисленные при  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} P|_{z=\xi} &= P|_{z=0} + \xi \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{z=0} + \dots \approx (P_0 + p)|_{z=0} + \xi \left( \frac{\partial(P_0 + p)}{\partial z} \right)_{z=0} = \\ &= P_0|_{z=0} + p|_{z=0} - \rho_s g \xi \end{aligned}$$

Здесь  $p \equiv p(t, x, z)$  – возмущение равновесного распределения давления  $P_0$ , вызванное волновым искажением свободной поверхности. Аналогично выражался электрический потенциал на возмущенной поверхности.

Математическая формулировка определения величин первого по амплитуде волнового возмущения порядка малости имеет вид:

$$z > 0 : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.2}$$

$$z < 0 : \rho_* \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \rho_* \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 s g = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{2.4}$$

$$z = 0 : \frac{\partial \xi}{\partial t} = v, -\rho_s \xi g + p - E_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \Phi - E_0 \xi = 0 \tag{2.5}$$

$$z \rightarrow \infty : \frac{\partial \Phi}{\partial x} \rightarrow 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \rightarrow 0; z = -d : v = 0 \tag{2.6}$$

Теперь  $u \equiv u(t, x, z)$  и  $v \equiv v(t, x, z)$  – значения горизонтальной и вертикальной компонент поля скоростей в первом приближении по малой амплитуде;  $\Phi \equiv \Phi(t, x, z)$  – возмущение равновесного электрического потенциала  $\Phi_0$  в полупространстве над проводящей жидкостью.

Система из трех уравнений (2.3), (2.4) устанавливает взаимосвязь четырех неизвестных функций  $u \equiv u(t, x, z)$ ,  $v \equiv v(t, x, z)$ ,  $p \equiv p(t, x, z)$  и  $s \equiv s(t, x, z)$ . Необходимо еще одно связующее соотношение. Принималось во внимание, что уравнение (2.4) совместно с уравнением неразрывности (см. уравнение непосредственно слева от символа нумерации (2.1)), не только при постоянной плотности, но и при условии, когда выполняется соотношение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho = 0 \tag{2.7}$$

Поэтому, не вступая в противоречие с логикой приближения Буссинеска, использовалось дополнительное уравнение для  $s \equiv s(t, x, z)$  и  $v \equiv v(t, x, z)$  непосредственно следующее из (2.7):

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial(-Rz)}{\partial z} = 0 \tag{2.8}$$

**3. Построение дисперсионного уравнения задачи.** Исследовалась устойчивость равновесного состояния по отношению к периодическим волновым возмущениям свободной поверхности с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  [18, 19]:

$$\xi = H \exp(i\theta) \quad (3.1)$$

$$\theta = kx - \omega t \quad (3.2)$$

В связи с (3.1), остальные неизвестные задачи (2.2)–(2.4), (2.8) удовлетворяющие граничным условиям (2.5) и (2.6), искались в виде:

$$\varphi = F \exp(-kz) \exp(i\theta)$$

$$\begin{aligned} u &= (a_1 \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + a_2 \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \\ v &= (b_1 \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + b_2 \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \\ p &= (A_1 \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + A_2 \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \\ s &= (B_1 \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B_2 \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для установления связи между константами  $a_i, b_i, A_i, B_i; i = 1, 2$  и определения параметра  $\lambda$ , необходимо подставить (3.3) в уравнения (2.3)–(2.4), (2.8) и рассмотреть условия разрешимости получившихся уравнений. В результате, выясняется что выражения (3.3) могут быть переписаны в виде:

$$\varphi = F \exp(-kz) \exp(i\theta)$$

$$u = (A \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \quad (3.4)$$

$$v = -\frac{ik}{\lambda} (A \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta)$$

$$p = \frac{\rho_s \omega}{k} (A \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta)$$

$$s = \frac{kR}{\lambda \omega} (A \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta)$$

$$\lambda^2 = k^2 \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \quad (3.6)$$

$$N = \sqrt{gR} = \sqrt{g \frac{\rho_d - \rho_s}{\rho_s d}} \quad (3.7)$$

Связь между значениями констант  $H, F, A, B$  определяется из граничных условий (2.5), в которые следует подставить соотношения (3.1) и (3.4). В результате получится система однородных линейных уравнений относительно  $H, F, A, B$ . Условие ее нетривиальной разрешимости – обращение в ноль определителя – приводит к связи  $k, \omega$  и других параметров задачи – дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 = k \eta \omega_s^2 \frac{\operatorname{th}(\lambda d)}{\lambda} \quad (3.8)$$

$$\omega_s^2 = gk(1 + (\alpha_s k)^2 - \alpha_s k W) \quad (3.9)$$

$$\alpha_s = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_s g}}, \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\gamma\rho_s g}} = \frac{4\pi\sigma_0^2}{\sqrt{\gamma\rho_s g}}, \quad \eta = \frac{\rho_s}{\rho^*} \quad (3.10)$$

Параметр  $\alpha_s$  имеет смысл капиллярной постоянной жидкости, обладающей постоянной плотностью  $\rho_s$  и постоянным коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma$ . Безразмерный параметр  $W$  называется параметр Тонкса–Френкеля. Он пропорционален отношению электрических и капиллярных сил на гребнях волновых искажений свободной поверхности жидкости. Соотношение (3.9) – классическое дисперсионное уравнение, полученное Я.И. Френкелем [7] и цитируемое в монографии [11]. Оно описывает спектр частот  $\omega_s$  периодических капиллярно-гравитационных волн, распространяющихся по электрически заряженной поверхности идеально проводящей жидкости с постоянной плотностью  $\rho_s$ .

Будем работать в приближении, когда слой жидкости настолько глубок, что с учетом нечетности гиперболического тангенса, независимо от выбора знака иррациональности  $\lambda = \pm k\sqrt{1 - N^2/\omega^2}$  можно положить

$$\frac{\text{th}(\lambda d)}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{|\lambda|}$$

В таком пределе дисперсионное уравнение упрощается:

$$\omega^2 |\lambda| = k\eta\omega_s^2 \quad (3.11)$$

**4. Решение дисперсионного уравнения.** Дисперсионное соотношение (3.11), как уравнение относительно  $\omega$ , содержит иррациональность

$$\lambda = k\sqrt{1 - \frac{N^2}{\omega^2}}$$

От нее несложно избавиться, возведя обе части (3.11) в квадрат. Получится квадратное уравнение относительно  $\omega^2$  с корнями:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(N^2 + \sqrt{N^4 + 4\eta^2\omega_s^4}\right) \quad (4.1)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(N^2 - \sqrt{N^4 + 4\eta^2\omega_s^4}\right) \quad (4.2)$$

Для однозначности результата вычислений по формулам (4.1) и (4.2) нужно определиться с правилом вычисления квадратного корня. Без потери общности удобно выбирать в качестве результата положительное значение корня и говорить о двух аналитических ветвях (4.1), (4.2) формального решения дисперсионного уравнения [20].

На этапе возведения в квадрат в уравнении могут возникнуть ложные корни. Поэтому важно проверить адекватность полученных соотношений.

В пределе отсутствия стратификации  $N^2 \rightarrow 0$  выражение (4.2) дает отрицательное значение квадрата частоты  $\omega_2^2 < 0$ . Сама частота получается комплексной, а ее модуль описывает инкремент нарастания во времени амплитуды любого сколь угодно малого волнового возмущения (3.1). Получается, что даже при отсутствии поверхностного электрического заряда – главного дестабилизирующего фактора – плоская свободная поверхность покоящейся жидкости должна покрываться некими искажениями, возникшими в результате эволюции малых начальных возмущений. Ясно, что формула (4.2) неадекватна наблюдаемой физической ситуации.



Можно предположить, что (4.2) необходимо объявить физически нереализуемым корнем, а в качестве решения дисперсионного уравнения оставить ветвь (4.1). Но и тогда возникает противоречие. Из (4.1) видно, что квадрат частоты положителен при всех возможных значениях поверхностной плотности электрического заряда  $\sigma_0$ , регулируемой посредством изменения значений положительного безразмерного параметра Тонкса—Фрекеля  $W$  (см. (3.10)). Даже при больших значениях поверхностной плотности электрического заряда, когда электрические пондеромоторные силы преобладают над капиллярными и, по физическим соображениям, дестабилизация равновесного состояния неизбежна, система формально остается устойчивой. Результат снова выглядит сомнительно.

Ясно, что для решения вопроса об отборе верных решений и отбрасывании ложных требуется более скрупулезный анализ. Начать его логично с еще не возведенного обеими частями в квадрат соотношения (3.11). Из  $k, \eta > 0$  немедленно следует, что знаки  $\omega^2$  и  $\omega_s^2$  обязаны совпадать.

При  $W = 0$  поверхностный электрический заряд отсутствует, и, в соответствии с (3.9), выполняется неравенство  $\omega_s^2 > 0$ . Чтобы значение  $\omega^2$  тоже оказалась положительным, из двух альтернатив (4.1) или (4.2) однозначно выбирается формула (4.1). По той же причине формула (4.1) будет справедлива и при увеличении  $W$ , лишь бы выражение в скобках в правой части (3.9) оставалось положительным. Легко установить, что это имеет место при всех  $0 \leq W < W_k^0$ , где  $W_k^0 = \alpha_s k + (\alpha_s k)^{-1}$  — значение параметра Тонкса—Френкеля, при котором правая часть (3.9) обнуляется. При  $W > W_k^0$  значение  $\omega_s^2$  становится отрицательным. Теперь чтобы знаки  $\omega_s^2$  и  $\omega^2$  совпадали, однозначно выбирается формула (4.2). Таким образом, каждое из формально найденных решений (4.1) и (4.2) оказываются верными при одних значениях  $W$  и ложным при других. Значение  $W_k^0 = \alpha_s k + (\alpha_s k)^{-1}$  отмечает точку разрыва, в которой при увеличении параметра  $W$  затухающее с глубиной решение совершает скачек с одной ветви формального решения (4.1) на другую (4.2). Остальные части ветвей (4.1) и (4.2) описывают ложные решения.

Несложно выразить описанное “переключение” решения с одной аналитической ветви (4.1) на другую (4.2) объединенной формулой:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left( N^2 + \operatorname{sgn}(\omega_s^2) \sqrt{N^4 + 4\eta^2 \omega_s^4} \right) \quad (4.3)$$

Критерием перехода рассматриваемой системы в неустойчивое состояние является выход значений параметра  $\omega^2$  в отрицательную область [18, 19]. Волновые возмущения, для которых  $\omega^2 < 0$  образуют спектр неустойчивых волновых мод, участвующих в развитии неустойчивости. При чем, значения  $\omega^2$  отрицательны или положительны совместно со значениями  $\omega_s^2$ , в независимости от параметра  $\eta = \rho_s/\rho_*$  — отношения плотности жидкости на поверхности к плотности, усредненной по глубине слоя. Из (3.9) легко установить условия, при которых  $\omega_s^2 < 0$ :

$$W > W_k^0 = \frac{1}{\alpha_s k} + \alpha_s k \quad (4.4)$$

Правая часть (4.4) достигает минимума  $W = 2$  при  $\alpha_s k = 1$ . Если  $W < 2$ , то  $\omega_s^2 > 0$ , и спектр всевозможных волновых движений (4.3) не содержит никаких неустойчивых мод. При  $W > 2$  существует целый диапазон неустойчивых волновых чисел, участвующих в развитии неустойчивости (для которых  $\omega^2 < 0$  и  $\omega_s^2 < 0$ ):

$$W > 2 : \frac{W - \sqrt{W^2 - 4}}{2} < \alpha_s k < \frac{W + \sqrt{W^2 - 4}}{2}$$

Возмущение с волновым числом  $\alpha_s k = 1$  интерпретируется, как наиболее неустойчивая волновая мода. Для нее пороговое значение поверхностной плотности

заряда, превышение которого обеспечивает преобладание электрических сил над лапласовскими, является минимальным.

Полученный результат формально совпадает с классическими условиями реализации неустойчивости Тонкса—Френкеля. Единственным отличием является использование в формулах (3.10) для параметра Тонкса—Френкеля и капиллярной постоянной не просто плотности жидкости, а плотности  $\rho_s$  на ее поверхности.

**Заключение.** Условия, при которых поверхностный электрический заряд инициирует развитие неустойчивости горизонтальной поверхности стратифицированной жидкости формулируется также, как условия классической неустойчивости Тонкса—Френкеля, но с заменой постоянной плотности жидкости на ее значение на поверхности жидкости. При установлении этих условий принципиально важно корректно отбирать физически значимые корни дисперсионного уравнения, описывающего спектр реализующихся в системе капиллярно-волновых движений. Рассмотренная модель представляет собой показательный пример задачи, в которой физически значимые корни дисперсионного уравнения описываются с помощью кусочно-непрерывной зависимости, составленной из разных аналитических ветвей формального решения дисперсионного уравнения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A.* Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. 2022. V. 11. №8. P. 402.
2. *Чашечкин Ю.Д., Очиров А.А.* Расчет двумерных периодических возмущений свободной поверхности жидкости в различных моделях среды // *Докл. РАН*. 2023. Т. 513. С. 95–102.
3. *Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д.* Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифицированной жидкости // *Изв. РАН. ФАО*. 2022. Т. 58. №5. С. 524–533.
4. *Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л., Черевко А.А.* Уединенные волны в двухслойной жидкости с кусочно-экспоненциальной стратификацией // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 186–199.
5. *Чашечкин Ю.Д., Очиров А.А., Лапшина К.Ю.* Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // *Физ.-хим. кин. в газовой дин*. 2022. Т. 23. №6.  
<http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
6. *Tonks L.* A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // *Phys. Rev*. 1935. V. 48. №6. P. 562.
7. *Френкель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // *ЖЭТФ*. 1936. Т. 6. №. 4. С. 347–350.
8. *Taylor G.I., McEwan A.D.* The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field // *J. of Fluid Mech*. 1965. V. 22. №1. P. 1–15.
9. *Fernández de La Mora J.* The fluid dynamics of Taylor cones // *Annu. Rev. Fluid Mech*. 2007. V. 39. P. 217–243
10. *Zhang X., Xie L., Wang X., Shao Z., Kong B.* Electrospinning super-assembly of ultrathin fibers from single-to multi-Taylor cone sites // *Appl. Mater. Today*. 2022. V. 26. С. 101272.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 тт. Т. 8. Электродинамика сплошных сред / под ред. *Питаевского Л.П.* М.: Наука, 2023. 656 с.
12. *Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д.* Волновое движение в вязкой однородной жидкости с поверхностным электрическим зарядом // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 3. С. 379–391.
13. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А.* О некоторых закономерностях реализации электростатической неустойчивости заряженной поверхности жидкости в бассейне конечных размеров // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 3. С. 392–408.
14. *Vallis G.K.* Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 2017. 995 p.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Курс теоретической физики. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
16. *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М: Мир, 1989. 357 с.
17. *Le Méhauté V.* An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves. Berlin: Springer, 1976. 323 p.

18. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon, 1961. 654 p.
19. Drazin P.G. Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 2002. V. 32. 258 p.
20. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексной переменной. М.: Наука, 1987. 544 с.

### To the Charged Surface Instability Calculation of a Stratified Fluid

D. F. Belonozhko<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

<sup>\*</sup>e-mail: belonozhko@mail.ru

The conditions for the development of instability of the charged surface of a stratified fluid in relation to an overload of surface charge are calculated analytically. A rule for selecting the roots of the dispersion equation is formulated to correctly describe the spectrum of wave motions on the free surface.

*Keywords:* charged surface; stratified liquid; instability; capillary forces

#### REFERENCES

1. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 8, pp. 402.
2. Chashechkin Y.D., Ochirov A.A. Free-surface two-dimensional periodic disturbances in various models of fluid // *Dokl. RAN*, 2023, vol. 513, no. 1, pp. 95–102.
3. Ochirov A.A., Chashechkin Y.D. Two-dimensional periodic waves in an inviscid continuously stratified fluid // *Izv. RAN. Atmos.&Oceanic Phys.*, 2022, vol. 58, no. 5, pp. 450–458.
4. Makarenko N.I., Maltseva J.L., Cherevko A.A. Solitary waves in a two-layer fluid with piecewise exponential stratification // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 1235–1245.
5. Chashechkin Y., Ochirov A., Lapshina K.Y. Surface waves along the interface of stably stratified liquids // *Phys.-Chem. Kin. in Gas Dyn.*, 2022, vol. 23, iss. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
6. Tonks L. A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // *Phys. Rev.*, 1935, vol. 48, no. 6, pp. 562.
7. Frenkel Y.I. On Tonks' theory of fluid surface breakup by a constant electric field in a vacuum // *Zh. Exp. Teor. Fiz.*, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 347–350.
8. Taylor G.I., McEwan A.D. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field // *J. of Fluid Mech.*, 1965, vol. 22, no. 1, pp. 1–15.
9. Fernández de La Mora J. The fluid dynamics of Taylor cones // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2007, vol. 39, pp. 217–243.
10. Zhang X., Xie L., Wang X., Shao Z., Kong B. Electrospinning super-assembly of ultrathin fibers from single- to multi-Taylor cone sites // *Appl. Mater. Today*, 2022, vol. 26, pp. 101272.
11. Landau L.D., Lifschitz E.M., Pitaevskii L.P. *Electrodynamics of Continuous Media: Course of Theoretical Physics*. Vol. 8. Elsevier Sci., 1995. 460 p.
12. Ochirov A.A., Chashechkin Y.D. Wave motion in a viscous homogeneous fluid with a surface electric charge // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 1318–1327.
13. Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O., Koromyslov V.A. On some regularities in the implementation of the electrostatic instability of a charged liquid surface in a pool of finite dimensions // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 1328–1340.
14. Vallis G.K. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge: Univ. Press, 2017. 995 p.
15. Landau L.D., Lifschitz E.M. *Fluid Mechanics. Course of Theoretical Physics*. Vol. 6. Pergamon, 1987. 539 p.
16. Rosensweig R.E. *Ferrohydrodynamics*. Courier Corp., 2013. 368 p.
17. Le Méhauté B. *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*. Berlin: Springer, 1976. 323 p.

- 
18. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon, 1961. 654 p.
  19. *Drazin P.G.* Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 2002. vol. 32, 258 p.
  20. *Lavrentev M.A., Shabat B.V.* Methods of the Theory of Function of Complex Variable. Moscow: Nauka, 1987, 544 p. (in Russian)

---

---

УДК 532.5:551.465

## ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПУЛЬСИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ПОТОКА ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ И ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

© 2024 г. В. В. Булатов<sup>1,\*</sup>, И. Ю. Владимиров<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Институт океанологии им. П.П. Шириова РАН, Москва, Россия*  
*e-mail: internalwave@mail.ru\*, iyuvladimirov@rambler.ru\*\**

Поступила в редакцию 25.02.2024 г.

После доработки 09.04.2024 г.

Принята к публикации 15.05.2024 г.

Плавающий ледяной покров определяет динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику морской поверхности и подповерхностных вод, так как в общем движении по вертикали участвует ледяной покров и вся масса жидкости под ним. В работе исследована фазовая структура волновых полей, возникающих на границе раздела льда и потока однородной жидкости конечной толщины при обтекании локализованного пульсирующего источника возмущений. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы, и пластина является физически линейной. Получено интегральное представление решения, приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей и фазовых картин для различных параметров волновой генерации. Показано, что основными параметрами, определяющими характеристики амплитудно-фазовых структур волновых возмущений поверхности ледяного покрова, являются толщина льда, скорость потока, частота пульсаций. Численные расчеты демонстрируют, что при изменении скоростей потока, толщины льда и частоты происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых дальних волновых полей на границе раздела льда и жидкости.

*Ключевые слова:* ледяной покров, возвышение поверхности раздела, дисперсионные зависимости, фазовая структура, локализованный пульсирующий источник

DOI: 10.31857/S0032823524030046 ZAZCOJ

**1. Введение.** Характерным природным фактором полярных районов Мирового океана и замерзающих морских акваторий является наличие ледяного покрова [1–3]. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод, при этом в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним [4–8]. Волновые движения на границе раздела ледяного покрова в условиях морской среды могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться обтеканием искусственных препятствий, например, погруженных частей платформ, с которых осуществляется добыча углеводородов, проложенных в море трубопроводов, иных сложных гидротехнических сооружений. В условиях реального океана причинами деформации ледяной поверхности могут быть, например, импульсные и периодические изменения давления, подводные источники различной физической природы (в том числе под-

водные взрывы), движущиеся по льду нагрузки постоянной и переменной интенсивности, локализованные вариации морской поверхности. Воздействием волн можно объяснить такие явления как образование трещин в сплошных ледяных полях, разрушение льда в прикромочных зонах, взламывание припая [1, 5, 7, 9].

Одним из заметных источников возбуждения ледяного покрова могут являться интенсивные пакеты внутренних гравитационных волн: амплитуды возмущений ледяного покрова за счет таких волн могут быть в диапазоне от сантиметров до нескольких метров [10–15]. Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реакции на различные гидродинамические возмущения, движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия. Также практический интерес к воздействию ледяного покрова на подводные препятствия обусловлен тем, что при наличии водной толщи обтекаемое потоком препятствие генерирует волны на поверхности раздела льда и морской среды и, следовательно, оно испытывает дополнительное волновое сопротивление, расчет которого необходим при проектировании различных сооружений [3, 5, 6, 16]. С другой стороны, эти поверхностные возмущения несут информацию, как о самих источниках возмущений, так и о характеристиках морской среды подо льдом, и они могут быть зарегистрированы с помощью специальных средств, прежде всего, радиолокационных и оптических систем [5, 6, 8].

Разработка методов контролирующего мониторинга морских акваторий с ледяным покровом, основанных на данных, получаемых средствами дистанционного зондирования поверхности льда, предполагает, в частности, возможность эффективного расчета силового воздействия морских течений на подводные источники различной физической природы с учетом скорости потока, толщины льда, глубины погружения источника, параметров его изменчивости, иных существенных гидродинамических характеристик [16–21]. Генерации волновых возмущений на поверхности границы льда и жидкости от обтекаемых подводных препятствий посвящены многочисленные исследования как в лабораторных опытах, так и в рамках теоретических работ. Современное состояние проблемы и обзор работ содержится в [1, 3, 7, 22–26].

**2. Постановка задачи.** Многочисленные лабораторные эксперименты, а также натурные наблюдения в Мировом океане показывают, что ледяной покров в условиях морской среды ведет себя как тонкая упругая пластина, плавающая на поверхности потока жидкости [1–3, 23–26]. В связи с этим в настоящей работе используется модель упругой пластины, относительно которой, без ограничения какой-либо физической общности, можно сделать допущения, что ее малые деформации удовлетворяют закону Гука. Это означает, в частности, что каждый элементарный объем упругого слоя льда, который ортогонален нейтральной поверхности в недеформированном состоянии, остается прямым и ортогональным этой поверхности после деформации [3, 7, 25]. Также предполагается, что ледяной покров является сплошным, то есть его горизонтальные масштабы превышают длины возбуждаемых волн и, при достаточно естественных условиях, моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы и пластина является физически линейной [1–3, 18, 21].

Рассматривается поток идеальной жидкости глубиной  $H$ , который обтекает точечный пульсирующий источник массы с интенсивностью  $Q = qe^{i\omega t}$  ( $q = \text{const}$ ),  $\omega$  — частота осцилляций. Сверху течение ограничено ледяным покровом толщины  $h$ . Горизонтальная плоскость  $\xi y$  совпадает с невозмущенной границей раздела жидкости плотности  $\rho_0$  и льда плотности  $\rho_1$ . Скорость потока жидкости конечной толщины направлена вдоль оси  $\xi$  и равна  $V$ , источник расположен в точке  $(0, 0, z_0)$ ,  $-H < z_0 < 0$ . Обозначим через  $\varphi_1(\xi, y, z, t)$  потенциал возмущений скорости:  $\nabla\varphi_1 = (u, v, w)$ , а через  $\eta_1(\xi, y, t)$  — величину возвышения поверхности раздела жидкости и ледового покрова. Тогда  $(V + u, v, w)$  — вектор скорости произвольной частицы жидко-

сти. Будем искать функции  $\varphi_1(\xi, y, z, t)$ ,  $\eta_1(\xi, y, t)$  в виде:  $\varphi_1(\xi, y, z, t) = e^{i\omega t} \varphi(\xi, y, z)$ ,  $\eta_1(\xi, y, t) = e^{i\omega t} \eta(\xi, y)$ .

Тогда в линейном приближении математическая постановка задачи формулируется следующим образом [1–3, 25–27]

$$\left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = q \delta(\xi) \delta(y) \delta(z - z_0)$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} + g\eta - C\Delta\eta + B\Delta^2\eta + A \frac{D^2\eta}{Dt^2} = 0; \quad z = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}; z = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0; \quad z = -H,$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $\frac{D}{Dt} = i\omega + V \frac{\partial}{\partial \xi}$ ,  $A = \frac{h\rho_1}{\rho_0}$ ,  $B = \frac{Eh^3}{12\rho_0(1 - \nu_0^2)}$ ,  $C = \frac{\sigma h}{\rho_0}$ ,  $g$  – ускорение свободного падения,  $E$  – модуль Юнга льда,  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона,  $\sigma$  – начальное напряжение. Характерные значения этих величин в морских условиях равны [1–3, 7]:  $\rho_0 = 1025 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_1 = 0.9\rho_0$ ,  $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu_0 = 0.3$ ,  $\sigma = 10^5 \text{ Н/м}^2$ . Из граничных условий при  $z = 0$  можно получить одно условие для потенциала  $\varphi(\xi, y, z)$  в виде

$$\frac{D^2\varphi}{Dt^2} + g \frac{\partial\varphi}{\partial z} - C \Delta \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) + B \Delta^2 \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) + A \frac{D^2}{Dt^2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = 0; z = 0 \quad (2.2)$$

**3. Интегральные формы решений.** Решение для функций  $\varphi(\xi, y, z)$ ,  $\eta(\xi, y)$  будем искать в виде интегралов Фурье

$$\varphi(\xi, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mu, \nu, z) \exp(-i\mu\xi) d\mu$$

$$\eta(\xi, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mu, \nu) \exp(-i\mu\xi) d\mu$$

Тогда задача (2.1)–(2.2) для Фурье образа потенциала  $\Phi(\mu, \nu, z)$  формулируется следующим образом

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - k^2\Phi = q\delta(z - z_0)$$

$$-(\mu V - \omega)^2\Phi + (g + Ck^2 + Bk^4 - A(\mu V - \omega)^2) \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0; \quad z = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0; \quad z = -H, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\Phi = q \frac{(kP \operatorname{ch} kz + (\mu V - \omega)^2 \operatorname{sh} kz) \operatorname{ch} k(z_0 + H)}{kD}; \quad z_0 < z \leq 0$$

$$\Phi = q \frac{(kP \operatorname{ch} kz_0 + (\mu V - \omega)^2 \operatorname{sh} kz_0) \operatorname{ch} k(z + H)}{kD}; \quad -H \leq z < z_0$$

$$P = g + Ck^2 + Bk^4 - A(\mu V - \omega)^2, D = (\mu V - \omega)^2 \operatorname{ch} kH - kP \operatorname{sh} kH$$

Фурье-образ возвышения  $\Psi(\mu, \nu)$  можно представить в виде

$$\Psi = \frac{iq(\mu V - \omega) \operatorname{ch} k(z_0 + H)}{\operatorname{ch} kH (Ak \operatorname{th} kH + 1) Z(\omega, \mu, \nu)}$$

$$\Omega^2(k) = \frac{k(g + Ck^2 + Bk^4) \operatorname{th} kH}{Ak \operatorname{th} kH + 1}; Z(\omega, \mu, \nu) = (\mu V - \omega)^2 - \Omega^2(k),$$

где  $\Omega(k)$  – дисперсионное соотношение для волн на границе раздела слоя неподвижной однородной жидкости конечной толщины  $H$  и льда [3, 7, 18, 23–25]. Тогда выражение для возвышения поверхности раздела жидкости и льда имеет вид

$$\begin{aligned} \eta_1(\xi, y, t) &= R(t) \eta(\xi, y) \\ \eta(\xi, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega, \mu, \nu)}{Z(\omega, \mu, \nu)} \exp(-i\mu \xi) d\mu \\ R(t) &= \frac{i q e^{i\omega t}}{4\pi^2}, F(\omega, \mu, \nu) = \frac{(\mu V - \omega) \operatorname{ch} k(z_0 + H)}{\operatorname{ch} kH (Ak \operatorname{th} kH + 1)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Проблема неоднозначности интеграла (3.1) решается методом возмущений [28, 29]. Для этого в знаменателе подынтегрального выражения (3.1) частота  $\omega$  заменяется на  $\omega - i\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малая положительная величина, которая в дальнейшем будет устремлена к нулю. Такая замена соответствует пульсирующему с частотой  $\omega$  источнику, амплитуда интенсивности которого нарастает как  $q e^{\varepsilon t}$ . В результате интеграл (3.1) преобразуется к виду:

$$\eta(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega - i\varepsilon, \mu, \nu)}{Z(\omega - i\varepsilon, \mu, \nu)} \exp(-i\mu \xi) d\mu \quad (3.2)$$

Функция  $Z = Z(\omega - i\varepsilon, \mu, \nu)$  такова, что уравнение  $Z = 0$  представляет собой одну из возможных форм записи дисперсионного соотношения. Рассмотрим поведение функции  $\eta(\xi, y)$  вдоль некоторого направления  $S_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Для вычисления интеграла (3.2) можно использовать следующий прием [29, 30]. Введем новые системы координат  $O\xi'y', O\mu'v'$ , которые получаются из исходных систем  $O\xi y, O\mu\nu$  поворотом на выбранный угол  $\alpha$  относительно их начала. Тогда

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' \cos \alpha - y' \sin \alpha, & y &= \xi' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ \mu &= \mu' \cos \alpha - \nu' \sin \alpha, & \nu &= \mu' \sin \alpha + \nu' \cos \alpha \\ \xi' &= \xi \cos \alpha + y \sin \alpha, & y' &= -\xi \sin \alpha + y \cos \alpha \\ \mu' &= \mu \cos \alpha + \nu \sin \alpha, & \nu' &= -\mu \sin \alpha + \nu \cos \alpha \end{aligned}$$

Так как  $\frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(\mu', \nu')} \equiv 1$ , то, в частности, вдоль такого направления  $S_\alpha$ , где  $y' = 0$ ,  $\xi' > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \eta(\xi', 0) &= \eta(\xi(\xi', 0), y(\xi', 0)) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F'(\omega - i\varepsilon, \mu', \nu')}{Z'(\omega - i\varepsilon, \mu', \nu')} \exp(-i\mu' \xi') d\mu' \\ F'(\omega - i\varepsilon, \mu', \nu') &= F(\omega - i\varepsilon, \mu(\mu', \nu'), \nu(\mu', \nu')) \\ Z'(\omega - i\varepsilon, \mu', \nu') &= Z(\omega - i\varepsilon, \mu(\mu', \nu'), \nu(\mu', \nu')) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Предположим, что подынтегральное выражение внутреннего интеграла (3.3) при  $\varepsilon = 0$  имеет полюса на действительной оси:  $\mu'_1 = \mu'_1(\nu')$ ,  $\mu'_2 = \mu'_2(\nu')$ , ... Для вычисления внутреннего интеграла (3.3) необходимо определить их смещения:  $\Delta\mu'_j = \mu'(\nu')$  при  $\varepsilon > 0$ . С этой целью необходимо приравнять нулю знаменатель подынтегральной функции в (3.3) при  $\varepsilon = 0$ :  $Z'(\omega, \mu'_j, \nu') = 0$  и при  $\varepsilon > 0$ :  $Z'(\omega - i\varepsilon, \mu'_j + \Delta\mu'_j, \nu') = 0$ .



Методом возмущений можно получить:  $\Delta\mu'_j = i\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial \omega} / \frac{\partial Z}{\partial \mu'_j}$ , при  $\mu' = \mu'_j(v')$ . Тогда, считая, что  $\omega = \omega(\mu', v')$ , имеем:

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} / \frac{\partial Z}{\partial \mu'_j} = -1 / \frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j}, \quad \Delta\mu'_j = -i\varepsilon / \frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j}, \quad \text{при } \mu' = \mu'_j(v')$$

Поэтому при  $\frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j} > 0$  полюса  $\mu'_j$  смещаются в нижнюю полуплоскость, и при  $\frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j} < 0$  – в верхнюю полуплоскость. Так как  $\xi' > 0$ , то по лемме Жордана контур интегрирования по переменной  $\mu'$  в (3.3) замыкается в нижнюю полуплоскость, и, учитывая вклад полюсов  $\mu'_j = \mu'_j(v')$  можно получить

$$\eta(\xi', 0) = -2\pi i \sum_j \int_{L_j(\alpha)} \frac{F'(\omega, \mu'_j(v'), v')}{T'(\omega, \mu'_j(v'), v')} \exp(-i\mu'_j(v')\xi') dv' \quad (3.4)$$

$$T'(\omega, \mu'_j(v'), v') = \frac{\partial Z'(\omega, \mu'_j(v'), v')}{\partial \mu'_j},$$

где  $L_j(\alpha)$  – та часть дисперсионной кривой, где выполнено неравенство  $\frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j} > 0$  при  $\mu' = \mu'_j(v')$ . Отметим, что в формуле (3.4) выполнен предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Вернемся далее к исходным переменным  $\xi, y$  и  $\mu, v$ . Для этого необходимо показать, что

$$\frac{dv'}{\partial \mu'_j} = \frac{dv}{\partial \mu}, \quad \text{при } \mu' = \mu'_j(v'), \quad \mu = \mu_j(v), \quad (3.5)$$

где  $\mu = \mu_j(v)$  – уравнение  $j$ -ой дисперсионной кривой в исходных координатах  $\mu, v$ . Действительно, из формул замены переменных имеем

$$dv' = (-d\mu \sin \alpha + dv \cos \alpha) = \left( \frac{d\mu_j(v)}{dv} \sin \alpha + \cos \alpha \right) dv$$

при  $\mu' = \mu'_j(v'), \mu = \mu_j(v)$

Далее из уравнения  $Z(\omega, \mu, v) = 0$ , находим, что

$$\frac{d\mu_j(v)}{dv} = \frac{\partial Z}{\partial v} / \frac{\partial Z}{\partial \mu}, \quad \text{при } \mu = \mu_j(v)$$

Следовательно,

$$dv' = \frac{\frac{\partial Z}{\partial v} \sin \alpha + \frac{\partial Z}{\partial \mu} \cos \alpha}{\frac{\partial Z}{\partial \mu}} dv, \quad \text{при } \mu = \mu_j(v) \quad (3.6)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu'_j} = \frac{\partial Z}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mu'_j} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \mu'_j} = \frac{\partial Z}{\partial \mu} \cos \alpha + \frac{\partial Z}{\partial v} \sin \alpha \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.6) и (3.7), получаем искомое равенство (3.5), учитывая которое, приходим к выводу, что интегральное представление возвышения поверхности раздела является инвариантным относительно использованной замены координат, и может быть представлено в виде

$$\eta(\xi, y) = -2\pi i \sum_j \int_{L_j(\alpha)} \frac{F(\omega, \mu_j(v), v)}{T(\omega, \mu_j(v), v)} \exp(-iv y - i\mu_j(v)\xi) dv$$

$$T(\omega, \mu_j(\nu), \nu) = \frac{\partial Z(\omega, \mu_j(\nu), \nu)}{\partial \mu}$$

**4. Дисперсионные зависимости и фазовые структуры.** Нестационарность источника волновых возмущений приводит к заметному усложнению топологии карт дисперсионных кривых  $\mu_j(\nu)$ , являющихся соответствующими решениями уравнения  $Z(\omega, \mu, \nu) = 0$  [26, 27]. Далее все численные результаты приведены для параметров, характерных для реальной морской среды: толщина льда  $h = 0.25$  м, глубина жидкости  $H = 100$  м. В данной задаче существуют три критических значения скорости потока жидкости  $V_{0,1,2}$  ( $V_0 < V_1 < V_2 = \sqrt{gH}$ ), которые определяют качественно разное поведение дисперсионных зависимостей, и, соответственно, пространственные свойства фазовых картин возбуждаемых волновых полей. Значение  $V_0$  определяется минимумом фазовой скорости волн на поверхности раздела неподвижной жидкости

конечной толщины подо льдом:  $V_0 = \frac{\Omega(k_0)}{k_0}$ , где  $k_0$  – единственный положительный корень уравнения:  $2ABk^5 + 3Bk^4 + Ck^2 - 2Agk - g = 0$  [23, 26, 27]. Значение  $V_1$  соответствует такой скорости потока жидкости  $V$ , при которой дисперсионные кривые, заданные параметрически:  $\mu_j(\nu) = \frac{\Omega(k)}{V}$ ,  $\nu_j(k) = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Omega(k)}{V}\right)^2}$ , не

имеют точек перегиба при  $V < V_1$ , и имеют, как минимум, две пары точек перегиба при  $V > V_1$ . Это означает, что при  $V < V_1$ , уравнение  $\mu'_j(k)\nu''_j(k) - \nu'_j(k)\mu''_j(k) = 0$  не имеет действительных корней, и при  $V > V_1$  имеет, как минимум, два действительных корня. Для параметров этой задачи значения критических скоростей равны:  $V_0 = 8.91$  м/с,  $V_1 = 14.56$  м/с,  $V_2 = 31.31$  м/с.

Если  $V < V_0$ , то при  $\omega = 0$  волновые колебания отсутствуют. Если  $V_0 < V < V_1$ , то дисперсионная кривая при  $\omega = 0$  является выпуклой и не охватывает начало координат  $\mu = \nu = 0$ . Если  $V_1 < V < V_2$ , то дисперсионная кривая при  $\omega = 0$ , является невыпуклой имеет две точки перегиба, и не охватывает начало координат  $\mu = \nu = 0$ . На рис.1 приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей  $\mu_1(\nu)$ , для  $V = 5$  м/с  $< V_0$  и различных значений  $\omega \neq 0$ , каждая из которых представляет собой одну замкнутую линию. На рис. 2, 3 приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей  $\mu_j(\nu)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) для  $V_0 < V = 10$  м / с  $< V_1$  и различных значений  $\omega$ , каждая из которых, может состоять из двух или трех замкнутых ветвей. При  $\omega < \omega^- = \Omega(k^-) - k^-V = 0.241$  с<sup>-1</sup> ( $k^- = 0.0266$  м<sup>-1</sup> – меньший корень уравнения  $\frac{\partial \Omega}{\partial k} = V$ ) существует как нижняя  $\mu_1(\nu)$  ( $\mu_1(\nu) < 0, \forall \nu$ ), так и средняя  $\mu_2(\nu)$  ветви дисперсионных кривых (рис. 2). При увеличении значений  $\omega$  от нуля до  $\omega^-$  эти две ветви расширяются навстречу друг к другу, и при  $\omega = \omega^-$  происходит слияние двух ветвей в одну – нижнюю ветвь. При дальнейшем увеличении частоты  $\omega$  происходит расширение оставшейся одной ветви. Верхние ветви дисперсионных кривых  $\mu_3(\nu)$  (рис. 3) существуют только для тех частот  $\omega$ , которые удовлетворяют неравенству  $\omega < \omega^+ = k^+V - \Omega(k^+) = 0.192$  с<sup>-1</sup> ( $k^+ = 0.181$  м<sup>-1</sup> – больший корень уравнения  $\frac{\partial \Omega}{\partial k} = V$ ). При увеличении значений  $\omega$  от нуля до  $\omega^+$  происходит сужение этой ветви дисперсионной кривой, и при  $\omega = \omega^+$  она вырождается в точку. Качественное поведение дисперсионных кривых при  $V_1 < V < V_2$  остается такими же, только при  $\omega = 0$  нижняя и верхняя ветви дисперсионной кривой является невыпуклыми. При  $V > V_2$  существуют только две ветви дисперсионных кривых: нижняя (охватывающая точку  $\mu = \nu = 0$ ) и верхняя.

На рис. 4–7 приведены результаты расчеты фазовых картин, которые показывают, что в зависимости от основных параметров волновой генерации возбуждается одно-

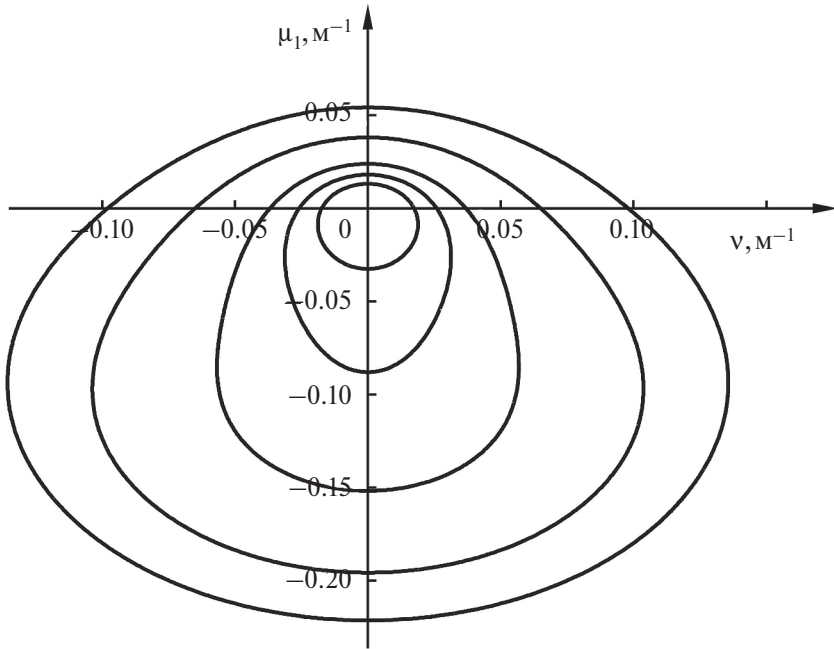


Рис. 1. Дисперсионные кривые  $\mu_1(v)$ :  
линии 1–5 –  $\omega = 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 \text{ c}^{-1}$

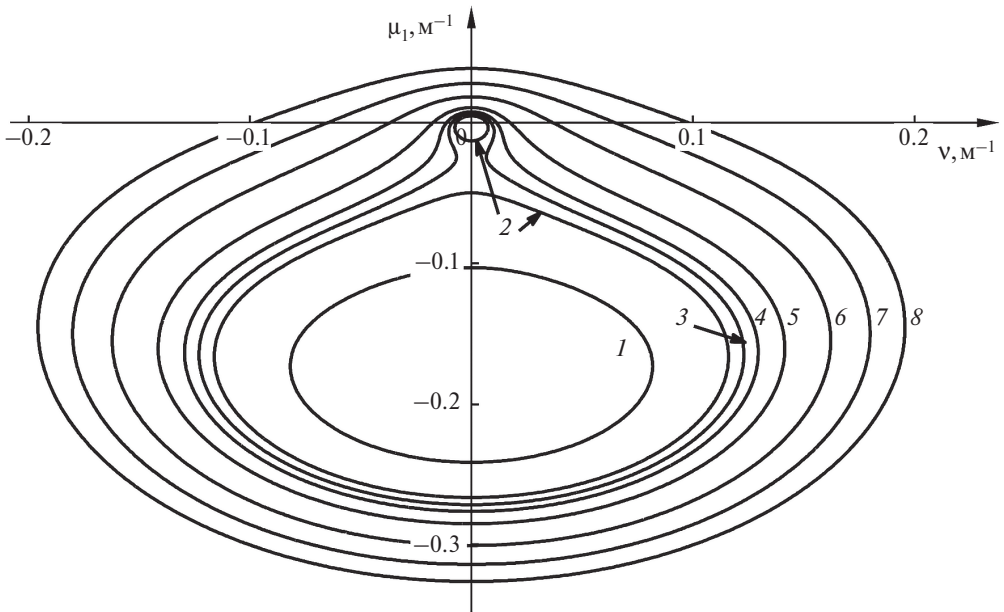
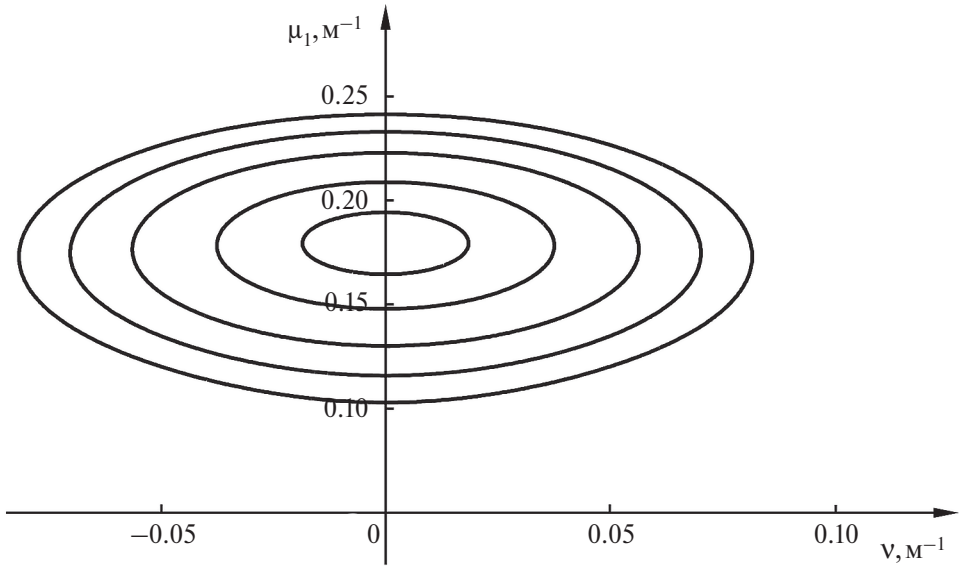
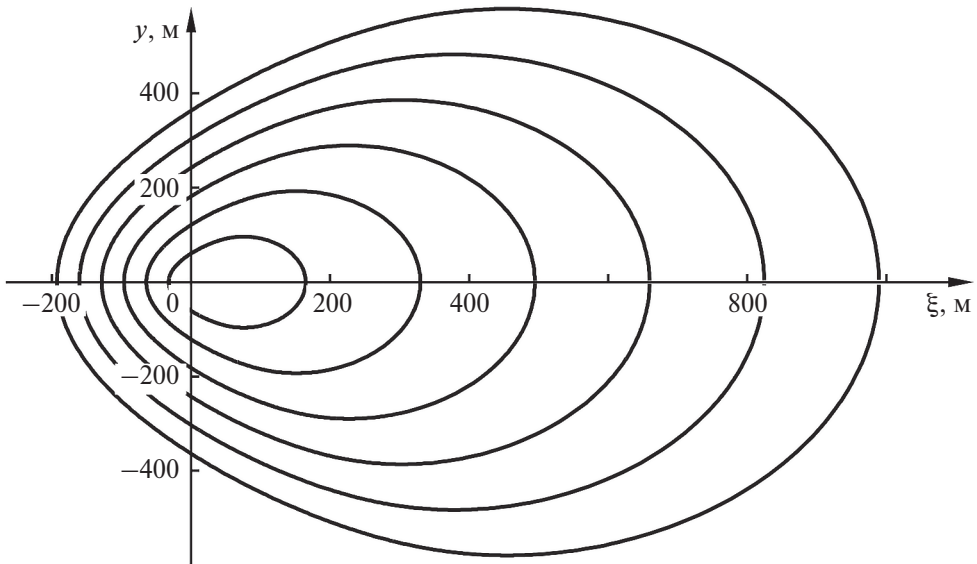


Рис. 2. Дисперсионные кривые:  
линии 1, 2 –  $\mu_1(v)$ :  $\omega = 0, 0.2 \text{ c}^{-1}$   
линии 3–8 –  $\mu_2(v)$ :  $\omega = 0.25 (\omega > \omega^-), 0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 \text{ c}^{-1}$



**Рис. 3.** Дисперсионные кривые  $\mu_3(v)$ :  
 линии  $\omega = 0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.18 \text{ c}^{-1}$   $\omega = 0, 0.2 \text{ c}^{-1}$



**Рис. 4.** Линии равной фазы – волны распространяются от источника

временно от одной до трех волновых систем, отвечающим соответствующим ветвям дисперсионных соотношений. На рис. 4 приведены результаты расчетов линий равной фазы для  $V = 5 \text{ м/с} < V_0$  и  $\omega = 0.8 \text{ c}^{-1}$ . Волновая картина представляет собой систему кольцевых волн, распространяющихся от источника. На рис. 5–7 приведены результаты расчетов линий равной фазы для  $V_0 < V = 10 \frac{\text{М}}{\text{с}} < V_1$ ,  $\omega = 0.24 \text{ c}^{-1} < \omega^-$  (рис. 5, 6),  $\omega = 0.1 \text{ c}^{-1} < \omega^+$  (рис. 7), которые отвечают нижней (рис. 5), средней (рис. 6) и верхней (рис. 7) ветвям дисперсионных соотношений соответственно. На

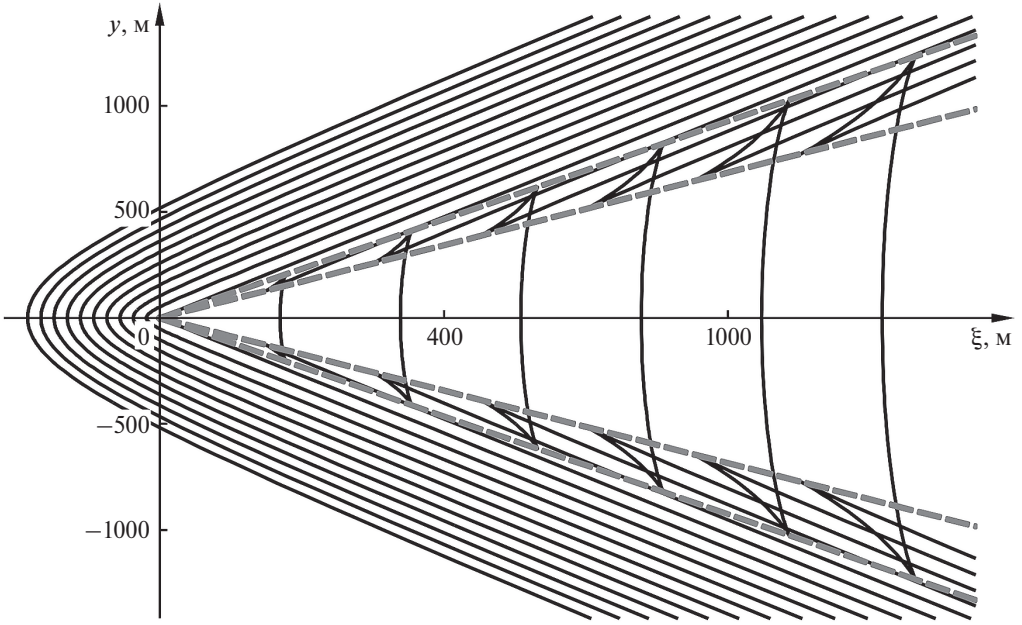


Рис. 5. Линии равной фазы – волны бегут вверх по потоку

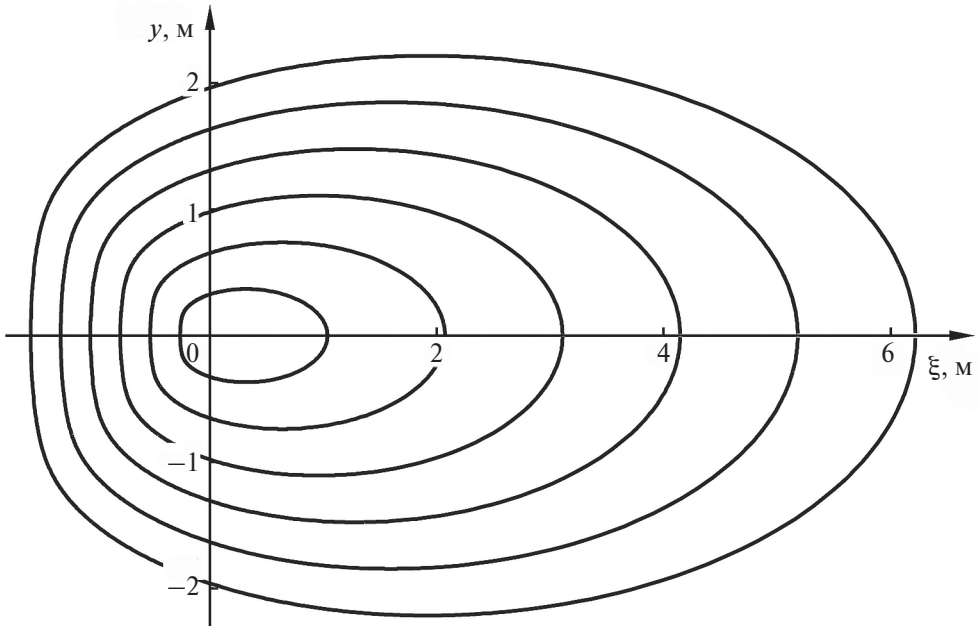


Рис. 6. Линии равной фазы – волны распространяются от источника

рис. 5 изображена достаточно сложная волновая картина, состоящая как из продольных, так и поперечных волн, уходящих от источника возмущений вверх по потоку. Направление распространения волн в этом случае определяется знаком дисперсионных кривых:  $\mu_1(v) < 0$  для любых значений  $v$ . На рис. 6 представлена волновая

картина кольцевых волн, которые эволюционируют от источника вниз по потоку. На рис. 7 изображена волновая картина, которая представляет собой систему только клиновидных волн, распространяющихся от источника вниз по потоку. Численные расчеты демонстрируют также достаточно заметную перестройку фазовых картин при изменении частоты  $\omega$ .

Численные расчеты показывают, что при изменении основных параметров волновой генерации (скорость потока, толщина льда, частота пульсаций источника возмущений) волновая картина может состоять из нескольких типов волн, а также происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых волновых полей на границе раздела льда и жидкости. Поэтому усложнение наблюдаемых волновых картин возвышения ледяного покрова, в том числе появление дополнительных волновых структур, может являться одним из признаков заметного изменения таких свойств морской среды как скорость течения, толщина льда, частота осцилляций источников генерации. Как показывают численные расчеты, дисперсионные зависимости  $\mu(v)$  могут представлять собой замкнутые, всюду выпуклые кривые (рис. 1, 3), а также могут иметь по две пары точек перегиба, которые существуют только при достаточно малых значениях волновых чисел и расположены симметрично относительно оси  $v = 0$  (рис. 2). Такое усложнение топологии дисперсионных зависимостей приводит к генерации дополнительной системы поперечных волн и появлению соответствующих пар волновых фронтов (штриховые линии на рис. 5). Уравнения волновых фронтов определяются как  $\xi = \pm \mu'(v_{1,2}^*)y$ , где  $v_{1,2}^*$  – два корня уравнения  $\mu''(v_{1,2}^*) = 0$ . В этом случае фазовые картины демонстрируют пространственные структуры типа “ласточкина хвоста” (рис. 5), когда в фиксированной точке наблюдения происходит качественная перестройка одновременно приходящих волновых фронтов [29, 30]. Наиболее интересными с практической точки зрения являются локальные экстремумы дисперсионных зависимостей  $\mu'(v)$ , так как асимптотики

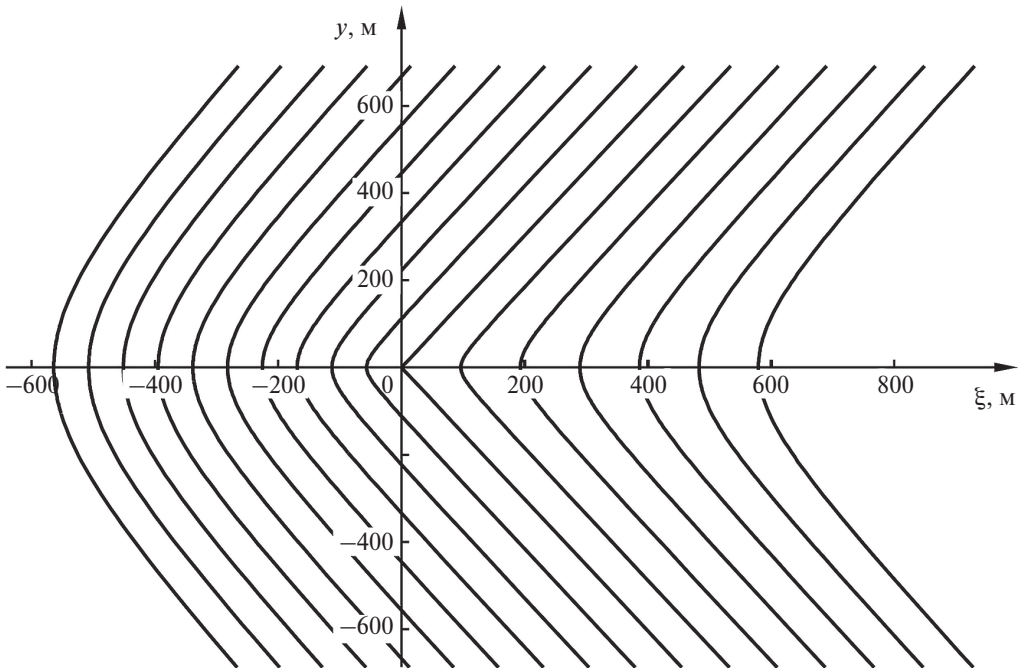


Рис. 7. Линии равной фазы – волны бегут вниз по потоку

дальних волновых полей в окрестности соответствующих волновых фронтов и каустик, отвечающих этим экстремумам, можно описать с помощью метода эталонных интегралов. Сложность топологии рассчитанных дисперсионных зависимостей требует для корректного асимптотического исследования возбуждаемых волновых полей применения специального математического аппарата [29, 30].

Увеличение скорости течения при неизменной толщине льда и частоте пульсаций приводит к расширению (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых. Кривая, соответствующая меньшей скорости потока, целиком находится внутри кривой, отвечающей большей скорости потока. Поэтому при увеличении скорости течения  $V$  длина волны вдоль положительной направления оси  $O\xi$  возрастает, а вдоль отрицательного направления оси  $O\xi$  убывает. Также при увеличении скорости потока происходит уменьшение пространственной области, где существуют волновые колебания. Вне этой зоны амплитуды дальних волновых полей экспоненциально малы. Этот же эффект наблюдается при изменении толщины льда при неизменном значении скорости потока. При увеличении толщины льда при неизменной скорости потока и частоте пульсаций происходит сужение (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых, и, соответственно, расширение пространственной области волновых колебаний. Длина волны вдоль положительного направления оси  $O\xi$  возрастает, а вдоль отрицательного оси  $O\xi$  — убывает.

**Заключение.** Для решения ряда важных практических задач и приложений, используя операцию свертки, можно в дальнейшем рассчитать волновые возмущения ледяного покрова, возбуждаемых распределенными в пространстве пульсирующими нелокальными источниками возмущений различной физической природы природного и антропогенного характеров. Постановка задачи обтекания нелокального пульсирующего источника потоком однородной жидкости, ограниченной сверху ледяным покровом, включает в себя задание определенных граничных условий на его поверхности. Даже в предположении об идеальности жидкости и потенциальности обтекающего источник потока вычисление волновых полей представляет собой весьма сложную в математическом плане задачу. Очевидно, что существенно проще решается задача обтекания системы точечных гидродинамических особенностей, поскольку в этом случае нет необходимости удовлетворять наперед заданным граничным условиям. Это обстоятельство используется при решении задач обтекания тел или непроницаемых границ, моделируемых специально подобранными системами гидродинамических особенностей, которые часто используются при решении модельных задач, где точное воспроизведение формы, находящегося подо льдом в потоке жидкости нелокального пульсирующего источника не имеет решающего значения. Подобный метод в значительной мере может относиться к задаче о генерации волновых возмущений на границе льда и жидкости, так как замена нелокального пульсирующего источника некоторым набором гидродинамических особенностей существенно упрощает решение. Дополнительного исследования требует вопрос о том, как влияет наличие границ раздела льда и жидкости на картину линий тока, возникающих при обтекании заданных гидродинамических особенностей. Поэтому, в частности, при рассмотрении потоков конечной толщины под ледяным покровом необходимо знать какой именно нелокальный источник возмущений может моделировать выбранная система гидродинамических особенностей.

Работа выполнена за счет гранта РФФИ № 23-21-00194.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Букатов А.Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
2. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.

3. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving Loads on Ice Plates. Dordrecht: Springer Sci.&Business Media, 1996. 236 pp.
4. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean. Boston: Kluwer Acad. Pub., 2001. 406 pp.
5. *Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P.* Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Advanced Series of Ocean Engineering. Vol. 42. London: World Sci. Pub., 2018. 1240 pp.
6. The Ocean in Motion / Ed. by *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V.* Cham: Springer Nature, 2018. 625 pp.
7. *Козин В.М., Погорелова А.В., Земляк В.Л., Верещагин В.Ю., Рогожникова Е.Г., Купин Д.Ю., Матюшина А.А.* Экспериментально-теоретические исследования зависимости параметров распространяющихся в плавающей пластине изгибно-гравитационных волн от условий их возбуждения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 222 с.
8. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 pp.
9. *Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S.* Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord // *Oceanology*. 2010. V. 50(1). P. 18–27.
10. *Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S.* Short-period internal waves under an ice cover in Van Mijen Fjord, Svalbard // *Advances in Meteorol.* 2011. V. 2011. Art. ID 573269.
11. *Marchenko A., Morozov E., Muzylev S.* Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves // *Ann. Glaciology*. 2013. V. 54. P. 51–60.
12. *Marchenko A.V., Morozov E.G.* Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice // *Rus. J. Earth Sci.* 2016. V. 16 (1). ES1001.
13. *Morozov E.G., Marchenko A.V., Filchuk K.V., Kowalik Z., Marchenko N.A., Ryzhov I.V.* Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea // *Appl. Ocean Res.* 2019. V. 87. P. 179–191.
14. *Morozov E.G., Pisarev S.V.* Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments) // *Oceanology*. 2002. V. 42(2). P. 153–161.
15. *Morozov E.G., Zuev O.A., Zamshin V.V., Krechik V.A., Ostroumova S.A., Frey D.I.* Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V “Akademik Mstislav Keldysh” // *Rus. J. Earth Sci.* 2022. V. 2. P. 1–5.
16. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Силовое воздействие потока бесконечно глубокой жидкости на источник под ледяным покровом // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2023. Т. 16. №3. С. 120–128.
17. *Dinvay E., Kalisch H., Parau E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 876. P. 122–149.
18. *Sturova I.V.* Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 784. P. 373–395.
19. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // *Proc. R. Soc. A*. 2018. V. 474. P. 20170223.
20. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodyn.* 2019. V. 31(3). P. 562–569.
21. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Appl. Ocean Res.* 2019. V. 86. P. 154–165.
22. *Ильичев А.Т.* Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины // *ТМФ*. 2021. Т. 28. №3. С. 387–408.
23. *Савин А.С., Савин А.А.* Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // *Изв. РАН. МЖГ*. 2015. №5. С. 16–23.
24. *Стурова И.В.* Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // *Изв. РАН. МЖГ*. 2021. №4. С. 63–72.
25. *Ильичев А.Т., Савин А.С., Шашков А.Ю.* Траектории жидких частиц в поле темного солитона в жидкости под ледяным покровом // *Изв. РАН. МЖГ*. 2023. №6. С. 110–120.
26. *Маленко Ж.В., Ярошенко А.А.* Трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающем ледяном покрове от движущегося источника возмущений // *ПММ*. 2023. Т. 87. №6. С. 1037–1048.
27. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Дальние поля на поверхности на поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником // *Изв. РАН. ФАО*. 2023. Т. 59. №3. С. 346–351.



28. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
29. Лайтхил Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
30. Borovikov V.A. Uniform Stationary Phase Method. London: IEE Electromagnetic Waves. Ser. 40, 1994. 233 pp.

### **The Phase Structure of Wave Disturbances Excited By a Pulsating Source at the Interface of a Liquid Flow of Finite Depth and an Ice Sheet**

**V.V. Bulatov<sup>a,#</sup>, I.Yu. Vladimirov<sup>b,##</sup>**

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Shirshov Oceanology Institute RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: internalwave@mail.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

The floating ice sheet determines the dynamic interaction between the ocean and the atmosphere, affects the dynamics of the sea surface and subsurface waters, since the ice sheet and the entire mass of liquid under it participate in the general vertical movement. The paper investigates the phase structure of wave fields arising at the interface between ice and a flow of homogeneous liquid of finite thickness when flowing around a localized pulsating source of disturbances. The ice sheet is modeled by a thin elastic plate, the deformations of which are small, and the plate is physically linear. An integral representation of the solution is obtained, and the results of calculations of dispersion dependencies and phase patterns for various parameters of wave generation are presented. It is shown that the main parameters determining the characteristics of the amplitude-phase structure of wave disturbances of the ice sheet surface are ice thickness, flow velocity, and pulsation frequency. Numerical calculations demonstrate that when the flow velocities, ice thickness, and frequency change, there is a noticeable qualitative restructuring of the phase patterns of the excited long-range wave fields at the ice-liquid interface.

*Keywords:* ice cover, elevation of the interface, dispersion dependences, phase structure, localized pulsating source

#### REFERENCES

1. Bukatov A.E. Waves in the Sea with Floating Ice Cover. Sebastopol: FGBUN MHI, 2017. 360 p. (in Russian)
2. Ilyichev A.T. Solitary Waves in Hydrodynamic Models. Moscow: Fizmatlit, 2003. 256 p. (in Russian)
3. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving Loads on Ice Plates. Dordrecht: Springer Sci.&Business Media, 1996. 236 p.
4. Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V. Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean. Boston: Kluwer Acad. Pub., 2001. 406 p.
5. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Advanced Series of Ocean Engineering. Vol. 42. London: World Sci. Pub., 2018. 1240 p.
6. The Ocean in Motion / Ed. by Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. Cham: Springer Nature, 2018. 625 p.
7. Kozin V.M., Pogorelova A.V., Zemplak V.L., Vereshchagin V.Yu., Rogozhnikova E.G., Kipin D.Yu., Matyushina A.A. Experimental and Theoretical Studies of the Dependence of the Parameters of Flexural-Gravity Waves Propagating in a Floating Plate on the Conditions of Their Excitation. Novosibirsk: SB RAS Pub., 2016. 222 p. (in Russian)
8. Morozov E.G. Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
9. Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S. Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord // Oceanology, 2010, vol. 50(1), pp. 18–27.
10. Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S. Short-period internal waves under an ice cover in Van Mijen Fjord, Svalbard // Advances in Meteorol., 2011, vol. 2011, art. ID 573269.

11. *Marchenko A., Morozov E., Muzylev S.* Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves // *Ann. Glaciology*, 2013, vol. 54, pp. 51–60.
12. *Marchenko A.V., Morozov E.G.* Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice // *Rus. J. Earth Sci.*, 2016, vol. 16 (1), ES1001.
13. *Morozov E.G., Marchenko A.V., Filchuk K.V., Kowalik Z., Marchenko N.A., Ryzhov I.V.* Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea // *Appl. Ocean Res.*, 2019, vol. 87, pp. 179–191.
14. *Morozov E.G., Pisarev S.V.* Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments) // *Oceanology*, 2002, vol. 42(2), pp. 153–161.
15. *Morozov E.G., Zuev O.A., Zamshin V.V., Krechik V.A., Ostroumova S.A., Frey D.I.* Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V “Akademik Mstislav Keldysh” // *Rus. J. Earth Sci.*, 2022, vol. 2, pp. 1–5.
16. *Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu.* Forceful influence of a flow of infinitely deep liquid on a source under the ice cover // *Fundam. & Appl. Hydrophys.*, 2023, vol. 16, no. 3, pp. 120–128.
17. *Dinvey E., Kalisch H., Parau E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // *J. Fluid Mech.*, 2019, vol. 876, pp. 122–149.
18. *Sturova I.V.* Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // *J. Fluid Mech.*, 2015, vol. 784, pp. 373–395.
19. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // *Proc. R. Soc. A*, 2018, vol. 474, pp. 20170223.
20. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodyn.*, 2019, vol. 31(3), pp. 562–569.
21. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Appl. Ocean Res.*, 2019, vol. 86, pp. 154–165.
22. *Il'ichev A.T.* Effective wavelength of envelope waves on the water surface beneath an ice sheet: small amplitudes and moderate depths // *Theor.&Math. Phys.*, 2021, vol. 208, pp. 1182–1200. <https://doi.org/10.1134/S0040577921090026>
23. *Savin A.A., Savin A.S.* Three-dimensional problem of disturbing an ice cover by a dipole moving in fluid // *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, pp. 613–620. <https://doi.org/10.1134/S0015462815050026>
24. *Sturova I.V.* Motion of a load over an ice sheet with non-uniform compression // *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, pp. 503–512. <https://doi.org/10.1134/S0015462821040121>
25. *Il'ichev A.T., Savin A.S., Shashkov A.Y.* Trajectories of liquid particles in a dark soliton field in a fluid beneath an ice cover // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, pp. 1076–1086. <https://doi.org/10.1134/S0015462823601912>
26. *Malenko Zh.V., Yaroshenko A.A.* Three-dimensional flexural gravity waves in a floating ice cover from a moving source of disturbances // *JAMM*, 2023, vol. 87, no. 6, pp. 1037–1048.
27. *Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu.* Far surface fields at the interface between an infinitely deep ocean and an ice sheet, excited by a localized source // *Izv. RAS. FAO*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 346–351.
28. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* *Waves in Stratified Media*. Moscow: Nauka, 2015. 735 p.
29. *Lighthill J.* *Waves in Liquids*. Moscow: Mir, 1981. 598 p.
30. *Borovikov V.A.* *Uniform Stationary Phase Method*. London: IEE Electromagnetic Waves. Ser. 40, 1994. 233 pp.

УДК 517.9, 517.4

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ БЕРЕГ ПРИБРЕЖНОГО ВОДНОГО КЛИНА

© 2024 г. М. А. Лялинов<sup>1,\*,\*\*</sup> С. В. Полянская<sup>2,\*\*\*</sup><sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия<sup>2</sup>Северо-Западный институт управления РАНХуГС, Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: lyalinov@yandex.ru

\*\*e-mail: m.lyalinov@spbu.ru

\*\*\*e-mail: polyanskaya-sv@ranepa.ru

Поступила в редакцию 22.01.2024 г.

После доработки 10.04.2024 г.

Принята к публикации 15.05.2024 г.

В линейном приближении гравитационных поверхностных волн малой амплитуды предложены новые интегральные представления для решения классической задачи о набегании из бесконечности поверхностной волны на берег под углом к береговой линии. Задача ставится для гармонического потенциала скорости жидкости в трехмерном водном клине с краевым условием Робена—Стеклова на свободной поверхности водного клина и условием отсутствия потока по нормали через дно. Эти интегральные представления имеют вид интеграла Зоммерфельда—Маложинца и Ватсона—Бесселя. Подынтегральные выражения вычислены в замкнутом виде на основе решения функционально-разностных уравнений. Установлена связь между полученными представлениями. Приведены критические замечания по поводу известного в литературе решения, имеющего “нефизическую” сингулярность логарифмического типа на береговой линии. Построена асимптотика по расстоянию от берега полученного решения, ограниченного на береговой линии. Вычислен коэффициент отражения волны, уходящей от берега.

*Ключевые слова:* поверхностная волна, интегральные представления, функциональные уравнения, асимптотика

DOI: 10.31857/S0032823524030055 ZAWQKP

**1. Введение.** Существуют различные механизмы возникновения прибрежных волновых процессов. Их достаточно подробный обзор можно найти во введении к недавней работе [1]. В данном контексте особую роль в изучении механизмов возникновения прибрежного волнения играют канонические модельные задачи, которые допускают эффективное исследование и использование для качественного и количественного описания соответствующих волновых процессов.

Одной из таких модельных задач является задача о наклонном падении поверхностной волны, бегущей из бесконечности к прямолинейному берегу водного клина (рис. 1). Такая задача рассматривается в литературе (см. [2] и подробные ссылки в ней). В связи с исследуемой задачей уместно упомянуть результаты Исааксона [3] в случае нормального падения, а также ссылки, которые приведены в [2], где также имеется подробный обзор примыкающих результатов. Задача ставится в линейном приближении поверхностных волн малой амплитуды [4], и соответствующая модель, хотя и не описывает адекватно сложные нелинейные процессы движения жидкости вблизи береговой линии, в целом может быть успешно использована для изучения

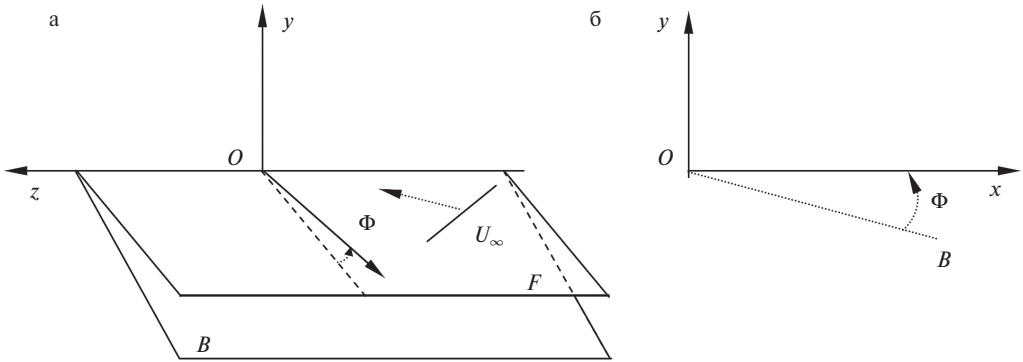


Рис. 1

результата отражения поверхностной гравитационной волны, падающей наклонно на береговую линию водного клина.

Однако, постановка и решение данной задачи, предложенное в работе [2], не является, по нашему мнению, вполне физически обоснованным и математически удовлетворительным. Причина этого в следующем. Автор работы [2] строит решение задачи, в постановке которой предполагается его логарифмическая сингулярность на береговой линии водного клина. Тем самым, плотность кинетической энергии волнового движения жидкости не является локально интегрируемой: интеграл по окрестности вершины угла от квадрата градиента потенциала скорости расходится. Это обстоятельство вряд ли оправдано с физической точки зрения. Кроме того, скорость жидкости стремится к бесконечности при приближении к береговой линии. С другой стороны, к решению задачи с логарифмической сингулярностью можно добавить решение, ограниченное на береговой линии, то есть построенное в нашей работе. Получится новое решение о наклонном падении поверхностной волны на береговую линию с логарифмической сингулярностью. Тем самым, возникает вопрос о математической корректности постановки и физической интерпретации решения с сингулярностью. Ограниченное же на ребре решение существует и единственно, что здесь не доказывается, оно устойчиво при малых возмущениях данных задачи и, тем самым, корректно (по Адамару).

В настоящей работе строится решение рассматриваемой классической модельной задачи, предлагая новые интегральные представления для него, в следующей постановке. В трехмерном водном клине с углом раскрыва  $\Phi$  ( $0 < \Phi \leq \pi / 2$ ) в линейном приближении волн малой амплитуды потенциал скорости

$$U(x, y, z, t) = \Re \{ u(x, y) e^{ikz} e^{-i\omega t} \} \tag{1.1}$$

гармонически зависит от времени ( $\omega$  – круговая частота) и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta_{x,y,z} U = 0 \tag{1.2}$$

в водном клине, рис. 1,а. Далее считаем, что бегущая из бесконечности поверхностная волна описывается потенциалом

$$U_{\infty}(x, y, z, t) = \Re \{ u_{\infty}(x, y) e^{ikz - i\omega t} \},$$

где  $u_{\infty}(x, y) = e^{-ik_x x + \delta y}$ ,  $\delta > 0$ ,  $U_{\infty}$  удовлетворяет уравнению Лапласа, что эквивалентно равенству

$$\kappa^2 + k_x^2 = \delta^2$$

и краевому условию на свободной поверхности  $F = \{(x, y, z) : x > 0, y = 0, |z| < \infty\}$ .

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} + g^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_F = 0, \quad (1.3)$$

$g$  – ускорение свободного падения. Отсюда находим подстановкой  $U_\infty$  в (1.3)  $\delta = \gamma$ , где  $\gamma := \omega^2/g > 0$ . Условие на дне имеет вид

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_B = 0, \quad (1.4)$$

$n$  – нормаль к  $B$ . Мы предположили периодическую зависимость от переменной  $z$  в выражении (1.1). Считая  $\kappa$  и  $\gamma$  заданными, находим

$$k_x = \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2} > 0,$$

где  $0 < \kappa^2 \leq \gamma^2$ .

Для физического анализа решения удобно ввести «угол скольжения»  $\alpha$  набегающей волны в соответствии с равенством

$$\left( \frac{\kappa}{\gamma} \right)^2 + \left( \frac{k_x}{\gamma} \right)^2 = 1 \text{ или } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

где  $\cos \alpha = \kappa/\gamma$ . Выбирая указанные зависимости от времени и координаты  $z$  вдоль береговой линии, сведем задачу к вычислению  $u$  в выражении (1.1), т. е. рассмотрим двумерную задачу в угле (рис. 1,б). Точная постановка задачи для  $u$  будет изложена в следующем разделе. Кроме (1.1)–(1.3) потребуем ограниченность  $u$  для всех  $z$  при  $(x, y) \rightarrow 0$ , а также на бесконечности. Заметим, что при указанном выборе параметров  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $k_x$  выражение  $u_\infty$  представляет собой поверхностную волну  $U_\infty$ , бегущую к берегу, как показано на рис. 1,а, которая экспоненциально убывает с глубиной,

$$u_\infty(x, y) = e^{-i\sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}x + \gamma y} \quad (1.5)$$

В следующем разделе ставится задача в классических терминах и устанавливается связь ее с полуограниченным самосопряженным оператором, спектр которого описан в литературе. По существу, построение решения задачи эквивалентно построению собственной функции такого оператора для отрицательной части непрерывного (точнее, существенного) спектра. В этой задаче существует и дискретный спектр, который конечен. Собственные функции дискретного спектра, которые были получены Урселом в элементарной форме, изучались в ряде работ (см. [5, 6]).

В разд. 3 с помощью интегрального представления решения интегралом Зоммерфельда задача сводится к построению решения некоторого функционального уравнения Малюжинца в классе мероморфных функций. Обсуждается поведение решения на больших расстояниях от берега. Старшие слагаемые в асимптотике являются суммой поверхностной падающей и отраженной волн. В окрестности береговой линии решение остается ограниченным. Это является физически и математически обоснованным поведением в отличие от результата работы Эренмарка [2], в которой решение имеет логарифмическую особенность на береговой линии.

В разд. 4 обсуждается альтернативное представление для решения в виде интеграла Ватсона–Бесселя [8]. В отличие от собственных функций дискретного спектра, для которых могут быть использованы интегральные представления Конторовича–Лебедева [9], так как соответствующие подынтегральные выражения быстро убывают, для обобщенных собственных функций существенного спектра представления Конторо-

вича – Лебедева должны быть заменены на интегралы Ватсона–Бесселя. Неизвестная подынтегральная функция удовлетворяет функционально-разностному уравнению второго порядка, которое, как показано далее, эквивалентно функциональному уравнению Малюжинца из предыдущего раздела.

**2. Постановка задачи.** Для того, чтобы найти потенциал (1.1) в нашей задаче, необходимо найти решение  $u(x, y)$  и, значит, сформулировать задачу для  $u = u(x, y)$  в угле (рис. 1,б). Остановимся на классической постановке.

Прямой подстановкой в уравнение Лапласа (1.2) находим, что  $(0 < \kappa^2 \leq \gamma^2)$

$$-\Delta u = -\kappa^2 u \text{ в } W, \quad (2.1)$$

$E = -\kappa^2$  спектральный параметр, из условия (1.3) на свободной поверхности имеем краевое условие Робена–Стеклова

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \gamma u \right) \right|_F = 0; \quad \gamma = \omega^2/g \quad (2.2)$$

и, аналогично, на дне  $B$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_B = 0 \quad (2.3)$$

Решение должно удовлетворять условию Мейкснера вблизи угловой точки, (см. разд. 2.2 в книге [10], где подробно обсуждается условие Мейкснера)

$$u = C + O(r^{\delta_1}); \quad \delta_1 > 0, \quad (2.4)$$

$C$  – константа. Здесь и в дальнейшем будут использоваться полярные координаты  $(r, \varphi)$ :  $x = r \cos(\varphi - \Phi)$ ,  $y = r \sin(\varphi - \Phi)$ , связанные с линией  $B$ ,  $\varphi = 0$ ,  $r > 0$ ,  $\Phi < \pi/2$  (рис. 1,в).

Обратимся к условию на бесконечности,  $r \rightarrow \infty$ . Асимптотика решения имеет вид

$$u(x, y) = e^{-i\sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}x + \gamma y} + u_*(x, y), \quad (2.5)$$

где  $u_*(x, y)$  определяется отраженной волной  $u_r$ , которая ограничена при  $r \rightarrow \infty$  (а, значит, везде) и локализована в окрестности свободной поверхности  $F$ , см. [6]. Далее будут уточнены оценки  $u_*$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Нетривиальность решения задачи (2.1)–(2.5) определяется заданием  $u_\infty(x, y; \kappa) = e^{-ik_x + \gamma y}$ ,  $k_x = \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}$  в асимптотике (2.5) и свойствами спектра оператора, отвечающего задаче, что обсуждается ниже. Решение  $u$  дважды непрерывно дифференцируемо в  $W$  и имеет непрерывные производные на границе  $F$  и  $B$ .

С задачей (2.1)–(2.5) связан полуограниченный самосопряженный оператор  $A_\gamma = A_\gamma^*$ , который определяется полуторалинейной полуограниченной формой  $a_\gamma$ ,

$$a_\gamma[u, u] = \int_W |\nabla u|^2 dx dy - \gamma \int_{\partial W} |u|^2 ds; \quad u \in H^1(W)$$

Эта форма замыкаема и однозначно порождает полуограниченный самосопряженный оператор  $A_\gamma$  (см. [7] и ссылки в ней). Спектр этого оператора  $\sigma(A_\gamma)$  состоит из конечного числа  $N_\Phi$  собственных чисел, расположенных левее

$-\gamma^2$ ,  $E_m = -\kappa_m^2 = -\frac{\gamma^2}{\sin^2(\Phi[2m - 1])}$ ;  $m = 1, 2, \dots, N_\Phi$ , и существенного спектра

$\sigma_e(A_\gamma) = [-\gamma^2, \infty)$ . Собственные функции находятся в элементарной форме (волны Урссла, см., напр., [5]). В настоящей работе фактически строятся интегральные представления для обобщенных собственных функций непрерывного (существенного) спектра для отрезка спектра  $-\gamma^2 \leq -\kappa^2 < 0$ ,  $E = -\kappa^2$ . В соответствии с их асимпто-

тикой при  $r \rightarrow \infty$  эти решения связываются с рассеянием поверхностной волны, бегущей наклонно к береговой линии и отражающейся от нее в виде уходящей поверхностной волны. Вычисляется соответствующий коэффициент отражения.

**3. Интегральное представление Зоммерфельда и функциональные уравнения Малюжинца.** Решение задачи (2.1)–(2.5) ищется в виде интеграла Зоммерфельда

$$u(r, \varphi; \kappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{kr \cos z} f(z + \varphi) dz, \tag{3.1}$$

где контур  $\Gamma$  состоит из двух петель  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  и показан на рис. 2.

Неизвестная пока функция  $f$  (в интеграле Зоммерфельда ее называют еще трансформантой Зоммерфельда) принадлежит классу  $M$  мероморфных функций, т. е. таких, что

- $f$  голоморфна в полосе  $\Pi\left(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < \frac{\pi}{2} + \Phi\right\}$ ,
- $f$  не имеет особенностей вне полосы  $|\Im z| < b_*$  для некоторого  $b_* > 0$ ,
- $f(\pm i\infty)$  существуют и  $f(i\infty) = -f(-i\infty)$ , справедлива оценка

$$|f(z) - f(\pm i\infty)| < C e^{-\delta|\Im z|}, \quad \delta > 0, \quad z \in \Pi\left(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi\right), \quad z \rightarrow \pm i\infty,$$

$f$  имеет полюсы в  $z = \pm z_0$ ,  $z_0 = \frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0$ ,  $\tau_0 = \operatorname{arcch}(\omega^2/g\kappa)$ ,  $\operatorname{ch}(\tau_0) = \gamma/\kappa > 1$ , т. е.  $f(z) - \frac{\beta/2}{z \mp z_0}$  голоморфны в проколотой окрестности точек  $z = \pm z_0$  и не имеет других особенностей на границе полосы. Постоянная  $\beta$  будет выбрана далее.

Последние два условия нуждаются в комментариях. Ограниченность  $f$  на  $\pm i\infty$  и соответствующая оценка эквивалентны условию Мейкснера (2.4), а наличие полюсов  $f$  в точках  $z = \pm z_0$  с заданными вычетами связано с необходимостью присутствия в асимптотике (2.5) (при  $r \rightarrow \infty$ ) падающей поверхностной волны  $u_\infty$ . Как будет видно далее, при вычислении асимптотики интеграла (3.1) по методу прева-

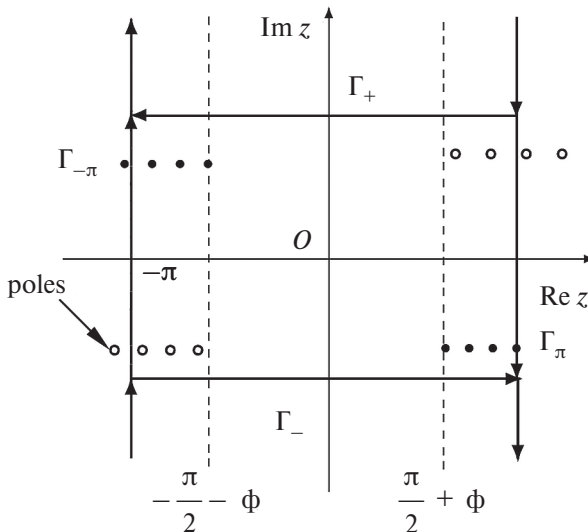


Рис. 2

ла приходится деформировать контур  $\Gamma$  в перевальные  $\Gamma \rightarrow \Gamma_{+\pi} \cup \Gamma_{-\pi}$ , пересекая полюсы трансформанты Зоммерфельда  $f$ . В частности,  $z + \varphi = \pm z_0$  дают вклад в асимптотику и определяют бегущую наклонно к берегу падающую волну под углом скольжения  $\alpha$ . Вычеты  $f$  в этих полюсах пропорциональны неизвестной постоянной  $\beta$ , которая находится из условия того, что вклад этих вычетов должен совпасть с единичной амплитудой падающей волны.

Если  $f \in M$ , то интеграл Зоммерфельда быстро и равномерно по  $(r, \varphi)$  сходится, и прямой подстановкой проверяется, что он удовлетворяет уравнению (2.1), см. также [10]. Краевое условие (2.3) на дне выполнено, если

$$f(z) + f(-z) = 0,$$

т.е.  $f$  нечетна. Действительно, пользуясь симметрией контура  $\Gamma$  интеграл (3.1) записывается в виде

$$u(r, \varphi; \kappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} \frac{1}{2} \{f(z + \varphi) - f(-z + \varphi)\} dz,$$

или, учитывая, что  $f(z) = -f(-z)$ , имеем

$$u(r, \varphi; \kappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} \frac{1}{2} \{f(z + \varphi) + f(z - \varphi)\} dz \tag{3.2}$$

Из представления (3.2) и дифференцирования под знаком интеграла следует краевое условие (2.3),  $\varphi = 0$ .

Обратимся к краевому условию (2.2) на свободной поверхности,  $\varphi = \Phi$ . Прямая подстановка интеграла (3.1) в краевое условие и интегрирование по частям приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} \left( f'(z + \Phi) - \frac{\gamma}{\kappa} \kappa r f(z + \Phi) \right) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} \left( \sin z f(z + \Phi) - \frac{\gamma}{\kappa} f(z + \Phi) \right) = 0 \end{aligned}$$

Используем теорему Малюжинца об обращении интеграла Зоммерфельда в ноль для  $f \in M$  (см. [11, § 3.4], получим функциональное уравнение (Малюжинца)

$$\left( \sin z - \frac{\gamma}{\kappa} \right) f(z + \Phi) - \left( -\sin z - \frac{\gamma}{\kappa} \right) f(-z + \Phi) = 0 \tag{3.3}$$

Тем самым, можно утверждать, что справедлива

*Лемма 1.* Если нечетная мероморфная функция  $f \in M$  является решением функционального уравнения (3.3), то интеграл Зоммерфельда (3.1) (или (3.2)) удовлетворяет уравнению (2.1) и краевым условиям (2.2), (2.3) в классическом смысле.

Как следует из этого утверждения, ключевым обстоятельством построения решения является вычисление решения  $f$  уравнения (3.3), такого, что  $f \in M$  и является нечетным. Именно этому посвящена оставшаяся часть данного раздела, а также обсуждению условий (2.4), (2.5).

Обратимся к построению подходящего решения  $f$  функционального уравнения (3.3). Представим искомую трансформанту в виде

$$f(z) = F(z) + \psi_i(z), \quad F(z) = f_0(z)S(z), \tag{3.4}$$

где

$$\psi_i(z) = \frac{\beta}{2} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{z + z_0}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{z - z_0}{2}} \right\}$$



имеет полюсы в двух точках  $z = \pm z_0$ . Напомним, что вклад этих полюсов в асимптотику при вычислении ее из интеграла Зоммерфельда обеспечит присутствие выражения падающей поверхностной волны в асимптотике. Неизвестная функция  $F(z)$  в (3.4) представлена произведением двух мероморфных вспомогательных функций  $f_0(z)$  и  $S(z)$ . Их роль в построении решения уравнения (3.3) описывается следующей леммой.

*Лемма 2.* Пусть  $f_0(z)$  является четным мероморфным решением уравнения

$$(\sin z - \sin \theta)f_0(z + \Phi) - (-\sin z - \sin \theta)f_0(-z + \Phi) = 0, \quad (3.5)$$

где  $\sin \theta = \frac{\gamma}{\kappa}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} + i\tau_0$ ,  $\operatorname{ch} \tau_0 = \frac{\gamma}{\kappa} > 1$ . Кроме того,  $f_0$  не имеет полюсов внутри полосы  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$  и  $f_0(z) = O\left(\cos \frac{\pi z}{2\Phi}\right)$  при  $z \rightarrow \pm i\infty$  в этой полосе. Предположим также, что  $S(z)$  это нечетное мероморфное решение уравнения

$$S(z + \Phi) - S(-z + \Phi) = (-1) \left\{ \frac{\psi_i(z + \Phi)}{f_0(z + \Phi)} - \frac{\psi_i(-z + \Phi)}{f_0(-z + \Phi)} \right\}, \quad (3.6)$$

причем,  $F(z) = f_0(z)S(z) = O(1)$  при  $z \rightarrow \pm i\infty$  в  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ ,  $S(\cdot)$  голоморфна в этой полосе. Тогда искомая трансформанта  $f \in M$  задается выражениями (3.4) и обеспечивает требуемые свойства интеграла Зоммерфельда (3.2) как решения задачи (2.1)–(2.5).

Отметим, что  $f_0$  не принадлежит классу  $M$  мероморфных функций, тогда как  $f$  после ее построения будет принадлежать. Проверка этого утверждения проводится прямой подстановкой выражения (3.4) в уравнение (3.3) и использованием уравнений (3.5) и (3.6). Напомним, что  $f_0(z + \Phi) = -\frac{\sin z + \sin \theta}{\sin z - \sin \theta} f_0(z - \Phi)$ .

*Лемма 3.* Существует четное мероморфное решение  $f_0$  уравнения (3.5), которое голоморфно в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$  и в этой полосе задается выражением

$$f_0(z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\zeta \log \left( \frac{\cos \frac{\pi z}{\Phi} + \cos \frac{\pi \zeta}{\Phi}}{1 + \cos \frac{\pi \zeta}{\Phi}} \right) W_0(\zeta) \right\},$$

где

$$W_0(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \log(-R(\zeta, \theta)) = W_0(-\zeta), \quad W_0(\zeta) = O\left(\frac{1}{\cos \zeta}\right), \quad \zeta \rightarrow \pm i\infty$$

$$R(\zeta, \theta) = \frac{\sin \zeta + \sin \theta}{\sin \zeta - \sin \theta}$$

Ветвь  $\log(-R(z, \theta))$  выделена условием  $\log(-R(z, \theta)) \Big|_{z=i\infty} = -i\pi$ , а разрезы проведены из точек  $\frac{\pi}{2} + i\tau_0$ ,  $\frac{\pi}{2} - i\tau_0$ ,  $-\frac{\pi}{2} + i\tau_0$ ,  $-\frac{\pi}{2} - i\tau_0$  на  $+\infty$  или  $-\infty$  параллельно вещественной оси, не пересекая полосу  $\Pi(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , из каждой точки. Мероморфное продолжение  $f_0$  из полосы голоморфности проводится с помощью уравнения (3.5).

Проведем вычисление, приводящее к утверждению Леммы 3. Из уравнения (3.5) для логарифмической производной  $f_0$ ,

$$\chi_0(z) = \frac{d}{dz} \log f_0(z), \quad z \in \Pi\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

получаем уравнение

$$\chi_0(z + \Phi) - \chi_0(z - \Phi) = W_0(z), \tag{3.7}$$

причем  $\chi_0(z) = -\chi_0(-z)$ . Воспользуемся преобразованием Фурье по мнимой оси

$$\chi_0(z) = -\frac{v \cdot p}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} W(t) dt, \quad W(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{it\zeta} \chi_0(\zeta) d\zeta$$

Аналогично имеем

$$W_0(z) = -\frac{v \cdot p}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} r_0(t) dt, \quad r_0(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{it\zeta} W_0(\zeta) d\zeta$$

Из уравнения (3.7) следует

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} W(t) (-2i) \frac{[e^{-i\Phi t} - e^{i\Phi t}]}{(-2i)} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} r_0(t) dt,$$

откуда получаем

$$W(t) = \frac{ir_0(t)}{2\sin(\Phi t)},$$

$\chi_0(z)$  восстанавливается обратным преобразованием,  $|\Re z| < \Phi$ ,

$$\begin{aligned} \chi_0(z) &= -\frac{v \cdot p}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} \frac{ir_0(t)}{2\sin(\Phi t)} dt = -\frac{i}{4\pi} v \cdot p \cdot \int_{-i\infty}^{i\infty} dt \frac{e^{-izt}}{\sin(\Phi t)} \left( \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{it\tau} W_0(\tau) d\tau \right) = \\ &= \left( -\frac{i}{4\pi} \right) \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \left\{ v \cdot p \cdot \int_{-i\infty}^{i\infty} dt \frac{e^{it(\tau-z)}}{\sin(\Phi t)} \right\} = \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \left( \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{i \sin(t(\tau-z))}{\sin(\Phi t)} dt \right) = \\ &= \frac{1}{4\Phi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2\Phi} [z - \tau] \right) = \frac{1}{4\Phi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2\Phi} [z - \tau] \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2\Phi} [z + \tau] \right) \right\}, \end{aligned}$$

где переставлен порядок интегрирований и использована формула 3.981 из [12]. Дополнительным интегрированием восстановим вспомогательное решение  $f_0$ ,

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \exp \left\{ \int_0^z \chi_0(\zeta) d\zeta \right\} = \exp \left\{ \int_0^z d\zeta \left[ \frac{-i}{4\Phi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Phi} \zeta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{\Phi} \tau\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\Phi} \zeta\right)} \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \log \left( \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{\Phi} \tau\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{\Phi} z\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\Phi} \tau\right)} \right) \right\}; \quad |\Re z| < \frac{\pi}{2} + \Phi, \end{aligned}$$

где  $\log(\dots)|_{z=0} = 0$ .

Пояснения требует голоморфность функции  $f_0(\cdot)$  в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ , тогда как голоморфность при  $|\Re z| < \Phi$  очевидна (знаменатель  $\cos\frac{\pi}{\Phi} z + \cos\frac{\pi}{\Phi} \tau$  не обращается в ноль в этой полосе, если  $\tau \in i\mathbb{R}$ ). Оказывается, что можно продеформировать контур интегрирования  $i\mathbb{R}$  в последнем интеграле вправо  $i\mathbb{R} \rightarrow i\mathbb{R} + h$ ,  $0 < h < \frac{\pi}{2}$ , так как  $W_0(\cdot)$  голоморфна в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Тогда  $f_0(\cdot)$  голоморфна в полосе  $\Pi(0, \Phi + h)$  и по четности в полосе  $\Pi(-h - \Phi, \Phi + h)$ ,  $0 < h < \frac{\pi}{2}$ . Используя принцип аналитического продолжения, получаем голоморфность в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ .

Совершенно аналогично строится частное решение уравнения (3.6), (см. [10, §7.3.2])

$$\begin{aligned}
 S(z) &= \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \chi(\tau) \frac{\sin \frac{\pi}{2\Phi} \tau}{\cos \frac{\pi}{2\Phi} \tau - \sin \frac{\pi}{2\Phi} z} - \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \chi(\tau) \frac{\sin \frac{\pi}{2\Phi} \tau}{\cos \frac{\pi}{2\Phi} \tau + \sin \frac{\pi}{2\Phi} z} = \\
 &= \frac{i}{2\Phi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \chi(\tau) \frac{\sin \frac{\pi}{2\Phi} \tau \sin \frac{\pi}{2\Phi} z}{\cos \frac{\pi}{\Phi} \tau + \cos \frac{\pi}{\Phi} z},
 \end{aligned}$$

где

$$\chi(z) = - \left\{ \frac{\psi_i(z + \Phi)}{f_0(z + \Phi)} - \frac{\psi_i(-z + \Phi)}{f_0(-z + \Phi)} \right\} \text{ и } |\Re z| < \frac{\pi}{2} + \Phi$$

Мероморфное продолжение  $S$  на комплексную плоскость осуществляется с помощью функционального уравнения (3.6). Отметим, что  $S(z) = -S(-z)$

и  $S(z) = O\left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2\Phi} z}\right)$  при  $z \rightarrow \pm i\infty$  в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ . Вместе с асимптотикой для  $f_0(z)$  при  $z \rightarrow \pm i\infty$  последняя оценка означает, что

$$f(z) = f(\pm i\infty) + O\left(e^{\pm i\delta z}\right); \quad z \rightarrow \pm i\infty, \quad \delta > 0,$$

что эквивалентно условиям Мейкснера (2.4).

Остается убедиться в справедливости условия на бесконечности (2.5) и конкретизировать выражение  $u_*$ . Для этого обратимся к вычислению асимптотики интеграла Зоммерфельда (3.1). Асимптотика  $u(r, \varphi; \kappa)$  при  $r \rightarrow \infty$  вычисляется применением метода перевала к интегралу Зоммерфельда (3.2). Точки перевала  $z = \pm \pi$  удовлетворяют уравнению  $(\cos z)' = 0$ , а перевальные контуры совпадают с  $\Gamma_{+\pi}$  и  $\Gamma_{-\pi}$  на рис. 2. При деформации  $\Gamma$  в перевальные контуры  $\Gamma_{\pm\pi}$  захватываются полюсы  $f(z + \varphi)$  мероморфной трансформанты Зоммерфельда. Как установлено при построении  $f(\cdot)$ , трансформанта не имеет полюсов внутри полосы  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ . Ближайшие к мнимой оси полюсы расположены на границе полосы и дают основной вклад в асимптотику, тогда как остальные полюсы вносят экспоненциально малый вклад при  $r \rightarrow \infty$ , а вклад точек перевала имеет порядок  $O\left(\frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{r}}\right)$ . Тем самым, для вычисления ограниченного старшего члена асимптотики необходимо найти все полюсы на границе полосы  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ . Два симметричных относительно начала полюса определяют заданную падающую волну в (3.1),

$$z + \varphi = z_0, \quad z + \varphi = -z_0; \quad z_0 = \frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0$$

и, тем самым, постоянную  $\beta$  в выражении (3.4) для  $f$ . При деформации  $\Gamma$  в перевальные эти полюсы пересекаются и дают вклад в асимптотику по теореме о вычетах. С изменением  $\varphi \in [0, \Phi]$  эти полюсы мигрируют, и их вклад ограничен лишь для  $\varphi = \Phi$ . Для остальных направлений он экспоненциально мал,  $r \rightarrow \infty$ . Оказывается, что помимо этих полюсов, отвечающих падающей поверхностной волне, существуют два полюса, которые также дают ограниченный вклад в асимптотику при  $\varphi = \Phi$ . Найдем эти полюсы и вычеты в них. Для этого рассмотрим функциональное уравнение (3.3), записанное в виде  $(\theta = \frac{\pi}{2} + i\tau_0)$

$$f(\zeta) = \frac{\sin(\zeta - \Phi) + \sin\theta}{\sin(\zeta - \Phi) - \sin\theta} f(\zeta - 2\Phi)$$

Из-за нечетности  $f(\cdot)$  достаточно рассмотреть  $\Re z > 0$ . Если  $\zeta$  принадлежит малой окрестности  $\Re z = \frac{\pi}{2} + \Phi$ , то  $\zeta - 2\Phi$  находится в области голоморфности  $f(\cdot)$ . Поэтому все особенности правой части (полюсы) определяются решениями уравнения  $\sin(\zeta - \Phi) - \sin\theta = 0$ , которые лежат в малой окрестности  $\Re z = \frac{\pi}{2} + \Phi$ . Это полюс

$\zeta = \pi - \theta + \Phi = \frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0$ . Симметричный полюс находится в  $\zeta = -(\frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0)$ . Соответствующий вычет  $f(\cdot)$  имеет вид

$$\operatorname{res}_{z=\zeta} f(z) = 2 \operatorname{tg} \theta f\left(\frac{\pi}{2} - \Phi - i\tau_0\right), \quad \zeta = \frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0$$

Вычет  $f$  в полюсах  $\zeta = \pm(\frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0)$ , отвечающих падающей волне, пропорционален постоянной  $\beta$ . Вклад этих полюсов в асимптотику определяется величиной  $4 \operatorname{tg} \theta f(\pi/2 - \Phi + i\tau_0)$ , которую надо приравнять единице, т.е. амплитуде падающей волны,  $\exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0 - \varphi)) = u_\infty$ . Это определяет постоянную  $\beta$ .

Учитывая сказанное выше, приходим к асимптотике при  $r \rightarrow \infty$

$$u(r, \varphi) = \exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0 - \varphi)) + R \exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0 - \varphi)) + \delta u \quad (3.8)$$

$$R = 4 \operatorname{tg} \theta f\left(\frac{\pi}{2} - \Phi - i\tau_0\right),$$

где  $\delta u$  экспоненциально мало равномерно по  $\varphi$  при  $\varphi \in [0, \Phi]$  по сравнению с первыми двумя слагаемыми. Второе слагаемое — это отраженная поверхностная волна с коэффициентом отражения  $R$ . Первое слагаемое в (3.8) падающая поверхностная волна

$$u_\infty = \exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0 - \varphi)) = \exp(-ik_x x + \gamma y); \quad k_x = \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2},$$

а второе слагаемое

$$u_r = R \exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0 - \varphi)) = R \exp(ik_x x + \gamma y)$$

— отраженная от берега поверхностная волна. Отметим, что бегущая к берегу поверхностная волна отражается от него по закону геометрической оптики: угол падения равен углу отражения. Поправочный член  $\delta u$  имеет порядок  $O(\exp(-kr)/\sqrt{r})$ , если не захватываются другие полюсы, лежащие в полосах  $\frac{\pi}{2} < |\Re(z + \varphi)| < \pi$ . В противном случае поправочный член  $\delta u$  имеет порядок  $O(\exp(-hr))$ , где  $h$  — это модуль вещественной части полюса, лежащего в полосах  $\frac{\pi}{2} < |\Re(z + \varphi)| < \pi$ , ближайшего к мнимой оси.

Основной результат данного раздела сформулируем в виде следующего Предложения.

**Предложение 1.** Существует классическое решение задачи (2.1)–(2.5), представленное интегралом Зоммерфельда (3.1) и имеющее в старшем порядке по  $r \rightarrow \infty$  асимптотику  $u_\infty + u_r$  в виде суммы падающей и отраженной волн.

Авторы статьи убеждены, что решение единственно, хотя доказательство этого факта требует отдельного обсуждения.

**4. Интегральное представление Ватсона–Бесселя и функционально-разностное уравнение второго порядка. Связь с интегралом Зоммерфельда.** В этом разделе рассматривается альтернативное представление для решения задачи (2.1)–(2.5), а именно представление Ватсона–Бесселя (ВБ), и проясняется его связь с интегралом Зоммерфельда (3.1). Представление ВБ является естественной заменой интегральному представлению Конторовича–Лебедева (КЛ), которое было успешно использовано при построении собственных функций дискретного спектра [8]. Однако, в нашем случае построение решения для существенного (непрерывного) спектра ( $-\gamma^2 \leq E = -\kappa^2 < 0$ ) представление КЛ не подходит ввиду проблем со сходимостью интеграла КЛ и возможностью подставлять это представление в краевое условие на  $F$ . Этого недостатка лишено представление ВБ. С этой проблемой сталкивается и автор работы [2] при проверке условия на свободной поверхности ([2, Appendix D]), причем, его мотивировка не выглядит достаточно прозрачной и убедительной.

Второе обстоятельство, которое стоит здесь прокомментировать, состоит в том, что как представление ВБ, так и представление КЛ не приспособлены для вычисления асимптотики при  $r \rightarrow \infty$ . Однако, эта задача решена с помощью интеграла Зоммерфельда в предыдущем разделе. Отметим, что представление ВБ для решения позволяет построить асимптотическое разложение при  $r \rightarrow 0$  довольно просто и эффективно, хотя этот анализ здесь опускается.

Представление ВБ имеет вид

$$u(r, \varphi) = iv \cdot p \cdot \int_{C_0^b} e^{-i\pi v/2} J_\nu(ikr) \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\varphi)} H(v) dv, \quad (4.1)$$

где  $H(\cdot)$  неизвестная мероморфная функция, принадлежащая специальному классу  $\mathbf{H}$ , описанному ниже, и такая, что интеграл ВБ в (4.1) быстро сходится на контуре  $C_0^b$ , рис. 3. Представление (4.1) удовлетворяет уравнению (2.1) и краевому условию (2.3), если, в частности, неизвестная функция  $H$  принадлежит классу  $\mathbf{H}$ , который задается условиями

1.  $H$  мероморфная четная функция,  $H(v) = H(-v)$ .
2.  $H$  голоморфна в  $\Pi_\delta = \{v \in \mathbb{C} : -\delta < \Re v < \delta\}$  для некоторого  $\delta > 0$ .
3. Все полюсы  $H$  находятся внутри полосы  $|\Im v| < b$  для некоторого  $b > 0$ .
4.  $|H(v)| < \text{Const exp}(-|v| \sin|\psi| \frac{\pi}{2})$ ,  $|v| \rightarrow \infty$ ,  $\pm\psi \in [0, \pi/2]$  при  $v = |v| \exp(i\psi)$  вне полосы  $|\Im v| < b$ .
5.  $H(v+1)$  голоморфна в полосе  $\Pi(-1, 0)$ ,  $H(v-1)$  голоморфна в полосе  $\Pi(0, 1)$ .

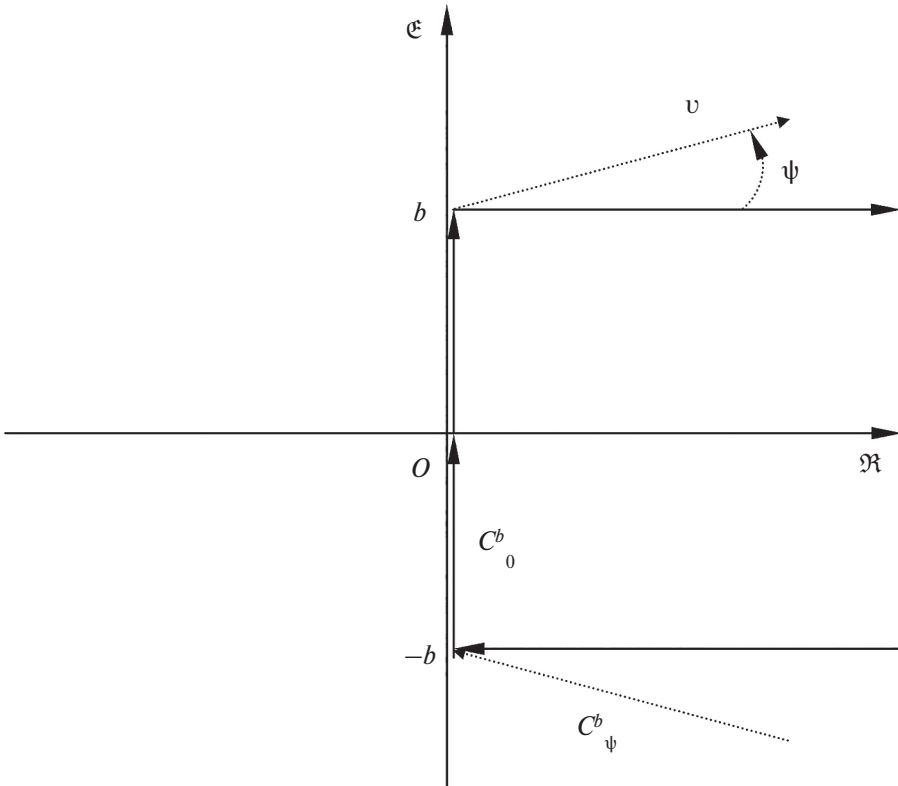


Рис. 3

Прямой подстановкой интеграла (4.1) в уравнение (2.1) и краевое условие (2.4) можно убедиться в их выполнении. Учтем, что

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \left( 1 + \frac{v^2}{z^2} \right) \right\} J_\nu(iz) = 0 \text{ и } \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + v^2 \right) \cos(v\varphi) = 0$$

Возможность подстановки и дифференцирования под знаком интеграла обеспечивается быстрой сходимостью интеграла ввиду оценки на  $C_\psi^b$  и  $|v| \gg 1$ ,  $\psi \in [0, \pi/2]$ ,

$$\left| e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ikr) \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\varphi)} H(v) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|v|}} \left| e^{-i\pi\nu/2} \frac{\exp\{-v(\log v - 1) + v \log \frac{ikr}{2}\}}{\exp\{\frac{\pi\nu}{2} \sin|\psi|\}} \right| \leq \\ \leq \frac{C}{\sqrt{|v|}} \exp\{-|v|([\log|v| - 1] - \log \frac{kr}{2}) \cos \psi + |v|[\psi \sin|\psi| - \frac{\pi}{2} \sin|\psi|]\},$$

где использованы асимптотики  $J_\nu(z) \sim (z/2)^\nu / \Gamma(\nu + 1)$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $\nu \in C_\psi^b$ , а также формулу Стирлинга для гамма-функции.

Подстановка интеграла ВБ в краевое условие (2.2) позволяет получить функционально разностные уравнения второго порядка для  $H$ , которое ему эквивалентно (см. [9, 13]). Однако, здесь используется немного иной путь. Устанавливается связь между интегралом ВБ в (4.1) и представлением Зоммерфельда (3.1), а затем проверяется “равносильность” функционального уравнения Малюжинца (3.3) и функционально разностного уравнения для его решения  $H$  как результат установленной связи.

Стоит прокомментировать сходимость при  $\nu = 0$  в смысле главного значения в (4.1). Интеграл в (4.1) может быть представлен суммой интегралов по отрезку  $[-ib, ib]$  мнимой оси и по  $C_0^b \setminus [-ib, ib]$  (см. рис. 3). Воспользуемся симметрией отрезка интегрирования  $[-ib, ib]$  относительно начала координат и преобразуем интеграл по нему с целью его регуляризации при  $\nu = 0$ ,

$$i\nu.p. \int_{-ib}^{ib} \frac{e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ikr) + e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ikr) \cos(v\varphi)}{2 \sin(v\varphi)} H(v) dv = \\ = \frac{i}{\pi} \nu.p. \int_{-ib}^{ib} \frac{\pi \left( e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ikr) - e^{i\pi\nu/2} J_{-\nu}(ikr) \right) \sin(\pi\nu)}{2 \sin(\pi\nu) \sin(\Phi\nu)} \cos(v\varphi) H(v) dv = \\ = \frac{i}{\pi} \int_{-ib}^{ib} K_\nu(kr) \frac{\sin(\pi\nu) \cos(v\varphi)}{\sin(v\Phi)} H(v) dv,$$

где для функции Макдональда  $K_\nu(z)$  использована формула 8.485 [12]. В последнем интеграле очевидно, что  $\nu = 0$  является устранимой особенностью, и интеграл (4.1) допускает регуляризацию при  $\nu = 0$ .

Обратимся теперь к связи интеграла ВБ в (4.1) с интегралом Зоммерфельда. Воспользуемся интегральным представлением

$$J_\nu(ikr) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_-} e^{kr \cos z} e^{i\pi\nu/2 - iz\nu} dz,$$

которое следует из 8.412(4) в [12], подставим в (4.1) и поменяем порядки интегрирования, что оправдано при  $H \in \mathbf{H}$ ,

$$u(r, \varphi; \kappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} dz e^{kr \cos z} 2 \left\{ \frac{\nu.p.}{2} \int_{C_0^b} e^{-iz\nu} \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\Phi)} H(v) dv \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} dz e^{ikr \cos z} 2F_1(z, \varphi), \tag{4.2}$$

где  $\Im z < 0$ ,  $z \in \Pi(-\pi - \delta, \pi + \delta)$ ,  $\delta > 0$ ,

$$F_1(z, \varphi) = \frac{v.p.}{2} \int_{C_0^b} e^{-izv} \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\Phi)} H(v) dv$$

Функция  $F_1(z, \varphi)$  допускает аналитическое продолжение из области  $\{z : \Im z < 0\} \cap \{z : -\pi - \delta < \Re z < \pi + \delta\}$  в полосу  $\Pi(-\pi - \delta, \pi + \delta)$ . Для этого необходимо воспользоваться оценкой  $|H(v)| < C \exp\{-\frac{\pi}{2}|v|\sin\psi\}$ ,  $\psi \in [0, \pi/2]$ , так как  $H \in \mathbf{H}$ . В действительности, справедлива асимптотика  $H(v) = O\left(\frac{1}{\cos(v[\frac{\pi}{2} + i\tau_0])}\right)$ ,  $|v| \rightarrow \pm\infty$  на  $C_\psi^b$  (см. [9]) в аналогичной задаче. Деформируем контур  $C_0^b \rightarrow C_\psi^b \rightarrow C_{\frac{\pi}{2}}^b$ , имеем

$$F_1(z, \varphi) = v.p. \frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv \frac{e^{-izv} \cos(v\varphi)}{2 \sin(\Phi v)} H(v),$$

и, учитывая четность  $H$ ,  $\varphi \in [0, \Phi]$ ,

$$F_1(z, \varphi) = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv \sin(vz) \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(\Phi v)} H(v); |\Re z| < \frac{\pi}{2} \quad (4.3)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} F_1(z, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(v[z + \varphi]) + \sin(v[z - \varphi])}{\sin(\Phi v)} \right\} H(v) = \\ &= \frac{1}{2} \{f(z + \varphi) + f(z - \varphi)\}, \end{aligned}$$

где

$$f(z) = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv \frac{\sin(zv)}{\sin(v\Phi)} H(v) \quad (4.4)$$

или

$$f(z) = v.p. \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-ivz} \frac{H(v)}{2\sin(v\Phi)} dv, |\Re z| < \frac{\pi}{2} + \Phi, \quad (4.5)$$

причем,  $f(\cdot)$  голоморфна в этой полосе. Из представлений (4.2) и (4.3), с учетом того, что  $F_1(z, \varphi) = \frac{1}{2}\{f(z + \varphi) + f(z - \varphi)\}$ , получается интегральное представление Зоммерфельда (3.2).

В предыдущем разделе найдена трансформанта Зоммерфельда  $f(\cdot)$  в замкнутой форме. Естественно, что по  $f(\cdot)$  можно восстановить  $H$  в представлении ВБ (4.1) с использованием (4.4), (4.5). Отметим, что  $f(z) \rightarrow \text{const}$ ,  $z \rightarrow i\infty$  в полосе голоморфности  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ . Проинтегрируем (4.5) при  $z \in \Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ , заметим, что  $f'(z)$  убывает экспоненциально при  $z \rightarrow \pm i\infty$

$$\frac{df(z)}{dz} = v.p. \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-ivz} \frac{vH(v)}{2i\sin(\Phi v)} dv = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos(vz)}{\sin(v\Phi)} vH(v) dv,$$

и применим формулы обращения преобразования Фурье

$$H(v) = \frac{\sin(\Phi v)}{i\pi v} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{ivz} \frac{df(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = \frac{\sin(\Phi v)}{i\pi v} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\zeta \cos(\zeta v) \frac{df(\zeta)}{d\zeta} d\zeta \quad (4.6)$$

$H(\cdot)$  голоморфна в окрестности мнимой оси, можно проверить, что  $H \in \mathbf{H}$  (см. [9]).

Справедливо утверждение

*Лемма 4.* Если  $H \in \mathbf{H}$  является решением функционально-разностного уравнения второго порядка

$$H(v + 1) - H(v - 1) - 2i \frac{\gamma}{\kappa} \left\{ \frac{\text{ctg}(\Phi v)}{(-i)} \right\} H(v) = 0; v \in \mathbb{C}, \quad (4.7)$$

то  $f \in M$  в (4.5) является решением уравнения Малюжинца (3.3) из класса  $M$ . Справедливо и обратное утверждение.

Доказательство Леммы 4 основано на формуле (4.5), имеем

$$-\frac{\gamma}{\kappa} [f(z + \Phi) + f(z - \Phi)] = -\frac{\gamma}{\kappa} \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \sin(vz) \frac{\cos(\Phi v)}{\sin(\Phi v)} H(v) dv$$

и

$$\sin z [f(z + \Phi) - f(z - \Phi)] = \frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv H(v) \{ \sin(z[v + 1]) - \sin(z[v - 1]) \}$$

Складывая эти равенства, получим

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv \left\{ H(v) \sin(z[v + 1]) - H(v) \sin(z[v - 1]) - \frac{\gamma}{\kappa} 2 \sin(vz) \text{ctg}(\Phi v) H(v) \right\} = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{i\mathbb{R}+1} dv \{ H(v - 1) \sin(zv) \} - \frac{1}{2i} \int_{i\mathbb{R}} dv \{ H(v + 1) \sin(zv) \} - \\ &- \frac{1}{2i} \int_{i\mathbb{R}} dv \frac{2\gamma}{\kappa} H(v) \text{ctg}(\Phi v) = \frac{(-1)}{2i} \int_{i\mathbb{R}+1} dv \sin(vz) \left\{ H(v + 1) - H(v - 1) + \frac{2\gamma}{\kappa} \text{ctg}(\Phi v) H(v) \right\}, \end{aligned}$$

где была использована деформация контуров  $i\mathbb{R} \pm 1$  в мнимую ось  $i\mathbb{R}$ , а также учтено, что  $H \in \mathbf{H}$ , т.е.  $H(v + 1)$  голоморфна в  $\Pi(-1, 0)$  и  $H(v - 1)$  голоморфна в  $\Pi(0, 1)$ . Из полученного равенства следует утверждение Леммы 4. Обратное утверждение — это следствие обращения преобразования Фурье по мнимой оси.

Уравнение (4.7) нуждается в комментарии. Его решение из  $\mathbf{H}$  при  $\gamma/\kappa \geq 1$  дается выражением (4.6), где  $f(\cdot)$  вычислена в квадратурах. Коэффициент  $V(v) = \text{ctg}(\Phi v)/(-i)$  называется мероморфным потенциалом в уравнении. Этот потенциал специального вида, который допускает применение процедуры решения аналогичной той, которая используется для линейных дифференциальных уравнений с линейными коэффициентами, т.е. решения посредством интегрального представления Лапласа. Аналогичный прием, применяемый к уравнению (4.7), сводит его к разностному уравнению первого порядка, которое уже допускает решение в квадратурах. В данной работе такой подход не используется, так как уже получено решение уравнения (4.7) в форме интеграла (4.6).

В работе [13] предложен общий подход к изучению спектральных свойств уравнений вида (4.7) с потенциалом из достаточно широкого класса мероморфных функций. Обсуждаются достаточные условия существования дискретного спектра и его конечность. Потенциал  $V(v) = \frac{\text{ctg}(\Phi v)}{(-i)}$  попадает в упомянутый класс, но он выделен тем, что отвечающее ему модельное уравнение (4.7) является явно решаемой моделью.



**Заключительные замечания.** В настоящей работе получены интегральные представления для решения задачи о наклонном распространении поверхностной волны к береговой линии прибрежного водного клина. Решение представлено интегралом Зоммерфельда с трансформантой Зоммерфельда  $f$ , которая является мероморфным решением функционального уравнения. Решение ограничено вблизи береговой линии, а на больших расстояниях представимо суммой падающей и отраженной волн, оценена поправка к старшим членам асимптотики. С другой стороны, решение, полученное в [2] и имеющее логарифмическую сингулярность на береговой линии, не является, по нашему мнению, достаточно обоснованным с физической и математической точки зрения. В частности, его использование для описания физических результатов рассеяния наклонно падающей на берег поверхностной волны не кажется оправданным.

Наряду с представлением Зоммерфельда, получено решение в виде интеграла Ватсона–Бесселя. Показано, что неизвестная функция  $H(v)$  в подынтегральном выражении представима в терминах вычисленной ранее трансформанты Зоммерфельда  $f(z)$  и удовлетворяет разностному уравнению второго порядка с мероморфным потенциалом  $V(v) = \text{ctg}(\Phi v)/(-i)$ .

Насколько нам известно, физически обоснованное решение сформулированной модельной задачи в виде интегральных представлений Зоммерфельда и Ватсона–Бесселя получено впервые. Вычислена асимптотика,  $r \rightarrow \infty$ . Естественно ожидать, что решение может быть использовано в дальнейших качественных и количественных исследованиях волновой динамики жидкости вблизи и на удалении от берега умеренного наклона в рамках используемой модели.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант 22-11-00070, <https://rscf.ru/project/22-11-00070>.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shrira V.I. et al.* Can edge waves be generated by wind? // *J. of Fluid Mech.* 2022. V. 934. P. A16–136.
2. *Ehrenmark U.T.* Oblique wave incidence on a plane beach: The classical problem revisited // *J. of Fluid Mech.* 1998. V. 368. P. 291–319.
3. *Isaacson E.* Water waves over a sloping bottom // *Commun. Pure Appl. Maths.* 1950. V. 3. P. 11–31.
4. *Kuznetsov N., Maz'ya V., Vainberg B.* *Linear Water Waves.* Cambridge: Univ. Press, 2002. 513 p.
5. *Ursell F.* Edge waves on a sloping beach // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.* 1952. V. 214. P. 79–97.
6. *Лялинов М.А.* Комментарий о собственных функциях и собственных числах оператора Лапласа в угле с краевыми условиями Робэна // *Зап. науч. сем. Санкт-Петербургского отд. математического института им. В.А. Стеклова РАН.* 2019. Т. 483. №49. С. 116–127.
7. *Khalile M., Pankrashkin K.* Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors // *Math. Nachrichten.* 2018. V. 291. №5–6. P. 928–965.
8. *Lyalinov M.A.* Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations // *Europ. J. of Appl. Math.* 2021. V. 33. P. 538–559.
9. *Лялинов М.А.* О собственных функциях существенного спектра модельной задачи для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом // *Матем. сб.* 2023. Т. 214(10). С. 3–29.
10. *Babich V.M., Lyalinov M.A., Grikurov V.E.* *Diffraction Theory: The Sommerfeld–Malyuzhinets Technique.* Oxford: Alpha Sci. Int., 2008. 215 p.
11. *Малюжинец Г.Д.* Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн от клина с произвольными поверхностными импедансами // *Докл. АН СССР.* 1985. Т. 3. С. 752–55.
12. *Gradshteyn I.S., Ryzhik M.I.* *Table of Integrals, Series, and Products.* New York: Acad. Press, 2007. 1108 p.
13. *Lyalinov M.A.* Functional difference equations and their link with perturbations of the Mehler operator // *Rus. J. of Math. Phys.* 2022. V. 29. №3. P. 379–397.

## Integral Representations of Solution in the Problem on Skew Incidence of a Surface Wave on the Straight Shoreline Water Wedge

M.A. Lyalinov<sup>a,\*,##</sup>, S.V. Polyanskaya<sup>a,b,###</sup>

<sup>a</sup>*Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

<sup>b</sup>*North-Western Institute of Management RANEPА, St. Petersburg, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: lyalinov@yandex.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: m.lyalinov@spbu.ru*

<sup>###</sup>*e-mail: polyanskaya-sv@ranepa.ru*

In the linear approximation of the surface gravitational waves of small amplitude a classical model problem about the incursion of a surface wave under some angle on the shoreline is solved. The problem is formulated for the harmonic potential of velocity of the fluid in the 3D water wedge with the Robin-Steklov boundary condition on the free surface and with the no-flow condition along the normal on the bed of the water domain. Some critical comments about a known in the literature solution having a “non-physical” singularity of the logarithmic type on the coastal line are given. The asymptotics with respect to distance from the shoreline of the obtained solution, bounded on the edge, is constructed. The reflection coefficient of the wave reflected from the shoreline is calculated.

*Keywords:* surface wave, integral representations, functional equations, asymptotics

### REFERENCES

1. *Shrira V.I. et al.* Can edge waves be generated by wind? // *J. of Fluid Mech.*, 2022, vol. 934, pp. A16–136.
2. *Ehrenmark U.T.* Oblique wave incidence on a plane beach: The classical problem revisited // *J. of Fluid Mech.*, 1998, vol. 368, pp. 291–319.
3. *Isaacson E.* Water waves over a sloping bottom // *Commun. Pure Appl. Math.*, 1950, vol. 3, pp. 11–31.
4. *Kuznetsov N., Maz'ya V., Vainberg B.* *Linear Water Waves.* Cambridge: Univ. Press, 2002. 513 p.
5. *Ursell F.* Edge waves on a sloping beach // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 1952, vol. 214, pp. 79–97.
6. *Lyalinov M.A.* Comment on the eigenfunctions and eigenvalues of the Laplace operator in an angle with Robin boundary conditions // *Proc. Sci. Sem.r of the St. Petersburg Branch of the Steklov Institute of Mathematics of the RAS*, 2019, vol. 483, no. 49, pp. 116–127.
7. *Khalile M., Pankrashkin K.* Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors // *Math. Nachrichten*, 2018, vol. 291, no. 5–6, pp. 928–965.
8. *Lyalinov M.A.* Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations // *Europ. J. of Appl. Math.*, 2021, vol. 33, pp. 538–559.
9. *Lyalinov M.A.* On the eigenfunctions of the essential spectrum of a model problem for the Schrödinger operator with a singular potential // *Matem. sb.*, 2023, vol. 214(10), pp. 3–29.
10. *Babich V.M., Lyalinov M.A., Grikurov V.E.* *Diffraction Theory: The Sommerfeld–Malyuzhinets Technique.* Oxford: Alpha Sci. Int., 2008. 215 p.
11. *Malyuzhinetz G.D.* Excitation, reflection and radiation of surface waves from a wedge with arbitrary surface impedances // *Dokl. AN SSSR*, 1985, vol. 3, pp. 752–755.
12. *Gradshteyn I.S., Ryzhik M.I.* *Table of Integrals, Series and Products.* N.Y.: Acad. Press, 2007. 1108 p.
13. *Lyalinov M.A.* Functional Difference Equations and their link with Perturbations of the Mehler operator // *Rus. J. of Math. Phys.*, 2022, vol. 29, no. 3, pp. 379–397.

УДК 51-73,533

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА РАСЧЕТЫ ДИНАМИКИ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ

© 2024 г. Д. А. Тукмаков<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>ИММ ФИЦ Казанский научный центр РАН, Казань, Россия

\*e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru

Поступила в редакцию 15.02.2024 г.

После доработки 03.05.2024 г.

Принята к публикации 10.06.2024 г.

В работе численно моделируется течение полидисперсной газовзвеси в канале. Несущая среда описывалась как вязкий, сжимаемый, теплопроводный газ. Математическая модель реализовывала континуальную методику динамики многофазных сред, учитывающую взаимодействие несущей среды и дисперсной фазы. Для каждой из компонент смеси решалась полная гидродинамическая система уравнений движения для несущей фазы и фракций дисперсной фазы. Дисперсная фаза состояла из частиц с различными размерами дисперсных включений. Для несущей среды на боковых поверхностях канала задавались однородные граничные условия Дирихле. Для фракций дисперсной фазы граничные условия проскальзывания. Выявлено влияние граничных условий течения несущей среды на динамику фракций газовзвеси.

*Ключевые слова:* континуальная модель, полидисперсная газовзвесь, межфазное взаимодействие, граничные условия

DOI: 10.31857/S0032823524030066 ZAUJXO

**1. Введение.** Динамика неоднородных сред является развивающимся разделом механики жидкости и газа. Отличием от классической гидродинамики однородных сред [1] является то, что в динамике неоднородных сред движение смеси определяется эффектами, связанными с межфазным взаимодействием. В монографии [2] изложены теоретические основы динамики различных неоднородных сред – как гомогенных, так и многофазных смесей, описаны монодисперсные модели динамики газовзвесей. В работе [3] разработаны различные математические модели течений газодисперсных сред с моно и полидисперсным составом частиц, представлены результаты расчетов полидисперсных потоков. В монографии [4] исследованы проблемы движения двухфазных сред – газожидкостных потоков с большими скоростями. Разработаны теоретические основы и методики расчета, также описаны прикладные задачи течений газожидкостных сред. В работе [5] в одномерном приближении, без учета вязкости среды разработаны математические модели динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред приведены результаты численных расчетов. В монографии [6] разработаны математические модели и численные алгоритмы моделирования ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесах металлических частиц, приводятся результаты расчетов.

В статье [7] проведен обзор расчетно-теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению различных видов двухфазных потоков. Описаны и проанализированы результаты исследований двухфазных потоков с твердыми частицами,

каплями и пузырями. Рассмотрены прикладные и фундаментальные исследования динамики газодисперсных сред в трубах, каналах и соплах. В работе [8] численно исследован теплообмен в газокапельном потоке движущемся в канале. Для моделирование дисперсного потока применялся подход Эйлера. Выявлено, что добавление капель приводит к существенному росту теплообмена между стенками канала и движущейся средой в сравнении с движением однофазной среды. В исследовании [9] изучаются волновые и релаксационные эффекты при импульсном истечении смеси газа с большим содержанием твердых частиц из цилиндрического канала. Задача сформулирована в двухскоростной двухтемпературной постановке и решалась численно. Публикация [10] посвящена численному исследованию распространения гетерогенной детонационной волны в смеси частиц алюминия и кислорода в плоском канале с линейным расширением. В серии расчетов изменялся угол наклона стенки. В работе [11] исследовано движение частицы в круглом канале с проницаемыми стенками с учетом действия на нее массовых сил. Определены траектории движения частицы при изменении характерных параметров задачи в широких диапазонах чисел Стокса. В статье [12] разработана методика и алгоритм моделирования динамических характеристик течения газа в цилиндрическом канале при дозвуковой скорости и при наличии дисперсной примеси в газе. Расчеты проводились с целью определения динамических характеристик процессов подачи в конвертеры инертных газов, содержащих дисперсные примеси. В работе [13] изучены характеристики осаждения микронных частиц на стенках круглой или сужающейся–расширяющейся трубок. В рамках подхода Эйлера разработан метод моделирования динамики частиц в трубах. Механизм осаждения частиц модели включал в себя диффузионное осаждение, термофоретическое и гравитационное осаждение. В публикации [14] в рамках подхода Эйлера–Лагранжа проведено численное моделирование движения дисперсных частиц. Моделируются два случая с разными диаметрами частиц. Исследуется накопление частиц вблизи стенок канала и вблизи оси канала. Результаты численных расчетов демонстрируют, что частицы скапливаются в низкоскоростных областях вблизи стенки канала.

В статье [15] исследуются нестационарные течения и оседание дисперсных частиц в дыхательных путях в рамках разработки математической модели дыхательной системы человека. Получены параметры течения газа с твердыми частицами в каналах, приведены поля скоростей и траектории движения твердых частиц различных размеров. В публикации [16] представлены результаты численного моделирования начального этапа импульсного течения газодисперсной смеси в канале, в целях оптимизации технологии порошкового пожаротушения и нейтрализации загрязнений. Рассматривались равномерные и неравномерные начальные концентрации дисперсных частиц. Выявлены физические эффекты отличий струи дисперсной смеси по сравнению с потоком однородной среды. Исследование [17] посвящено моделированию процессов, происходящих при движении порошка в коническом канале системы подачи зернистого материала. Выявлено, что, изменяя давление газовой фазы, можно изменять режимы течения порошково-газовой среды в коническом канале, тем самым влиять на характеристики истекающей порошково-газовой смеси. В работе [18] разработаны газодинамические модели движения многоскоростных континуумов в соплах сложной формы, моделирующих форму двухступенчатого конфузорного воздухоочистителя. Исследовано влияние силового взаимодействия газовой и дисперсной фаз на структуру течения газопылевого потока. В публикации [19] теоретически и экспериментально исследовано удаление частиц в потоке газодисперсной смеси движущейся в трубе. Рассматривалась эффективность удаления дисперсных частиц для различных режимов расхода газодисперсной среды. В статье [20] разработана численная модель движения водной пены под воздействием сильной ударной волны в лагранжевых переменных с учетом межфазного теплообмена и вязкости. Рассчитывалось течение двухфазной среды в цилиндрической области. Иссле-

довано снижение амплитуды и скорости распространения ударной волны в газожидкостной среде за счет межфазного взаимодействия.

В работе [21] с целью оптимизации пылеудаления в шахтах моделируются течение газодисперсного потока. Несущая среда газозвеси описывалась нестационарной системой уравнений Навье–Стокса. Определены оптимальные скорости движения газа в технологии пылеудаления воздушным потоком. В статье [22] численно исследуются процессы очистки газа от твердых взвешенных в газе частиц в аппарате очистки аэрозолей. С целью оптимизации технологии пылеудаления рассматривались конструкции пылеудаляющего устройств с различными расстояниями между вогнутыми пластинами, составляющими основу сепарационного устройства.

В публикации [23] с помощью аналитических методов исследуются процессы очистки газодисперсных сред от тонкодисперсного от мелкодисперсных капель. Рассматривается осаждение аэрозоля на стенках трубок и каналов. Сформулированы закономерности, при которых существенно возрастает осаждение мелкодисперсного капельного аэрозоля на стенках трубок и щелевых каналах осадительного элемента. В статье [24] представлена численная модель электрохимического топливного элемента. Моделируется движение двухфазной газо-жидкостной среды в канале. Динамика жидкой фазы внутри канала численно анализируется при различных рабочих режимах. Количественно оценено содержание жидкой фазы на различных участках канала. В работе [25] исследуется течение двухфазной смеси в трубе с целью оптимизации производительности градирен. Рассматривался процесс предварительного охлаждения при высоких рабочих температурах, предлагается предварительное охлаждение воздуха распылением воды. Разработана трехмерная численная модель Эйлера–Лагранжа для описания распыления испаряющейся жидкости. В публикации [26] с целью моделирования аварийных ситуаций на ядерных реакторах разработана математическая модель газожидкостного течения. Исследованы физические процессы в канале, предназначенном для наблюдения раздела жидкой и газовой фазы. Рассматривались различные механизмы осаждения и уноса капель газовой фазой.

Анализ работ демонстрирует, что исследования по моделированию течений газозвесей, имеющие как практический, так и теоретический характер, направлены как на изучение динамики дисперсных включений в каналах и трубах, так и на исследование процессов, связанных с межфазным взаимодействием в различных течениях газодисперсных сред.

В данной работе рассматривается влияние граничных условий, заданных для течения несущей среды газозвеси на динамику фракций дисперсной фазы, отличающихся размером дисперсных включений. Численная модель реализует континуальную методику моделирования динамики газозвеси, предполагающую учет взаимодействия между дисперсной средой и несущей фазой. Течение несущей среды описывалось двумерной нестационарной системой уравнений Навье–Стокса [27].

**2. Математическая модель.** Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [5, 27–32]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho V^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho V^k V^i + \delta_{ik} p - \tau_{ik}) &= - \sum_{j=1}^n F_{kj} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \nabla^k p \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla^i (V^i (e + p - \tau_{ii}) - V^k \tau_{ki} - \lambda \nabla^i T) &= \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j - \sum_{j=1}^n |F_{kj}| (V^k - V_j^k) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \nabla^k (p V^k) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тензоры вязких напряжений записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{22} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right) \\ \tau_{12} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

Динамика каждой из фракций дисперсной фазы описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_j \mathbf{V}_j) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_j V_j^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho_j V_j^i V_j^k) &= F_{kj} - \alpha_j \nabla^k p \\ \frac{\partial (e_j)}{\partial t} + \nabla^k (e_j V_j^k) &= Q_j\end{aligned}\quad (1.2)$$

Здесь  $p$ ,  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $v_1$  – давление, плотность, декартовы составляющие скорости несущей среды в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $T_1$ ,  $e_1$  – температура и полная энергия газа;  $\rho_j$ ,  $T_j$ ,  $e_j$ ,  $u_j$ ,  $v_j$  – средняя плотность, температура, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости  $j$ -ой фракции дисперсной фазы в направлении осей  $x$ ,  $y$ . Для описания массопереноса фракций дисперсной фазы применялась функция средней плотности [5,6] являющаяся произведением физической плотности, остающейся неизменной на объемное содержание, являющееся функцией временной и пространственных переменных. Температура несущей среды находится из уравнения  $T_1 = (\gamma - 1)(e/\rho_1 - (u_1^2 + v_1^2)/2)/R$ , где  $R$  – газовая постоянная несущей фазы,  $\mu$  – вязкость газа,  $\lambda$  – теплопроводность газа,  $\gamma$  – постоянная адиабаты,  $c$  – скорость звука,  $c = \sqrt{M^{-1}\gamma RT}$ ,  $M$  – молярная масса газа. Внутренняя энергия  $j$ -ой фракции дисперсной фазы определяется как  $e_j = \rho_j C_{pj} T_j$ , где  $C_{pj}$  – удельная теплоемкость единицы массы вещества  $j$ -ой фракции дисперсной фазы, средняя плотность дисперсной фазы вычисляется из выражения  $\rho_j = \alpha_j \rho_{j0}$ , где  $\alpha_j$  – объемное содержание  $j$ -ой фракции дисперсной фазы,  $\rho_{j0}$  – физическая плотность материала  $j$ -ой фракции,  $F_{kj}$  –  $k$ -ая пространственные составляющие силы аэродинамического сопротивления:

$$\begin{aligned}F_{1j} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_j}{d_j} C_d \rho_1 \sqrt{(u - u_j)^2 + (v - v_j)^2} (u - u_j) \\ F_{2j} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_j}{d_j} C_d \rho_1 \sqrt{(u - u_j)^2 + (v - v_j)^2} (v - v_j)\end{aligned}$$

$Q = 6\alpha_j \lambda Nu_j (T - T_j)/d_j^2$  – поток тепла между несущей средой и  $j$ -ой фракцией дисперсной фазы. Здесь  $Nu_j$  – относительное число Нуссельта [5]  $d_j$  – диаметр частицы. Число Нуссельта определяется с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительное число Маха –  $M_j$ , относительное число Рейнольдса –  $Re_j$ , число Прандтля [5] –  $Pr$ :

$$M_j = |\bar{V} - \bar{V}_j|/c, \quad Re_j = \rho |\bar{V} - \bar{V}_j| d_j \mu^{-1}, \quad Pr = C_p \mu \lambda^{-1}$$

$$Nu_j = 2 \exp(-M_j) + 0.459 Re_j^{0.55} Pr^{0.33}, \quad 0 \leq M_j \leq 2, \quad 0 \leq Re_j < 2 \cdot 10^5$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления вычислялся с использованием следующего выражения [5]:

$$C_{dj} = \frac{24}{\text{Re}_j} + \frac{4}{\text{Re}_j^{0.5}} + 0.4$$

Система уравнений (1.1)–(1.2) интегрировалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака второго порядка точности [33]. Для подавления численных осцилляций применялась схема нелинейной коррекции сеточной функции [27, 34]. В конечно-разностной аппроксимации на границах расчетной области для газа и  $k$ -ой фракции дисперсной фазы задавались однородные граничные условия Неймана:

$$\begin{aligned} u(t, 1, j) &= u_0, \quad u_k(t, 1, j) = u_0 \\ v(t, 1, j) &= 0, \quad v_k(t, 1, j) = 0 \\ u(t, N_x, j) &= u(t, N_x - 1, j), \quad u_k(t, N_x, j) = u_k(t, N_x - 1, j) \\ v(t, N_x, j) &= v(t, N_x - 1, j), \quad v_k(t, N_x, j) = v_k(t, N_x - 1, j) \\ u(t, i, 1) &= 0, \quad u_k(t, i, 1) = u_k(t, i, 2) \\ v(t, i, 1) &= 0, \quad v_k(t, i, 1) = v_k(t, i, 2) \\ u(t, i, N_y) &= 0, \quad u_k(t, i, N_y) = u_k(t, i, N_y - 1) \\ v(t, i, N_y) &= 0, \quad v_k(t, i, N_y) = v_k(t, i, N_y - 1) \\ \rho(t, 1, j) &= \rho(t, 2, j), \quad \rho_k(t, 1, j) = \rho_k(t, 2, j) \\ \rho(t, N_x, j) &= \rho(t, N_x - 1, j), \quad \rho_k(t, N_x, j) = \rho_k(t, N_x - 1, j) \\ \rho_1(t, i, 1) &= \rho_1(t, i, 2), \quad \rho_k(t, i, 1) = \rho_k(t, i, 2) \\ \rho_1(t, i, N_y) &= \rho_1(t, i, N_y - 1), \quad \rho_k(t, i, N_y) = \rho_k(t, i, N_y - 1) \\ e(t, 1, j) &= e(t, 2, j), \quad e_k(t, 1, j) = e_k(t, 2, j) \\ e(t, N_x, j) &= e(t, N_x - 1, j), \quad e_k(t, N_x, j) = e_k(t, N_x - 1, j) \\ e(t, i, 1) &= e(t, i, 2), \quad e_k(t, i, 1) = e_k(t, i, 2) \\ e(t, i, N_y) &= e(t, i, N_y - 1), \quad e_k(t, i, N_y) = e_k(t, i, N_y - 1) \\ p(t, 1, j) &= p(t, 2, j), \quad p(t, N_x, j) = p(t, N_x - 1, j) \\ p(t, i, 1) &= p(t, i, 2), \quad p(t, i, N_y) = p(t, i, N_y - 1) \end{aligned}$$

Здесь  $N_x, N_y$  – количество узлов,  $i, j$  – нумерация узлов в  $x$  и  $y$  направлениях соответственно. В работе [28] проводилось сопоставление результатов численных расчетов, проведенных по описанной модели с результатами физического эксперимента и аналитическими расчетами.

**3. Результаты расчетов.** В расчетах задавались следующие параметры несущей фазы газозвеси:  $M = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль – молярная масса воздуха, теплопроводность несущей среды предполагалась равной –  $\lambda = 0.02553$  Вт/(м·К), динамическая вязкость несущей среды –  $\mu = 1.72 \cdot 10^{-5}$  Па·с,  $\gamma = 1.4$ ,  $R = 8.31$  Дж/(моль·К). Начальная плотность несущей среды –  $\rho_0 = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>. В работе моделировалось течение полидисперсной газозвеси. Моделируемая область течения представляет собой прямо-

угольный канал с длиной сторон  $L = 0.4$  м и шириной  $h = 0.1$  м (рис. 1), на входе в канал задаются начальные значения продольной составляющей скорости несущей среды и фракций дисперсной фазы  $u_0 = 17$  м/с. Физическая плотность материала фракций дисперсной фазы  $\rho_{i0} = 2500$  кг/м<sup>3</sup>, начальное объемное содержание фракций дисперсной фазы  $\alpha_{i0} = 0.00008$ . Фракции дисперсной фазы имели диаметры частиц соответственно  $d_1 = 2$  мкм,  $d_2 = 4$  мкм,  $d_3 = 8$  мкм,  $d_4 = 20$  мкм,  $d_5 = 40$  мкм.

В представленных численных расчетах предполагалось, что при описании движения несущей среды для составляющих скорости газа задавались однородные граничные условия Дирихле на боковых поверхностях канала. Для всех фракций дисперсной фазы на боковых поверхностях канала задавались однородные граничные условия Неймана.

На рис. 2 представлено пространственное распределение модуля скорости однородного газа и несущей среды полидисперсной газовзвеси. За счет межфазного взаимодействия несущей среды и фракций дисперсной фазы значение модуля скорости несущей среды имеет меньшее значение, чем в однородном газе.

На рис. 3 представлены пространственные распределения модуля скорости несущей среды – рис. 3, а и фракций дисперсной фазы с различными размерами дисперсных включений – рис. 3, б–г; в момент времени  $t = 30$  мс. Пространственное распределение модуля скорости несущей среды имеет “параболический” профиль [1] течения вязкой среды в канале. Профиль модуля скорости фракций дисперсной фазы схож с профилем движения несущей среды. При этом течение фракций дисперсной фазы описывается уравнениями динамики невязкой среды

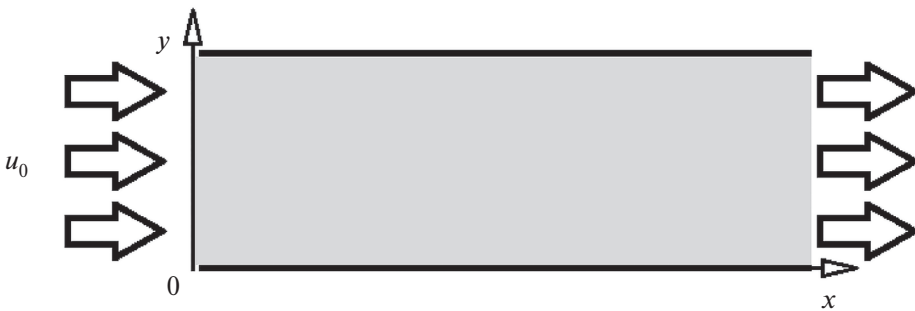


Рис. 1. Общая схема моделируемого течения

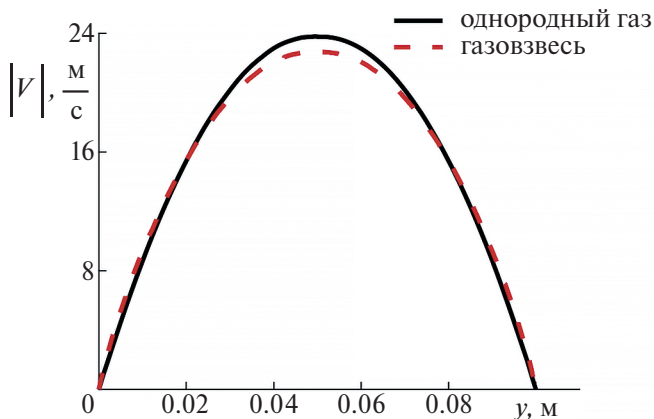


Рис. 2. Пространственное распределение вдоль поперечного сечения модуля скорости однородного газа и несущей среды газозвеси –  $y$  ( $x = L/2$ ), момент времени  $t = 30$  мс



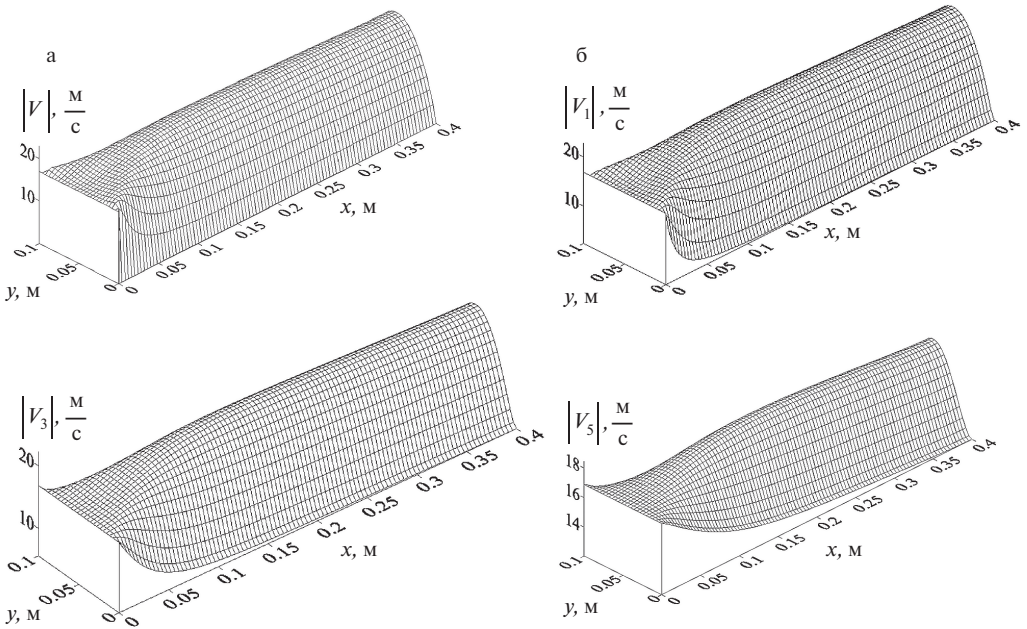


Рис. 3. Пространственное распределение модуля скорости несущей среды и фракций дисперсной фазы: а) несущая среда; б) фракция  $d_1 = 2$  мкм; в) фракция  $d_3 = 8$  мкм; г) фракция  $d_5 = 40$  мкм

с граничными условиями “проскальзывания” на боковых поверхностях. Увеличение размера дисперсных включений приводит к большим отличиям распределений модулей скорости фракций в сравнении с распределением модуля скорости несущей среды. Для мелкодисперсных частиц ( $d_1 = 2$  мкм) распределение профиля модуля скорости газа имеет наибольшее сходство с профилем модуля скорости несущей среды.

Наибольшее значения модуля скорости фракций дисперсной фазы достигается на оси симметрии канала, наименьшее значения модуля скорости достигается на границах канала (рис 4). При увеличении размера частиц фракций происходит увеличение модуля скорости частиц на границах канала и уменьшение

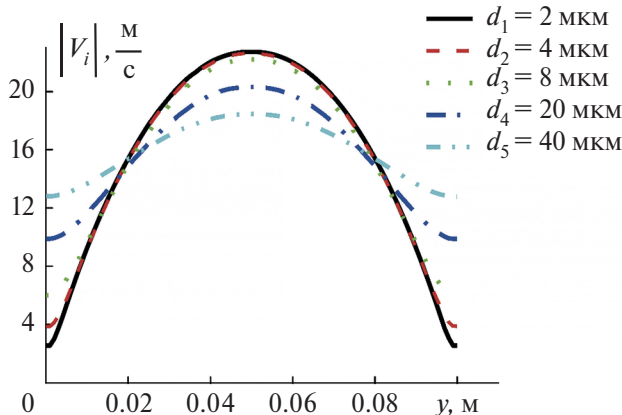


Рис. 4. Пространственное распределение вдоль поперечного сечения  $-y$  ( $x = L/2$ ) модуля скорости фракций дисперсной фазы газозвеси, в момент времени  $t = 30$  мс

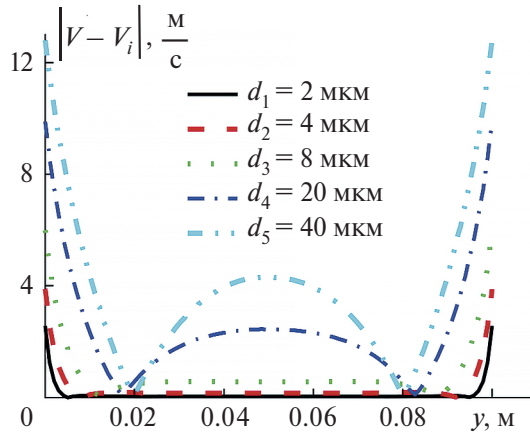


Рис. 5. Пространственное распределение вдоль поперечного сечения —  $y$  ( $x = L/2$ ) модуля разности скоростей несущей среды и фракций дисперсной фазы —  $y$  ( $x = L/2$ ),  $t = 30$  мс

значения модуля скорости на оси симметрии канала. Для частиц с диаметром —  $d_1 = 2$  мкм,  $d_2 = 4$  мкм,  $d_3 = 8$  мкм,  $d_4 = 20$  мкм,  $d_5 = 40$  мкм отношение минимального и максимального значений модуля скорости частиц составляют соответственно —  $|V_{1\min}|/|V_{1\max}| = 11.55\%$ ,  $|V_{2\min}|/|V_{2\max}| = 17.75\%$ ,  $|V_{3\min}|/|V_{3\max}| = 29.98\%$ ,  $|V_{4\min}|/|V_{4\max}| = 63.08\%$ ,  $|V_{5\min}|/|V_{5\max}| = 70.4\%$ . Таким образом увеличение размера дисперсных включений приводит к более равномерному распределению скорости фракций в поперечном сечении канала.

Для всех фракций дисперсной фазы наибольшее значение величина модуля разности скоростей несущей среды и фракций дисперсной фазы —  $\sqrt{|V - V_i|}$  наблюдается на границах канала (рис. 5). Увеличение размера частиц приводит к увеличению значения скоростного скольжения между несущей средой и соответствующей фракцией дисперсной фазы.

Закономерность можно объяснить тем, что за счет межфазного взаимодействия динамика фракций дисперсной фазы определяется несущей средой. Увеличение размера частиц увеличивает их инерционность, таким образом динамика крупнодисперсных фракций в меньшей степени определяется динамикой несущей среды и соответственно граничные условия, задаваемые для несущей среды в меньшей степени влияют на профиль скорости фракции крупнодисперсных частиц.

**Закключение.** В работе численно моделировалось движение полидисперсной газозвеси в канале. Для несущей фазы газозвеси были заданы однородные граничные условия Дирихле на боковых поверхностях канала. Для фракций дисперсной фазы задавались однородные граничные условия Неймана. Выявлено, что в процессе движения газозвеси за счет межфазного взаимодействия с несущей средой в канале формируется «параболический» профиль модуля скорости фракций дисперсной фазы. Максимальное значение модуля скорости фракций достигается на оси симметрии канала, минимальные значения модулей скорости фракций дисперсной фазы на боковых поверхностях канала. На динамику мелкодисперсных фракций несущая среда оказывает более существенное влияние. При увеличении размера дисперсных включений происходит уменьшение перепада значений модуля скорости дисперсной фазы в поперечном сечении канала. Таким образом для фракций более крупных частиц поперечное распределение скорости более равномерное.

Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 784 с.
2. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. *Стернин Л.Е.* Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 176 с.
4. *Дейч М.Е., Филиппов Г.А.* Газодинамика двухфазных сред. М.: Энергоиздат, 1981. 472 с.
5. *Кутушев А.Г.* Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003, 284 с.
6. *Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А.* Волновые процессы в газозвесах частиц металлов. Новосибирск: Параллель, 2015. 301 с.
7. *Вараксин А.Ю.* Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследований (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58. №4. С. 646–669.
8. *Пахомов М.А., Терехов В.И.* Влияние закрутки потока на теплоперенос в газокapельном потоке за внезапным расширением трубы // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. №3. С. 431–438.
9. *Широкова Е.Н., Садин Д.В.* Волновые и релаксационные эффекты при истечении газозвеси, частично заполняющей цилиндрический канал // Компют. исслед. и моделир. 2023. Т. 15. №6. С. 1495–1506.
10. *Федоров А.В., Хмель Т.А., Лаврук С.А.* Выход гетерогенной детонационной волны в канал с расширением // Горение и взрыв. 2017. Т. 10. №3. С. 58–63.
11. *Волков К.Н.* Качественный анализ и численное моделирование движения частицы в канале с проницаемыми стенками с учетом действия массовых сил // ИФЖ. 2013. Т. 86. №6. С. 1212–1218.
12. *Абед А.Х., Шеклеин С.Е., Пахалуев В.М.* Теплообмен сферического элемента с водовоздушным потоком аэрозоля в цилиндрическом канале // Теплофиз. и аэромех. 2020. Т. 27. №1. С. 109–119.
13. *Xu Z., Yu X., Han Z., Wang Y.* Simulation of particle fouling characteristics with improved modeling on two different tubes // Powder Technol. 2021. V. 382. С. 398–405.
14. *Xiao W., Jin T., Luo K., Dai Q., Fan J.* Eulerian–Lagrangian direct numerical simulation of preferential accumulation of inertial particles in a compressible turbulent boundary layer // J. of Fluid Mech. 2020. V. 903. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.601>
15. *Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю., Бабушкина А.В.* Моделирование течения запыленного воздуха в респираторном тракте // Рос. ж. биомех. 2018. Т. 22. №3. С. 301–314.
16. *Широкова Е.Н.* Численное исследование импульсного струйного течения неоднородной газодисперсной смеси // Физ.-хим. кин. в газ. дин. 2022. Т. 23. №4. С. 72–83.
17. *Земерев Е.С., Малинин В.И.* Анализ течения порошково-газовой среды в коническом канале с выпускным отверстием // Вестн. Пермского национального исследовательского политехнич. ун-та. Аэрокосмич. техн. 2016. №47. С. 154–176.
18. *Еникеев И.Х.* Математическое моделирование газопылевых течений в сепараторах соплового типа // Теплофиз. и аэромех. 2020. Т. 27. №1. С. 99–108.
19. *Ali S., Waheed K., Qureshi K., Irfan N., Ahmed M., Siddique W., Farooq A.* Experimental investigation of aerosols removal efficiency through self-priming Venturi scrubber // Nuclear Engng.&Technol. 2020. V. 52. №10. P. 2230–2237.
20. *Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф.* Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // ПММ. 2019. Т. 83. №3. С. 468–477.
21. *Xiu Z., Nie W., J Yan J., Chen D., Cai P., Liu Q., Du T., Yang B.* Numerical simulation study on dust pollution characteristics and optimal dust control air flow rates during coal mine production // J. of Cleaner Prod. 2020. V. 248.
22. *Салахова Э.И., Зинуров В.Э., Харьков В.В., Глухова П.Е., Лавриков В.А., Николаев А.Н.* Численное моделирование очистки газа от твердых взвешенных частиц в сепарационном устройстве с вогнутыми отражающими элементами // Научно-технич. Вестн. Поволжья. 2023. №8. С. 10–14.

23. *Ватузов Д.Н.* Теоретические предпосылки создания аппаратов очистки воздуха в трубках и щелевых каналах от высокодисперсного капельного аэрозоля // Градостр. и архитектура. 2016. Т. 25. №4. С. 40–43.
24. *Ferreira R., Falco D., Oliveira V., Pinto A.* 1D+ 3D two-phase flow numerical model of a proton exchange membrane fuel cell // Appl. Energy. 2017. V. 203. P. 474–495.
25. *Alkhedhair A., Jahn I., Gurgenci H., Guan Z., He S., Lu Y.* Numerical simulation of water spray in natural draft dry cooling towers with a new nozzle representation approach // Appl. Thermal Engng. 2016. V. 98. P. 924–935.
26. *Yan X., Zhou Y., Diao H., Gu H., Li Y.* Development of mathematical model for aerosol deposition under jet condition // Annals of Nuclear Energy. 2020. V. 142.
27. *Tukmakov A.L.* Model of motion and sedimentation of a charged gas suspension in an electric field // J. Engng. Phys.&Thermophys. 2014. vol. 87. no. 1. P. 38–47.
28. *Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А.* Ударно-волновой разлет газозвесей // Докл. РАН. 2016. Т. 466. №4. С. 418–421.
29. *Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А.* Динамика заряженной газозвеси с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. №4. С. 509–512.
30. *Тукмаков Д.А.* Численное исследование влияния свойств газовой составляющей взвеси твердых частиц на разлет сжатого объема газозвеси в двухкомпонентной среде // ИФЖ. 2020. Т. 93. №2. С. 304–310.
31. *Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А.* Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газозвеси // Изв. Сарат. Ун-та. Новая сер. Сер.: Математика.Механика. Информатика. 2022. Т. 22. №1. С. 90–102.
32. *Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А.* Численное исследование массопереноса дисперсных частиц при прохождении ударной волны по моно- и полидисперсной газозвеси // ПММ. 2023. Т. 87. №3. С. 461–474.
33. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
34. *Музафаров И.Ф., Утужников С.В.* Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. №3. С. 74–83.

## **Numerical Study of the Influence of Boundary Conditions on Calculations of the Dynamics of Polydisperse Gas Suspension**

**D.A. Tukmakov<sup>a,\*</sup>**

<sup>a</sup>*IME Federal Research Center Kazan Scientific Center RAS, Kazan, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru*

The work numerically simulates the flow of a polydisperse gas suspension in a channel. The carrier medium was described as a viscous, compressible, heat-conducting gas. The mathematical model implemented a continuum technique for the dynamics of multiphase media, taking into account the interaction of the carrier medium and the dispersed phase. For each component of the mixture, a complete hydrodynamic system of equations of motion for the carrier phase and dispersed phase fractions was solved. The dispersed phase consisted of particles with different sizes of dispersed inclusions. For the carrier medium, homogeneous Dirichlet boundary conditions were specified on the side surfaces of the channel. For fractions of the dispersed phase, boundary conditions for slippage. The influence of the boundary conditions of the flow of the carrier medium on the dynamics of gas suspension fractions has been revealed.

*Keywords:* continuum model, polydisperse gas suspension, interphase interaction, boundary conditions

## REFERENCES

1. *Loytsyansky L.G.* Mechanics of Liquid and Gas. Moscow: Drofa, 2003. 784 p. (in Russian)
2. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. N.Y.: CRC Press, 1990. 532 p.
3. *Sternin L.E.* Two-Phase Mono- and Polydisperse Flows of Gas with Particles. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 176 p. (in Russian)
4. *Deutsch M.E., Filippov G.A.* Gas Dynamics of Two-Phase Media. Moscow: Energoizdat, 1981. 472p. (in Russian)
5. *Kutushev A.G.* Mathematical Modeling of Wave Processes in Aerodisperse and Powder Media. St. Petersburg: Nedra, 2003. 284 p.
6. *Fedorov A.V., Fomin V.M., Khmel T.A.* Wave Processes in Gas Suspensions of Metal Particles. Novosibirsk: Parallil, 2015. 301 p. (in Russian)
7. *Varaksin A.Y.* Two-phase flows with solid particles, droplets, and bubbles: problems and research results (review) // High Temp., 2020, vol. 58, no. 4, pp. 595–614.
8. *Pakhomov M.A., Terekhov V.I.* Effect of droplet evaporation on the flow structure and heat and mass transfer in a confined swirling gas-droplet flow downstream of a tube sudden expansion // Thermophys.&Aeromech., 2018, vol. 25, no. 6, pp. 833–843.
9. *Shirokova E.N., Sadin D.V.* Wave and relaxation effects during the outflow of a gas suspension partially filling a cylindrical channel // Kompyut. Issled. i Model., 2023, vol. 15, no. 6, pp. 1495–1506. (in Russian)
10. *Fedorov A.V., Khmel T.A., Lavruk S.A.* Exit of a heterogeneous detonation wave into a channel with expansion // Goreniye i Vzryv, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 58–63. (in Russian)
11. *Volkov K.N.* Qualitative analysis and numerical modeling of particle motion in a channel with permeable walls taking into account the action of mass forces // Inzh.-Fiz. zh., 2013, vol. 86, no. 6, pp. 1212–1218. (in Russian)
12. *Abed A.H., Shcheklein S.E., Pakhaluev V.M.* Heat transfer of a spherical element with air-water aerosol in a cylindrical channel // Thermoph.&Aeromech., 2020, vol. 27, no. 1, pp. 105–115. (in Russian)
13. *Xu Z., Yu X., Han Z., Wang Y.* Simulation of particle fouling characteristics with improved modeling on two different tubes // Powder Technol., 2021, vol. 382, pp. 398–405.
14. *Xiao W., Jin T., Luo K., Dai Q., Fan J.* Eulerian–Lagrangian direct numerical simulation of preferential accumulation of inertial particles in a compressible turbulent boundary layer // J. of Fluid Mech., 2020, vol. 903. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.601>
15. *Trusov P.V., Zaitseva N.V., Tsinker M.Yu., Babushkina A.V.* Modeling the flow of dusty air in the respiratory tract // Rus. zh. Biomekh., 2018, vol. 22, no. 3, pp. 301–314. (in Russian)
16. *Shirokova E.N.* Numerical study of pulsed jet flow of an inhomogeneous gas-dispersed mixture // Fiz.-Khim. Kinetika v Gaz. Din., 2022, vol. 23, no. 4, pp. 72–83. (in Russian)
17. *Zemerev E.S., Malinin V.I.* Analysis of the flow of a powder-gas medium in a conical channel with an outlet // Vestn. Perm. Nats. Issled. Politekhn. Univ. Aerokosm. Tekhn., 2016, no. 47, pp. 154–176. (in Russian)
18. *Enikeev I.K.* Mathematical modeling of gas-dust flows in nozzle-type separators // Teplofiz.&Aeromekh., 2020, vol. 27, no. 1, pp. 99–108.
19. *Ali S., Waheed K., Qureshi K., Irfan N., Ahmed M., Siddique W., Farooq A.* Experimental investigation of aerosols removal efficiency through self-priming venturi scrubber // Nuclear Engng.&Techn., 2020, vol. 52, no. 10, pp. 2230–2237.
20. *Bolotnova R.K., Gainullina E.F.* Influence of heat transfer on decreasing intensity of a spherical explosion in aqueous foam // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, no. 7, pp. 970–977.
21. *Xiu Z., Nie W., J Yan J., Chen D., Cai P., Liu Q., Du T., Yang B.* Numerical simulation study on dust pollution characteristics and optimal dust control air flow rates during coal mine production // J. of Cleaner Prod., 2020, vol. 248.
22. *Salakhova E.I., Zinurov V.E., Kharkov V.V., Glukhova P.E., Lavrikov V.A., Nikolaev A.N.* Numerical modeling of gas purification from solid suspended particles in a separation device with concave reflective elements // Nauch.-Tekh. Vestn. Povolzhya, 2023, no. 8, pp. 10–14. (in Russian)
23. *Vatuzov D.N.* Theoretical prerequisites for the creation of air purification devices in tubes and slot channels from highly dispersed droplet aerosol // Gradostr. i Arkhit., 2016, vol.25, no. 4, pp. 40–43. (in Russian)

24. *Ferreira R., Falco D., Oliveira V., Pinto A.* 1D+ 3D two-phase flow numerical model of a proton exchange membrane fuel cell // *Appl. Energy*, 2017, vol. 203, pp. 474–495.
25. *Alkhedhair A., Jahn I., Gurgenci H., Guan Z., He S., Lu Y.* Numerical simulation of water spray in natural draft dry cooling towers with a new nozzle representation approach // *Appl. Thermal Engng.*, 2016, vol. 98, pp. 924–935.
26. *Yan X., Zhou Y., Diao H., Gu H., Li Y.* Development of mathematical model for aerosol deposition under jet condition // *Annals of Nuclear Energy*, 2020, vol. 142.
27. *Tukmakov A.L.* Model of motion and sedimentation of a charged gas suspension in an electric field // *J. of Engng. Phys.&Thermophys.*, 2014, vol. 87, no. 1, pp. 38–47.
28. *Nigmatulin R.I., Gubaidullin D.A., Tukmakov D.A.* Shock wave dispersion of gas–particle mixtures // *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 2, pp. 70–73.
29. *Tukmakov A.L., Tukmakov D.A.* Dynamics of a charged gas suspension with an initial spatially nonuniform distribution of the average dispersed phase density during the transition to the equilibrium state // *High Temp.*, 2017, vol. 55, no. 4, pp. 491–495.
30. *Tukmakov D.A.* Numerical investigation of the influence of properties of the gas component of a suspension of solid particles on the spreading of a compressed gas–suspension volume in a binary medium // *J. of Engng. Phys.&Thermophys.*, 2020, vol. 93, no. 2, pp. 291–297.
31. *Tukmakov A.L., Tukmakov D.A.* Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged polydisperse gas suspension // *Izv. Saratov. Univ.. Novaya ser. Ser.: Matem. Mekh. Inform.*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 90–102. (in Russian)
32. *Gubajdullin D.A., Tukmakov D.A.* Numerical study of the effect of polydispersity on the mass transfer of the dispersed phase during the passage of a shock wave through a gas suspension // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 1373–1383.
33. *Fletcher C.A.* *Computation Techniques for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 1988. 502 p.
34. *Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V.* Application of compact difference schemes to the study of unsteady compressible gas flows // *Matem. Modelir.*, 1993, no. 3, pp. 74–83. (in Russian)

УДК 517(54, 583)+556.342

## О ФИЛЬТРАЦИИ В ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ С УЧАСТКОМ ВЫСАЧИВАНИЯ

© 2024 г. К.Н. Анахаев\*

*Институт прикладной математики и автоматизации**Кабардино-Балкарского НЦ РАН, Нальчик, Россия**\*e-mail: anaha13@mail.ru*

Поступила в реакцию 15.03.2024 г.

После доработки 25.05.2024 г.

Принята к публикации 10.06.2024 г.

На основе представления модулярной эллиптической функции в виде комбинации простых алгебраических формул, конформно отображающих область годографа скорости (криволинейного треугольника) на полуплоскость, приводится прямое определение скоростей фильтрации в геофизической перемычке. Впервые построено семейство изотак — линий равных скоростей фильтрации для внутренней области перемычки при отсутствии воды в нижнем бьефе. Для частных случаев значения предложенных формул практически полностью совпадают с гидромеханическим решением М. Muskat (для 4 случаев) и численными расчетами З.Э. Хайруллина (для 2 случаев). Известная формула Ф.Б. Нельсон Скорнякова для выходных скоростей фильтрации через низовую грань перемычки дает занижение результатов до 45%, а потому не может быть рекомендована для практического использования.

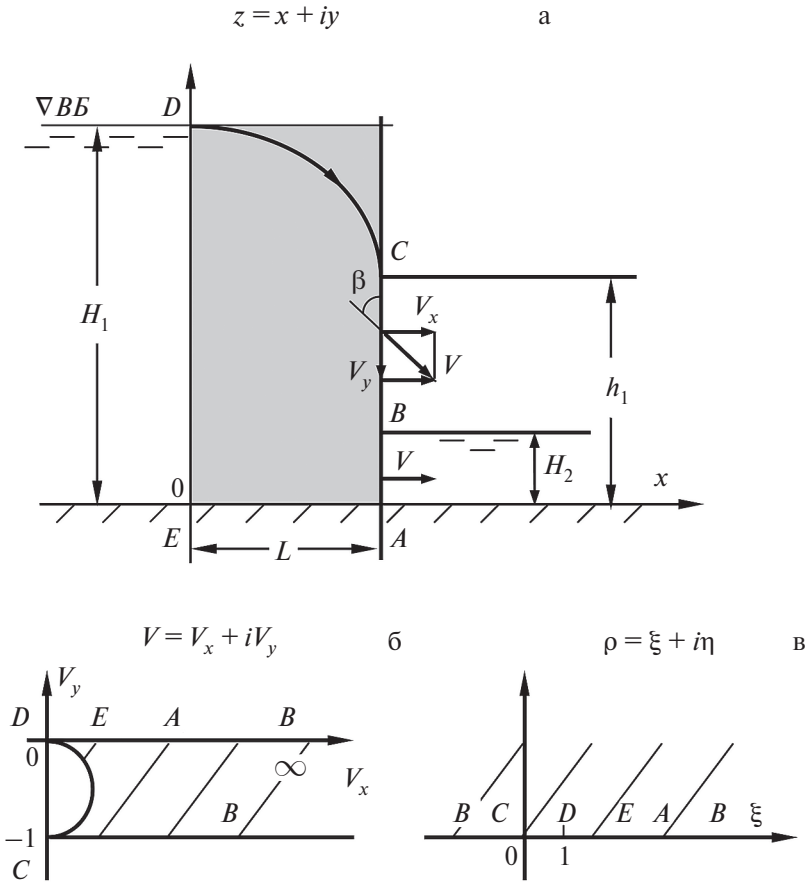
*Ключевые слова:* фильтрация, перемычка, модулярная эллиптическая функция, конформные отображения, годограф скорости, высота высачивания, изотак

DOI: 10.31857/S0032823524030075 ZAUDSA

**1. Введение.** Исследованию одной из сложнейших задач движения грунтовых вод в геофизической среде — задачи фильтрации в прямоугольной грунтовой перемычке посвящено множество теоретических, экспериментальных и численных методов расчета. основополагающим исследованием в этой области является работа [1], в которой рассматривалась безнапорная фильтрация в грунтовом массиве (с коэффициентом фильтрации  $k$ ), расположенном на горизонтальном водопоре с выделенным фрагментом шириной  $L$  и глубинами потока с верховой  $H_1$  и низовой  $H_2$  его сторон. Представляя расчетную схему в виде прямоугольника напорной фильтрации высотой и действующим напором, соответственно, равными полусумме и разности последних, он получил гидравлическим методом на основе закона Дарси формулу (1.1) для определения фильтрационного расхода  $q$

$$q = k \frac{H_1^2 - H_2^2}{2L} \quad (1.1)$$

Однако, данное решение было основано не на действительной картине фильтрации в перемычке, поскольку не учитывало явление высачивания потока на низовую грань перемычки (рис. 1), а потому не может быть использовано, в частности, для определения положения депрессионной кривой.



**Рис. 1.** Фильтрация в геофизической перемычке с комплексными областями:  
 а) физического течения  $z = x + iy$ ; б) годографа скорости  $V = V_x + iV_y$ ; в) промежуточной полуплоскости  $\zeta = \xi + i\eta$

В последующем формула (1) использовалась в [2,3] для расчета расхода фильтрации через грунтовую перемычку. Позже, разработанная методика [4] гидравлического расчета фильтрационного расхода через перемычку (ядро) с учетом высачивания потока на ее низовую грань в предположении горизонтальности всех линий токов также дала результат, равный формуле (1.1).

Девинсон [5] впервые дал общую гидромеханическую постановку точного решения задачи фильтрации через грунтовую перемычку с составлением годографа скорости и рассмотрением условий распределения скоростей на свободной поверхности и участке высачивания на низовой грани (рис. 1), а также указала [4] необходимость использования модулярных эллиптических функций для ее решения.

Было установлено [6] нижеследующее соотношение приведенных скоростей фильтрации (при  $k = 1$  – здесь и далее в усл. ед.) в зоне высачивания низовой грани перемычки (рис. 1):

$$V_t = 1, V_n = \operatorname{tg} \beta, V = \sqrt{V_t^2 + V_n^2} = \cos^{-1} \beta, \tag{1.2}$$

где  $V_t$  и  $V_n$  – касательная и нормальная составляющие полной скорости фильтрации  $V$ ,  $\beta$  – угол между линией тока и низовой гранью перемычки. Там же показано, что в случаях  $H_2 > 0$  (в точке уреза воды нижнего бьефа) и при  $H_2 = 0$  (в точке



сопряжения низовой грани с непроницаемым основанием) теоретическое значение выходной скорости фильтрации стремиться к бесконечности  $V \rightarrow \infty$ , а фильтрационный расход через перемычку в обоих случаях находится по формуле (1).

На основе точной гидромеханической постановки задачи безнапорной фильтрации в перемычке был дан [6,7] полуобратный метод решения указанной задачи для заданных значений промежуточных параметров  $a$  и  $b$ . Позже [8] были приведен численный расчет по этой методике для одной частной задачи (случай I:  $a = 10$ ,  $b = 5$ ), для которого получены (обратным расчетом) геометрические размеры “перемычки Гамеля–Гюнтера”:  $H_1 = 0.3223$ ,  $H_2 = 0.0842$ ,  $L = 0.1619$  и значение ординаты высачивания кривой депрессии на низовой грани  $h_1 = 0.2067$ . Фильтрационный расход через перемычки при этом не определялся.

Muskat [9, 10] охарактеризовал решение [7] с использованием годографа скорости в задаче фильтрации через перемычку как “весьма сильное и наиболее серьезное теоретическое изыскание в области гравитационных течений”, но имеющее “ужасающую трудность” проведения математических расчетов [10]. Используя методику [7, 8], он рассчитал полуобратным методом характеристики перемычек еще для пяти случаев (II–VI) [9, 10], соответственно, для:

- случая II ( $a = 5$ ,  $b = 2$ ):  $H_1 = 0.670$ ,  $H_2 = 0.158$ ,  $L = 0.444$ ,  $h_1 = 0.358$ ,
- случая III ( $a = \infty$ ,  $b = 10$ ):  $H_1 = 0.672$ ,  $H_2 = 0$ ,  $L = 0.329$ ,  $h_1 = 0.430$ ,
- случая IV ( $a = \infty$ ,  $b = 5$ ):  $H_1 = 0.872$ ,  $H_2 = 0$ ,  $L = 0.484$ ,  $h_1 = 0.519$ ,
- случая V ( $a = \infty$ ,  $b = 2$ ):  $H_1 = 1.286$ ,  $H_2 = 0$ ,  $L = 0.906$ ,  $h_1 = 0.646$ ,
- случая VI ( $a = \infty$ ,  $b = 1.2$ ):  $H_1 = 1.823$ ,  $H_2 = 0$ ,  $L = 1.692$ ,  $h_1 = 0.719$ .

При этом были также рассчитаны значения приведенных скоростей фильтрации на верховой и низовой гранях и по подошве перемычек. Им же была предложена приближенная потенциальная функция на основе рядов Фурье для фильтрационно-го потока в перемычке, в виде:

$$\Phi = kH_1 - \frac{k}{2H_1L}(H_1^2 - H_2^2)x + \frac{2kH_1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{\left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi H_2}{H_1}\right]}{n^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi L}{H_1}} \cos \frac{n\pi y}{H_1} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{H_1}, \quad (1.3)$$

где  $x$ ,  $y$  – текущие координаты по рис. 1;  $\Phi = -kh$  – потенциал скорости фильтрации при напоре  $h$ .

Значение фильтрационного расхода, теоретически определяемое по зависимости (1.3), также равно формуле (1.1), которая получила, в свою очередь, подтверждение опытами по методу ЭГДА [9–11]. При этом, величины скоростей фильтрации на верховой грани (входные), в зоне подпора низовой грани (выходные) и по подошве ядра (продольные), а также распределение напоров вдоль последней, практически полностью совпадают с значениями точного решения [7]. В то же время, зависимость (1.3) дает неверные значения высоты высачивания и скоростей фильтрации в верхней части участка высачивания, а расчеты по ней требуют большого объема вычислительной работы, что ограничивало возможности ее широкого применения в инженерной практике [12].

Была разработана [13–15] методика моделирования безнапорной фильтрации в перемычке по методу ЭГДА (на электролитической модели), проведены обширные экспериментальные исследования и построены семейства графиков по прямому определению высоты высачивания и положения депрессионной кривой, а также фильтрационного расхода через перемычки при различных глубинах воды в нижнем бьефе. При этом было отмечено практически полное совпадение значений опытных расходов с результатами расчетов по формуле (1.1).

На основе аналитической теории линейных дифференциальных уравнений дано [15, 16] более эффективное, чем по методу Девинсона–Гамеля, решение задачи безнапорной фильтрации в перемычке с построением семейств графиков по прямо-

му определению высоты высачивания депрессионной кривой и дифференцированных значений расходов через зоны высачивания и подпора нижнего бьефа.

На основе строгого гидромеханического решения доказано [17], что формула Дюпюи (1.1), ранее полученная при различных приближениях, является точной для фильтрационного расхода через перемычку.

Вышеприведенные исследования (из огромного числа работ по этой тематике) определяют основные характеристики фильтрационного потока через перемычку, однако, до настоящего времени наименее изученным остается вопрос определения скоростей в самой области фильтрации перемычки. Известные гидромеханические решения [7–10, 15, 16] позволяют находить параметры фильтрации только лишь по контуру области фильтрации [18–20], поскольку конформное отображение годографа скорости фильтрации (криволинейного треугольника) на полуплоскость, осуществляемое модулярной эллиптической функцией [19], рассматривается в них только для действительной оси комплексной полуплоскости (рис. 1,б). Кроме этого, указанные решения являются полуобратными, а потому не могут дать прямого аналитического решения в явном виде задачи фильтрации для перемычки с наперед заданными граничными условиями, а из-за чрезвычайной математической сложности имеют ограниченные возможности для прикладных исследований – так, известны всего 6 случаев перемычек с аналитическим расчетом скоростей фильтрации по их верховым граням и подошвам, в том числе только для одной “перемычки Гамеля–Гюнтера” с расчетом скоростей по низовой грани (рис. 2).

**2. Основной раздел.** В работах [18–20] дано гидромеханическое решение задачи фильтрации в перемычке, полученное на основе приближенного последовательного конформного отображения области физического течения (рис. 1,а) посредством шестнадцати промежуточных комплексных областей на область годографа скорости фильтрации (рис. 1,б). При этом, область последнего отображена на комплексную полуплоскость (рис. 1,в) комбинацией простых (алгебраических) формул с максимальной погрешностью до 1% в сравнении с точными значениями модулярной эллиптической функции [19], строго отображающей область криволинейного тре-

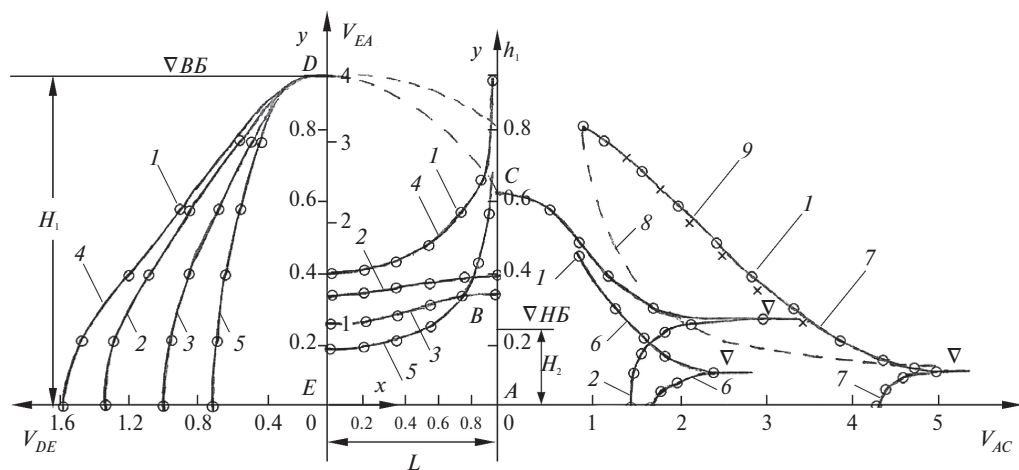


Рис. 2. Сравнение результатов скоростей фильтрации:

символом  $\circ$  обозначены расчеты 1 – по автору; кривые 2–5 – по [10,11] для верховой грани и подошвы перемычек, соответственно (I–III,VI), а также для низовой грани для случая I (кривые 2);

кривые 6, 7 – по численному решению [21] для низовой грани перемычек VII, VIII;

пунктирная кривая 8 – по [22] для участка высачивания VIII;

символом  $\times$  обозначены расчеты 9 – по формуле (2.19) для участка высачивания VIII.

угольника (голографа скорости фильтрации) на полуплоскость [7–10, 15, 16]. Указанное позволяет непосредственно определять элементарными функциями скорости фильтрации не только по граням перемычки, но и непосредственно внутри области фильтрации.

Решение по прямому определению величин полной скорости фильтрации  $V$  (с горизонтальной  $V_x$  и вертикальной  $V_y$  составляющими) для любых заданных точек области фильтрации с координатами  $x$  и  $y$  для перемычек (при  $L/H_1 \leq 1.1$ ) реализуем посредством элементарных расчетных зависимостей, в виде:

$$x_1 = \frac{\pi x}{2L}, y_1 = \frac{\pi y}{2L}, \delta_1 = \sin x_1 \operatorname{ch} y_1, \delta_2 = \cos x_1 \operatorname{sh} y_1$$

$$\sigma_1 = \frac{\delta_1}{\delta_c}, \sigma_2 = \frac{\delta_2}{\delta_c}, M_1 = \sqrt{(1 + \sigma_1)^2 + \sigma_2^2} + \sqrt{(1 - \sigma_1)^2 + \sigma_2^2}$$

(при  $\sigma_2 = 0$ : – для  $\sigma_1 > 1 \rightarrow M_1 = 2\sigma_1$ , – для  $\sigma_1 \leq 1 \rightarrow M_1 = 2$ )

$$\theta_1 = \arcsin \frac{2\sigma_1}{M_1}, \theta_2 = \operatorname{arch} \frac{M_1}{2}, \varepsilon_1 = \frac{\theta_1}{\theta_1^2 + \theta_2^2}, \varepsilon_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$N_1 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2, N_2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2, P_1 = \frac{1}{m}[N_1 + (m - c)], P_2 = \frac{N_2}{m}$$

$$t_1 = P_1[1 + (P_1^2 + P_2^2)^{-1}], t_2 = P_2[1 - (P_1^2 + P_2^2)^{-1}]$$

$$A_2 = t_1^2 - t_2^2 + (\beta_1^2 - \alpha_1^2), B_2 = 2t_1t_2$$

$$A_1 = t_1 + \frac{t_1}{|t_1|} \sqrt{\frac{\sqrt{A_2^2 + B_2^2} + A_2}{2}}, B_1 = t_2 + \sqrt{\frac{\sqrt{A_1^2 + B_2^2} - A_2}{2}}$$

$$S_1 = t_1 + \frac{(\alpha_1 + \beta_1)\beta_1 A_1}{A_1^2 + B_1^2}, S_2 = t_2 - \frac{(\alpha_1 + \beta_1)\beta_1 B_1}{A_1^2 + B_1^2} \quad (2.1)$$

$$\xi = A_0 \frac{(\alpha_1 + \beta_1 - S_1)(b_s - S_1) + S_2^2}{(b_s - S_1)^2 + S_2^2}, \eta = S_2 \frac{\alpha_1 + \beta_1 - b_s}{(b_s - S_1)^2 + S_2^2}$$

$$\xi_0 = 2(\alpha_3 + \beta_3) \left( \xi - \frac{1}{2} \right), \eta_0 = 2(\alpha_3 + \beta_3)\eta$$

$$C_1 = \xi_0^2 - \eta_0^2 - (\alpha_3 + \beta_3)^2, D_1 = 2\xi_0\eta_0$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_3 + \beta_3} \left( \alpha_3 \xi_0 + \frac{\xi_0}{|\xi_0|} \beta_3 \sqrt{\frac{\sqrt{C_1^2 + D_1^2} + C_1}{2}} \right)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\alpha_3 + \beta_3} \left( \alpha_3 \eta_0 + \beta_3 \sqrt{\frac{\sqrt{C_1^2 + D_1^2} - C_1}{2}} \right)$$

$$C_2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - (\alpha_2 + \beta_2)^2, D_2 = 2\gamma_1\gamma_2$$

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} \left( \alpha_2 \gamma_1 + \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} \beta_2 \sqrt{\frac{\sqrt{C_2^2 + D_2^2} + C_2}{2}} \right)$$

$$g_2 = \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} \left( \alpha_2 \gamma_2 + \beta_2 \sqrt{\frac{C_2^2 + D_2^2 - C_2}{2}} \right)$$

$$C_3 = g_1^2 - g_2^2 - 4, D_3 = 2g_1g_2$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \left( g_1 + \frac{g_1}{|g_1|} \sqrt{\frac{C_3^2 + D_3^2 + C_3}{2}} \right), J_2 = \frac{1}{2} \left( g_2 + \sqrt{\frac{C_3^2 + D_3^2 - C_3}{2}} \right)$$

$$M_2 = \sqrt{(1 + J_1)^2 + J_2^2} + \sqrt{(1 - J_1)^2 + J_2^2}$$

(при  $J_2 = 0$  : – для  $J_1 > 1 \rightarrow M_2 = 2J_1$ , – для  $J_1 \leq 1 \rightarrow M_2 = 2$ )

$$u_1 = \arcsin \frac{2J_1}{M_2}, u_2 = \operatorname{arch} \frac{M_2}{2}, \tau_1 = \frac{u_1}{\pi} - \frac{1}{2}, \tau_2 = \frac{u_2}{\pi}$$

$$V_x = \tau_2, V_y = \tau_1, V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Следует указать, что громоздкость формулы (2.1) обусловлена необходимостью сохранения пошагового контроля правильности полученных расчетных зависимостей при проведении семнадцати конформных отображений различных комплексных областей с установлением однозначной взаимосвязи областей физического течения и годографа скорости.

При этом, угол наклона  $\beta$  линии тока к горизонтали для полной скорости фильтрации  $V$  в заданной точке находится по формуле

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{V_y}{V_x} \tag{2.2}$$

В расчетные зависимости (2.1) входят нижеследующие параметры, равные:

$$\alpha_1 = 2, \beta_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{L}{H_1} \right), \alpha_2 = 2, \beta_2 = \pi^{-1}, \alpha_3 = 2.31831$$

$$\beta_3 = 1.70578, c = \frac{4}{\pi^2}, d = -\operatorname{arsh}^{-2} \left( \operatorname{sh} \frac{\pi H_1}{2L} / \operatorname{ch} \frac{\pi h_1}{2L} \right), \delta_c = \operatorname{ch} \frac{\pi h_1}{2L}$$

$$m = \frac{1}{2}(c - d), A_0 = \frac{b_s + \alpha_1 + \beta_1}{2(\alpha_1 + \beta_1)}, b_s = b_t + \frac{(\alpha_1 + \beta_1)\beta_1}{b_t + \sqrt{b_t^2 + \beta_1^2 - \alpha_1^2}} \tag{2.3}$$

$$b_t = b_p(1 + b_p^{-2}), b_p = \frac{1}{m}(m - c + b_N), b_N = \operatorname{arcsin}^{-2} \left( \operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{2L} / \operatorname{ch} \frac{\pi h_1}{2L} \right),$$

в которых  $h_1$  – высота высачивания депрессионной кривой на низовую грань над подошвой перемычки, определяемая для заданных размеров перемычки по результатам точных [8–10, 15, 16 и др.] и численных [21, 22 и др.] решений, электрогидродинамического моделирования [9, 13, 23 и др.], а также по формулам [12, 24]:

$$h_1 = H_2 + \left( 1 - \frac{H_2}{H_1} \right)^n h_{1(0)}; h_{1(0)} = H_1 - 0.29L \left( \pi - \frac{L}{H_1} \right) \tag{2.4}$$

$$n = 0.72 + 2.2L/H_1,$$

где  $h_{1(0)}$  – высота участка высачивания в предположении  $H_2 = 0$  в перемычках  $L/H_1 \leq 1.1$ .

Полученные зависимости позволяют определять значения скоростей фильтрационного потока в любой заданной точке области фильтрации перемычки с построением семейства изотох – линий равных скоростей фильтрации, а также эпюр скоростей фильтрации на верховой и низовой гранях и подошве перемычки, практически полностью совпадающих с результатами теоретического решения [9, 10] (рис. 2).

На верховой грани перемычки  $DE$  величины входных скоростей фильтрации определяются по зависимостям (2.1) при значениях координат  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq H_1$ :  $x, x_1, t_2, g_2, \gamma_2, \delta_1, \varepsilon_1, \eta, \eta_0, \sigma_1, \tau_1, \theta_1, B_{1-2}, D_{1-3}, J_2, N_2, P_2, S_2$  равны нулю.

При этом вертикальная составляющая  $V_y$  полной скорости фильтрации  $V$  будет равна нулю  $V_y = 0$ , а горизонтальная составляющая  $V_x$  равна полной скорости  $V_x = V$ . Величины  $V_x$  возрастают от нулевого значения на урезе воды верхнего бьефа (в точке  $D$ )  $V_D = 0$  до максимальной величины на верховой грани в месте ее сопряжения с основанием (в точке  $E$ )  $V_E = V_{\max}$ . При этом текущие значения скоростей фильтрации вдоль верховой грани  $DE$  определяются в зависимости от координаты  $0 \leq y \leq H_1$  по формуле

$$V_{DE} = V_x = \frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \left[ \frac{1}{2} \left( g_1 + \frac{g_1}{|g_1|} \sqrt{g_1^2 - 4} \right) \right], \quad (2.5)$$

в которой

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} \left( \alpha_2 \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{|\gamma_1|} \beta_2 \sqrt{\gamma_1^2 - (\alpha_2 + \beta_2)^2} \right)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_3 + \beta_3} \left( \alpha_3 \xi_0 + \frac{\xi_0}{|\xi_0|} \beta_3 \sqrt{\xi_0^2 - (\alpha_3 + \beta_3)^2} \right); \quad \xi_0 = 2(\alpha_3 + \beta_3) \left( \xi - \frac{1}{2} \right)$$

$$\xi = A_0 \frac{(\alpha_1 + \beta_1 - S_1)}{(b_s - S_1)}; \quad S_1 = \frac{1 + P_1^2}{P_1} + \frac{(\alpha_1 + \beta_1) \beta_1}{A_1}$$

$$A_1 = \frac{1 + P_1^2}{P_1} - \frac{P_1}{|P_1|} \sqrt{\left( \frac{1 + P_1^2}{P_1} \right)^2 + (\beta_1^2 - \alpha_1^2)}; \quad P_1 = [N_1 + (m - c)] m^{-1} \quad (2.6)$$

$$N_1 = N_{DE} = - \left[ \operatorname{arch} \sqrt{1 + \left( \frac{1}{\delta_c} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2L} \right)^2} \right]^{-2}$$

Максимальное на верховой грани значение скорости фильтрации в точке  $E$   $V_E = V_{\max}$  для случаев наличия и отсутствия воды в нижнем бьефе найдем по (2.4) при значении  $y = 0$ , в виде:

$$V_E = \frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \left[ \frac{1}{2} \left( g_E + \sqrt{g_E^2 - 4} \right) \right]; \quad g_E = \frac{1}{1 + 2\pi} \left[ 2\pi \gamma_E + \sqrt{\gamma_E^2 - \left( 2 + \frac{1}{\pi} \right)^2} \right] \quad (2.7)$$

$$\gamma_E = \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} \left[ \alpha_3 b_s + \beta_3 \sqrt{b_s^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2} \right]$$

Вдоль подошвы перемычки  $EA$  вертикальные скорости фильтрации  $V_y$  равны нулю  $V_y = 0$ , а горизонтальные скорости  $V_x = V_{EA}$  возрастают от  $V_E$  (в точке  $E$ ) до  $V_A$  (в точке  $A$ ).

Текущие значения скоростей фильтрации по подошве  $EA$  ( $0 \leq x < L$ ,  $y = 0$ )  $V_{EA}$  и низовой грани  $AC$  ( $x = L$ ,  $0 < y \leq h_1$ )  $V_{AC}$  перемычки рассчитываются по формулам (2.5)–(2.6), подставляя в них вместо  $N_1$ , соответственно, величины  $N_1 = N_{EA}$  и  $N_1 = N_{AC}$ , равные:

$$N_{EA} = \left[ \arcsin \left( \frac{1}{\delta_c} \sin \frac{\pi x}{2L} \right) \right]^{-2} \quad (2.8)$$

$$N_{AC} = \left[ \arcsin \left( \frac{1}{\delta_c} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2L} \right) \right]^{-2} \quad (2.9)$$

Более упрощенно значения скоростей фильтрации по подошве перемычки могут быть определены по линейной (при  $H_2 > 0$ ) и эллиптической (при  $H_2 = 0$ ) зависимостям [12, 24], соответственно:

– при *наличии воды* в нижнем бьефе ( $H_2 > 0$ ) по линейной зависимости

$$V_{EA} = V_E + (V_A - V_E) \frac{x}{L}, \quad (2.10)$$

где  $V_E$  находится по (2.7), а  $V_A$  – скорость фильтрации в точке  $A$  определяется дифференцированием зависимости (1.3) при  $y = 0$  и  $x = L$  по формуле

$$V_A = -\frac{d\Phi}{dx} = \frac{H_1^2 - H_2^2}{2H_1L} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos \frac{n\pi H_2}{H_1}}{n \operatorname{th} \frac{n\pi L}{H_1}}, \quad (2.11)$$

либо по более упрощенной формуле (2.12), основанной на равенстве площадей эпюры скоростей фильтрации и действующего потенциала скорости по линии подошвы перемычки [12, 24]

$$V_A = \frac{2}{L}(H_1 - H_2) - V_E \quad (2.12)$$

– при *отсутствии воды* в нижнем бьефе ( $H_2 = 0$ ) по эллиптической зависимости

$$V_{EA} = V_A - (V_A - V_E) \sqrt{1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2}, \quad (2.13)$$

где  $V_E$  находится по (2.7), либо по упрощенной (до 4–5%), аппроксимирующей формуле

$$V_E = 0.21\pi L^{-1.17} \quad (2.14)$$

Как известно [6, 12, 24], теоретическое значение скорости фильтрации в точке  $A$  при отсутствии воды в нижнем бьефе ( $H_2 = 0$ ) стремится к бесконечности  $V_A \rightarrow \infty$ , однако, практическое ее значение ограничено и для прикладных исследований может быть определена из условия равенства эллиптической площади эпюры скоростей значению действующего потенциала по линии подошвы перемычки [12, 24], в виде

$$V_A = \frac{4}{4 - \pi} \left( \frac{H_1}{L} - \frac{\pi}{4} V_E \right), \quad (2.15)$$

либо по эмпирической зависимости на основе данных ЭГДА для максимальной выходной скорости фильтрации по низовой грани перемычки при  $H_2 = 0$  [12, 24]

$$V_{A,\max} = \frac{2.5 + 0.5L / H_1}{0.1 + 1.3L / H_1} \quad (2.16)$$

Впервые Nemenyi [25] представил кривую депрессии в ядрах земляных плотин в виде дуги окружности, которая для перемычек  $L / H_1 \leq 1.2$  может быть описана зависимостью [12, 23, 24]:

$$y = H_1 + \sqrt{r^2 - \left( x + \sqrt{2} \cdot h_s - \frac{1}{2}L \right)^2} - \frac{1}{2}h_s - \sqrt{2}L; \quad 0 < x < L \quad (2.17)$$

$$h_s = H_1 - h_1; r = \frac{3}{2}\sqrt{h_s^2 + L^2},$$

основанной на опытных данных ЭГДА и аналогичной кривой [9, 10].

На рис. 2 приводятся сравнения значений скоростей фильтрации, рассчитанных по предлагаемым зависимостям (2.5)–(2.16) (“кружочки” 1), с результатами гидромеханических (строгих) решений [9, 10] по верховой грани и подошве перемычек для случаев I–III, VI (соответственно, кривые 2–5) и по низовой грани для случая I (кривые 2), а также с численными расчетами [21] для скоростей фильтрации по низовой грани (для случаев VII, VIII) соответственно: –  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = 1/10$ ,  $L = 3/4$ ,  $h_1 = 0.474$  (VII – кривые 6);  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = 0.1$ ,  $L = 0.2$ ,  $h_1 = 0.734$  (VIII – кривые 7). Кроме этого, приведены также данные по скорости фильтрации для участка высачивания низовой грани (случай VIII), рассчитанные по формуле (2.18) [22], принятой по аналогии изменения скоростей при выходе фильтрационного потока из основания флютбета в горизонтальный дренаж (пунктирная кривая 8)

$$V_{BC} = \sqrt{\frac{h_1 - H_2}{y - H_2}}, \quad (2.18)$$

и упрощенной формуле автора (“крестики” 9)

$$V_{BC} = \cos^{-1} \left( \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\ln \frac{h_1 - H_2}{y - H_2} + \frac{1}{2} \frac{L}{H_1 - H_2}}}{0.1 + 1.3 \frac{L}{H_1 - H_2}} \right), \quad (2.19)$$

в которых ордината  $y$  изменяется в интервале  $H_2 < y \leq h_1$ .

Как видно из рис. 2, значения скоростей фильтрации по предложенным формулам (2.5)–(2.16) для верховой и низовой граней и подошвы перемычки практически полностью (<1–2%) совпадают с результатами теоретического решения [9], а также с численными расчетами [21] (<4–5%) для низовой грани. При этом, упрощенная формула автора (2.19) также дает приемлемые для практики (<4–5%) значения скоростей фильтрации для участка высачивания, формула же (2.18) [22] занижает результаты до 45% и более, а потому не может быть рекомендована для практического использования.

На рис. 3 приведена впервые построенное по элементарным формулам семейство кривых 1 изотх (линий равных скоростей фильтрации) для внутренней области фильтрации перемычки при отсутствии воды в нижнем бьефе:  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = 0$ ,  $L = 3/4$ ,  $h_1 = 0.48$  (случай IX), из которого видно крайне неравномерное распределение скоростей в теле перемычки. Наличие сильнонапряженного, опасного участка с резко возрастающими градиентами скоростей фильтрации характеризуется сильным сгущением линий изотх в нижней правой части перемычки при явной “недогруженности” зон с разряженными линиями изотх в верхних (левой и срединной) частях области фильтрации. Приведены также рассчитанные эпюры скоростей фильтрации: – входных  $V_{DE}$  на верховой грани  $DE$  (кривая 2); – продольных  $V_{EA}$  по линии подошвы  $EA$  (кривая 3); – полных выходных  $V$  на низовой грани  $AC$  (кривая 4) и их горизонтальной составляющей  $V_x$  (кривая 5), а также очертание кривой депрессии по зависимости (2.17).

Получение изложенного прямого решения в элементарных функциях для скоростей фильтрации внутри области перемычки стало возможным вследствие конформно отображения комплексной области годографа скорости (криволинейного треугольника) на полуплоскость (рис. 1,б,в) модулярной эллиптической функции, представленной в виде комбинации алгебраических зависимостей [18, 19].

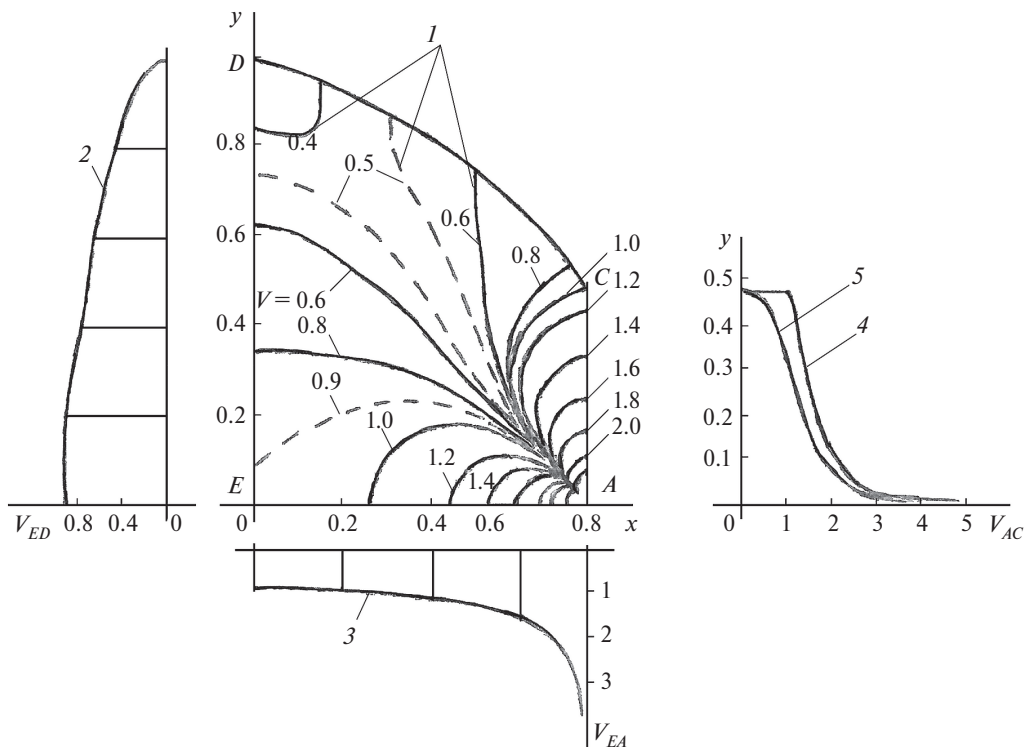


Рис. 3. Фильтрация в геофизической перемычке при отсутствии воды в нижнем бьефе:

$$H_1 = 1, H_2 = 0, L = 0.75, h_1 = 0.48 \text{ (случай IX)}$$

1 – семейство изот на внутренней области перемычки; 2 – эюра входных скоростей фильтрации  $V_{DE}$  на верховой грани DE; 3 – эюра продольных скоростей фильтрации  $V_{EA}$  по линии подошвы EA; 4 и 5 – эюры полных выходных скоростей фильтрации  $V$  и  $V_x$  на низовой грани AC.

Результаты точных аналитических решений задачи фильтрации в перемычке широко используются как для сравнительного анализа различных приближенных решений [26], так и для тестирования программ для ЭВМ [27, 28]. При этом, нередко выявляются ошибки в определении таких фильтрационных параметров перемычек, как высота высачивания кривой депрессии, фильтрационный расход, выходные градиенты напора (скорости фильтрации) на низовой грани [29, 30]. Следует также отметить, что результаты фильтрационного расчета перемычек непосредственно используются и при расчетах фильтрации в земляных плотинах с ядрами [30, 31].

**Закключение.** В статье рассматриваются методы расчета фильтрации в геофизических перемычках с определением характеристик фильтрационного потока, таких как: фильтрационный расход, очертание депрессионной кривой и высота ее высачивания на низовую грань перемычки, скорости фильтрации. Отмечено, что конформное отображение комплексной области годографа скорости (криволинейного треугольника) на полуплоскость модулярной эллиптической функцией, представленной в элементарных функциях, дало возможность для прямого вычисления значений скоростей фильтрации не только по граням и подошве перемычки, но и внутри области перемычки комбинацией простых алгебраических формул. Приводится впервые построенное семейство изотях (линий равных скоростей фильтрации) для внутренней области фильтрации перемычки при отсутствии воды в нижнем бьефе. Для частных случаев расчеты скоростей фильтрации по предложенным формулам практически



полностью совпадают с гидромеханическим решением [9] (для 4 случаев) и численными расчетами [21] (для 2 случаев). Известная формула [22] для выходных скоростей фильтрации через низовую грань, принятая по аналогии с выходом потока из основания флютбета в горизонтальный дренаж, дает занижение результатов до 45 % и более, а потому не может быть рекомендована для практического использования.

Работа выполнена в рамках темы Государственного задания ИПМА КБНЦ РАН № 122041800015-8.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dupuit J.* Etudes theoriques et pratiques sur le movement des eaux. No 49. August. Paris., 1863.
2. *Forchheimer Ph.* Hydraulik. Leipzig u. Berlin. 3 Auflage. 1930. 525 s.
3. *Кнорре М.Е.* Работа песчаных перемычек в физическом отношении и метод их расчета // в кн.: Методология гидравлических расчетов, принятых при составлении проекта Запорожской ГЭС на реке Днепре. В. 1. М.: 1925. С. 285–327.
4. *Павловский Н.Н.* Собр. соч. Т. 2. Движение грунтовых вод. М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 771 с.
5. *Девисон Б.Б.* Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины // Зап. гос. гидрол. ин-та. Т. 6. 1932. С. 11–19.
6. *Dachler R.* Ueber den Stromungsvorgang bei Hangquellen // Die Wasserwirtschaft. Wien. 1934. Jg. 27. H. 5–6. S. 41–43.
7. *Hamel G.* Ueber Grundwasserstromung // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1934. V. 14. H. 3. S. 129–159.
8. *Hamel G., Gunter E.* Numerische Duchredingung der Abhandlung uber Grundwasserstromung // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1935. V. 15. H. 3. S. 255–265.
9. *Muskat M.* The seepage of water through dams with vertical faces // Physics. 1935. V. 6. P. 402–415.
10. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.;Л.: 1949. 528 с.
11. *Wyckoff R.D., Reed D.W.* Electrical conduction models for the solution of water seepage problems // Physics. 1935. V. 6. P. 395–401.
12. *Анахаев К.Н.* Методы фильтрационного расчета каменно-земляных плотин. Дис. канд. техн. наук (05.23.07) / М.: ВНИИ ВОДГЕО, 1985. 203 с.
13. *Проскурников С.М.* Новые расчетные данные по фильтрации через земляные перемычки // Тр. Гос. гидрол. ин-та. В. 5. 1937. С. 162–182.
14. *Христианович С.А., Михлин С.Г., Девисон Б.Б.* Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1938. 407 с.
15. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Институт механики АН СССР, 1942. 143 с.
16. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1977. 664 с.
17. *Чарный И.А.* Строгое доказательство формул Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания // Докл. АН СССР. 1951. Т. 79. №6. С. 937–940.
18. *Анахаев К.Н.* О фильтрационном расчете перемычки // Матем. моделир. 2011. Т. 23. №2. С. 148–158.
19. *Анахаев К.Н.* Определение модулярной эллиптической функции в задачах безнапорной фильтрации // Докл. РАН. 2016. Т. 470. №2. С. 157–161. <https://doi.org/10.7868/S0869565216220084>
20. *Анахаев К.Н.* Задачи гидромеханики и нелинейной механики в комплексных и специальных функциях // в сб. избр. статей: ИПМА КБНЦ РАН, ИВП РАН. Нальчик; М.: 2020. 245 с.
21. *Хайруллин З.Э.* Исследование влияния неоднородности ядра каменно-земляной плотины на фильтрационные характеристики // Тр. сем. по крайевым задачам. В. 19. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1983. С. 202–210.
22. *Нельсон-Скорняков Ф.Б.* Расчет движения грунтовых вод через земляные плотины. М.: 1936. 159 с.
23. *Анахаев К.Н.* Расчет фильтрации через грунтовую перемычку на непроницаемом основании // Изв. вузов. Строит. и архитект. 1990. №7. С. 78–82.

24. Анахаев К.Н. Совершенствование конструкции, методов расчетного обоснования и проектирования противofiltrационных устройств грунтовых плотин. Дис. д-ра техн. наук (05.23.07) / М.: МГУП, 1997. 521 с.
25. Nemenyi P. Wasserbauliche Stromungslehre. Leipzig: 1933.
26. Cryer C.W. A survey of steady-state porous flow free boundary problems. // MRC Tech. Sum. Rep. 1657. Univ. Wisconsin, Madison. 1976. 135 p.
27. Chaiyo Kh., Rattanadecho Ph., Chantasiriwan S. The method of fundamental solutions for solving free boundary saturated seepage problem // Int. Commun. in Heat&Mass Transfer. 2011. №38. P. 249–254.
28. Шаланин В.А., Патлай К.И. Численное моделирование фильтрации грунтовых вод через прямоугольную перемычку из однородного грунта на водонепроницаемом основании // Инжен. гидрол. 2019. №2 (39). С. 111–117.
29. Петриченко М.Р., Заборова Д.Д., Котов Е.В., Мусорина Т.А. Образование промежутка высачивания в прямоугольной перемычке // Гидротех. строит. 2018. №10. С. 49–52.
30. Распопин Г.А., Лещенко С.И. Фильтрация через грунтовые плотины с ядром // Изв. вузов. Строит. 2006. №8. С. 47–51.
31. Mohamed Abd El-Razek M. Rezk, Abd El-Aziz Ahmed Ali Senoon. Analytical solution of seepage through earth dam with an internal core // Alexandria Engng. J. 2011. №50. P. 111–115.

### About Filtration in a Geophysical Bridge with a Seepage Site

K.N. Anakhaev<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Institute of applied mathematics and automation  
of Kabardino-of the Balkar SC of the RAS, Nalchik, Russia

<sup>\*</sup>e-mail: anaha13@mail.ru

Based on the representation of a modular elliptic function in the form of a combination of simple algebraic formulas that conformally map the area of the velocity hodograph (curved triangle) onto a half-plane, a direct definition of filtration rates in a geophysical bridge is given. For the first time, a family of isotope lines of equal filtration rates was constructed for the inner area of the bridge in the absence of water in the downstream. For special cases, the values of the proposed formulas almost completely coincide with the hydromechanical solution of Masket M. (for 4 cases) and the numerical calculations of Khairullin Z.E. (for 2 cases). The well-known Nelson-Skornyakov F.B. formula for the output filtration rates through the lower face of the jumper, adopted by analogy with the flow outlet from the base of the flatbed into the horizontal drainage, gives an underestimation of the results by up to 45%, and therefore cannot be recommended for practical use.

*Keywords:* filtration, jumper, modular elliptic function, conformal maps, velocity hodograph, curved triangle, isotopes

### REFERENCES

1. Dupuit J. Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux. No 49. Paris: 1863.
2. Forchheimer Ph. Hydraulik. Leipzig u. Berlin: Auflage, 1930. 525 s.
3. Knorre M.E. The work of sand bridges in physical terms and the method of their calculation // in: Methodology of Hydraulic Calculations Adopted When Drafting the Zaporozhye Hydroelectric Power Station on the Dnieper River. Vol. 1. Moscow: 1925. pp. 285–327.
4. Pavlovsky N.N. Works. Vol. 2. Movement of Groundwater. Moscow, Leningrad: USSR AS Pub., 1956. 771 p.
5. Devison B.B. On the steady movement of groundwater through earthen dams // Notes of the State Hydrol. Inst., vol. 6, 1932, pp. 11–19.
6. Dachler R. Ueber den Stromungsvorgang bei Hangquellen // Die Wasserwirtschaft, 1934, Jg. 27, h. 5–6, ss. 41–43.
7. Hamel G. Ueber Grundwasserströmung // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1934, B. 14, h. 3, ss. 129–159.

8. *Hamel G., Gunter E.* Numerische Duchredinung der Abhandlung uber Grundwasserstromung // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1935, B. 15, h. 3, ss. 255–265.
9. *Muskat M.* The seepage of water through dams with vertical faces // Physics, 1935, vol. 6, pp. 402–415.
10. *Muskat M.* The Flow Homogeneous Fluid through Porous Media. N.Y.;London: McGraw Hill Co., 1937. 763 p.
11. *Wyckoff R.D., Reed D.W.* Electrical conduction models for the solition of water seepage problems // Physics, 1935, vol. 6, pp. 395–401.
12. *Anakhaev K.N.* Methods of filtration calculation of stone-earth dams. Dis. Candidate of Technical Sciences (05.23.07) / Moscow: VNII VODGEO, 1985. 203 p.
13. *Proskurnikov S.M.* New calculated data on filtration through earth bridges // Proc. of the State Hydrol. Inst., 1937, vol. 5, pp. 162–182.
14. *Khristianovich S.A., Mikhlin S.G., Devison B.B.* Some New Questions of Continuum Mechanics. Moscow: USSR AS Pub., 1938. 407 p.
15. *Polubarinova-Kochina P.Ya.* Some Problems of the Flat Movement of Groundwater. Moscow: Inst. of Mech. of the USSR AS, 1942. 143 p.
16. *Polubarinova-Kochina P.Ya.* Theory of Groundwater Movement. Moscow: Nauka, 1977. 664 p.
17. *Charny I.A.* Rigorous proof of Dupuy formulas for non-pressure filtration with a seepage interval // Dokl. of the USSR AS, 1951, vol. 79, no. 6. pp. 937–940.
18. *Anakhaev K.N.* On the filtration calculation of the jumper // Math. Model., 2011, vol. 23, no. 2, pp. 148–158.
19. *Anakhaev K.N.* Definition of a modular elliptic function in pressure-free filtration problems // Dokl. of the RAS, 2016, vol. 470, no. 2, pp. 157–161. <https://doi.org/10.7868/S0869565216220084>
20. *Anakhaev K.N.* Problems of hydromechanics and nonlinear mechanics in complex and special functions // in: Coll. of Selected Articles. IPMA KBNTS RAS, IVP RAS. Nalchik;Moscow: 2020. 245 p.
21. *Khairullin Z.E.* Investigation of the influence of the heterogeneity of the core of a stone-earth dam on filtration characteristics // Proc. of the Sem. on Boundary Value Problems, Vol. 19. Kazan: Kazan Univ. Pub., 1983, pp. 202–210.
22. *Nelson-Skornyakov F.B.* Calculation of Groundwater Movement through Earthen Dams. Moscow: 1936. 159 p.
23. *Anakhaev K.N.* Calculation of filtration through a soil bridge on an impermeable base // Izv. vuzov. Construct.&Archit., 1990, no. 7, pp. 78–82.
24. *Anakhaev K.N.* Improvement of the design, methods of calculation justification and design of anti-filtration devices of soil dams. Dis. doctor of Technical Sciences (05.23.07) / Moscow: MGUP, 1997. 521 p.
25. *Nemenyi P.* Wasserbauliche Stromungslehre. Leipzig: 1933.
26. *Cryer C.W.* A survey of steady-state porous flow free boundary problems. // MRC Tech. Sum. Rep., 1657, Univ. Wisconsin, Madison, 1976, 135 p.
27. *Chaiyo Kh., Rattanadecho Ph., Chantasiriwan S.* The method of fundamental solutions for solving free boundary saturated seepage problem // Int. Commun. in Heat&Mass Transfer, 2011, no. 38, pp. 249–254.
28. *Shalanin V.A., Patlay K.I.* Numerical modeling of groundwater filtration through a rectangular bridge made of homogeneous soil on a waterproof base // Engng. Hydrology, 2019, no. 2 (39), pp. 111–117.
29. *Petrichenko M.R., Zaborova D.D., Kotov E.V., Musorina T.A.* Formation of a seepage gap in a rectangular bridge // Hydrotech. Constr., 2018, no. 10, pp. 49–52.
30. *Raspopin G.A., Leshchenko S.I.* Filtration through soil dams with a core // Izv. vuzov. Construct., 2006, no. 8, pp. 47–51.
31. *Mohamed Abd El-Razek M. Rezk, Abd El-Aziz Ahmed Ali Senoon.* Analytical solution of seepage through earth dam with an internal core // Alexandria Engng. J., 2011, no. 50, pp. 111–115.

УДК 539.3

**ЭВАНЕСЦЕНТНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ**© 2024 г. А. И. Каракозова<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

\*e-mail: karioca@mail.ru

Поступила в редакцию 11.03.2024 г.

После доработки 01.06.2024 г.

Принята к публикации 15.06.2024 г.

Теоретическое исследование “геометрических” SP-эванесцентных (головных) волн, распространяющихся в изотропном однородном полупространстве или полуплоскости со свободной границей, показывает, что эти волны могут удовлетворять условию отсутствия усилий на граничной плоскости тогда и только тогда, когда параметр Ламе  $\lambda$  исчезающе мал, что делает существование головных волн такого типа практически невозможным. Анализ основан на представлении Гельмгольца для поля перемещений в сочетании с разложением тензора напряжений и деформаций на сферическую и девиаторную части. Полученный результат о несуществовании этого типа эванесцентных волн может найти применение в теоретической геофизике при исследовании сейсмических волновых полей в окрестности эпицентров землетрясений, а так же в неразрушающих акустических методах диагностики.

*Ключевые слова:* эванесцентная волна; головная волна; упругая среда; изотропия; представление Гельмгольца

DOI: 10.31857/S0032823524030089 ZASUBR

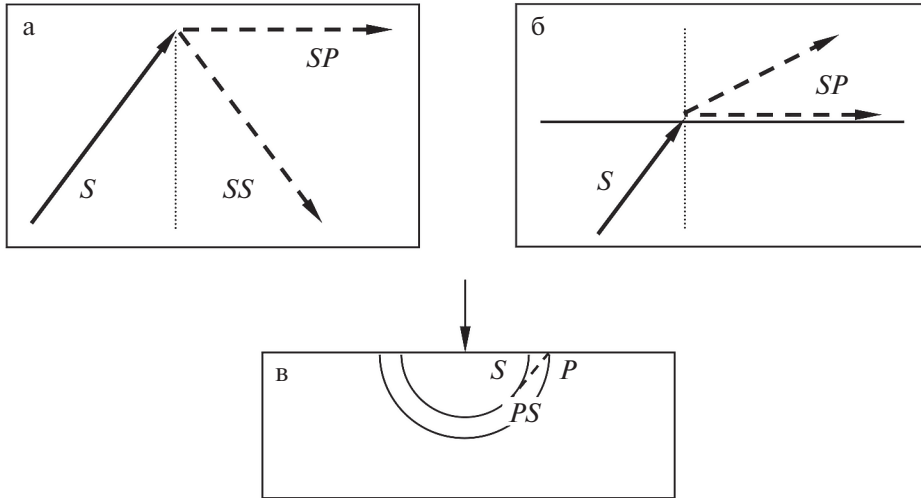
**1. Введение**

*1.1. Типы эванесцентных волн.* Первоначально эванесцентные волны в акустике связывали с волнами, которые в настоящее время известны, как истекающие волны, энергия которых затухает с расстоянием ( $r$ ) от источника волны быстрее, чем  $r^{-\gamma}$ , где  $\gamma$  – безразмерная постоянная, зависящая от рассматриваемой задачи [1]. Например, если в упругом полупространстве параметр затухания  $\gamma > 1$  то такая волна считалась эванесцентной [1]; отметим, что  $\gamma = 1$  соответствует затуханию объемных волн в 3d-среде [2]. В более поздних работах термин “эванесцентная” волна чаще применяется к акустическим волнам, которые ранее именовались головными волнами; например [3–5].

Первое экспериментальное наблюдение преломленной эванесцентной волны принадлежит Мохововичу [6], который обнаружил, что при определенных условиях отраженный от интерфейсной поверхности акустический сигнал может распространяться вдоль интерфейсной границы раздела двух слоев большой толщины. В дальнейшем это наблюдение было подтверждено теоретически на основе теории Zoepfritz–Knott в [1, 7–19].

Чаще всего рассматриваются следующие три типа эванесцентных волн (соответствующая номенклатура в основном соответствует [20]):

I. Отраженные геометрические SP-эванесцентные волны, возникают при критическом падении объемных S-волн на свободную границу полупространства, когда падающие S-волны порождают отраженные P-волны, распространяющиеся вдоль



**Рис. 1.** а) Тип (I): отраженная SP-волна в полупространстве при критическом угле падения; б) Тип (II): преломленная SP-волна в верхнем полупространстве при критическом падении S-волны; в) Тип (III): “негеометрическая” PS-волна, возникающая при решении внешней задачи Лэмба; сплошные линии соответствуют падающим волнам; пунктирные линии соответствуют отраженным или преломленным волнам

свободной поверхности [21–25] (см. рис. 1,а). В теоретических исследованиях этот тип эванесцентных волн возникает при решении внутренних задач Лэмба о динамическом силовом воздействии, приложенном внутри упругой полуплоскости или полупространства [26–29].

II. Преломленные геометрические SP-эванесцентные волны, известные также как конические волны, возникают при критическом падении объемных S-волн на плоскую границу раздела двух сред, когда падающие S-волны порождают преломленные P-волны, распространяющиеся в нижней среде вдоль общей границы раздела [30–33] (см. рис. 1,б); для изучения межфазных высокочастотных волн в слоистых средах используются как асимптотические, так и волновые методы [34–36].

III. Более редкая, чем предыдущие геометрические типы, “негеометрическая” PS-эванесцентная волна возникает в полупространстве и распространяется назад под некоторым углом к свободной поверхности со скоростью S-волны; эта волна соответствует решениям внешней задачи Лэмба [37–39] (см. рис. 1,в) отметим, что рассмотрение внутренней задачи Лэмба не приводит к этому типу эванесцентных волн [2,40].

Первые два типа “геометрических” эванесцентных волн опираются на уравнение Zoerpritz–Knott для коэффициентов отражения-преломления [30,31] и закон Снелла для углов отражения-преломления [31]. Отметим также, что типы I–III не исчерпывают всех типов эванесцентных волн см. [41], где были обнаружены еще два типа эванесцентных волн. Еще одно замечание касается некоторых экстраполяций этих результатов на стратифицированные анизотропные и функционально-градиентные среды [42–45].

*1.2. Постановка проблемы.* Ниже показано, что первый тип SP-волн несовместим с однородными граничными условиями на свободной поверхности упругого изотропного полупространства или полуплоскости при любых допустимых значениях параметра Ламе  $\lambda \neq 0$ , что делает этот тип эванесцентных волн, практически, не имеющим права на существование. Можно ожидать, что этот результат может найти применение в теоретической геофизике при исследовании сейсмических волновых

полей в окрестности эпицентров землетрясений, а также в неразрушающих акустических методах диагностики.

**2. Основные уравнения.** Используемые в этом разделе основные уравнения в основном следуют [31, 46, 47].

*2.1. Закон Гука.* Предполагая инфинитезимальность поля деформаций, уравнения Коши можно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^T), \quad (2.1)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформации;  $\mathbf{u}$  – поле перемещений;  $\mathbf{x}$  – пространственная координата;  $t$  – время.

С введением объемной деформации

$$\theta \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{div}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

и девиатора деформаций  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{I}, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор, закон Гука для изотропной однородной среды может быть представлен в виде [46]

$$p = -k\theta, \quad \mathbf{s} = 2\mu\mathbf{e} \quad (2.4)$$

Здесь  $p$  – давление, определяемое соответствующим тензором напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , как

$$p = -\frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.5)$$

$\mathbf{s}$  – девиатор напряжений,

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}, \quad (2.6)$$

$k$  – объемный модуль, связанный с соответствующими параметрами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ , соотношением

$$k = \frac{2}{3}\mu + \lambda \quad (2.7)$$

*2.2. Уравнение движения.* Уравнение движения для однородной изотропной среды можно представить в виде [31]

$$(c_p^2 \nabla_{\mathbf{x}} \text{div}_{\mathbf{x}} - c_s^2 \text{rot}_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}} - \mathbf{I} \partial_{tt}^2) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.8)$$

где  $c_p, c_s$  – скорости соответственно продольной и сдвиговой объемных волн:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.9)$$

В выражениях  $\rho$  – плотность материала.

Для последующего анализа требуется представление Гельмгольца для векторного поля  $\mathbf{u}$  [47]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}, t) + \text{rot}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.10)$$

где  $\varphi$  и  $\boldsymbol{\psi}$  – скалярный и векторный потенциалы, соответственно. Подстановка представления (2.10) в уравнение движения, позволяет разбить уравнение (2.8) на два уравнения [46]

$$(c_p^2 \Delta_{\mathbf{x}} - \mathbf{I} \partial_{tt}^2) \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (c_s^2 \Delta_{\mathbf{x}} - \mathbf{I} \partial_{tt}^2) \text{rot}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.11)$$

откуда следует, что если поле перемещений определяется только скалярным потенциалом, что соответствует распространению Р-волны:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (2.12)$$

то уравнение движения сводится к первому уравнению в (2.11).

Принимая во внимание уравнения (2.12) и (2.2), получаем

$$\theta = \Delta_{\mathbf{x}} \varphi, \quad \mathbf{e} = \left( \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \Delta_{\mathbf{x}} \right) \varphi \quad (2.13)$$

Последние уравнения с учетом (2.4) принимают вид

$$p = -k \Delta_{\mathbf{x}} \varphi, \quad \mathbf{s} = 2\mu \left( \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \Delta_{\mathbf{x}} \right) \varphi \quad (2.14)$$

Анализ уравнений (2.14) показывает, что любая Р-волна наряду со сферическим тензором деформаций и сферическим тензором напряжений, сопровождается так же соответствующими девиаторными тензорами деформаций и напряжений. Заметим также, что девиаторные компоненты в уравнениях (2.13), (2.14), удовлетворяют следующим соотношениям [46]

$$\text{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{e} = 0, \quad \text{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{s} = 0 \quad (2.15)$$

*2.3. Граничные условия на свободной поверхности.* Рассмотрим плоскую задачу (обобщенную плоскую деформацию) для полуплоскости со свободной границей, рис. 2.

Свободное от усилий граничное условие имеет вид [46]

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.16)$$

Подставляя выражения (2.14) в уравнение (2.16) и учитывая выражение (2.7), получаем

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \left( \lambda \Delta_{\mathbf{x}} \varphi + 2\mu \partial_{nn}^2 \varphi \right) \mathbf{n} + \left( 2\mu \partial_{nm}^2 \varphi \right) \mathbf{m} = 0, \quad (2.17)$$

где  $\partial_n = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ ,  $\partial_m = \mathbf{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$  и  $\Delta_{\mathbf{x}} = \partial_{nn}^2 + \partial_{mm}^2$ .

Для рассматриваемой SP-эванесцентной волны скалярный потенциал  $\varphi$  локализован на граничной плоскости [14]

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(x, t), \quad (2.18)$$

где  $x = \mathbf{m} \cdot \mathbf{x}$ . Учитывая (2.18), видно, что части уравнения (2.17), содержащие производные  $\partial_n$ , пропадают. Таким образом, из уравнения (2.17) следует

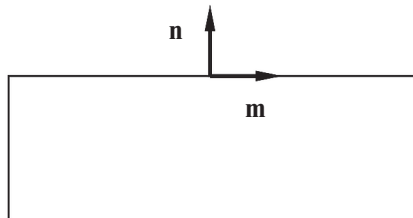


Рис. 2. Полуплоскость;  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к границе плоскости,  $\mathbf{m}$  – единичный касательный вектор

$$(\lambda \partial_{mm}^2 \varphi) \mathbf{n} = 0 \quad (2.19)$$

Последнее уравнение означает, что либо (I)  $\lambda = 0$  и потенциал  $\varphi$  произволен; либо (II)  $\lambda \neq 0$  и  $\varphi(x, t)$  – линейная функция переменной  $x$ :  $\varphi(x, t) = a(t)x + b(t)$ . Второй вариант, ввиду уравнений (2.13) и (2.14), дает одинаково нулевые поля деформаций и напряжений и должен быть исключен из рассмотрения. Таким образом, первый вариант является единственно возможным для существования SP-волн, удовлетворяющих однородным граничным условиям в напряжениях.

**Выводы.** Проведенный анализ, основанный на представлении Гельмгольца для поля перемещений (2.10) в виде суммы скалярного и объемного потенциалов и разложении полей деформаций и напряжений по сферическим и девиаторным тензорам (2.13), (2.14), показывает, что геометрическая SP-эвансцентная волна типа (I) может удовлетворять однородным граничным условиям в напряжениях, если только параметр Ламе  $\lambda \neq 0$ .

Следует отметить, что условие  $\lambda \neq 0$  с учетом соотношения Ламе [46]

$$\lambda = \frac{Ev}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)},$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, влечет

$$\nu = 0$$

Таким образом, SP-эвансцентные волны первого типа могут существовать тогда и только тогда, когда коэффициент Пуассона равен нулю, что с практической точки зрения означает невозможность существования SP-волн первого типа.

Полученный результат о несуществовании геометрических SP-волн первого типа в упругом изотропном полупространстве может иметь многочисленные приложения в геофизике, сейсмологии и сейсмологии, акустических неразрушающих методах диагностики и т.д. Одним из примеров, где результат о несуществовании SP-волн первого типа, может играть положительную роль, являются сейсмические барьеры [48,49], предназначенные, в том числе и для защиты от головных SP-волн. Однако, как показывают настоящие исследования, рассматриваемые головные волны при проектировании систем сейсмической защиты, могут быть исключены.

**Благодарность.** Работа финансировалась Министерством науки и высшего образования РФ, проект № FSWG-2023-0004 “Система территориальной сейсмической защиты критически важных объектов инфраструктуры на основе гранулированных метаматериалов, обладающих свойствами широкодиапазонных фоновых кристаллов”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pekeris C.L.* The seismic buried pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. 1955. V. 41. P. 629–639.
2. *Terentjeva E.O. et al.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61. P. 356–367.
3. *Meykens K., van Rompaey B., Janssen H.* Dispersion in acoustic waveguides – A teaching laboratory experiment // Am.J. Phys. 1999. V. 67(5). P. 400–406.
4. *de Fornel F.* Evanescent Waves: From Newtonian Optics to Atomic Optics. Berlin: Springer, 2001. 265 p.
5. *Yamamoto K., Sakiyama T., Izumiya H.* Visualization of acoustic evanescent waves by the stroboscopic photoelastic method // Phys. Proc. 2015. V. 70. P. 716–720.
6. *Mohorovičić A.* Das Beben vom 8. X. 1909 // Jahrbuch des Meteorol. Obser. in Zagreb (Agram). 1910. P. 1–63.
7. *Jeffreys H.* On compressional waves in two superposed layers // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1926. V. 23(4). P. 472–481.



8. *Muskat M.* The theory of refraction shooting // *Physics*. 1933. V. 4. P. 14–28.
9. *Heelan P.A.* On the theory of head waves // *Geophys.* 1953. V. 18. P. 871–893.
10. *O'Brien P.N.S.* Model seismology – the critical refraction of elastic waves // *Geophys.* 1955. V. 20. P. 227–242.
11. *Levin F.K., Ingram J.D.* Head waves from a bed of finite thickness // *Geophys.* 1962. V. 27. P. 753–765.
12. *Nakamura Y.* Multi-reflected head waves in a single-layered medium // *Geophys.* 1966. V. 31. P. 927–939.
13. *Datta S., Bhowmick A.N.* Head waves in two-dimensional seismic models // *Geophys. Prospect.* 1969. V. 17(4). P. 419–432.
14. *Cerveny V., Ravindra R.* Theory of Seismic Head Waves. Toronto: Toronto Univ. Press, 1971. 328 p.
15. *Cerveny V.* Theory of seismic head waves // *Am.J. Phys.* 1973. V. 41(5). P. 755–757.
16. *Zhou H., Chen Y.* Ray path of head waves with irregular interfaces // *Appl. Geophys.* 2010. V. 7(1). P. 66–73.
17. *Li S.J. et al.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // *Comp. Geotech.* 2019. V. 109. P. 69–81.
18. *Li S.J. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* 2020. V. 24. P. 2400–2421.
19. *Zhang J., Zhang H.-M., Chen X.* Characteristics of head wave in multi-layered half-space // *Acta Seism. Sinica.* 2022. V. 15(6). P. 585–594.
20. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semi-infinite medium // *Phil. Trans. A.* 1949. V. 242. P. 63–100.
21. *Cagniard L.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. New York: McGraw-Hill, 1962. 282 p.
22. *Burridge R., Lapwood E.R., Knopoff L.* First motions from seismic sources near a free surface // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1964. V. 54. P. 1889–1913.
23. *Dmitriev V.F., Noskov A.N.* Theoretical and experimental studies of quasi-surface acoustic wave resonators // *Acoust. Phys.* 2010. V. 56. P. 475–4481.
24. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Acoustic field excited by single force with arbitrary direction in semi-infinite elastic space // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. P. 235–245.
25. *Schweitzer J., Storchak D.A., Borman P.* Seismic phase nomenclature: The IASPEI standard // in: *En cycl. of Solid Earth Geophys.* / Ed. by *Gupta H.K.* *En cycl. of Earth Sci. Ser.* Berlin: Springer, 2021. 1950 p.
26. *Kausel E.* Lamb's problem at its simplest // *Proc. Roy. Soc. A.* 2012. V. 469(2149). P. 20120462–20120462.
27. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.* 2003. V. 61. P. 575–582.
28. *Goldstein R.V. et al.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids.* 2017. V. 52. P. 700–707.
29. *Emami M., Eskandari-Ghadi M.* Transient interior analytical solutions of Lamb's problem // *Math. Mech. Solids.* 2019. V. 24(11). P. 3485–43513.
30. *Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology: Theory and Methods. Vol. 1. San Francisco: Freeman Co., 1980. 700 p.
31. *Ben-Menahem A., Singh S.J.* Seismic Waves and Sources. Berlin: Springer, 1981. 1108 p.
32. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.* 2004. V. 62(4). P. 749–766.
33. *Su Y. et al.* Supervirtual refraction interferometry in the Radon domain // *Remote Sensing.* 2023. V. 15(2). Paper №384.
34. *Breckenridge F.R., Tschiegg C.E., Greenspan M.* Acoustic emission: some applications of Lamb's problem // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 57. P. 626–631.
35. *Phan H., Cho Y., Achenbach J.D.* Verification of surface wave solutions obtained by the reciprocity theorem // *Ultrasonics.* 2014. V. 54. P. 1891–1894.
36. *Kuznetsov S.V.* Stoneley waves at the generalized Wiechert condition // *Z. Angew. Math. Phys.* 2020. V. 71. Paper №180.
37. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer, 1993. 329 p.

38. Roth M., Holliger K. The non-geometric PS wave in high-resolution seismic data: observations and modeling // *Geophys. J.* 2000. V. 140. P. F5–F11.
39. Kuznetsov S.V. Love waves in layered anisotropic media // *JAMM.* 2006. V. 70. P. 116–127.
40. Il'yasov K.K. et al. Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // *Mech. Solids.* 2016. V. 51. P. 39–45.
41. Buchen P.W. The elastodynamic Green's tensor for the 2D half-space // *J. Austral. Math. Soc.* 1978. V. 20. P. 385–440.
42. Ilyashenko A.V. et al. Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.* 2017. V. 53. P. 243–259.
43. Chapman Ch. Head-wave coefficients in anisotropic media // *Geophys. J. Int.* 2018. V. 214. P. 164–184.
44. Kuznetsov S.V. Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion.* 2019. V. 84. P. 1–7.
45. Karakozova A., Kuznetsov S. Head waves in modified Weiskopf sandy medium // *Axioms.* 2023. V. 12. Paper №679.
46. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity // in: *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* / Ed. by Truesdell C. Berlin, Heidelberg: Springer, 1973. 295 p.
47. Auld B.A. *Acoustic Fields and Waves in Solids*, Malabar, Florida: Krieger Pub. Co., 1990. 446 p.
48. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers // *Acoust. Phys.* 2011. V. 57. P. 420–426.
49. Dudchenko A.V. et al. Vertical wave barriers for vibration reduction // *Arch. Appl. Mech.* 2021. V. 91. P. 257–276.

### Evanescent Acoustic Waves

A.I. Karakozova<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup>National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

<sup>#</sup>e-mail: karioca@mail.ru

A theoretical study of “geometric” SP-evanescent (head) waves propagating in an isotropic homogeneous half-space or half-plane with a free boundary shows that these waves can satisfy the condition of absence of effort on the boundary plane if and only if the Lamé parameter  $\lambda$  is vanishingly small, which makes the existence of head waves of this type practically impossible. The analysis is based on the Helmholtz representation for the displacement field in combination with the decomposition of the stress and strain tensor into spherical and deviatoric parts. The obtained result about the non-existence of this type of evanescent waves can find application in theoretical geophysics in the study of seismic wave fields in the vicinity of earthquake epicenters, as well as in non-destructive acoustic diagnostic methods.

*Keywords:* evanescent wave; head wave; elastic medium; isotropy; Helmholtz representation

### REFERENCES

1. Pekeris C.L. The seismic buried pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1955, vol. 41, pp. 629–639.
2. Terentjeva E.O. et al. Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, pp. 356–367.
3. Meykens K., van Rompaey B., Janssen H. Dispersion in acoustic waveguides – A teaching laboratory experiment // *Am.J. Phys.*, 1999, vol. 67(5), pp. 400–406.
4. de Fornel F. *Evanescent Waves: From Newtonian Optics to Atomic Optics.* Berlin: Springer, 2001. 265 p.
5. Yamamoto K., Sakiyama T., Izumiya H. Visualization of acoustic evanescent waves by the stroboscopic photoelastic method // *Phys. Proc.*, 2015, vol. 70, pp. 716–720.
6. Mohorovičić A. Das Beben vom 8. X. 1909 // *Jahrbuch des Meteorol. Obser. in Zagreb (Agram)*, 1910, pp. 1–63.
7. Jeffreys H. On compressional waves in two superposed layers // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1926, vol. 23(4), pp. 472–481.
8. Muskat M. The theory of refraction shooting // *Physics*, 1933, vol. 4, pp. 14–28.
9. Heelan P.A. On the theory of head waves // *Geophys.*, 1953, vol. 18, pp. 871–893.

10. *O'Brien P.N.S.* Model seismology – the critical refraction of elastic waves // *Geophys.*, 1955, vol. 20, pp. 227–242.
11. *Levin F.K., Ingram J.D.* Head waves from a bed of finite thickness // *Geophys.*, 1962, vol. 27, pp. 753–765.
12. *Nakamura Y.* Multi-reflected head waves in a single-layered medium // *Geophys.*, 1966, vol. 31, pp. 927–939.
13. *Datta S., Bhowmick A.N.* Head waves in two-dimensional seismic models // *Geophys. Prospect.*, 1969, vol. 17(4), pp. 419–432.
14. *Cerveny V., Ravindra R.* Theory of Seismic Head Waves. Toronto: Toronto Univ. Press, 1971. 328 p.
15. *Cerveny V.* Theory of seismic head waves // *Am.J. Phys.*, 1973, vol. 41(5), pp. 755–757.
16. *Zhou H., Chen Y.* Ray path of head waves with irregular interfaces // *Appl. Geophys.*, 2010, vol. 7(1), pp. 66–73.
17. *Li S.J. et al.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // *Comp. Geotech.*, 2019, vol. 109, pp. 69–81.
18. *Li S.J. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.*, 2020, vol. 24, pp. 2400–2421.
19. *Zhang J., Zhang H.-M., Chen X.* Characteristics of head wave in multi-layered half-space // *Acta Seism. Sinica*, 2022, vol. 15(6), pp. 585–594.
20. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semi-infinite medium // *Phil. Trans. A.*, 1949, vol. 242, pp. 63–100.
21. *Cagniard L.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. N.Y.: McGraw-Hill, 1962. 282 p.
22. *Burridge R., Lapwood E.R., Knopoff L.* First motions from seismic sources near a free surface // *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1964, vol. 54, pp. 1889–1913.
23. *Dmitriev V.F., Noskov A.N.* Theoretical and experimental studies of quasi-surface acoustic wave resonators // *Acoust. Phys.*, 2010, vol. 56, pp. 475–4481.
24. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Acoustic field excited by single force with arbitrary direction in semi-infinite elastic space // *Acoust. Phys.*, 2019, vol. 65, pp. 235–245.
25. *Schweitzer J., Storchak D.A., Borman P.* Seismic phase nomenclature: The IASPEI standard // in: *Encycl. of Solid Earth Geophys.* / Ed. by *Gupta H.K.* *Encycl. of Earth Sci. Ser.* Berlin: Springer, 2021. 1950 p.
26. *Kausel E.* Lamb's problem at its simplest // *Proc. Roy. Soc. A*, 2012, vol. 469(2149), pp. 20120462–20120462.
27. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.*, 2003, vol. 61, pp. 575–582.
28. *Goldstein R.V. et al.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, pp. 700–707.
29. *Emami M., Eskandari-Ghadi M.* Transient interior analytical solutions of Lamb's problem // *Math. Mech. Solids*, 2019, vol. 24(11), pp. 3485–43513.
30. *Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology: Theory and Methods. Vol. 1. San Francisco: Freeman Co., 1980. 700 p.
31. *Ben-Menahem A., Singh S.J.* Seismic Waves and Sources. Berlin: Springer, 1981. 1108 p.
32. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.*, 2004, vol. 62(4), pp. 749–766.
33. *Su Y. et al.* Supervirtual refraction interferometry in the Radon domain // *Remote Sensing*, 2023, vol. 15(2), paper no. 384.
34. *Breckenridge F.R., Tschiegg C.E., Greenspan M.* Acoustic emission: some applications of Lamb's problem // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1975, vol. 57, pp. 626–631.
35. *Phan H., Cho Y., Achenbach J.D.* Verification of surface wave solutions obtained by the reciprocity theorem // *Ultrasonics*, 2014, vol. 54, pp. 1891–1894.
36. *Kuznetsov S.V.* Stoneley waves at the generalized Wiechert condition // *Z. Angew. Math. Phys.*, 2020, vol. 71, paper no. 180.
37. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer, 1993. 329 p.

38. Roth M., Holliger K. The non-geometric PS wave in high-resolution seismic data: observations and modeling // *Geophys. J.*, 2000, vol. 140, pp. F5–F11.
39. Kuznetsov S.V. Love waves in layered anisotropic media // *JAMM*, 2006, vol. 70, pp. 116–127.
40. Il'yasov K.K. et al. Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, pp. 39–45.
41. Buchen P.W. The elastodynamic Green's tensor for the 2D half-space // *J. Austral. Math. Soc.*, 1978, vol. 20, pp. 385–440.
42. Ilyashenko A.V. et al. Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.*, 2017, vol. 53, pp. 243–259.
43. Chapman Ch. Head-wave coefficients in anisotropic media // *Geophys. J. Int.*, 2018, vol. 214, pp. 164–184.
44. Kuznetsov S.V. Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion*, 2019, vol. 84, pp. 1–7.
45. Karakozova A., Kuznetsov S. Head waves in modified Weiskopf sandy medium // *Axioms*, 2023, vol. 12, paper no. 679.
46. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity // in: *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* / Ed. by Truesdell C. Berlin, Heidelberg: Springer, 1973. 295 p.
47. Auld B.A. *Acoustic Fields and Waves in Solids*, Malabar, Florida: Krieger Pub. Co., 1990. 446 p.
48. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers // *Acoust. Phys.*, 2011, vol. 57, pp. 420–426.
49. Dudchenko A.V. et al. Vertical wave barriers for vibration reduction // *Arch. Appl. Mech.*, 2021, vol. 91, pp. 257–276.

УДК 539.3

**КОНТАКТ С МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ  
ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ (САМОСОГЛАСОВАННЫЙ ПОДХОД):  
БАЛАНС ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ  
ИНДЕНТОР–СЛОЙ–ПОДЛОЖКА**

© 2024 г. И.А. Солдатенков\*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 03.05.2024 г.

После доработки 17.06.2024 г.

Принята к публикации 25.06.2024 г.

Рассматривается контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. Предложены соответствующие модели контактного взаимодействия, для которых составлен и обоснован баланс энергии в системе индентор–слой–подложка. Последний учитывает вязкую диссипацию энергии, потенциальную энергию упругой деформации, энергию поля, а также энергию, рассеиваемую при скачке контактного зазора.

*Ключевые слова:* контактная задача, вязкоупругий слой, межмолекулярное взаимодействие, диссипация энергии, энергия поля

DOI: 10.31857/S0032823524030093 ZAAXGM

**1. Введение.** При изучении контакта деформируемых тел силы межмолекулярного взаимодействия впервые учитывались применительно к герцевскому контакту [1]. В дальнейшем был разработан ряд эффективных подходов к решению контактных задач такого типа, среди которых следует отметить подходы, использующие концепцию поверхностной энергии – модели JKR и DMT [2, 3]. Эти подходы также использовались для расчета адгезионного контакта слоистых [4–7] и вязкоупругих тел [8–11].

Строгая постановка контактной задачи, учитывающая межмолекулярное взаимодействие, предполагает существование некоторого зазора  $l^*$  между контактирующими телами. Величина этого зазора должна обеспечивать баланс сил, обусловленных контактной деформацией тел и их межмолекулярным взаимодействием (самосогласованный подход по Дерягину [12]). При таком подходе возможны постановки задачи с поверхностным [13–15] и объемным [16–20] приложением сил межмолекулярного взаимодействия.

В связи с традиционной постановкой задачи следует упомянуть концепцию межповерхностного тензора напряжений, позволяющего заменить объемное распределение межмолекулярных сил эффективным поверхностным напряжением [21, 22].

Одной из характерных особенностей адгезионного контакта является возможность скачкообразного изменения его параметров, в частности, контактного зазора. Подобные изменения рассматривались во многих исследованиях, среди которых

отметим работы [12–14, 23–26], использующие как самосогласованный подход, так и концепцию поверхностной энергии.

Ранее рассматривался контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. Были проведены расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) слоя и вязкой диссипации энергии в нем, а также контактного зазора  $r$  при заданном законе внедрения индентора [27–29]. Полученные результаты позволили выполнить расчет силы трения скольжения шероховатого контртела по вязкоупругому слою в режиме бесконтактного трения [29].

Данная работа является продолжением указанных исследований [27–29] и преследует своей целью построение и проверку баланса энергии для рассматриваемой системы индентор–слой–подложка с учетом эффектов скачкообразного изменения контактного зазора и вязкой диссипации энергии. Подобный баланс энергии рассматривался ранее при построении известных моделей JKR, DMT [2, 3] и во многих других работах, например, для оценки диссипации энергии в адгезионном контакте [14, 30–32].

**2. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим систему, состоящую из бесконечно протяженного плоского индентора и основания, представляющего собой вязкоупругий слой, связанный с подложкой (рис. 1). Считается, что индентор контактирует с основанием посредством межмолекулярных сил, при этом они разделены контактным зазором  $r$ , обеспечивающим баланс сил вязкоупругого и межмолекулярного взаимодействий контактирующих тел (самосогласованный подход [12]). Свяжем с основанием систему координат  $Oxyz$ , совместив ее плоскость  $Oxy$  с границей раздела слоя и подложки. Контакт индентора и слоя считается плоскопараллельным, что обуславливает зависимость всех контактных характеристик только от координаты  $z$  и времени  $t$ . Толщину слоя в недеформированном состоянии обозначим через  $h_0$ , а в деформированном – через  $h$ . Расстояние между индентором и подложкой обозначим через  $H$ , причем  $H = r + h$ . Индентор и подложка считаются абсолютно жесткими.

В качестве контактной характеристики удобно использовать внедрение  $\delta$  индентора в слой, которое отсчитывается от поверхности слоя в недеформированном состоянии (от уровня  $z = h_0$ ). Отметим, что внедрение  $\delta$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, при этом  $\delta(t) = h_0 - H(t)$  (рис. 1). Зависимость  $\delta(t)$  внедрения от времени считается заданной.

При дальнейшем рассмотрении деформации слоя считаются малыми. Если обозначить через  $w$  перемещение слоя вдоль оси  $z$ , то это допущение можно выразить следующим образом

$$|w(z,t)|/h_0 \ll 1 \quad (2.1)$$

Межмолекулярное взаимодействие индентора и основания определяется парными взаимодействиями их молекул (гипотеза Гамакера). Соответствующая сила  $F$  зависит от свойств пары молекул и расстояния  $l$  между ними. Существуют разные формы такой зависимости, и в дальнейшем будет использоваться известный закон Леннарда–Джонса [33]:

$$F(l) = \frac{a_1}{l^m} - \frac{a_2}{l^n}, \quad (2.2)$$

где  $a_1, a_2, m, n$  – параметры взаимодействия, причем обычно полагают  $m = 7, n = 13$ .

При определенных допущениях [14, 32] суммирование парных взаимодействий молекул индентора и слоя позволяет для каждой точки слоя рассчитать объемную силу  $\mathbf{f}$ , обусловленную межмолекулярным взаимодействием. Эта сила направлена вдоль оси  $z$  и зависит от расстояния  $d = r + s = r + h - z$  между точкой ее прило-

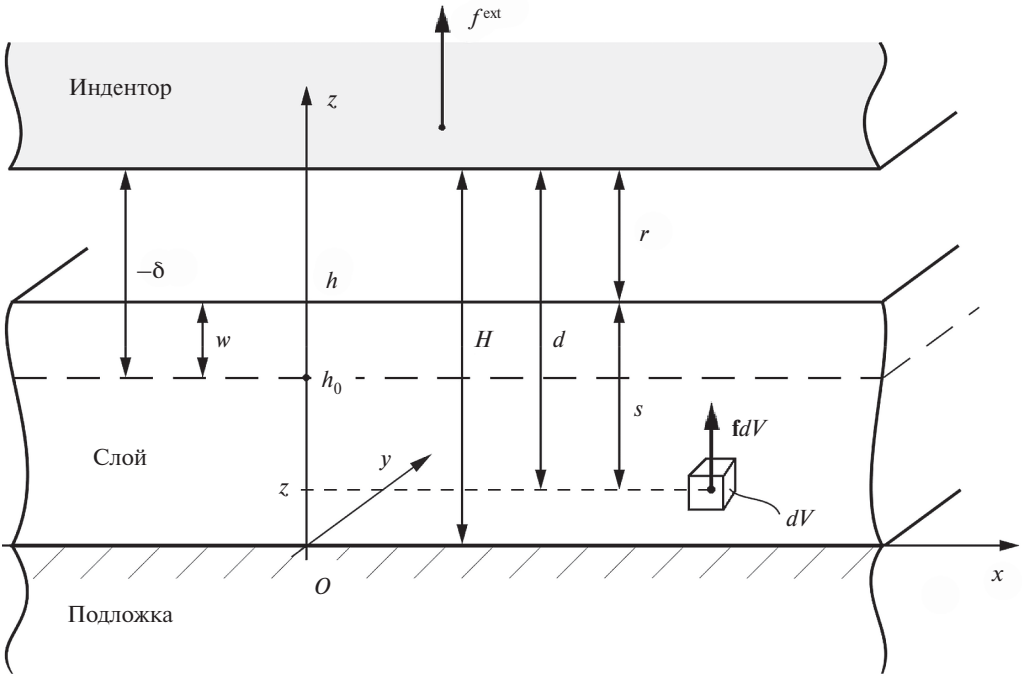


Рис. 1. Контактное взаимодействие индентора с основанием, состоящим из вязкоупругого слоя и абсолютно жесткой подложки

жения и индентором (рис. 1), причем, в силу допущения (2.1) о малости деформаций слоя, в последнем равенстве можно заменить толщину  $h$  ее начальным значением  $h_0$ . Все это позволяет записать для компонент  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  объемной силы  $\mathbf{f}$  в системе координат  $Oxyz$  следующие выражения:

$$f_1 = f_2 \equiv 0, \quad f_3(z, t) = f(r(t) + h_0 - z), \quad (2.3)$$

при этом функция  $f(d)$  известным образом определяется через параметры межмолекулярного взаимодействия индентора и слоя [27, 28].

Отметим, что на молекулы слоя также действуют силы со стороны молекул подложки и самого слоя. Однако, при допущении (2.1) эти силы, в отличие от силы  $f_3$  вида (2.3), не изменяются во времени и обеспечивают исходное равновесное состояние молекул слоя. При дальнейшем рассмотрении слоя как сплошной среды это состояние будет отождествляться с его исходным недеформированным состоянием.

Суммирование парных взаимодействий молекул позволяет также определить полную силу  $p$  воздействия индентора на основание, приходящуюся на единицу площади его поверхности (верхней границы):

$$p(t) = p_c(t) + p_b(t), \quad p_c(t) = - \int_0^{h(t)} f(r(t) + s) ds, \quad p_b(t) = - \int_{h(t)}^{\infty} f(r(t) + s) ds, \quad (2.4)$$

причем первый/второй интеграл здесь отвечает воздействию индентора отдельно на слой/подложку. В рамках самосогласованного подхода сила  $p$  интерпретируется как контактное давление, действующее на основание в виде композиции подложка–слой

[12–14, 19]. Величину  $p_c$  можно тогда интерпретировать как фиктивное контактное давление, обусловленное межмолекулярным воздействием индентора на слой.

Учитывая допущение (2.1) о малости деформаций слоя, верхний предел интегрирования в первом интеграле (2.4) можно заменить на  $h_0$ . В результате, используя известное выражение для функции  $f(d)$ , получим [29]:

$$p_c(t) = \Phi_c(r(t)), \quad \Phi_c(r) = -\frac{A_{1c}}{r_{ec}^k} \left[ \left( \frac{r_{ec}}{r} \right)^k - \left( \frac{r_{ec}}{r+h_0} \right)^k \right] - \left[ \left( \frac{r_{ec}}{r} \right)^l - \left( \frac{r_{ec}}{r+h_0} \right)^l \right] \quad (2.5)$$

Взятие второго интеграла в формуле (2.4) позволяет установить, что

$$p_b(t) = \Phi_b(H(t)), \quad \Phi_b(H) = -\frac{A_{1b}}{r_{eb}^k} \left[ \left( \frac{r_{eb}}{H} \right)^k - \left( \frac{r_{eb}}{H} \right)^l \right] \quad (2.6)$$

В формулах (2.5) и (2.6):  $k = m - 4$ ,  $l = n - 4$ , а параметры  $A_{1\xi}$ ,  $r_{c\xi}$  характеризуют взаимодействие молекул слоя ( $\xi = c$ ) или подложки ( $\xi = b$ ) с молекулами индентора и выражаются известным образом через параметры закона Леннарда–Джонса (2.2) [27, 28].

Таким образом, равенство (2.4) позволяет записать следующее выражение для контактного давления:

$$p(t) = p_b(t) + p_c(t) = \Phi_b(H(t)) + \Phi_c(r(t)), \quad (2.7)$$

которое определяет силовую модель взаимодействия индентора и основания.

*Замечание 1.* В работах [27–29] контактное давление  $p$  определялось как интеграл  $\int_0^\infty f(r+s)ds$ . Использованное выше разбиение (2.4) этого интеграла на слагаемые  $p_b$  и  $p_c$  представляется более корректным, т. к. величина  $p_b = \Phi_b(H)$  точно определяет силу воздействия индентора на подложку.

Традиционная постановка контактной задачи при наличии межмолекулярного взаимодействия подразумевает, что деформирование слоя обуславливается контактным давлением, приложенным к его поверхности [12–15]. В случае деформирования слоя, связанного с абсолютно жесткой подложкой, в качестве контактного давления представляется физически корректным использовать фиктивное контактное давление  $p_c$  вида (2.5) [29]. Ниже также рассматривается уточненная постановка, в которой естественным образом предполагается, что деформация слоя порождается объемными силами (2.3), распределенными по его глубине, тогда как поверхность слоя свободна от нагрузок [16–20]. В качестве параметра нагружения слоя в обеих постановках выступает контактный зазор  $r$ , однозначно определяющий объемную силу  $f_3$  по формуле (2.3) и давление  $p_c$  по формуле (2.5).

*Замечание 2.* Ввиду быстро затухания функции  $f(d)$  с увеличением расстояния  $d = r + h_0 - z$  [27, 28], объемные силы  $f_3(z, t) = f(r(t) + h_0 - z)$  сконцентрированы в подповерхностной области нанометровой толщины  $\sim r_{ec}$ . Если  $r_{ec} \ll h_0$ , то, в силу соотношения (2.4), равнодействующая этих сил, отнесенная к элементу поверхности слоя, равна  $p_c$  с точностью до знака. По принципу Сен-Венана, действие таких сил на расстояниях существенно превышающих  $r_{ec}$  по глубине слоя эквивалентно приложению контактного давления  $p_c$  к поверхности слоя, что как раз отвечает традиционной постановке задачи. Таким образом, можно сделать вывод (и это подтверждается расчетами [18, 19, 34]), что использование уточненной постановки задачи актуально на наноуровне (масштаб  $\sim r_{ec}$ ). На более крупном масштабе ( $\gg r_{ec}$ ) для расчета НДС слоя допустимо использование более простой традиционной постановки задачи.



Деформационные свойства слоя будем описывать линейным законом наследственного типа [35–37]

$$\sigma_{ij}(z, t) = \delta_{ij} \lambda \theta(z, t) + 2\mu \varepsilon_{ij}(z, t) - \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \Lambda(t - \tau) \theta(z, \tau) d\tau - 2 \int_{-\infty}^t M(t - \tau) \varepsilon_{ij}(z, \tau) d\tau, \quad (2.8)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  – компоненты тензоров деформаций и напряжений,  $\theta = \varepsilon_{kk}$ . Величины  $\lambda$  и  $\mu$  представляют собой мгновенные модули упругости (постоянные Ламе), а функции  $\Lambda, M$  характеризуют вязкие свойства материала слоя и выражаются через ядра сдвиговой  $R_1$  и объемной  $R_2$  релаксации:  $\Lambda(t) = K R_2(t) - \frac{2}{3} \mu R_1(t)$ ,  $M(t) = \mu R_1(t)$ , причем  $K = \lambda + 2\mu/3$  – мгновенный модуль объемной упругости.

Для последующего численного анализа необходимо конкретизировать ядра интегральных операторов в соотношении (2.8). Не ограничивая общности рассмотрения, пренебрежем объемной ползучестью материала слоя и положим [37]:  $R_1(t) = R_0 e^{-\alpha t}$ ,  $R_2(t) \equiv 0$ , так что:  $\Lambda(t) = \Lambda_0 e^{-\alpha t}$ ,  $M(t) = M_0 e^{-\alpha t}$ , где  $\alpha, R_0$  – заданные параметры, причем  $\alpha = 1/t_r$ ,  $t_r$  – время релаксации,  $\Lambda_0 = -2\mu R_0/3$ ,  $M_0 = \mu R_0$ . Кроме того, введем в рассмотрение длительные (равновесные) модули упругости  $\lambda^\infty, \mu^\infty$ , а также мгновенный  $B$  и длительный  $B^\infty$  коэффициенты упругой податливости слоя:  $B = (\lambda + 2\mu)^{-1}$ ,  $B^\infty = (\lambda^\infty + 2\mu^\infty)^{-1} = \alpha \beta^{-1} B$ , причем  $\beta = \alpha - B N_0 > 0$ ,  $N_0 = 4\mu R_0/3$  [27].

Для построения полной системы уравнений НДС слоя соотношение (2.8) следует дополнить формулой Коши, связывающей деформации  $\varepsilon_{ij}$  с перемещениями  $u_i$  слоя, а также уравнением равновесия [35, 36]:

$$\sigma_{ij,j}(z, t) + f_i(z, t) = 0, \quad (2.9)$$

в котором для записи частной производной функции используется общепринятое обозначение с запятой.

При сделанном допущении (2.1) о малости деформаций, присутствующая в уравнении равновесия (2.9) объемная сила  $f_i$  определяется равенствами (2.3) и не зависит явно от компонент НДС слоя. Это означает, что рассматриваемая система уравнений (2.8), (2.9) относительно этих компонент слоя является линейной и допускает решение в аналитическом виде с использованием преобразования Лапласа по времени. Компоненты  $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  соответствующего НДС при заданной функции  $r(t)$  представлены в работах [27, 29].

При описании контактного взаимодействия индентора и основания используется условие контакта

$$r(t) + \bar{w}(t) = -\delta(t), \quad (2.10)$$

связывающее внедрение  $\delta$  с контактным зазором  $r$  и нормальным перемещением  $\bar{w} = h - h_0$  поверхности слоя (вдоль оси  $z$ ). Предполагается, что до момента времени  $t = 0$  взаимодействие индентора с основанием является стационарным с постоянными во времени внедрением  $\delta^s$  и зазором  $r^s$ , т.е.  $\delta(t) = \delta^s$ ,  $r(t) = r^s$ ,  $t \leq 0$ .

Далее будет рассматриваться гладкая зависимость  $\delta(t)$ , отвечающая переходу системы из начального стационарного состояния  $\delta^s, r^s$  в другое стационарное состояние с конечным внедрением  $\delta_m$  индентора, т.е.

$$\delta(t) \in C^1(-\infty, \infty), \quad \delta(t) = \delta^s; t \leq 0, \quad \delta(t) = \delta_m; t \geq t_m, \quad (2.11)$$

где  $t_m$  – время перемещения индентора,  $0 < t_m$ . Для такой зависимости будут рассмотрены режимы подвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) > 0; t \in [0, t_m], \quad \delta^s < \delta_m \quad (2.12)$$

и отвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) < 0; \quad t \in [0, t_m], \quad \delta^s > \delta_m \quad (2.13)$$

Здесь и далее точкой над символом функции обозначается ее производная по времени.

Подобный характер изменения внедрения  $\delta(t)$  позволяет допустить асимптотическое поведение функции  $r(t)$  на бесконечности:

$$r(t) \rightarrow r_m; \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

где  $r_m$  – значение контактного зазора в стационарном состоянии с внедрением  $\delta_m$ .

Начальное  $r^s$  и конечное  $r_m$  значения контактного зазора, отвечающие начальному  $\delta^s$  и конечному  $\delta_m$  внедрениям, находятся из уравнения [28]

$$B^\infty h_0 \begin{Bmatrix} Z(r^s) \\ Z(r_m) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r^s \\ r_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta^s \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \quad Z(r) = \begin{pmatrix} \Phi_c(r) \\ \Psi(r) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

причем верхний/нижний вариант в круглых скобках определения функции  $Z(r)$  отвечает традиционной/уточненной постановке задачи, а функция  $\Psi(r)$  определяется известным образом через параметры межмолекулярного взаимодействия индентора и слоя [28].

Изменение контактного зазора  $r$  во времени описывается дифференциальным уравнением [28, 29]:

$$\dot{r}(t) = \frac{\dot{\delta}(t) - \beta [B^\infty h_0 Z(r(t)) - r(t) - \delta(t)]}{Bh_0 Z'(r(t)) - 1}, \quad (2.16)$$

в котором штрих у символа функции обозначает ее производную по аргументу.

Функция  $r(t)$  может иметь точку разрыва первого рода (скачок), если при некоторых значениях  $r$ :  $Bh_0 Z'(r) > 1$ , так что знаменатель в правой части уравнения (2.16) принимает нулевые значения при  $Bh_0 Z'(r) = 1$ . Соответствующие скачки контактного зазора можно описать следующим образом [28]:

$$\begin{aligned} r(t_+ - 0) = r_+, \quad r(t_+ + 0) = r'_+ - \text{скачок } r_+ \rightarrow r'_+ \text{ при подводе индентора} \\ r(t_- - 0) = r_-, \quad r(t_- + 0) = r'_- - \text{скачок } r_- \rightarrow r'_- \text{ при отводе индентора,} \end{aligned} \quad (2.17)$$

что иллюстрируют графики на рис. 2, построенные на основе полученных ранее результатов [28]. При построении этих графиков используются универсальные обозначения  $\hat{t}$  и  $r^\pm$  для момента скачка зазора  $r(t)$  и соответствующих предельных значений функции  $r(t)$ :

$$\hat{t} = t_+ / t_- \text{ при подводе/отводе индентора; } r^\pm = r(\hat{t} \pm 0), \quad (2.18)$$

которые будут использоваться и при дальнейших выкладках, с целью их упрощения.

Выполненный в работе [28] анализ функции  $r(t)$  как решения дифференциального уравнения (2.16) в случае гладкой зависимости  $\delta(t)$  позволяет заключить, что функция  $r(t)$  является кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной при  $t \in [0, \infty)$ . Производная  $\dot{r}(t)$  непрерывна везде, кроме точки  $\hat{t}$  разрыва функции  $r(t)$ , причем эта производная абсолютно интегрируема на  $[0, \infty)$ . Согласно выражению (2.5), функция  $p_c(t)$  определяется через функцию  $r(t)$  посредством гладкой зависимости  $\Phi_c(r)$ , поэтому  $p_c(t)$  обладает всеми указанными выше свойствами  $r(t)$ .

Располагая решением  $r(t)$  уравнения (2.16) при заданной зависимости  $\delta(t)$ , можно определить эволюцию НДС слоя во времени [27, 29].

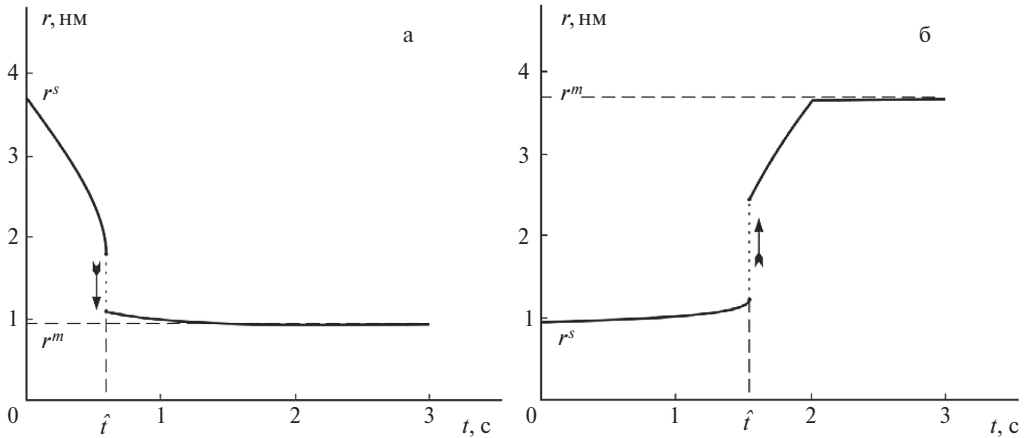


Рис. 2. Зависимости контактного зазора  $r$  от времени  $t$  в режиме подвода (а) и отвода (б) индуктора (традиционная постановка задачи). Стрелками показаны скачки контактного зазора

**3. Соотношения для энергии и работы.** В процессе подвода/отвода индуктора энергия системы индуктор–слой–подложка меняется. А именно, происходит диссипация энергии в слое, обусловленная вязкостью его материала, изменяются внутренняя энергия слоя и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия (энергия поля), которые зависят от НДС слоя и взаимного расположения тел. Кроме того, следует допустить возможность мгновенного изменения энергии системы при скачке контактного зазора  $r$ . Определим эти виды энергии.

Для определения вязкой диссипации энергии выделим некоторый объем  $V = h_0 S$  слоя с площадью  $S$  поверхности. Согласно первому началу термодинамики, диссипация энергии  $D_{[t_1, t_2]}$  в этом объеме на промежутке времени  $[t_1, t_2]$  составит [27, 36]:

$$D_{[t_1, t_2]} = \mathcal{A}_{[t_1, t_2]} - [U(t_2) - U(t_1)], \quad (3.1)$$

где

$$\mathcal{A}_{[t_1, t_2]} = \int_V dV \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}(t) d\varepsilon_{ij}(t) \quad (3.2)$$

– работа деформации на промежутке  $[t_1, t_2]$ ,  $U(t)$  – внутренняя энергия рассматриваемого объема слоя, пространственные аргументы у функций  $\sigma_{ij}(t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(t)$  для простоты опущены.

Внутренний интеграл в выражении (3.2) понимается в смысле Римана–Стилтьеса (далее Стилтьеса) [38]. Подынтегральные функции  $\sigma_{ij}(t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(t)$  в нем известным образом связаны с контактным зазором  $r(t)$  [27, 29], поэтому эти функции имеют разрывы первого рода в одной и той же точке  $\hat{t}$  в случае существования скачка (2.17) зазора  $r(t)$ . Как известно [38], в этом случае интеграл Стилтьеса (3.2) не существует. В приложении 1 предлагается процедура регуляризации  $\text{reg}_0$  интеграла Стилтьеса типа (3.2) для таких подынтегральных функций (формула (П.1.8)), которая обеспечивает его существование и отвечает физическому смыслу интеграла (3.2) как работы. Здесь и далее для интеграла Стилтьеса типа (3.2) с разрывными в одной и той же точке подынтегральными функциями подразумевается использование указанной процедуры регуляризации, при этом знак  $\text{reg}_0$  может опускаться.

Равенство (3.1) позволяет рассчитать удельную диссипацию энергии  $d^\infty = D_{[0,\infty)}/S$  при переходе системы из стационарного состояния  $\delta^s, r^s$  в асимптотически стационарное состояние  $\delta_m, r_m$  (далее – переход  $\delta^s \rightarrow \delta_m$ ) по известному НДС слоя – соответствующее выражение для  $d^\infty$  приводится в работах [27, 29].

При переходе  $\delta^s \rightarrow \delta_m$  изменение  $\Delta u$  удельной внутренней энергии  $u = U/S$  совпадает с изменением потенциальной энергии упругой деформации с длительными модулями упругости, так что [27, 29]:

$$\Delta u = \frac{1}{2} B^\infty h_0 [(p_{cm})^2 - (p_c^s)^2] \quad (3.3)$$

– традиционная постановка задачи;

$$\Delta u = \frac{1}{2} B^\infty \int_0^{h_0} [(Y_m(z))^2 - (Y^s(z))^2] dz \quad (3.4)$$

– уточненная постановка задачи, причем:

$$p_c^s = \Phi_c(r^s), \quad p_{cm} = \Phi_c(r_m), \quad Y^s(z) = Y(z, 0), \quad Y_m(z) = Y(z, t)|_{r(t)=r_m}$$

$$Y(z, t) = - \int_z^{h_0} f(r(t) + h_0 - \eta) d\eta \quad (3.5)$$

Здесь следует указать на существование потенциальной энергии взаимодействия молекул слоя друг с другом. Однако, исходя из известных представлений о природе упругости [20, 32], изменение этой энергии при переходе  $\delta^s \rightarrow \delta_m$  можно отождествить с изменением  $\Delta u$  потенциальной энергии упругой деформации слоя.

При подводе/отводе индентора также происходит изменение энергии поля. Эту энергию можно определить, по аналогии с объемной силой  $\mathbf{f}$ , суммированием потенциала  $e(l) = -c_1/l^{m-1} + c_2/l^{n-1}$  парных взаимодействий молекул слоя и подложки с молекулами индентора, отвечающего закону Леннарда–Джонса (2.2), где  $c_1 = a_1/(m-1)$ ,  $c_2 = a_2/(n-1)$  [39]. В результате можно установить, что изменение удельной энергии поля  $\varepsilon$  при переходе  $\delta^s \rightarrow \delta_m$  в предположении малости деформаций слоя составляет:

$$\Delta \varepsilon = - \int_{r^s}^{r_m} \Phi_c(r) dr - \int_{H^s}^{H_m} \Phi_b(H) dH, \quad (3.6)$$

где  $H^s = h_0 - \delta^s$ ,  $H_m = h_0 - \delta_m$ , а функции  $\Phi_c(r)$  и  $\Phi_b(H)$  определяются по формулам (2.5) и (2.6). Выражение (3.6) справедливо для обеих постановок задачи – традиционной и уточненной.

Выясним теперь, как изменяются указанные выше виды энергии в момент  $\hat{t}$  скачка контактного зазора  $r$  (формулы (2.17), (2.18)). Прежде всего, отметим, что диссипация энергии в слое изначально определяется скоростью вязких деформаций [35], которые описываются интегральными членами в законе (2.8) и не могут изменяться мгновенно. Это означает, что скачок зазора  $r(t)$  не приводит к скачкообразному изменению вязкой диссипации энергии в слое. Данный вывод подтверждается прямым расчетом величины  $d^\infty$  при наличии и отсутствии скачка зазора  $r(t)$  [29].

Анализ НДС слоя при скачке контактного зазора  $r$  показывает, что соответствующее изменение работы деформации и, следовательно, мгновенное изменение  $\Delta \hat{u}$  внутренней энергии слоя определяются скачком потенциальной энергии упругой деформации с мгновенными модулями упругости  $\lambda$  и  $\mu$  [27]. Это позволяет получить следующие выражения для скачка внутренней энергии в момент  $\hat{t}$ :

$$\Delta\hat{u} = \frac{1}{2}Bh_0[(p_c^+)^2 - (p_c^-)^2] \quad (3.7)$$

– традиционная постановка задачи;

$$\Delta\hat{u} = \frac{1}{2}B \int_0^{h_0} [(Y^+(z))^2 - (Y^-(z))^2] dz \quad (3.8)$$

– уточненная постановка задачи, причем:

$$p_c^\pm = \Phi_c(r^\pm), \quad Y^\pm(z) = Y(z, \hat{t} \pm 0) \quad (3.9)$$

Мгновенное изменение  $\Delta\hat{\mathcal{E}}$  энергии поля при скачке зазора  $r(t)$  можно определить на основе выражения (3.6). При этом следует учесть, что расстояние  $H(t) = h_0 - \delta(t)$  между индентором и подложкой изменяется во времени непрерывно, согласно условию (2.11). В результате получается, что для традиционной и уточненной постановок задачи:

$$\Delta\hat{\mathcal{E}} = - \int_{r^-}^{r^+} \Phi_c(r) dr \quad (3.10)$$

Вышесказанное позволяет заключить, что суммарное мгновенное изменение  $\hat{\gamma}$  энергии системы индентор–слой–подложка при скачке контактного зазора  $r$  составляет:  $\hat{\gamma} = \Delta\hat{u} + \Delta\hat{\mathcal{E}}$ . Наличие подобного изменения энергии означает, что в момент  $\hat{t}$  скачка зазора  $r(t)$  происходит обмен энергией между рассматриваемой системой и окружающей средой. В дальнейшем будет установлено, что  $\hat{\gamma} < 0$ , т. е. при скачке зазора  $r(t)$  происходит выделение (рассеивание) энергии из системы в количестве  $\hat{d} = -\hat{\gamma}$ . Такое утверждение вполне согласуется с известными результатами [13, 32, 40].

Процесс подвода/отвода индентора (формулы (2.12), (2.13)) предполагает, что на него действует некоторая внешняя сила  $f^{\text{ext}}$ , направленная вдоль оси  $z$  (рис. 1). Сила  $f^{\text{ext}}$  считается удельной, т. е. приходящейся на единицу площади поверхности слоя, поэтому, в силу условия равновесия индентора:  $f^{\text{ext}} = -p$ . Работа силы  $f^{\text{ext}}$  на отрезке времени  $[0, t]$  определяется по формуле:

$$A_{[0,t]}^{\text{ext}} = \int_0^t f^{\text{ext}}(\tau) dH(\tau) = \int_0^t p(\tau) d\delta(\tau) = \int_0^t [p_b(\tau) + p_c(\tau)] d\delta(\tau) = A_{b[0,t]}^{\text{ext}} + A_{c[0,t]}^{\text{ext}}, \quad (3.11)$$

в которой при записи второго равенства принято во внимание соотношение  $H(t) = h_0 - \delta(t)$ , а следующее равенство основывается на использовании силовой модели (2.7). Здесь с учетом выражений (2.5) и (2.6):

$$A_{b[0,t]}^{\text{ext}} = \int_0^t p_b(\tau) d\delta(\tau) = - \int_0^t \Phi_b(H(\tau)) dH(\tau) = - \int_{H^s}^{H(t)} \Phi_b(H) dH \quad (3.12)$$

$$A_{c[0,t]}^{\text{ext}} = \int_0^t p_c(\tau) d\delta(\tau) = \int_0^t \Phi_c(r(\tau)) d\delta(\tau) \quad (3.13)$$

Согласно условию (2.11), внедрение  $\delta(t)$  не меняется при  $t > t_m$ , поэтому величина

$$A^{\text{ext}} = A_{[0,t_m]}^{\text{ext}} = \int_0^{t_m} p(\tau) d\delta(\tau) \quad (3.14)$$

определяет работу внешней силы при переходе  $\delta^s \rightarrow \delta_m$ .

Исходя из физических представлений, можно утверждать, что работа  $A^{\text{ext}}$  расходуется на вязкую диссипацию энергии в слое  $d^\infty$ , а также на изменения внутренней энергии слоя  $\Delta u$  и энергии поля  $\Delta \mathcal{E}$ . При наличии скачка контактного зазора  $r$  из суммы этих энергий следует вычесть величину  $\hat{\gamma} = \Delta\hat{u} + \Delta\hat{\mathcal{E}}$  мгновенного изменения

энергии системы. Действительно, по определению (3.11), работа  $A^{\text{ext}}$  совершается внешней силой  $f^{\text{ext}}$  на непрерывном перемещении  $H(t) = h_0 - \delta(t)$  и, следовательно, не может расходоваться на какое-либо мгновенное изменение энергии.

Таким образом, баланс энергии для рассматриваемой системы можно выразить следующим равенством:

$$A^{\text{ext}} = d^\infty + \Delta u + \Delta \mathcal{E} - [\Delta \hat{u} + \Delta \hat{\mathcal{E}}] \equiv d^\infty + \Delta u + \Delta \mathcal{E} + \hat{d} \quad (3.15)$$

при записи которого, для наглядности, используется введенная выше энергия

$$\hat{d} = -\hat{\gamma} = -[\Delta \hat{u} + \Delta \hat{\mathcal{E}}], \quad (3.16)$$

рассеиваемая системой при скачке зазора  $r(t)$ . Равенство (3.15) отвечает закону сохранения энергии (ЗСЭ) для системы индентор–слой–подложка.

В следующем разделе равенство (3.3.15) будет подтверждено путем прямого расчета работы  $A^{\text{ext}}$  на основе уравнений контактного взаимодействия индентора и основания. Здесь же укажем на пример из приложения 2, иллюстрирующий существование баланса энергии типа (3.15) для модельной системы со скачкообразным изменением состояния. Этот пример, в частности, подтверждает отсутствие скачка диссипации энергии  $d$  в равенстве (3.15) и поясняет причину появления в нем слагаемого  $\hat{d}$  вида (3.16).

Рассмотрим теперь баланс энергии для рассматриваемой системы за цикл подвода (режим (2.12)) и последующего отвода индентора (режим (2.13)). Этот цикл подразумевает, что после подвода и формирования асимптотически стационарного состояния слоя (формула (2.14)), происходит отвод индентора в стационарное состояние, совпадающее с начальным для режима подвода состоянием. Другими словами, между начальными и конечными значениями внедрения и контактного зазора, отвечающими режимам подвода и отвода индентора, имеют место следующие соотношения:

$$\delta^s|_{\text{ret}} = \delta_m|_{\text{app}}, \quad \delta_m|_{\text{ret}} = \delta^s|_{\text{app}}, \quad r^s|_{\text{ret}} = r_m|_{\text{app}}, \quad r_m|_{\text{ret}} = r^s|_{\text{app}}, \quad (3.17)$$

причем, здесь и далее, для обозначения режима подвода/отвода используется обозначение app/ret.

Суммарные за цикл подвод–отвод работа  $A_{a-r}^{\text{ext}}$  внешней силы и диссипация энергии (гистерезисные потери)  $d_{a-r}$  в системе определяются по формулам:

$$A_{a-r}^{\text{ext}} = A^{\text{ext}}|_{\text{app}} + A^{\text{ext}}|_{\text{ret}}, \quad d_{a-r} = (d^\infty + \hat{d})|_{\text{app}} + (d^\infty + \hat{d})|_{\text{ret}}, \quad (3.18)$$

при этом, согласно выражениям (3.3), (3.4), (3.6) и соотношениям (3.17):

$$\Delta u_{a-r} = \Delta u|_{\text{app}} + \Delta u|_{\text{ret}} = 0, \quad \Delta \mathcal{E}_{a-r} = \Delta \mathcal{E}|_{\text{app}} + \Delta \mathcal{E}|_{\text{ret}} = 0 \quad (3.19)$$

На основе равенства (3.15) формулы (3.18) и (3.19) позволяют представить баланс энергии для рассматриваемой системы за цикл подвод–отвод в следующем виде

$$A_{a-r}^{\text{ext}} = d_{a-r}, \quad (3.20)$$

т. е., как и следовало ожидать, вся работа внешней силы расходуется на покрытие гистерезисных потерь, состоящих из вязкой диссипации энергии в слое и рассеивания энергии при скачках контактного зазора.

В заключении данного раздела получим некоторые дополнительные энергетические соотношения, которые будут использоваться при дальнейшем анализе баланса энергии системы индентор–слой–подложка. Для этого введем в рассмотрение работу  $\mathcal{A}_{[0,r]}^c$  поверхностных (граничных) и объемных сил на соответствующих пере-

мещениях на промежутке  $[0, t]$ . Сформулированная выше традиционная постановка задачи предполагает, что к поверхности слоя приложены силы  $\sigma_{33} = -p_c$ , тогда как объемные силы отсутствуют. При уточненной постановке задачи, напротив, отсутствуют поверхностные силы и на слой действуют только объемные силы  $f_3$ . Учитывая это, а также принимая во внимание однородность НДС слоя по координатам  $x$  и  $y$ , можно установить, что для выделенного объема  $V = h_0 S$  слоя

$$A_{[0,t]}^c = -S \int_0^t p_c(\tau) d\bar{w}(\tau) \equiv SA_p(t) \quad (3.21)$$

– традиционная постановка задачи;

$$A_{[0,t]}^c = S \int_0^{h_0} dz \int_0^t f_3(z, \tau) dw(z, \tau) \equiv SA_f(t) \quad (3.22)$$

– уточненная постановка задачи, причем:  $w(z, t) \equiv u_3(z, t)$  – перемещение вдоль оси  $z$ ,  $\bar{w}(t) = w(h_0, t)$  – граничное перемещение.

Согласно известным результатам [36], работа  $A^c$  поверхностных и объемных сил совпадает с работой  $A$  деформации, определяемой по формуле (3.2). Учитывая это обстоятельство, можно заменить в равенстве (3.1) работу  $A$  на  $A^c$  и после несложных преобразований получить для перехода  $\delta^s \rightarrow \delta_m$  следующие соотношения

$$A_p = d^\infty + \Delta u \quad (3.23)$$

– традиционная постановка задачи;

$$A_f = d^\infty + \Delta u \quad (3.24)$$

– уточненная постановка задачи, которые, как и равенство (3.1), представляют собой ЗСЭ для слоя. Здесь согласно выражениям (3.21) и (3.22) при учете равенств (2.3), (2.5):

$$A_p = \lim_{t \rightarrow \infty} A_p(t) = - \int_0^\infty \Phi_c(r(t)) d\bar{w}(t) \quad (3.25)$$

$$A_f = \lim_{t \rightarrow \infty} A_f(t) = \int_0^{h_0} dz \int_0^\infty f(r(t) + h_0 - z) dw(z, t),$$

диссипация энергии  $d^\infty$  и функции  $w(z, t)$ ,  $r(t)$  находятся на основе известного НДС слоя и решения дифференциального уравнения (2.16) [27, 29], изменение  $\Delta u$  внутренней энергии определяется по формулам (3.3) и (3.4).

Интегралы Стильгеса (3.25), равно как и интегралы (3.21), (3.22), можно свести к интегралу типа (П.1.1) (приложение 1). При наличии скачка (2.17) зазора  $r(t)$ , эти интегралы определяются по одной из эквивалентных друг другу формул (П.1.5), (П.1.7) согласно процедуре регуляризации  $\text{reg}_0$ .

**4. Проверка баланса энергии.** Выше, на основании физических представлений был составлен баланс энергии (3.15), отвечающий ЗСЭ для системы индентор–слой–подложка. Целью дальнейших выкладок является вывод выражения для работы  $A^{\text{ext}}$  внешней силы в терминах баланса энергии (3.15) на основе уравнений контактного взаимодействия индентора и основания. Полученное таким образом выражение позволит подтвердить равенство (3.15) применительно к традиционной и уточненной постановкам рассматриваемой задачи.

**4.1. Традиционная постановка задачи** предполагает, что деформирование слоя обуславливается давлением  $p_c$ , приложенным к его поверхности. Соответствующее нормальное граничное перемещение  $\bar{w}$  определяется согласно деформационной модели [28]:

$$-\bar{w}(t) = Bh_0 p_c(t) + I_\varphi(t) = Bh_0 \Phi_c(r(t)) + I_\varphi(t), \quad (4.1)$$

причем последнее равенство получается на основе выражение (2.5) для давления  $p_c$ . Здесь функция  $I_\varphi(t)$  интегральным образом определяется через давление  $p_c(t) = \Phi_c(r(t))$  и имеет абсолютно интегрируемую производную на любом временном отрезке.

Для расчета работы  $A^{\text{ext}}$  воспользуемся выражением (3.11), в котором величина  $A_{\text{b}[0,t]}^{\text{ext}}$  определяется по формуле (3.12). Для определения величины  $A_{\text{c}[0,t]}^{\text{ext}}$  возьмем достаточно малое  $\varepsilon > 0$  и разобьем отрезок  $[0,t]$  интегрирования в формуле (3.13) на три части:  $[0, \hat{t} - \varepsilon]$ ,  $[\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon]$ ,  $[\hat{t} + \varepsilon, t]$ , полагая, что  $\hat{t} < t$ . Соответствующие интегралы обозначим через  $Q_\varepsilon^-$ ,  $\hat{Q}_\varepsilon$ ,  $Q_\varepsilon^+$ , так что

$$A_{\text{c}[0,t]}^{\text{ext}} = \int_0^{\hat{t}-\varepsilon} p_c(\tau) d\delta(\tau) + \int_{\hat{t}-\varepsilon}^{\hat{t}+\varepsilon} p_c(\tau) d\delta(\tau) + \int_{\hat{t}+\varepsilon}^t p_c(\tau) d\delta(\tau) = Q_\varepsilon^- + \hat{Q}_\varepsilon + Q_\varepsilon^+ \quad (4.2)$$

Пользуясь условием контакта (2.10), заменим в интегралах  $Q_\varepsilon^\pm$  внедрение  $\delta(t)$  суммой  $-(\bar{w}(t) + r(t))$ , в которой граничное перемещение  $\bar{w}(t)$  выразим по формуле (4.1). Затем осуществим в формуле (4.2) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , заметив, что интеграл  $Q_\varepsilon$  исчезает при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Полученное в результате выражение для  $A_{\text{c}[0,t]}^{\text{ext}}$  и выражение (3.12) для  $A_{\text{b}[0,t]}^{\text{ext}}$  подставим в правую часть равенства (3.11). Таким образом можно установить, что

$$A_{[0,t]}^{\text{ext}} = A_p^- + A_p^+(t) - \int_{r^s}^{r^-} \Phi_c(r) dr - \int_{r^+}^{r(t)} \Phi_c(r) dr - \int_{H^s}^{H(t)} \Phi_b(H) dH, \quad (4.3)$$

где

$$A_p^- = -\int_0^{\hat{t}} p_c(\tau) d\bar{w}(\tau), \quad A_p^+(t) = -\int_{\hat{t}}^t p_c(\tau) d\bar{w}(\tau), \quad (4.4)$$

функция  $\bar{w}(t)$  определяется по формуле (4.1), а существование интегралов Стильеса (4.4) обеспечивается свойствами кусочной непрерывности функции  $p_c(t)$  и абсолютной интегрируемости производной  $\dot{I}_\varphi(t)$  [38].

Рассмотрим также работу  $A_p(t)$  давления  $p_c(t)$  на граничном перемещении  $\bar{w}(t)$ , которая имеет вид интеграла Стильеса (3.21). Присутствующая в этом интеграле функция  $\bar{w}(t)$  определяется по формуле (4.1), поэтому интеграл (3.21) можно свести к интегралу типа (П.1.1). Это позволяет воспользоваться для определения интеграла (3.21) процедурой регуляризации  $\text{reg}_0$  из приложения 1 при наличии скачка (2.17) зазора  $r(t)$ . Применим эту процедуру, используя для нее формулу (П.1.7). В результате, с учетом выражений (3.7) и (4.4), можно получить:

$$A_p(t) = \text{reg}_0 \int_0^t \Phi_c(r(\tau)) d[Bh_0 \Phi_c(r(\tau)) + I_\varphi(\tau)] = \Delta \hat{u} + A_p^- + A_p^+(t) \quad (4.5)$$

Последнее равенство (4.5) позволяет установить, что  $A_p^- + A_p^+(t) = A_p(t) - \Delta \hat{u}$ . Исключим с помощью этого выражения сумму  $A_p^- + A_p^+(t)$  из равенства (4.3) и осуществим в нем предельный переход  $t \rightarrow \infty$ , который соответствует переходу системы в асимптотически стационарное состояние  $\delta_m, r_m$  (переход  $\delta^s \rightarrow \delta_m$ ). После этого, в полученном выражении для  $A^{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} A_{[0,t]}^{\text{ext}}$  заменим величину  $A_p$  суммой  $d^\infty + \Delta u$ , согласно равенству (3.23), а также примем во внимание формулы (3.6), (3.10) и (3.16) для энергий  $\varepsilon$  и  $\hat{d}$ . В результате можно прийти к соотношению

$$A^{\text{ext}} = d^\infty + \Delta u + \Delta \varepsilon + \hat{d}, \quad (4.6)$$

которое подтверждает справедливость записанного выше баланса энергии (3.15).



Как указывалось в предыдущем разделе, величина  $\hat{d} = -[\Delta\hat{u} + \Delta\hat{\mathcal{E}}]$  в равенствах (3.15) и (4.6) определяет энергию, которая выделяется из системы при скачке (2.17) зазора  $r(t)$ . Покажем, что величина  $\hat{d}$  принимает неотрицательные значения в соответствии с ее физическим смыслом. Для этого, учитывая выражения (3.7) и (3.10) для скачков  $\Delta\hat{u}$  и  $\Delta\hat{\mathcal{E}}$ , представим величину  $\hat{d}$  следующим образом:

$$\hat{d} = -\frac{1}{2}Bh_0[\Phi_c^2(r^+) - \Phi_c^2(r^-)] + \int_{r^-}^{r^+} \Phi_c(r)dr = -S_1 + S_2, \quad (4.7)$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2}Bh_0[\Phi_c^2(r^+) - \Phi_c^2(r^-)] = \frac{1}{2}[\Phi_c(r^+) + \Phi_c(r^-)](r^+ - r^-), \quad S_2 = \int_{r^-}^{r^+} \Phi_c(r)dr \quad (4.8)$$

Отметим, что второе равенство в выражении (4.8) для  $S_1$  получается на основе известного соотношения  $Bh_0[\Phi_c(r^+) - \Phi_c(r^-)] = r^+ - r^-$ , которое связывает значения  $r^-$  и  $r^+$  контактного зазора  $r$  до и после скачка (2.17) с соответствующими значениями  $\Phi_c(r^\pm)$  [28].

Для определенности, рассмотрим режим (2.12) подвода индентора, отметив, что режим (2.13) отвода индентора рассматривается аналогично. На рис. 3 изображен график, схематично представляющий функцию  $\Phi_c(r)$  вида (2.5), и показаны значения  $r^\pm$ , отвечающие скачку контактного зазора  $r$  при подводе индентора [28]. Площади затемненных областей совпадают со значениями  $S_1, S_2$  в силу выражений (4.8). Из рис. 3 видно, что  $S_1 \leq S_2$ , поэтому, на основе формулы (4.7) можно получить требуемое неравенство  $0 \leq \hat{d}$ .

Для проверки полученных результатов был выполнен численный анализ контактного взаимодействия индентора и основания в режимах подвода (2.12) и отвода (2.13). А именно, путем решения дифференциального уравнения (2.16) при заданном внедрении  $\delta(t)$  и начальном значении  $r = r^s$ , определяемом из уравнения (2.15), строилась функция  $r(t)$  [28]. Затем, по этой функции известным образом рассчитывалась диссипация энергии  $d^\infty$  [27, 29], а также при помощи формул (3.3), (3.6), (3.7), (3.10), (3.14) определялись величины  $\Delta u$ ,  $\Delta \mathcal{E}$ ,  $\Delta \hat{u}$ ,  $\Delta \hat{\mathcal{E}}$ ,  $A^{\text{ext}}$ , составляющие баланс энергии (3.15).

Расчеты проводились при линейном изменении внедрения  $\delta(t)$  индентора от начального  $\delta^s$  до конечного  $\delta_m$  значений за время  $t_m \simeq 0.6829 \cdot 10^{-3}$  с, причем для режима подвода/отвода  $\delta^s/\delta_m = -6r_{\text{ec}}$ ,  $\delta_m/\delta^s = -2.5r_{\text{ec}}$ . Использовались следующие значения параметров задачи:  $m = 7$ ,  $n = 13$ ,  $r_{\text{ec}} = 1$  нм,  $r_{\text{eb}} = 0.5r_{\text{ec}}$ ,  $h_0 = 25$  нм,

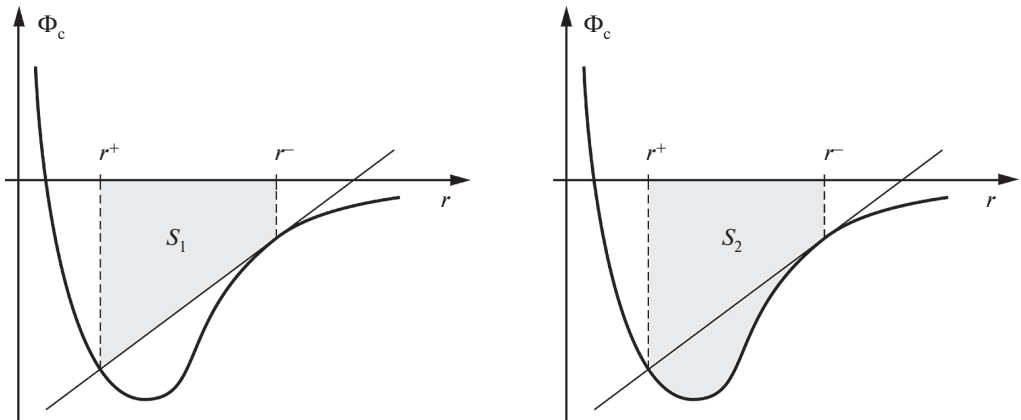


Рис. 3. Характерный график функции  $\Phi_c(r)$  и значения  $r^\pm$  при подводе индентора

$\lambda = 10.42$  МПа,  $\mu = 15.63$  МПа,  $R_0 = 0.8 \times 10^3 \text{ c}^{-1}$ ,  $t_r = 10^{-3}$  с, при этом значения мгновенного и длительного коэффициентов упругой податливости слоя составляли  $B = 0.024 \text{ МПа}^{-1}$  и  $B^\infty = 0.04 \text{ МПа}^{-1}$ , соответственно. Кроме того, полагалось, что  $A_{1c} = (6\pi)^{-1} A_H [12]$  и  $A_{1b} = 10A_{1c}$ , где  $A_H$  – постоянная Гамакера,  $A_H = 10^{-19}$  Дж.

Отметим, что указанные значения параметра  $r_{cc}$  и толщины  $h_0$  слоя вполне отвечают соотношению  $r_{cc} \ll h_0$ , которое упоминалось выше в связи с обоснованием традиционной постановки задачи (замечание 2).

В табл. 1 для режимов подвода (app) и отвода (ret) индентора приведены расчетные значения величин  $A^{\text{ext}}$ ,  $d^\infty$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta \mathcal{E}$ ,  $\hat{d}$ , а также значения этих величин за цикл подвод–отвод индентора (a–r) в соответствии с формулами (3.18) и (3.19). Кроме того, приведены расчетные значения параметра

$$\alpha_\Delta = [d^\infty + \Delta u + \Delta \mathcal{E} + \hat{d}] - A^{\text{ext}}, \quad (4.9)$$

характеризующие ошибку (невязку) равенства (3.15) при численных расчетах, причем аналитический расчет дает  $\alpha_\Delta = 0$  (равенство (4.6)). Здесь и далее, расчетные значения приводятся в безразмерном виде относительно параметра  $d_* = (A_{1c}/r_{cc}^{m-4})^2 (B^\infty - B)h_0 \approx 1.126 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/м}^2$ , физический смысл которого пояснен в работе [29].

Численный анализ контактного взаимодействия индентора с основанием подтверждает баланс энергии (3.15), т. к., по данным табл. 1, расчетные значения невязки  $\alpha_\Delta$  пренебрежимо малы. Согласно расчетам, величина  $\hat{d}$  энергии, выделяемой из системы при скачке контактного зазора  $r$ , принимает положительные значения, что согласуется с полученными выше результатами аналитической оценки. Представленные в табл. 1 данные, касающиеся цикла подвод–отвод индентора, подтверждают равенства (3.19), а также баланс энергии (3.20) – расчетное значение соответствующей невязки  $(A_{a-r}^{\text{ext}} - d_{a-r}^{\text{ext}})/A_{a-r}^{\text{ext}}$  составляет всего  $-2.374 \cdot 10^{-6}$ .

Согласно выполненным расчетам:  $\max |w(z, t)|/h_0 \approx 0.0722$ , что вполне отвечает сделанному выше допущению (2.1) о малости деформаций слоя.

4.2. *Уточненная постановка задачи* предполагает, что деформация слоя порождается объемными силами (2.3), распределенными по его глубине, тогда как поверхность слоя свободна от нагрузок. Соответствующее нормальное граничное перемещение  $\bar{w}$  определяется согласно деформационной модели [28]:

$$-\bar{w}(t) = Bh_0 \Psi(r(t)) + I_\Psi(t), \quad (4.10)$$

причем функция  $I_\Psi(t)$  интегральным образом определяется через функцию  $\psi(t) = Bh_0 \Psi(r(t))$  и имеет абсолютно интегрируемую производную на любом временном отрезке.

Как и в случае традиционной постановки задачи, для расчета работы  $A^{\text{ext}}$  воспользуемся выражением (3.11), в котором величина  $A_{b[0,r]}^{\text{ext}}$  по-прежнему определяется по формуле (3.12), а величину  $A_{c[0,r]}^{\text{ext}}$  можно представить в виде разложения (4.2). На ос-

**Таблица 1.** Результаты расчетов в случае традиционной постановки задачи

	$A^{\text{ext}}/d_*$	$d^\infty/d_*$	$\Delta u/d_*$	$\Delta \mathcal{E}/d_*$	$\hat{d}/d_*$	$\alpha_\Delta/d_*$
app	$-3.668 \cdot 10^{-2}$	$3.274 \cdot 10^{-2}$	$9.093 \cdot 10^{-2}$	$-1.656 \cdot 10^{-1}$	$5.268 \cdot 10^{-3}$	$5.322 \cdot 10^{-8}$
ret	$1.201 \cdot 10^{-1}$	$3.501 \cdot 10^{-2}$	$-9.093 \cdot 10^{-2}$	$1.656 \cdot 10^{-1}$	$1.038 \cdot 10^{-2}$	$1.761 \cdot 10^{-7}$
a–r	$8.339 \cdot 10^{-2}$	$6.775 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1.564 \cdot 10^{-2}$	

нове этих равенств, как и прежде, можно получить выражение (4.3) для работы  $A_{[0,t]}^{\text{ext}}$ . В этом выражении величины  $A_p^\pm$  задаются равенствами (4.4), в которых граничное перемещение  $\bar{w}(t)$  определяется уже по формуле (4.10), отвечающей уточненной постановке задачи.

В случае традиционной постановки задачи для вывода баланса энергии (4.6) использовалось равенство (3.23), левую часть  $A_p$  которого удалось напрямую связать с работой  $A^{\text{ext}}$  внешней силы. Однако в рассматриваемом случае уточненной постановки задачи имеет место равенство (3.24), левая часть  $A_f$  которого определяется распределением объемных сил  $f_3$  по глубине слоя (формула (3.22)) и напрямую не связана с работой  $A^{\text{ext}}$ . Для установления такой связи введем в рассмотрение разность  $w_\Delta(z,t) = w(z,t) - \bar{w}(t)$ , так что

$$w(z,t) = w_\Delta(z,t) + \bar{w}(t), \quad (4.11)$$

а также введем в рассмотрение величины:

$$A_f^- = \int_0^{h_0} dz \int_0^{\hat{t}} f_3(z,\tau) dw(z,\tau), \quad A_f^+(t) = \int_0^{h_0} dz \int_{\hat{t}}^t f_3(z,\tau) dw(z,\tau), \quad (4.12)$$

имеющие отношение к работе  $A_f$  объемных сил  $f_3$  (формула (3.22)).

Подставим разложение (4.11) для перемещения  $w(z,t)$  в интегралы (4.12) и примем во внимание интегральное выражение (2.4) для давления  $p_c(t)$  через силу  $f_3(z,t) = f(r(t) + h_0 - z)$ . В результате можно получить равенства  $A_f^- = A_\Delta^- + A_p^-$  и  $A_f^+(t) = A_\Delta^+(t) + A_p^+(t)$ , которые позволяют исключить величины  $A_p^\pm$  из выражения (4.3), придав ему следующий вид:

$$A_{[0,t]}^{\text{ext}} = A_f^- + A_f^+(t) - [A_\Delta^- + A_\Delta^+(t)] - \int_{r^s}^{r^-} \Phi_c(r) dr - \int_{r^+}^{r(t)} \Phi_c(r) dr - \int_{H^s}^{H(t)} \Phi_b(H) dH, \quad (4.13)$$

причем

$$A_\Delta^- = \int_0^{h_0} dz \int_0^{\hat{t}} f_3(z,\tau) dw_\Delta(z,\tau), \quad A_\Delta^+(t) = \int_0^{h_0} dz \int_{\hat{t}}^t f_3(z,\tau) dw_\Delta(z,\tau) \quad (4.14)$$

Рассмотрим также работу  $A_f(t)$  объемных сил  $f_3(z,t)$  на перемещении  $w(z,t)$ , которая имеет вид интеграла Стилтъяеса (3.22). Присутствующая в этом интеграле функция  $w(z,t)$  определяется интегральным образом через те же объемные силы  $f_3(z,t)$  [27]. Это позволяет свести интеграл (3.22) к интегралу типа (П.1.1) и воспользоваться для его определения процедурой регуляризации  $\text{reg}_0$  (см. приложение 1) при наличии скачка (2.17) зазора  $r(t)$ . Применим эту процедуру, используя для нее формулу (П.1.7). В результате, с учетом выражений (3.8) и (4.12), можно получить равенство

$$A_f(t) = \int_0^{h_0} dz [\text{reg}_0 \int_0^{\hat{t}} f_3(z,\tau) dw(z,\tau)] = \Delta \hat{u} + A_f^- + A_f^+(t),$$

из которого следует, что  $A_f^- + A_f^+(t) = A_f(t) - \Delta \hat{u}$ .

Исключим с помощью последнего соотношения сумму  $A_f^- + A_f^+(t)$  из выражения (4.13) и осуществим в нем предельный переход  $t \rightarrow \infty$ , который соответствует переходу системы в асимптотически стационарное состояние  $\delta_m, r_m$  (переход  $\delta^s \rightarrow \delta_m$ ). После этого, в полученном выражении для  $A^{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} A_{[0,t]}^{\text{ext}}$  заменим величину  $A_f$  суммой  $d^\infty + \Delta u$ , согласно равенству (3.24), а также примем во внимание

формулы (3.6), (3.10) и (3.16) для энергий  $\mathcal{E}$  и  $\hat{d}$ . В результате можно прийти к соотношению

$$A^{\text{ext}} = d^\infty + \Delta u + \Delta \mathcal{E} + d - \alpha_\Delta, \quad (4.15)$$

причем

$$\alpha_\Delta = \lim_{t \rightarrow \infty} [A_\Delta^- + A_\Delta^+(t)] \quad (4.16)$$

Соотношение (4.15) отличается от баланса энергии (3.15) присутствием в правой части дополнительного параметра  $\alpha_\Delta$ , который можно интерпретировать как невязку (4.9). В случае традиционной постановки задачи подобная невязка имеет нулевое значение и используется только для оценки точности выполнения равенства (3.15) при численных расчетах. Однако, в рассматриваемом случае уточненной постановки задачи, значение параметра  $\alpha_\Delta$  определяется по формуле (4.16) и, вообще говоря, отличается от нулевого. Другими словами, в случае уточненной постановки задачи не удается в точности подтвердить баланс энергии (3.15), что обусловлено приближенным характером соответствующих выкладок, использующих допущение (2.1) о малости деформаций слоя.

Тем не менее, оказывается, что значение параметра  $\alpha_\Delta$  мало, если выполняется допущение (2.1). Действительно, как указывалось в замечании 2, объемные силы  $f_3(z, t)$  сконцентрированы в подповерхностной области толщины  $\sim r_{\text{ec}}$ . Поэтому, если допустить соотношение  $r_{\text{ec}} \ll h_0$ , то следует ожидать близость к нулю величин  $A_\Delta^\pm$ , определяемых согласно равенствам (4.14). В свою очередь, это означает близость к нулю параметра  $\alpha_\Delta$ , связанного с величинами  $A_\Delta^\pm$  по формуле (4.16). Данный вывод будет подтвержден ниже численными расчетами.

Как и прежде, величина  $\hat{d} = -[\Delta \hat{u} + \Delta \hat{\mathcal{E}}]$  в соотношении (4.15) определяет энергию, которая выделяется из системы при скачке (2.17) зазора  $r(t)$ . С учетом выражений (3.8) и (3.10) для скачков  $\Delta \hat{u}$  и  $\Delta \hat{\mathcal{E}}$  при уточненной постановке задачи величина  $\hat{d}$  имеет следующий вид:

$$\hat{d} = -\frac{1}{2} B \int_0^{h_0} [(Y^+(z))^2 - (Y^-(z))^2] dz + \int_{r^-}^{r^+} \Phi_c(r) dr \quad (4.17)$$

Однако, в отличие от случая традиционной постановки задачи, здесь не удастся показать, что величина  $\hat{d}$  принимает неотрицательные значения в соответствии с ее физическим смыслом. Тем не менее, можно установить это свойство величины  $\hat{d}$ , если объемные силы  $f_3(z, t)$  сконцентрированы в подповерхностной области толщины  $\sim r_{\text{ec}} \ll h_0$ . Действительно, при таком условии, в силу определений (2.5) и (3.5), оказываются близки друг к другу величины  $\int_0^{h_0} Y^2(z, t) dz$  и  $h_0 \Phi_c^2(r(t))$ . В свою очередь, это приводит к близости правой части выражения (4.17) к правой части выражения (4.7), которая, как было показано выше, принимает неотрицательные значения. Справедливость неравенства  $0 \leq \hat{d}$  для уточненной постановки задачи при вышеуказанном условии будет подтверждено ниже численными расчетами.

Для проверки полученных результатов был выполнен численный анализ контактного взаимодействия индентора и основания в режимах подвода (2.12) и отвода (2.13) по схеме, описанной выше для традиционной постановки задачи и при тех же значениях параметров задачи. В табл. 2 приведены расчетные значения величин, которые определяются так же как и для табл. 1.

Данные табл. 2 позволяют заключить, что численный анализ контактного взаимодействия индентора с основанием свидетельствует о справедливости баланса энергии (3.15), т.к. расчетные значения невязки  $\alpha_\Delta$ , присутствующей в соотношении (4.15), весьма малы. Как видно, величина  $\hat{d}$  энергии, выделяемой из системы

**Таблица 2.** Результаты расчетов в случае уточненной постановки задачи

	$A^{\text{ext}}/d_*$	$d^\infty/d_*$	$\Delta u/d_*$	$\Delta \mathcal{E}/d_*$	$\hat{d}/d_*$	$\alpha_\Delta/d_*$
app	$-3.627 \cdot 10^{-2}$	$3.022 \cdot 10^{-2}$	$9.364 \cdot 10^{-2}$	$-1.648 \cdot 10^{-1}$	$5.530 \cdot 10^{-3}$	$8.133 \cdot 10^{-4}$
ret	$1.165 \cdot 10^{-1}$	$3.592 \cdot 10^{-2}$	$-9.364 \cdot 10^{-2}$	$1.648 \cdot 10^{-1}$	$7.068 \cdot 10^{-3}$	$-2.299 \cdot 10^{-3}$
a-r	$8.022 \cdot 10^{-2}$	$6.614 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1.260 \cdot 10^{-2}$	

при скачке контактного зазора  $r$ , принимает положительные значения, что согласуется со сделанными выше теоретическими выводами. Представленные в табл. 2 данные, касающиеся цикла подвод–отвод индентора, подтверждают равенства (3.19), а также баланс энергии (3.20) – расчетное значение соответствующей невязки  $(A_{a-r}^{\text{ext}} - d_{a-r})/A_{a-r}^{\text{ext}}$  составляет всего  $1.852 \cdot 10^{-2}$ .

Согласно выполненным расчетам:  $\max_{z,t} |w(z,t)|/h_0 \approx 0.0705$ , что вполне отвечает сделанному выше допущению (2.1) о малости деформаций слоя.

**5. Обсуждение.** Проведенный анализ контактного взаимодействия индентора и основания показывает, что при составлении баланса энергии для системы индентор–слой–подложка необходимо учитывать вязкую диссипацию энергии  $d^\infty$  в слое, изменения  $\Delta u$  и  $\Delta \mathcal{E}$  потенциальной энергии упругой деформации и энергии поля. Кроме того, при наличии скачка контактного зазора  $r$  необходимо учитывать соответствующее рассеивание энергии  $\hat{d}$ . В связи с этим, следует отметить, что скачкообразное изменение зазора  $r(t)$  также оказывает существенное влияние на величину  $d^\infty$  [29].

За цикл подвод–отвод индентора, как и следовало ожидать, вся работа внешней силы расходуется на покрытие гистерезисных потерь  $d_{a-r}$ , состоящих из вязкой диссипации энергии в слое и рассеивания энергии при скачках контактного зазора  $r$ . В работе [29] величина  $d_{a-r}$  использовалась как мера энергетических потерь при скольжении шероховатого контртела по вязкоупругому слою в режиме бесконтактного трения, что позволило рассчитать соответствующий коэффициент трения. Однако, при наличии скачка контактного зазора  $r$  следует учитывать дополнительное рассеивание энергии  $\hat{d}$ . Такой учет, очевидно, повысит оценку коэффициента трения скольжения.

Выполненные выше аналитические расчеты предполагают допущение (2.1) о малости деформаций слоя, на основе которого используется выражение (2.3) для объемной силы  $f_3(z,t)$ . Это выражение не учитывает зависимость силы  $f_3(z,t)$  от перемещения  $w(z,t)$ , что обеспечивает линейный характер рассматриваемой задачи о контактом взаимодействии индентора и основания. Такой характер, в частности, позволяет применить к условию равновесия (2.9) преобразование Лапласа по времени и получить аналитические выражения для НДС слоя [27].

Таким образом, проведенные аналитические расчеты, по сути, являются приближенными. Это касается и выкладок предыдущего раздела, посвященного прямому выводу выражения для работы  $A^{\text{ext}}$  внешней силы в терминах баланса энергии (3.15). Однако, несмотря на указанные обстоятельства, в случае традиционной постановки задачи удастся получить выражение (4.6) для работы  $A^{\text{ext}}$ , которое в точности соответствует равенству (3.15). Это обуславливается использованием силовой модели (2.7), позволяющей установить прямую связь величины  $A^{\text{ext}}$  с работой  $A_p$  давления  $p_c$ , которая, в свою очередь, равна сумме  $d^\infty + \Delta u$  (формула (3.23)). В случае уточненной постановки задачи подобная схема неприменима, т. к. в этом случае

сумма  $d^\infty + \Delta u$  равна работе  $A_f$  объемных сил  $f_3$  (формула (3.24)), прямую связь которой с величиной  $A^{\text{ext}}$  установить не удастся.

В приложении 2 приводится пример модельной вязкоупругой системы с телом, совершающим движение по ступенчатой поверхности под действием внешней силы. Аналитический расчет работы  $A^{\text{ext}}$  этой силы приводит к выражению (П.2.13), которое согласуется с балансом энергии (3.15). В частности, выражение (П.2.13) включает энергию  $\hat{D}$ , рассеиваемую в виде тепла при скачкообразном изменении положения тела, при этом отсутствует мгновенное изменение вязкой диссипации энергии  $D$ .

### Выводы

1. Исходя из общих физических представлений, составлен баланс энергии (3.15) для системы индентор—слой—подложка, отвечающий ЗСЭ. Баланс включает вязкую диссипацию энергии в слое, изменения потенциальной энергии упругой деформации и энергии поля межмолекулярного взаимодействия, а также энергию, рассеиваемую при скачке контактного зазора.

2. В рамках допущения (2.1) о малости деформаций слоя предложена силовая модель (2.7), а также деформационные модели (4.1) и (4.10) для традиционной и уточненной постановок задачи. На основе этих моделей удастся подтвердить баланс энергии (3.15) путем аналитических и численных расчетов.

3. Исходя из ЗСЭ для рассматриваемой системы, получены формулы (4.7) (традиционная постановка задачи) и (4.17) (уточненная постановка задачи) для расчета энергии, которая выделяется из системы при скачке контактного зазора.

4. Полученные результаты могут быть использованы для оценок гистерезисных потерь при индентировании и силы трения применительно к вязкоупругим покрытиям.

**Приложение 1. Регуляризация интеграла Стильгеса.** Как известно [38], интеграл Римана—Стильгеса (далее, Стильгеса)  $\int_a^b f(t)dg(t)$  заведомо не существует в случае, когда функции  $f(t)$  и  $g(t)$  имеют общую точку разрыва. Однако, для интеграла Стильгеса специального вида оказывается возможным дать математически корректное определение в указанном случае разрывных функций. Это определение основывается на физически понятной интерпретации разрыва функции как быстрого скачка ее значений в точке разрыва.

Рассмотрим интеграл Стильгеса специального вида

$$I = \int_a^b f(t)dg(t) \equiv \int_a^b F(x(t))d[Q(x(t)) + q(t)], \quad (\text{П.1.1})$$

который встречается в математической физике, например, при определении работы (формулы (3.2), (3.21), (3.22)). Считается, что функции  $x(t), q(t)$  — кусочно-монотонные на отрезке  $[a, b]$ ,  $q(t)$  — непрерывная на  $[a, b]$ ,  $x(t)$  — непрерывная на  $[a, b]$ , кроме точки  $\hat{t}$ , в которой функция  $x(t)$  имеет разрыв первого рода. Соответствующие пределы  $x(\hat{t} \pm 0)$  обозначим через  $x^\pm$ . Функции  $F(X)$  и  $Q(X)$  считаются гладкими. При таких условиях подынтегральные функции  $f(t)$  и  $g(t)$  имеют общую точку разрыва  $\hat{t}$ , поэтому, как указывалось выше, интеграл (П.1.1) не существует. Применим к нему следующую процедуру регуляризации.

Рассмотрим непрерывную функцию

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [a, \hat{t} - \varepsilon] \cup [\hat{t} + \varepsilon, b] \\ \rho(t), & t \in [\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon] \end{cases}, \quad (\text{П.1.2})$$

где  $0 < \varepsilon$  – малый параметр,  $\rho(t)$  – произвольная непрерывная и кусочно-монотонная функция, такая что  $\rho(\hat{t} \pm \varepsilon) = x(\hat{t} \pm \varepsilon)$ . Подобную функцию можно рассматривать как непрерывное приближение исходной разрывной функции  $x(t)$ .

Для функции (П.1.2) интеграл (П.1.1) принимает вид

$$I_\varepsilon = \int_a^b f_\varepsilon(t) dg_\varepsilon(t) \equiv \int_a^b F(x_\varepsilon(t)) d[Q(x_\varepsilon(t)) + q(t)] \quad (\text{П.1.3})$$

При оговоренных выше условиях, функции  $f_\varepsilon(t)$  и  $g_\varepsilon(t)$  являются непрерывными и кусочно-монотонными на отрезке  $[a, b]$ . Эти свойства обеспечивают существование интеграла (П.1.3) [38], который, в свою очередь, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_a^b F(x_\varepsilon(t)) Q'(x_\varepsilon(t)) dx_\varepsilon(t) + \int_a^b F(x_\varepsilon(t)) dq(t) = \\ &= \int_{x_\varepsilon(a)}^{x_\varepsilon(b)} F(X) Q'(X) dX + \int_a^b F(x_\varepsilon(t)) dq(t). \end{aligned} \quad (\text{П.1.4})$$

Осуществим теперь в правой части формулы (П.1.4) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , учитывая определение (П.1.2) функции  $x_\varepsilon(t)$  и оговоренные выше свойства функций  $q(t)$  и  $F(X)$ . В результате получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_{x(a)}^{x(b)} F(X) Q'(X) dX + J^- + J^+, \quad (\text{П.1.5})$$

где

$$J^- = \int_a^{\hat{t}} F(x(t)) dq(t), \quad J^+ = \int_{\hat{t}}^b F(x(t)) dq(t),$$

причем для интегралов  $J^-$  и  $J^+$ :  $x(\hat{t}) = x^-$  и  $x(\hat{t}) = x^+$ , соответственно.

Получим еще одно, эквивалентное (П.1.5), выражение для предела интеграла  $I_\varepsilon$ . Для этого разобьем отрезок  $[a, b]$  интегрирования в формуле (П.1.3) на три части:  $[a, \hat{t} - \varepsilon]$ ,  $[\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon]$ ,  $[\hat{t} + \varepsilon, b]$  и обозначим соответствующие интегралы через  $I_\varepsilon^-, \hat{I}_\varepsilon, I_\varepsilon^+$ , так что

$$I_\varepsilon = \hat{I}_\varepsilon + I_\varepsilon^- + I_\varepsilon^+ \quad (\text{П.1.6})$$

Пользуясь оговоренными выше свойствами функций  $x(t), q(t), F(X), Q(X)$  и выражением (П.1.2) для функции  $x_\varepsilon(t)$ , нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{I}_\varepsilon &= \int_{x^-}^{x^+} F(X) Q'(X) dX, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^- = I^- \equiv \int_a^{\hat{t}} F(x(t)) dg(t) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^+ &= I^+ \equiv \int_{\hat{t}}^b F(x(t)) dg(t), \end{aligned}$$

причем  $g(t) = Q(x(t)) + q(t)$  и для интегралов  $I^-$  и  $I^+$ :  $x(\hat{t}) = x^-$  и  $x(t) = x^+$ , соответственно. С учетом этих формул, предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$  в равенстве (П.1.6) позволяет получить искомое выражение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_{x^-}^{x^+} F(X) Q'(X) dX + I^- + I^+ \quad (\text{П.1.7})$$

Согласно выражению (П.1.2), при  $\varepsilon \rightarrow 0$  непрерывная функция  $x_\varepsilon(t)$  воспроизводит разрывную функцию  $x(t)$ . В связи с этим, представляется разумным прийти к соглашению использовать предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon$  в качестве величины интеграла Стильтьеса (П.1.1) при наличии общей точки разрыва у подынтегральных функций. Указанный предел можно найти по одной из формул – (П.1.5) или (П.1.7). Подобную процедуру определения величины интеграла Стильтьеса назовем регуляризацией этого интеграла, используя для нее обозначение  $\text{reg}_0$ , т. е.

$$\text{reg}_0 \int_a^b F(x(t))d[Q(x(t)) + q(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \quad (\text{П.1.8})$$

Отметим, что выражения (П.1.5) и (П.1.7) для предела в равенстве (П.1.8) не зависят от произвольной функции  $\rho(t)$  в выражении (П.1.2), что свидетельствует о корректности предложенной процедуры регуляризации  $\text{reg}_0$  интеграла Стильтьеса.

В случае отсутствия разрыва у функции  $x(t)$ , в выражениях (П.1.5), (П.1.7) следует формально положить  $x^- = x^+$ , после чего можно убедиться, что процедура регуляризации (П.1.8) приводит к обычным выражениям для интеграла Стильтьеса с непрерывными функциями [38].

В качестве примера, рассмотрим частный случай интеграла (П.1.1):

$$A = k \int_a^b [x(t) - x_0] dx(t),$$

который представляет собой работу внешней силы по растяжению пружины длины  $x(t)$ , имеющей жесткость  $k$  и длину  $x_0$  в недеформированном состоянии. Процедура регуляризации (П.1.8) дает для такого интеграла выражение

$$\text{reg}_0 A = \frac{k}{2} \{ [x(b) - x_0]^2 - [x(a) - x_0]^2 \},$$

в правой части которого стоит приращение потенциальной энергии деформации пружины, что вполне согласуется с физическими представлениями о сохранении энергии.

**Приложение 2. Модельная система со скачком состояния.** Рассмотрим систему, состоящую из материальной точки (тела), связанной через вязкоупругий элемент Кельвина с направляющей (ось  $x$ ) (рис. 4). Под действием внешней силы  $f^{\text{ext}}$  тело скользит без трения по поверхности, образованной прямолинейными участками, два из которых разделены ступенькой и имеют положительный угол наклона  $\alpha$  к оси  $x$ . Тело движется вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $V$ , при этом связь тела с направляющей через элемент Кельвина обеспечивает его прижатие к поверхности. Отметим, что в рассматриваемом примере используются обозначения, показанные на рис. 4, которые могут отличаться от обозначений основного материала статьи. Целью дальнейших выкладок является вывод баланса энергии типа (3.15) для рассматриваемой системы.

Обозначим через  $x(t) = Vt$  координату тела в зависимости от времени, предполагая, что в моменты времени  $0, \hat{t}, t_m$  тело имеет координаты  $0, x, x_m$ , соответственно. Текущая высота  $h$  тела над уровнем оси  $x$  описывается известной функцией  $h(t)$  – ее несложно построить, учитывая заданную геометрию поверхности и равенство  $x(t) = Vt$ . При достижении телом координаты  $\hat{x}$  ступеньки поверхности (в момент  $\hat{t}$ ) его высота  $h$  скачком уменьшается на высоту  $\Delta \hat{h}$  ступеньки под действием силы упругости растянутой пружины  $b$ . Подобное мгновенное изменение положения тела предполагает отсутствие у него инерции, что возможно в предположении незначительности массы тела. Считается также, что удар тела о поверхность в момент  $\hat{t}$  не сопровождается отскоком, т. е. является неупругим.



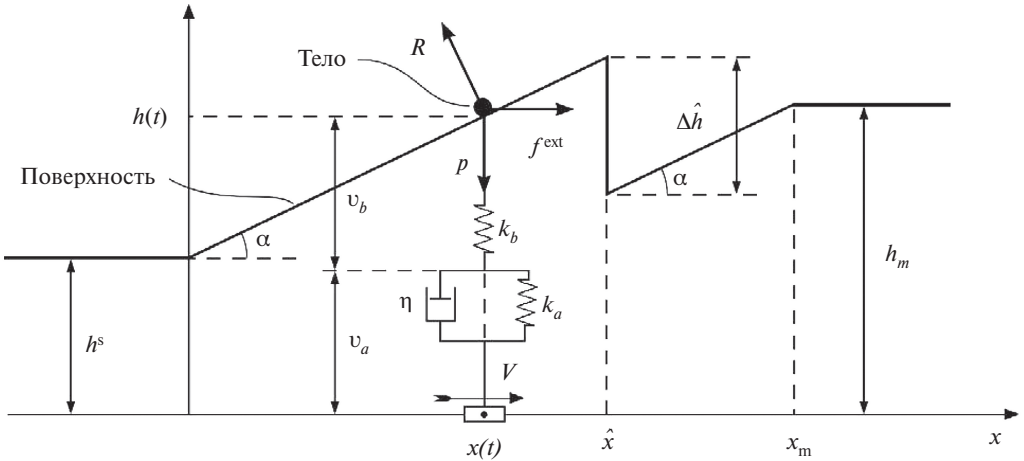


Рис. 4. Схема скольжения тела по поверхности со ступенькой (для наглядности длины пружин укорочены)

Запишем уравнения равновесия тела:  $f^{\text{ext}} = R \sin \alpha$ ,  $p = R \cos \alpha$ , где  $R$  – нормальная сила реакции поверхности,  $p$  – сила, действующая на тело со стороны вязкоупругого элемента Кельвина, причем значения всех указанных сил считаются положительными (рис. 4). Из этих уравнений вытекает равенство, связывающее силы  $f^{\text{ext}}$  и  $p$  на наклонных участках поверхности:

$$f^{\text{ext}}(t) = p(t) \operatorname{tg} \alpha, \quad (\text{П.2.1})$$

при этом на горизонтальных участках поверхности  $f^{\text{ext}}(t) = 0$ . В дальнейшем будем формально полагать  $\alpha = 0$  на горизонтальных участках поверхности. При таком соглашении равенство (П.2.1) будет справедливо для всех участков поверхности.

Выделим произвольный отрезок  $[t_1, t_2]$  непрерывности функции  $h(t)$ . Работа  $A_{[t_1, t_2]}^{\text{ext}}$  силы  $f^{\text{ext}}(t)$  на этом отрезке определяется по формуле:

$$A_{[t_1, t_2]}^{\text{ext}} = \int_{t_1}^{t_2} f^{\text{ext}}(t) dx(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) \operatorname{tg} \alpha dx(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dh(t), \quad (\text{П.2.2})$$

при записи которой принято во внимание равенство (П.2.1) и геометрическое соотношение  $dh(t) = \operatorname{tg} \alpha dx(t)$ .

Величина силы  $p$  определяется процессом деформирования элемента Кельвина, так что [41]:

$$\begin{aligned} p(t) &= \eta \dot{v}_a(t) + k_a [v_a(t) - v_{a0}] \\ p(t) &= k_b [v_b(t) - v_{b0}], \end{aligned} \quad (\text{П.2.3})$$

где  $\eta$  и  $k_i$  – вязкость демпфера и жесткость пружины  $i$  элемента Кельвина,  $v_i$  и  $v_{i0}$  – длина пружины  $i$  в растянутом и недеформированном состояниях,  $i = a, b$ , при этом, согласно принятым обозначениям (рис. 4):

$$v_a(t) + v_b(t) = h(t) \quad (\text{П.2.4})$$

Диссипация энергии  $D_{[t_1, t_2]}$  в демпфере на произвольном отрезке  $[t_1, t_2]$  времени и потенциальная энергия  $U_i$  упругой деформации пружины  $i$  определяются по формулам [42]:

$$D_{|v_1, v_2|} = \eta \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}_a^2(t) dt, \quad U_i(t) = \frac{k_i}{2} [v_i(t) - v_{i0}]^2; \quad i = a, b \quad (\text{П.2.5})$$

Введем также в рассмотрение полную потенциальную энергию пружин:

$$U(t) = U_a(t) + U_b(t) \quad (\text{П.2.6})$$

Предполагается, что в начале тело скользит по первому горизонтальному участку поверхности  $x < 0$  (рис. 4), и элемент Кельвина находится в стационарном состоянии с  $\dot{v}_a(t) = 0$ . При достаточно продолжительном (строго говоря, при  $t \rightarrow \infty$ ) скольжении тела по второму горизонтальному участку  $x_m < x$  происходит релаксация элемента Кельвина и он опять приходит в стационарное состояние. Значения  $p^s$  и  $p_m$  силы  $p$ , соответствующие указанным стационарным состояниям определяются из равенств (П.2.3), (П.2.4) при условии  $\dot{v}_a(t) = 0$ , так что [42]:

$$p(0) = p^s = k^\infty (h^s - v_0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_m = k^\infty (h_m - v_0), \quad (\text{П.2.7})$$

где  $k^\infty = k_a k_b / (k_a + k_b)$  – длительная жесткость,  $v_0 = v_{a0} + v_{b0}$ . Полная потенциальная энергия пружин в стационарных состояниях определяется по формулам:

$$U^s = \frac{1}{2k^\infty} (p^s)^2, \quad U_m = \frac{1}{2k^\infty} (p_m)^2 \quad (\text{П.2.8})$$

Исключив из равенств (П.2.3), (П.2.4) неизвестные функции  $v_a(t)$  и  $v_b(t)$ , можно получить дифференциальное уравнение относительно функции  $p(t)$  [42]. Решение этого уравнения с начальным условием  $p(0) = p^s$  позволяет определить функции  $v_a(t)$ ,  $v_b(t)$ , рассчитать затем по формулам (П.2.2), (П.2.5) величины  $A_{|t_1, t_2|}^{\text{ext}}$ ,  $D_{|t_1, t_2|}$ ,  $U_a$ ,  $U_b$  и составить баланс энергии типа (3.15). Однако это проще сделать, получив выражение для работы  $A_{|t_1, t_2|}^{\text{ext}}$  непосредственно из исходных равенств (П.2.3), (П.2.4).

Для этого, используя соотношение (П.2.4), заменим в правой части равенства (П.2.2) для работы  $A_{|t_1, t_2|}^{\text{ext}}$  функцию  $h(t)$  суммой  $v_a(t) + v_b(t)$  и подставим в полученные два интеграла вместо функции  $p(t)$  два ее выражения (П.2.3). В результате можно получить искомое выражение:

$$\begin{aligned} A_{|t_1, t_2|}^{\text{ext}} &= \eta \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}_a(t) dv_a(t) + k_a \int_{t_1}^{t_2} [v_a(t) - v_{a0}] dv_a(t) + k_b \int_{t_1}^{t_2} [v_b(t) - v_{b0}] dv_b(t) = \\ &= D_{|t_1, t_2|} + U(t_2) - U(t_1), \end{aligned} \quad (\text{П.2.9})$$

в котором последнее равенство записано на основе формул (П.2.5), (П.2.6).

Рассмотрим теперь работу  $A^{\text{ext}} = A_{|0, \infty|}^{\text{ext}}$  силы  $f^{\text{ext}}$  по перемещению тела из начального стационарного состояния с  $p = p^s$  (первый горизонтальный участок поверхности) в асимптотически стационарное состояние с  $p = p_m$  (второй горизонтальный участок поверхности). Представим работу  $A^{\text{ext}}$  в виде суммы работ  $A_{|0, \hat{t}|}^{\text{ext}}$  и  $A_{|\hat{t}, \infty|}^{\text{ext}}$  до и после скачка высоты  $h(t)$ , которые определяются по формуле (П.2.9). В результате, учитывая равенства (П.2.7) и (П.2.8), можно прийти к следующему соотношению, представляющему собой баланс энергии для рассматриваемой системы:

$$A^{\text{ext}} = D^\infty + \Delta U - \Delta \hat{U}, \quad (\text{П.2.10})$$

где

$$D^\infty = D_{|0, \infty|}, \quad \Delta U = U_m - U^s, \quad \Delta \hat{U} = U(\hat{t} + 0) - U(\hat{t} - 0), \quad (\text{П.2.11})$$

причем величины  $U^s$  и  $U_m$  определяются по формулам (П.2.8).

При конечной силе  $p$  демпфер в элементе Кельвина не допускает мгновенного изменения своей длины  $v_a$ . Это означает, что скачок высоты  $h(t)$  в момент  $\hat{t}$  не может вызвать мгновенных изменений длины  $v_a$  пружины  $a$  и, соответственно, ее потенциальной энергии  $U_a$ . Однако, длина  $v_b$  пружины  $b$  в момент  $\hat{t}$  мгновенно уменьшается на величину  $\Delta h$  скачка высоты  $h(t)$ , что приводит к мгновенному изменению потенциальной энергии  $U_b$ . Данные обстоятельства позволяют с учетом формул (П.2.5), (П.2.6) записать выражения:

$$D^\infty = \eta \int_0^\infty \dot{v}_a^2(t) dt, \quad \Delta \hat{U} = \Delta \hat{U}_b = U_b^+ - U_b^-, \quad (\text{П.2.12})$$

причем  $U_b^\pm(t) = U_b(\hat{t} \pm 0) = \frac{k_b}{2} [v_b(\hat{t} \pm 0) - v_{b0}]^2$ .

Отметим, что на втором горизонтальном участке внешняя сила  $f^{\text{ext}}$  не совершает дополнительной работы, т.е.  $A^{\text{ext}} = A_{[0, \infty)}^{\text{ext}} = A_{[0, t_m]}^{\text{ext}}$ . Однако, использование в равенстве (П.2.10) в качестве конечного состояния асимптотически стационарного состояния с известной силой  $p = p_m$  позволяет получить явные выражения (П.2.11), (П.2.12) для входящих в равенство (П.2.10) величин  $D^\infty$  и  $\Delta U$ .

Согласно общепринятым физическим представлениям, при мгновенном уменьшении высоты  $h$  тела в момент  $\hat{t}$  потенциальная энергия  $U$  элемента Кельвина переходит в кинетическую энергию тела, которая, в свою очередь, рассеивается при неупругом ударе тела о поверхность в количестве  $\hat{D} = -\Delta \hat{U} > 0$ . Последнее соотношение позволяет представить баланс энергии (П.2.10) в следующем виде:

$$A^{\text{ext}} = D^\infty + \Delta U + \hat{D} \quad (\text{П.2.13})$$

Равенство (П.2.13), как и равенство (П.2.10), отвечает 3СЭ для рассматриваемой системы тело—элемент Кельвина и имеет понятный физический смысл. Например, если горизонтальные участки поверхности находятся на одинаковом уровне ( $h^s = h_m$ , рис. 4), а в элементе Кельвина отсутствует демпфер ( $\eta = 0$ ), то, согласно выражениям (П.2.11) и (П.2.12):  $D^\infty = \Delta U = 0$ . В таком случае, в силу равенства (П.2.13):  $A^{\text{ext}} = \hat{D}$ , т.е., как и следовало ожидать, вся работа внешней силы  $f^{\text{ext}}$  рассеивается.

Баланс энергии (П.2.13) вполне соответствует записанному балансу энергии (3.15) для рассматриваемой в статье системы индентор—слой—подложка. В частности, равенство (П.2.13) подтверждает отсутствие скачка диссипации энергии  $d$  в балансе энергии (3.15), а также поясняет физический смысл слагаемого  $\hat{d}$  в нем.

Отметим, что приведенный пример подвижной системы тело—элемент Кельвина со скачком состояния представляет самостоятельный интерес для моделирования трения шероховатых тел, а также явления прерывистого скольжения (stick—slip).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-49-02010.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*. 1934. Bd. 69. H. 2. S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1971. V. 324. №1558. P. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci*. 1975. V. 53. №2. P. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // *J. Phys. D: Appl. Phys*. 1997. V. 30. №12. P. 1710–1719.

5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. V. 54. №9. P. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.* 2006. V. 21. №10. P. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. of Solids*. 2018. V. 24. №5. P. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Phil. Mag. A*. 1981. V. 43. №3. P. 697–711.
9. *Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю.* Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // *ПМТФ*. 2014. Т. 55. №1. С. 99–107.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: an analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polymer Sci. Pt. B: Polymer Phys.* 2002. V. 40. P. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech.&Phys. of Solids*. 2003. V. 51. №1. P. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.* 1980. V. 77. №1. P. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 46. №12. P. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1997. V. 453. №1961. P. 1277–1297.
15. *Солдатенков И.А.* Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // *ПММ*. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Colloid Interface Sci.* 1998. V. 199. №2. P. 187–196.
17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007. V. 71. №8. P. 931–962.
18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*. 2013. V. 61. №6. P. 1377–1390.
19. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия (уточненная постановка) // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 877–893.
20. *Dolgov N.A., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* A model of contact of elastic bodies with account for their adhesion // *Int. J. Nanomech. Sci.&Technol.* 2015. V. 6. №2. P. 117–133.
21. *Jagota A., Argento C.* An intersurface stress tensor // *J. Colloid Interface Sci.* 1997. V. 191. №2. P. 326–336.
22. *Argento C., Jagota A., Carter W.C.* Surface formulation for molecular interactions of macroscopic bodies // *J. Mech. Phys. Solids*. 1997. V. 45. №7. P. 1161–1183.
23. *Wu J.-J.* The Jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. of Adhesion*. 2010. V. 86. №11. P. 1071–1085.
24. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // *ПММ*. 2001. Т. 65. №2. С. 279–289.
25. *Kesari H., Lew A.J.* Effective macroscopic adhesive contact behavior induced by small surface roughness // *J. Mech. Phys. Solids*. 2011. V. 59. P. 2488–2510.
26. *Ciavarella M., Greenwood J.A., Barber J.R.* Effect of Tabor parameter on hysteresis losses during adhesive contact // *J. Mech. Phys. Solids*. 2017. V. 98. P. 236–244.
27. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): расчет НДС и диссипации энергии // *ПММ*. 2020. Т. 84. №1. С. 102–121.
28. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): анализ особенностей процесса подвода/отвода индентора // *ПММ*. 2021. Т. 85. №1. С. 44–65.

29. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): диссипация энергии при индентировании и сила трения // ПММ. 2022. Т. 86. №3. С. 424–444.
30. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
31. Handbook of Micro/Nanotribology / Ed. by *Bhushan B.* Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
32. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011.
33. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006.
34. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: особенности подповерхностных напряжений // ПММ. 2016. Т. 80. №6. С. 733–745.
35. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
36. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во МГУ, 1975. 528 с.
37. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
38. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2003. Т. 3. 728 с.
39. *Takahashi K., Onzawa T.* Effect of the stiffness of the measurement system on adhesion force curves in the elastic continuum limit // J. Adhesion Sci. Technol. 1996. V. 10. №1. P. 17–31.
40. *Johnson K.L.* Mechanics of adhesion // Tribol. Int. 1998. V. 31. №8. P. 413–418.
41. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
42. *Солдатенков И.А.* К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. 2008. Т. 29. №1. С. 12–21.

**Contact with Intermolecular Interaction Forces for a Viscoelastic Layer  
(Self-Consistent Approach): The Energy Balance  
for the System of Indenter–Layer–Substrate**

**I.A. Soldatenkov<sup>a,\*</sup>**

<sup>a</sup>*Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: iasoldat@hotmail.com*

The contact of an infinitely extended plane indenter and a viscoelastic layer in the framework of the Derjaguin self-consistent approach with the surface (traditional formulation) and bulk (refined formulation) application of intermolecular interaction forces is considered. Corresponding models of the contact interaction are proposed, for which the energy balance in the indenter–layer–substrate system is derived and validated. The balance takes into account viscous energy dissipation, potential energy of elastic deformation, field energy, as well as the energy dissipated in jump of the contact gap.

*Keywords:* contact problem, viscoelastic layer, intermolecular interaction, energy dissipation, field energy

**REFERENCES**

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // Kolloid-Zeitschrift, 1934, Bd. 69, H. 2, S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci., 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // J. Phys. D: Appl. Phys., 1997, vol. 30, no. 12, pp. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // J. Mech. Phys. Solids, 2006, vol. 54, no. 9, pp. 1843–1861.

6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.*, 2006, vol. 21, no. 10, pp. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. of Solids*, 2018, vol. 24, no. 5, pp. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Phil. Mag. A*, 1981, vol. 43, no. 3, pp. 697–711.
9. *Goryacheva I.G., Gubenko M.M., Makhovskaya Yu.Yu.* Sliding of a spherical indenter on a viscoelastic foundation with the forces of molecular attraction taken into account // *J. of Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 81–88.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: An analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polymer Sci. Pt. B: Polymer Phys.*, 2002, vol. 40, pp. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech. & Phys. of Solids*, 2003, vol. 51, no. 1, pp. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.*, 1980, vol. 77, no. 1, pp. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 46, no. 12, pp. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1997, vol. 453, no. 1961, pp. 1277–1297.
15. *Soldatenkov I.A.* The use of the method of successive approximations to calculate an elastic contact in the presence of molecular adhesion // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 597–603.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Colloid Interface Sci.*, 1998, vol. 199, no. 2, pp. 187–196.
17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2007, vol. 71, no. 8, pp. 931–962.
18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*, 2013, vol. 61, no. 6, pp.1377–1390.
19. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces (a refined formulation) // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 629–641.
20. *Dolgov N.A., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* A model of contact of elastic bodies with account for their adhesion // *Int. J. Nanomech. Sci.&Tech.*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 117–133.
21. *Jagota A., Argento C.* An intersurface stress tensor // *J. Colloid Interface Sci.*, 1997, vol. 191, no. 2, pp. 326–336.
22. *Argento C., Jagota A., Carter W.C.* Surface formulation for molecular interactions of macroscopic bodies // *J. Mech. Phys. Solids*, 1997, vol. 45, no. 7, pp. 1161–1183.
23. *Wu J.-J.* The Jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. of Adhesion*, 2010, vol. 86, no. 11, pp. 1071–1085.
24. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Adhesive interaction of elastic bodies // *JAMM*, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 273–282.
25. *Kesari H., Lew A.J.* Effective macroscopic adhesive contact behavior induced by small surface roughness // *J. Mech. Phys. Solids*, 2011, vol. 59, pp. 2488–2510.
26. *Ciavarella M., Greenwood J.A., Barber J.R.* Effect of Tabor parameter on hysteresis losses during adhesive contact // *J. Mech. Phys. Solids*, 2017, vol. 98, pp. 236–244.
27. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interaction forces for a viscoelastic layer (self-consistent approach): Calculation of the stress-strain state and energy dissipation // *Mech. of Solids*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 159–174.
28. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interactions for a viscoelastic layer (self-consistent approach): feature analysis of the indenter approach/retract process // *Mech. of Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1259–1276.
29. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interaction for a viscoelastic layer (self-consistent approach): Energy dissipation under indentation and friction force // *Mech. of Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1701–1716.
30. *Churaev N.V., Derjaguin B.V., Muller V.M.* *Surface Forces*. N.Y.: Springer, 1987.

31. Handbook of Micro/Nanotribology / Ed. by *Bhushan B.* Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
32. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011.
33. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006.
34. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces: distinctive features of the subsurface stresses // JAMM, 2016, vol. 80, no. 6, pp. 518–526.
35. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. N.Y.: Acad. Press, 1971.
36. *Ogibalov P.M., Lomakin V.A., Kishkin B.P.* Mechanics of Polymers. Moscow: MSU Pub., 1975. (in Russian)
37. *Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N.* Methods of Applied Viscoelasticity. Ekaterinburg: Ural Branch RAS, 2003. (in Russian)
38. *Fikhtengolts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 3. Moscow: Fizmatlit, 2003. (in Russian)
39. *Takahashi K., Onzawa T.* Effect of the stiffness of the measurement system on adhesion force curves in the elastic continuum limit // J. Adhesion Sci. Technol., 1996, vol. 10, no. 1, pp. 17–31.
40. *Johnson K.L.* Mechanics of adhesion // Tribol. Int., 1998, vol. 31, no. 8, pp. 413–418.
41. *Rabotnov Yu.N.* Elements of Hereditary Solid Mechanics. Moscow: Mir, 1980.
42. *Soldatenkov I.A.* Calculation of the deformation component of the force of friction for a standard elastoviscous base // J. Friction&Wear, 2008, vol. 29, no. 1, pp. 7–14.

УДК 539.3

## ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ЛЭМБА В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ

© 2024 г. Е. А. Каспарова<sup>1</sup>, С. В. Кузнецов<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Институт Проблем Механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.03.2024 г.

После доработки 15.04.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

С помощью модифицированного шестимерного формализма Коши исследовано распространение гармонических волн Лэмба в слоях из функционально-градиентных материалов (ФГМ) с поперечной неоднородностью. Для случая произвольной поперечной неоднородности выведено дисперсионное уравнение в замкнутой форме. Получены и сопоставлены дисперсионные соотношения для материалов с различными видами неоднородностей.

*Ключевые слова:* функционально-градиентный материал; волна Лэмба; формализм Коши; анизотропия

DOI: 10.31857/S0032823524030108 YZYIVX

**1. Введение.** Функционально-градиентные материалы (ФГМ) с поперечной непрерывной неоднородностью могут существенно изменять акустические свойства функционально-градиентного (ФГ) слоя, что приводит либо к появлению зон с аномальными дисперсионными свойствами, например, появлению или исчезновению ZGV, фаз Эйри, участков с отрицательной групповой скоростью и др. [1], либо к существенному изменению как дисперсионных кривых, так и соответствующих дисперсионных соотношений [2–5]. Эти свойства распространения волн в ФГ слое представляют особый интерес в приложениях к акустическим методам неразрушающего контроля [6–9].

В большинстве исследований, посвященных распространению акустических волн в ФГ слоях, предлагаются различные численные подходы. Одна из модификаций МКЭ, известная, как “полосовой” МКЭ, использовалась в [1], гибридный МКЭ использовался в [5] для моделирования фундаментальных мод волн Лэмба в ФГ слоях. В работах [10–16] построены аналитические решения дисперсионных уравнений в ФГ средах. В [17] был использован спектральный вариант МКЭ для получения дисперсионных кривых в ФГ стержнях. Полиномы Лежандра и сопутствующие функции были использованы в [18] для построения дисперсионных соотношений для волн Лэмба в ФГ слоях. В [8] для анализа дисперсии пьезоэлектрических ФГ слоев было выполнено разложение в ряд Пеано. В [19] предложены асимптотические методы анализа дисперсии лэмбовских мод в ФГ слоях, основанные на методе ВКБ (Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна).

Настоящая работа посвящена построению явного векового уравнения и соответствующего (неявного) решения с помощью шестимерного формализма Коши, ранее разработанного для анализа SH-волн в слоистых слоях [20]. Рассмотрены числен-



ные примеры, выявляющие некоторые особенности дисперсионных кривых фундаментальных симметричных мод волн Лэмба в ФГ слоях. Разработанный метод может быть применен в различных задачах, связанных с распространением волн, как в однородных, так и в ФГ-средах (см. напр. [21–24]).

**2. Определяющие уравнения.** В настоящей работе выведены основные уравнения для построения решения для волн Лэмба в функционально-градиентном слое

2.1. Уравнения движения и представление волны Лэмба. Линейные уравнения движения анизотропного неоднородного материала можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \tag{2.1}$$

где  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  – тензор упругости четвертого ранга, который предполагается сильно эллиптичным

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{m}, \mathbf{n} \neq 0, \quad \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} > 0, \tag{2.2}$$

и  $\mathbf{C}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^3)$ , т.е.  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  непрерывно дифференцируема в  $\mathbb{R}^3$ .

Здесь и далее распространение гармонической волны Лэмба в слое с поперечной неоднородностью задано поперечной безразмерной комплексной координатой

$$x = ir \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}, \tag{2.3}$$

где  $\mathbf{v}$  – единичная нормаль к срединной плоскости;  $r$  – волновое число размерности  $l^{-1}$  и  $i = \sqrt{-1}$  (см. рис. 1). Начало глобальной системы координат принадлежит срединной плоскости  $\Pi_v$ .

Принимается следующее представление волны Лэмба

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}(x) e^{ir(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)}, \tag{2.4}$$

где  $\mathbf{m}$  – неизвестная векторная функция, определяющая изменение амплитуды волны по толщине слоя;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор направленный вдоль распространения волны;  $c$  – фазовая скорость волны Лэмба, независимая от  $x$ ;  $t$  – время.

Подставляя представление (2.4) в уравнения движения, получаем

$$\left( \mathbf{A}_1(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{A}_2(x) \frac{d}{dx} + \mathbf{A}_3(x) \right) \cdot \mathbf{m}(x) = 0, \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(x) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{A}_2(x) &= \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d}{dx} \mathbf{C}(x) \right) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{A}_3(x) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{n} - \rho(x) c^2 \mathbf{I} \end{aligned} \tag{2.6}$$

В (2.6)  $\mathbf{I}$  – единичная диагональная матрица. Заметим, что из условия сильной эллиптичности (2.2) следует

$$\det \mathbf{A}_1(x) > 0 \tag{2.7}$$

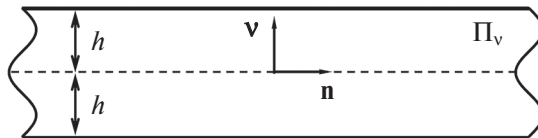


Рис. 1. Слой толщиной  $2h$ ; единичный вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль распространения волны;  $\mathbf{v}$  – нормаль к срединной плоскости  $\Pi_v$

и

$$\det \mathbf{A}_3(x) > 0, \quad (2.8)$$

тогда фазовая скорость должна удовлетворять соотношению

$$c < \sqrt{\frac{\lambda_3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{n})}{\rho(x)}}, \quad (2.9)$$

где  $\lambda_3$  – наименьшее собственное значение  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{n}$ . Здесь и далее предполагается, что условие (2.9) выполнено.

2.2. *Шестимерный формализм Коши.* Введем новую переменную

$$\mathbf{w}(x) = \frac{d}{dx} \mathbf{m}(x), \quad (2.10)$$

тогда уравнения движения в терминах двух неизвестных векторных функций  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{w}$  запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathbf{m}(x) &= \mathbf{w}(x) \\ \frac{d}{dx} \mathbf{w}(x) &= -\mathbf{A}_1^{-1}(x) \cdot \mathbf{A}_3(x) \cdot \mathbf{m}(x) - \mathbf{A}_1^{-1}(x) \cdot \mathbf{A}_2(x) \cdot \mathbf{w}(x), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где предполагается, что акустический тензор  $\mathbf{A}_1(x)$  обратим.

Введем новый шестимерный вектор

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{m}(x) \\ \mathbf{w}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

что дает возможность переписать уравнения (2.11) в следующем виде

$$\frac{d}{dx} \mathbf{Y}(x) = \mathbf{G}(x) \cdot \mathbf{Y}(x), \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{G}(x)$  – шестимерная матрица:

$$\mathbf{G}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_1^{-1}(x) \cdot \mathbf{A}_3(x) & -\mathbf{A}_1^{-1}(x) \cdot \mathbf{A}_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Уравнение (2.13) представляет собой основное уравнение формализма Коши, матрицу  $\mathbf{G}$  будем называть фундаментальной матрицей. Из условий (1.2) и (1.9) следует, что

$$\det \mathbf{G}(x) = \det \mathbf{A}_1^{-1}(x) \det \mathbf{A}_3(x) > 0 \quad (2.15)$$

2.3. *Граничные условия.* Условия на свободных поверхностях имеют вид

$$\mathbf{t}_v(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}(x) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{x=\pm ih} = 0, \quad (2.16)$$

где  $2h$  – толщина слоя. Подставляя представление (2.4) в граничные условия (1.16) с учетом обозначений (2.6), (2.10), получим

$$\mathbf{A}_1(x) \cdot \mathbf{w}(x) + \mathbf{A}_4(x) \cdot \mathbf{m}(x)|_{x=\pm ih} = 0, \quad (2.17)$$

где

$$\mathbf{A}_4(x) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{n} \quad (2.18)$$

Наконец, условия (2.17) могут быть переписаны с учетом введенного обозначения для вектора  $\mathbf{Y}(x)$ :

$$\mathbf{t}_v(x) \equiv (\mathbf{A}_4(x), \mathbf{A}_1(x)) \cdot \mathbf{Y}(x) \Big|_{x=\pm irh} = 0 \quad (2.19)$$

2.4. *Матричное уравнение.* Пусть  $\mathbf{E}$  – матрица, удовлетворяющая уравнению, аналогичному (2.13):

$$\frac{d}{dx} \mathbf{E}(x) = \mathbf{G}(x) \cdot \mathbf{E}(x) \quad (2.20)$$

Предполагается, что матрица  $\mathbf{E}$  невырожденная.

Если такая матрица существует, тогда любое векторное решение  $\mathbf{Y}(x)$  уравнения (2.13) в силу линейности задачи принимает вид

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{E}(x) \cdot \vec{C}, \quad (2.21)$$

где  $\vec{C}$  – шестимерный вектор неизвестных коэффициентов, определяемый граничными условиями (2.16).

Уравнение (2.20), очевидно, можно переписать в эквивалентном виде

$$\left( \frac{d}{dx} \mathbf{E}(x) \right) \cdot \mathbf{E}^{-1}(x) = \mathbf{G}(x) \quad (2.22)$$

2.5. *Решение матричного уравнения.* Применение матричного анализа [14] позволяет построить решение уравнения (2.22) в виде:

$$\mathbf{E}(x) = \exp(\mathbf{F}(x) + \mathbf{A}), \quad (2.23)$$

где

$$\mathbf{F}(x) \equiv \int \mathbf{G}(x) dx \quad (2.24)$$

обозначает любую первообразную матрицы  $\mathbf{G}(x)$ . Далее будет показано, что произвольная постоянная матрица, фигурирующая в (2.23), не влияет на конечный результат.

Прямая проверка позволяет убедиться, что матрица (2.23) удовлетворяет уравнению (2.22). Правая часть выражения (2.23) показывает, что матрица  $\mathbf{E}(x)$  невырожденная при фазовой скорости, удовлетворяющей условию (2.9), что обусловлено (2.15). Теперь, комбинируя (2.21) и (2.23), можно построить общее векторное решение  $\mathbf{Y}$ .

3. *Дисперсионное уравнение.* Подставляя общее решение при  $x = +irh$  в представление (2.21) с учетом (2.12), получим

$$\mathbf{E}(x) \cdot \mathbf{C} \Big|_{x=+irh} = \mathbf{Y}(irh), \quad (3.1)$$

откуда

$$\vec{C} = \mathbf{E}^{-1}(irh) \cdot \mathbf{Y}(irh) \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) дает

$$\mathbf{Y}(-irh) = \mathbf{E}(-irh) \cdot \underbrace{\mathbf{E}^{-1}(irh) \cdot \mathbf{Y}(irh)}_{\vec{C}} \quad (3.3)$$

Для дальнейшего анализа необходима следующая матрица размером  $6 \times 6$ :

$$\mathbf{Z}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{A}_4(x) & \mathbf{A}_1(x) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Отметим, что матрица  $\mathbf{Z}(x)$  обратима при любом  $x$ , так как  $\det \mathbf{Z} = \det \mathbf{A}_1 > 0$  в силу условия сильной эллиптичности (2.2). Таким образом, матрицу  $\mathbf{Z}(x)$  можно рассматривать как однозначное отображение на  $\mathbb{R}^6$ , и, учитывая (2.12), (2.19)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}(x) \\ \mathbf{t}_v(x) \end{pmatrix} = \mathbf{Z}(x) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m}(x) \\ \mathbf{w}(x) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Теперь амплитуду поверхностных перемещений  $\mathbf{m}$ , а также усилия  $\mathbf{t}_v$  в точке  $x = -irh$  можно выразить через матрицу  $\mathbf{Z}$  и выражения (3.3) и (3.5)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}(-irh) \\ \mathbf{t}_v(-irh) \end{pmatrix} = \mathbf{T}(irh) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m}(irh) \\ \mathbf{t}_v(irh) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

где

$$\mathbf{T}(irh) \equiv \mathbf{Z}(-irh) \cdot \mathbf{E}(-irh) \cdot \mathbf{E}^{-1}(irh) \cdot \mathbf{Z}^{-1}(irh) \quad (3.7)$$

Из анализа выражения  $\mathbf{E}(-irh) \cdot \mathbf{E}^{-1}(irh)$  вытекает полезная для вычислительных целей формула

$$\mathbf{E}(-irh) \cdot \mathbf{E}^{-1}(irh) = e^{\mathbf{F}(-irh) - \mathbf{F}(irh)} = \exp \left( - \int_{-irh}^{irh} \mathbf{G}(x) dx \right) \quad (3.8)$$

Таким образом, выражение  $\mathbf{E}(-irh) \cdot \mathbf{E}^{-1}(irh)$  не содержит произвольную постоянную матрицу  $\mathbf{A}$ , см. уравнение (2.23).

Поскольку поля поверхностных усилий в (3.6) обращаются в ноль при  $x = \pm irh$ , то приведенный ниже матричный оператор, действующий в пространстве  $\mathbb{R}^3$

$$R^3 \xrightarrow{(0, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}} R^3, \quad (3.9)$$

из 3D пространства поверхностных перемещений и нулевых поверхностных усилий на “верхней” поверхности в 3D пространство поверхностных усилий на “нижней” поверхности, должен быть вырожденным, чтобы обеспечить существование нетривиальных перемещений на “верхней” поверхности, что приводит к тому, что поверхностные усилия на “нижней” поверхности обращаются в ноль. Последнее эквивалентно

$$\det \left( (\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) представляет собой искомого дисперсионное уравнение слоя со свободными границами. Дисперсионное уравнение (3.10) совпадает с уравнением, полученным для однородной анизотропной слоя [13].

**4. Особые случаи.** Далее, рассмотрим два особых случая.

**4.1. Однородная анизотропия.** Предполагается, что и тензор упругости, и плотность материала не зависят от координаты  $x$ .

$$\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}_0, \quad \rho(x) = \rho_0, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{C}_0$  – сильно эллиптический тензор четвертого порядка, а плотность материала  $\rho_0 > 0$ .

Подставляя (4.1) в уравнения (2.6), (2.14), получим фундаментальную матрицу  $\mathbf{G}_0$ , не зависящую от экспоненциального множителя  $e^{\lambda x}$ . Таким образом, для рассматриваемого случая, фундаментальное решение уравнения (2.20) принимает вид

$$\mathbf{E}(x) = e^{\mathbf{G}_0 x} \quad (4.2)$$

А в силу предполагаемого условия однородности (4.1), матрица, определяемая уравнением (3.4), не зависит от  $x$ , т.е.  $\mathbf{Z}(x) = \mathbf{Z}_0$  и передаточная матрица  $\mathbf{T}$  содержит аргумент  $irh$ , учитывающий дисперсию, только в пределах члена

$$\mathbf{E}(-irh) \cdot \mathbf{E}^{-1}(irh) = e^{-2irh\mathbf{G}_0} \quad (4.3)$$

Теперь, в силу (4.3), дисперсионное уравнение (3.10) для однородной слоя принимает вид

$$\det \left( (\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Z}_0 \cdot e^{-2irh\mathbf{G}_0} \cdot \mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (4.4)$$

**4.2. Экспоненциальная неоднородность.** Предположим теперь, что и тензор упругости, и плотность материала имеют экспоненциальную неоднородность

$$\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}_0 e^{\lambda x}, \quad \rho(x) = \rho_0 e^{\lambda x}, \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{C}_0$  – сильно эллиптический тензор четвертого порядка, а  $\rho_0 > 0$ . Отметим, что, в силу (2.3), множитель в показателе степени  $\lambda$  должен быть мнимым, чтобы  $\mathbf{C}(x)$  и  $\rho(x)$  были действительными.

С учетом (2.6), (4.5) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(x) &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{v}) e^{\lambda x} \\ \mathbf{A}_2(x) &= (\lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{v}) e^{\lambda x} \\ \mathbf{A}_3(x) &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{n} - \rho_0 c^2 \mathbf{I}) e^{\lambda x} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в уравнение (2.14), получим фундаментальную матрицу, не зависящую от экспоненциального множителя  $e^{\lambda x}$ . Однако, из второго уравнения (2.6) видно, что фундаментальная матрица зависит от  $\lambda$ , так что  $\mathbf{G}(x) = \mathbf{G}_0(\lambda)$ . Тогда фундаментальное матричное решение уравнения (2.20) или (2.22) принимает вид

$$\mathbf{E}(x) = e^{\mathbf{G}_0(\lambda)x} \quad (4.7)$$

Выражения (2.18), (4.6) позволяют записать матрицу  $\mathbf{Z}(x)$

$$\mathbf{Z}(\lambda x) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{n}) e^{\lambda x} & (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{v}) e^{\lambda x} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Таким образом, для рассматриваемого случая экспоненциальной неоднородности, матрица  $\mathbf{Z}(x)$  содержит дисперсионные члены ввиду наличия множителя  $e^{\lambda x}$ . С учетом (4.8), обратная матрица  $\mathbf{Z}^{-1}(x)$  имеет вид

$$\mathbf{Z}^{-1}(\lambda x) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{v})^{-1} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{n}) & (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{v})^{-1} e^{-\lambda x} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Построенные матрицы дают дисперсионное уравнение (3.10) в виде

$$\det \left( (\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Z}(-irh\lambda) \cdot e^{-2irh\mathbf{G}_0(\lambda)} \cdot \mathbf{Z}^{-1}(irh\lambda) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (4.10)$$

**5. Примеры.** В то время как теория, развитая в разд. 3, относится к общему случаю неоднородной анизотропии, в данном разделе анализируется случай изотропного ФГ слоя с поперечной неоднородностью. Дисперсионные кривые рассматриваемого

ФГ слоя сравниваются с дисперсионными кривыми соответствующих гомогенизированных изотропных слоев.

5.1. ФГ слой. Рассмотрим изотропный ФГ слой со следующими физическими свойствами:

$$E(x) = E_0 \frac{(1 + \alpha \operatorname{ch}(i\beta x))}{2}, \quad \nu = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad (5.1)$$

где  $E_0$  соответствует модулю Юнга срединной плоскости  $x = 0$  и при  $\alpha = 1$ ; где  $\alpha$  и  $\beta \neq 0$  безразмерные действительные постоянные;  $x$  – безразмерная мнимая координата;  $\nu \in (-1; 0.5)$  коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность материала. Неравенство

$$\alpha > -\frac{1}{\operatorname{ch}(-\beta rh)} \quad (5.2)$$

гарантирует  $E(x) > 0$  при  $-irh < x < +irh$ . Для рассматриваемого ФГ слоя коэффициент Пуассона и плотность материала полагаются постоянными по толщине.

В зависимости от знака постоянной  $\alpha$ , кривая изменения модуля Юнга по толщине будет либо выпуклой ( $\alpha < 0$ ) либо вогнутой ( $\alpha > 0$ ); см. рис. 2:

Используя упругие свойства (5.1), можно получить компоненты тензора упругости

$$C_{ijkl}(x) = \lambda(x) \mathbf{I}_{3 \times 3} \otimes \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\mu(x) \mathbf{I}_{6 \times 6}, \quad (5.3)$$

где  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  и  $\mathbf{I}_{6 \times 6}$  – единичные матрицы в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^6$  соответственно,  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе:

$$\lambda(x) = \frac{E(x)\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \mu(x) = \frac{E(x)}{2(1 + \nu)} \quad (5.4)$$

5.2. Гомогенизированный слой. Наряду с ФГ слоем, рассматривается также слой с гомогенизированными свойствами, так что усредненный модуль Юнга ( $E_{\text{hom}}$ )

$$E_{\text{hom}} \equiv \frac{E_0}{2} \left( 1 + \frac{\alpha}{2ih} \int_{-ih}^{ih} \operatorname{ch}(i\beta x) dx \right) = \frac{E_0}{2} \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta h} \operatorname{sh}(\beta h) \right) \quad (5.5)$$

Как показывает правая часть уравнения (5.5),  $E_{\text{hom}} > E_0/2$  при  $\alpha > 0$ , и  $E_{\text{hom}} < E_0/2$  при  $\alpha < 0$ .

5.3. Дисперсионные кривые. Примем следующие численные значения для параметров (5.1):

$$E_0 = 1, \quad \alpha = \pm 0.5, \quad \beta = 1, \quad \nu = 0.25, \quad \rho = 1, \quad h = 1 \quad (5.6)$$

Непосредственная проверка показывает, что при таких значениях условие (5.2) выполняется, а подстановка (5.6) в (5.5) дает:  $E_{\text{hom}} \approx 0.794$  при  $\alpha = 0.5$  и  $E_{\text{hom}} \approx 0.206$  при  $\alpha = -0.5$ .

Применение метода, разработанного в разд. 3, и подстановка изотропного тензора упругости, определяемого формулой (5.3) и постоянными (5.6), позволяет предста-

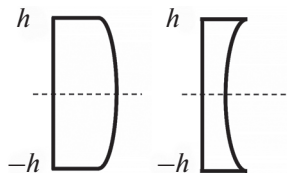


Рис. 2. Изменение модуля Юнга по толщине: слева ( $\alpha < 0$ ); справа ( $\alpha > 0$ )

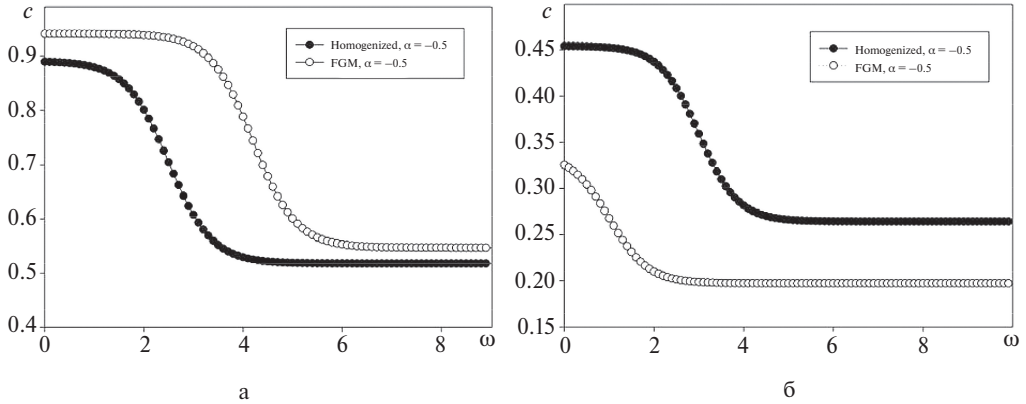


Рис. 3. Фундаментальные симметричные моды волн Лэмба:  
а:  $\alpha = +0.5$ ; б:  $\alpha = -0.5$

вить дисперсионные кривые для рассмотренных ФГ- и гомогенизированных слоев; см. рис. 3.

Сравнение построенных дисперсионных кривых для рассмотренных симметричных фундаментальных мод показывает:

I. В обоих случаях как при  $\alpha = +0.5$ , так и при  $\alpha = -0.5$ , дисперсионные кривые для ФГ и гомогенизированных слоев существенно различаются во всем диапазоне частот  $\omega \in (0; \infty)$ .

II. Для гомогенизированных слоев при малых частотах  $\omega \rightarrow 0$  соответствующие фазовые скорости совпадают со второй предельной скоростью волн:  $c_{2,\text{lim}} = \sqrt{E_{\text{hom}}/\rho}$  (см. [13]); таким образом  $c_{2,\text{lim}} \approx 0.892$  при  $\alpha = +0.5$  и  $c_{2,\text{lim}} \approx 0.454$  при  $\alpha = -0.5$ .

III. Для гомогенизированных слоев на высоких частотах  $\omega \rightarrow \infty$  соответствующие фазовые скорости совпадают со скоростями волн Рэлея  $c_R \approx 0.518$  при  $\alpha = +0.5$  и  $c_R \approx 0.264$  при  $\alpha = -0.5$ .

IV. Для ФГ слоев на высоких частотах  $\omega \rightarrow \infty$  фазовые скорости очень близки к скоростям волн Рэлея, что связано с физическими свойствами внешних слоев: при  $\alpha = +0.5$  согласно (5.1)  $E(\pm h) \approx 0.885$ , что дает  $c_R \approx 0.547$ , а при  $\alpha = -0.5$  согласно (5.1)  $E(\pm h) \approx 0.114$ , что дает  $c_R \approx 0.197$ .

V. Для рассмотренных ФГ слоев частоты, при которых могло бы возникнуть отсутствие симметричных фундаментальных мод волн Лэмба, не обнаружены.

В целом, как показывают графики на рис. 3, гомогенизация для рассматриваемых ФГ слоев приводит к существенному изменению дисперсионных кривых во всем диапазоне частот  $\omega \in (0; \infty)$ .

**Заключение.** С помощью модифицированного шестимерного формализма Коши исследовано распространение гармонических волн Лэмба в слоях из функционально-градиентных материалов с поперечной неоднородностью. Получено дисперсионное уравнение в замкнутой форме, применимое к слоям с произвольной поперечной неоднородностью.

Получены дисперсионные портреты для изотропных ФГ слоев с различными видами экспоненциальной неоднородности и проведено их сравнение с соответствующими дисперсионными портретами для однородных изотропных слоев, что выявило существенное расхождение в форме соответствующих дисперсионных кривых, причем основное различие обнаружено в форме дисперсионных кривых, отвечающих фундаментальным модам. В то же время, для рассмотренных случаев ФГ не обнару-

жено значений частот, при которых могло бы возникнуть отсутствие симметричных фундаментальных мод волн Лэмба.

Полученные результаты могут найти применение при разработке перспективных методов неразрушающего контроля на основе акустических упругих волн.

**Благодарность.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Грант 24-49-02002).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liu G.R., Tani J., Ohyoshi T.* Lamb waves in a functionally gradient material plates and its transient response. Pt. 1: Theory; Pt. 2: Calculation results // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.* 1991. V. 57A. P. 131–142.
2. *Koizumi M.* The concept of FGM. // *Ceramic Trans.: Funct. Gradient Mater.* 1993. V. 34. P. 3–10.
3. *Liu G.R., Tani J.* Surface waves in functionally gradient piezoelectric plates // *Trans. ASME.* 1994. V. 116. P. 440–448.
4. *Miyamoto Y. et al.* *Functionally Graded Materials.* London: Kluwer Acad. Pub., 1999.
5. *Han X., Liu G.R., Lam K.Y., Ohyoshi T.* A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization // *J. Sound Vibr.* 2000. V. 236. P. 307–321.
6. *Vlasie V., Rousseau M.* Guide modes in a plane elastic layer with gradually continuous acoustic properties // *NDT&E Int.* 2004. V. 37. P. 633–644.
7. *Baron C., Naili S.* Propagation of elastic waves in a fluid-loaded anisotropic functionally graded waveguide: application to ultrasound characterization // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127(3). P. 1307–1317.
8. *Amor M.B., Ghozlen M.H.B.* Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method // *Ultrasonics.* 2015. V. 55. P. 10–114.
9. *Nanda N., Kapuria S.* Spectral finite element for wave propagation analysis of laminated composite curved beams using classical and first order shear deformation theories // *Compos. Struct.* 2015. V. 132. P. 310–320.
10. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.* 2003. V. 61(3). P. 575–582.
11. *Li S., Brun M., Djeran-Maigre I. et al.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // *Comput. Geotech.* 2019. V. 109. P. 69–81.
12. *Li S., Brun M., Djeran-Maigre I. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* 2020. V. 24. P. 2400–2421.
13. *Li S., Brun M., Djeran-Maigre I. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Comput. Geotech.* 2021. V. 131. Art. No. 103808.
14. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion.* 2019. V. 84. P. 1–7.
15. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // *J. Vibr. Control.* 2019. V. 25(6). P. 1227–1232.
16. *Ильяшенко А.В., Кузнецов С.В.* Теоретические аспекты применения волн Лэмба в неразрушающей диагностике слоистых анизотропных сред // *Дефектоскопия.* 2017. №4. С. 3–21.
17. *Chao X., Zexing Y.* Numerical simulation of elastic wave propagation in functionally graded cylinders using time-domain spectral finite element method // *Adv. Mech. Eng.* 2017. V. 9(11). P. 1–17.
18. *Lefebvre J.E., Zhang V., Gazelet J. et al.* Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach // *IEEE T Ultrason. Ferr.* 2001. V. 48. P. 1332–1340.
19. *Qian Z.H., Jin F., Wang Z.K., Kishimoto K.* Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a functionally graded layer of finite thickness // *Int. J. Eng. Sci.* 2007. V. 45. P. 455–466.



20. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // *Acoust. Phys.* 2014. V. 60. P. 200–207.
21. *Dudchenko A.V., Dias D., Kuznetsov S.V.* Vertical wave barriers for vibration reduction // *Arch. Appl. Mech.* 2020. V. 91(1). P. 257–276.
22. *Kuznetsov S.V., Terentieva E.O.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.* 2015. V. 61. P. 356–367.
23. *Ilyasov K.K., Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V. et al.* Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // *Mech. Solids.* 2016. V. 51. P. 39–45.
24. *Bratov V.A., Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V. et al.* Homogeneous horizontal and vertical seismic barriers // *Mater. Phys. Mech.* 2020. V. 44. P. 61–65.

### Peculiarities of Lamb waves propagating in functionally graded layers

E.A. Kasparova<sup>a</sup>, S.V. Kuznetsov<sup>a, #</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru*

Propagation of harmonic Lamb waves in plates made of functionally graded materials (FGM) with transverse inhomogeneity is studied by the modified Cauchy six-dimensional formalism. For arbitrary transverse inhomogeneity a closed form dispersion equation is derived. Dispersion relations for materials with different kinds of inhomogeneity are obtained and compared.

*Keywords:* functionally graded material, Lamb wave, Cauchy formalism, anisotropy

### REFERENCES

1. *Liu G.R., Tani J., Ohyoshi T.* Lamb waves in a functionally gradient material plates and its transient response. Pt. 1: Theory; Pt. 2: Calculation result // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1991, vol. 57A, pp. 131–142.
2. *Koizumi M.* The concept of FGM. // *Ceramic Trans.: Funct. Gradient Mater.*, 1993, vol. 34, pp. 3–10.
3. *Liu G.R., Tani J.* Surface waves in functionally gradient piezoelectric plates // *Trans. ASME*, 1994, vol. 116, pp. 440–448.
4. *Miyamoto Y. et al.* *Functionally Graded Materials*. London: Kluwer Acad. Pub., 1999.
5. *Han X., Liu G.R., Lam K.Y., Ohyoshi T.* A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization // *J. Sound Vibr.*, 2000, vol. 236, pp. 307–21.
6. *Vlasie V., Rousseau M.* Guide modes in a plane elastic layer with gradually continuous acoustic properties // *NDT&E Int.*, 2004, vol. 37, pp. 633–644.
7. *Baron C., Naili S.* Propagation of elastic waves in a fluid-loaded anisotropic functionally graded waveguide: application to ultrasound characterization // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2010, vol. 127(3), pp. 1307–1317.
8. *Amor M.B., Ghazlen M.H.B.* Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method // *Ultrasonics*, 2015, vol. 55, pp. 10–114.
9. *Nanda N., Kapuria S.* Spectral finite element for wave propagation analysis of laminated composite curved beams using classical and first order shear deformation theories // *Composite Struct.*, 2015, vol. 132, pp. 310–320.
10. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.*, 2003, vol. 61(3), pp. 575–582.
11. *Li S., Brun M., Irini D.-M. et al.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // *Comput. Geotech.*, 2019, vol. 109, pp. 69–81.
12. *Li S., Brun M., Irini D.-M. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.*, 2020, vol. 24, pp. 2400–2421.

13. *Li S., Brun M., Irini D.-M. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Comput. Geotech.*, 2021, vol. 131, art.no. 103808.
14. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion*, 2019, vol. 84, pp. 1–7.
15. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // *J. Vibr. Control*, 2019, vol. 25(6), pp. 1227–1232.
16. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Theoretical aspects of applying Lamb waves to nondestructive testing of layered anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test*, 2017, vol. 53, pp. 243–259.
17. *Chao X., Zexing Y.* Numerical simulation of elastic wave propagation in functionally graded cylinders using time-domain spectral finite element method // *Adv. Mech. Eng.*, 2017, vol. 9(11), pp. 1–17.
18. *Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J. et al.* Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach // *IEEE T Ultrason. Ferr.*, 2001, vol. 48, pp. 1332–1340.
19. *Qian Z.H., Jin F., Wang Z.K., Kishimoto K.* Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a functionally graded layer of finite thickness // *Int. J. Eng. Sci.*, 2007, vol. 45, pp. 455–466.
20. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // *Acoust. Phys.*, 2014, vol. 60, pp. 200–207.
21. *Dudchenko A.V., Dias D., Kuznetsov S.V.* Vertical wave barriers for vibration reduction // *Arch. Appl. Mech.*, 2020, vol. 91(1), pp. 257–276.
22. *Kuznetsov S.V., Terentieva E.O.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, pp. 356–367.
23. *Il'yasov K.K., Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V. et al.* Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, pp. 39–45.
24. *Bratov V.A., Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V. et al.* Homogeneous horizontal and vertical seismic barriers // *Mater. Phys. Mech.*, 2020, vol. 44, pp. 61–65.

УДК 539.3

**СИСТЕМЫ ВКЛЮЧЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ УПРУГОМ КЛИНЕ**© 2024 г. Е. Д. Пожарская<sup>1</sup>, Д. А. Пожарский<sup>1,\*</sup>, Б. В. Соболев<sup>1</sup><sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

\*e-mail: pozharda@rambler.ru

Поступила в редакцию 21.02.2024 г.

После доработки 12.04.2024 г.

Принята к публикации 10.05.2024 г.

Рассматриваются контактные задачи о двух одинаковых тонких жестких эллиптических включениях в трехмерном упругом клине двухгранного угла, внешние грани которого подчинены условиям жесткой или скользящей заделки. Задачи сведены к интегральным уравнениям с симметричными ядрами. Вводятся два безразмерных геометрических параметра, характеризующих расположение включений в биссекториальной полуплоскости клина. В предположении линейной связи между параметрами для решения применяется регулярный асимптотический метод. Асимптотика для двух включений сравнивается с соответствующими решениями для единичного включения в клине и для периодической цепочки включений, ось которой параллельна ребру клина.

*Ключевые слова:* пространственный упругий клин, включения, интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S0032823524030119 YZUYXI

**1. Введение.** Исследование задач для тел с включениями может иметь приложение в механике композитов. Большинство публикаций посвящено плоским задачам [1–6]. В различных постановках изучались задачи о периодических системах включений в упругой плоскости [1, 3]. Рассматривалось напряженно-деформированное состояние упругой полосы с упругим [2] или жестким [4] включением. Анализировались задачи в нелинейной постановке, содержащей граничные условия с неравенствами [5–8]. Периодические контактные задачи для систем включений близки к периодическим задачам о внедрении штампов [9–14]. Известны регулярные и сингулярные асимптотические решения осесимметричных задач о круглой пластинке в слое [4]. В пространственном случае точное решение задачи о жестком эллиптическом включении в неограниченном упругом теле было получено на основании результатов Л. А. Галина [4]. При помощи регулярного асимптотического метода, используя решение [4] в качестве нулевого приближения, изучались задачи о единичном плоском включении в трехмерном упругом однородном [15] и составном [16] клине, а также задача о периодической цепочке включений в клине с жестко заделанными гранями [14].

В отличие от интегральных уравнений [15], в настоящей статье ядра интегральных уравнений представлены в форме явной симметрии, обеспечивающей корректность при всех углах клина и предельный переход к соответствующим плоским задачам для единичного включения в клине. Преобразование ядер от скрытой [15] к явной форме симметрии осуществляется путем сдвига контура интегрирования [17]. Показано, что в случае бесконечной периодической прямолинейной цепочки включений в клине со скользящей заделкой граней ряды в интегральном уравнении сходятся, как и для

случая жесткой заделки [14]. Для частного случая периодической системы включений в полупространстве при скользящей заделке границы ядро интегрального уравнения представлено в двух эквивалентных формах, одна из которых не содержит квадратур. Ранее две аналогичные формы ядра были получены в периодической задаче нормального контакта для упругого полупространства со скользящей заделкой по границной полуплоскости [12].

**2. Два включения в клине.** Рассмотрим упругий клин  $0 \leq r < \infty$ ,  $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $|z| < \infty$ , ребро которого совпадает с осью  $z$  цилиндрической системы координат. Упругий материал характеризуется модулем сдвига  $G$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . В срединной полуплоскости клина расположены два тонких жестких включения, занимающих симметричные эллиптические области  $\Omega_{\pm} = \{(r - a)^2/c^2 + (z \pm l)^2/b^2\} \leq 1$ ,  $a > c$ ,  $b \geq c$  (рис. 1). Между включениями и упругой средой в области контакта осуществляется полное сцепление. Внешние грани клина находятся в условиях жесткой или скользящей заделки (задачи А и В соответственно). К включениям приложены силы  $2T$ , действующие в полуплоскости  $\varphi = 0$  перпендикулярно ребру клина. Включения смещаются на величину  $\delta$  в направлении действия сил. В силу симметрии по  $\varphi$  достаточно рассматривать область  $\varphi \in [0, \alpha]$ . В первом приближении в области контакта пренебрегаем напряжением  $\tau_{\varphi z}$  по сравнению с  $\tau_{r\varphi}$ . Для единичного включения показано, что  $\tau_{\varphi z} = O(\tau_{r\varphi}/\lambda^2)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda = a/b$  [15]. Граничные условия задач имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi = 0 : \quad & u_r = \delta, (r, z) \in \Omega; \quad \tau_{r\varphi} = 0 \quad (r, z) \notin \Omega; \quad u_\varphi = \tau_{\varphi z} = 0 \\ \varphi = \alpha : \quad & A) u_\varphi = u_r = u_z = 0, \quad B) u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

При известных величинах  $\alpha, G, \nu, \delta$  и заданных областях  $\Omega_{\pm}$  требуется определить касательные контактные напряжения  $\tau_{r\varphi}(r, 0, z) = \tau(r, z)$ ,  $(r, z) \in \Omega_{\pm}$ . Затем можно найти величину  $T$  при помощи условия равновесия включений

$$\iint_{\Omega_{\pm}} \tau(r, z) dr dz = T \tag{2.2}$$

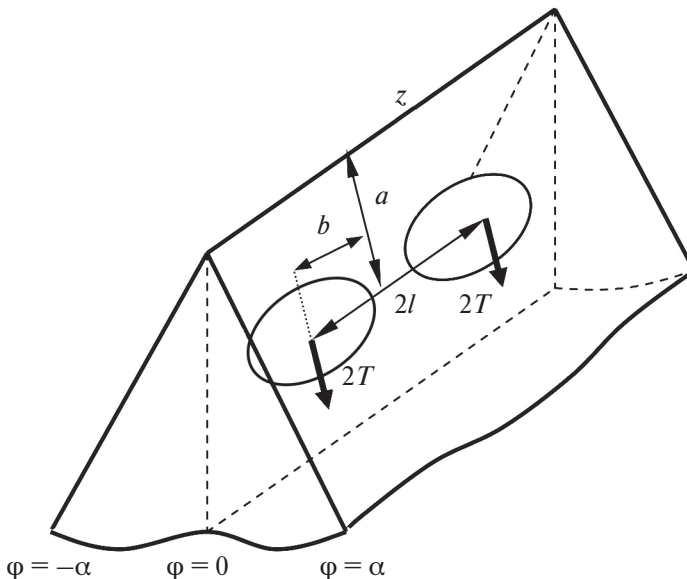


Рис. 1. Эллиптические включения в клине

Для сведения краевых задач (2.1) к интегральным уравнениям используем известные фундаментальные решения и ядра интегральных уравнений соответствующих задач для единичного включения, полученные в форме скрытой симметрии по радиальной координате [15]. Переходя к форме явной симметрии ядер в соответствии с теоремой Бетти взаимности работ путем сдвига контура интегрирования [17, п. 2.9.3], учитывая симметрию задач по  $z$  и вводя новые обозначения

$$y = y' + l, z = z' + l, \Omega = \{(r - a)^2/c^2 + z^2/b^2 \leq 1\}, \theta = \kappa/\kappa_1, \\ \kappa = 3 - 4\nu, \kappa_1 = 4 - 4\nu$$

и т.д., получим (штрихи далее опускаем)

$$\iint_{\Omega} \tau(x,y)K(x,y,r,z)dxdy = 2\pi G \delta; \quad (r,z) \in \Omega \tag{2.3}$$

$$K(x,y,r,z) = \frac{4\theta}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u)W(u)K_{iu}(\beta x)K_{iu}(\beta r)C(\beta y, \beta z)dud\beta$$

$$W(u) = S_1(u) - \kappa^{-1}S_2(u) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \kappa^{-2}S_3(u)xr \frac{\partial^2}{\partial x \partial r}$$

$$C(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y - z)) + \cos(\beta(y + z + 2l))$$

Здесь  $K_{iu}(r)$  – цилиндрическая функция Бесселя [18,19]. Для задачи А

$$S_1(u) = \frac{f_+(u)}{g_+(u)} - S_3(u), S_2(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_+(u)} - S_3(u), S_3(u) = \frac{4\text{sh}^2(\alpha u)\sin^2\alpha}{g_+(u)f_-(u)},$$

а для задачи В

$$S_1(u) = \frac{f_-(u)}{g_-(u)}, S_2(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_-(u)}, S_3(u) = 0$$

$$f_{\pm}(u) = \text{sh}(2\alpha u) \pm \kappa^{-1}u \sin(2\alpha), g_{\pm}(u) = \text{ch}(2\alpha u) \pm \cos(2\alpha)$$

Для единичных эллиптических включений (задачи С и D соответственно для жесткой и скользящей заделки граней клина) в ядре (2.3) следует положить

$$C(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y - z)) \tag{2.4}$$

Форма ядер с явной симметрией по  $x, r$  гарантирует их корректность при всех углах клина. Пусть в уравнении (2.3), (2.4) область  $\Omega$  – полоса  $\{a \leq r \leq b, |z| < \infty\}$ ,  $\tau(r,z) = \tau(r)$ . Тогда, совершая предельный переход при  $\beta \rightarrow 0$ , используя теорию обобщенных функций [20], придем к интегральным уравнениям соответствующих плоских задач

$$\int_a^b \tau(\rho) k \left( \ln \frac{\rho}{r} \right) d\rho = \pi G \delta \quad (a \leq r \leq b), k(t) = \theta \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos(ut) du \tag{2.5}$$

$$\text{А) } L(u) = \frac{2 \text{sh}^2(\alpha u) - 2\kappa^{-2}u^2 \sin^2 \alpha}{f_-(u)}, \text{ В) } L(u) = \frac{f_-(u)}{g_-(u)} = S_1(u)$$

Уравнения (2.5) можно вывести также при помощи интегрального преобразования Меллина. В пределе при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\alpha u = t$  функция  $L(u)$  для задачи В совпадает с известным символом ядра соответствующей задачи о включении в упругой полосе [4, формула (3.11)]. Функции  $L(u)$  служат символами ядер интегральных уравнений (2.3) и (2.5). Важно, что эти функции по своему асимптотическому поведению в нуле и бесконечности являются функциями типа тангенса гиперболического.

Исключением служит значение  $\alpha = \pi$  в задаче В, когда  $L(u) = \text{cth}(\pi u)$  и ядро уравнения (2.3) при условии (2.4) соответствует случаю единичного эллиптического включения в упругом пространстве [4, формулы (1.16)], а ядро (2.5) – случаю включения в виде отрезка в упругой плоскости. В последнем случае интегральное уравнение (2.5) приводится к уравнению плоской контактной задачи о вдавливании жесткого штампа в упругую полуплоскость.

Ядро интегрального уравнения (2.3), (2.4) для задачи В при  $\alpha = \pi/2$ , используя известные интегралы ([17], формулы (109)), можно представить в виде

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{(z - y)^2}{\kappa_1 R^3} - \frac{1}{R_+} + \frac{(z - y)^2}{\kappa_1 R_+^3}$$

$$R = \sqrt{(r - x)^2 + (z - y)^2}, \quad R_+ = \sqrt{(r + x)^2 + (z - y)^2},$$

что соответствует случаю двух симметричных включений в упругом пространстве, сдвигаемых в противоположных направлениях оси, проходящей через их центры [4].

Для пары симметричных включений в упругом пространстве, смещаемых в одном направлении перпендикулярно прямой, соединяющей их центры (задача В при  $\alpha = \pi$ ), ядро уравнения (2.3) принимает форму [4]

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{(z - y)^2}{\kappa_1 R^3} + \frac{1}{R_*} - \frac{(z + y + 2l)^2}{\kappa_1 R_*^3} \tag{2.6}$$

$$R_* = \sqrt{(r - x)^2 + (z + y + 2l)^2}$$

Для решения интегрального уравнения (2.3) применим регулярный асимптотический метод [4]. Введем безразмерные величины

$$r' = \frac{r - a}{b}, \quad z' = \frac{z}{b}, \quad \delta' = \frac{\delta}{b}, \quad c' = \frac{c}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \mu = \frac{l}{b} \tag{2.7}$$

$$\tau'(r', z') = \frac{\tau(r, z)}{G}, \quad T' = \frac{T}{Gb^2}, \quad \Omega \rightarrow \Omega'$$

и т. д. (штрихи далее опускаем). Локация пары эллиптических включений в клине характеризуется параметрами  $\lambda$  (относительная удаленность от ребра клина) и  $\mu$  (относительное расстояние между включениями). Предположим, что эти параметры связаны соотношением

$$\mu = \gamma\lambda, \quad \gamma = 1/a, \tag{2.8}$$

и будем искать решение в виде разложения по степеням малого параметра  $1/\lambda$ .

Запишем уравнение (2.3) в безразмерных обозначениях, выделяя в ядре главную часть (2.6), соответствующую включению в упругом пространстве:

$$\iint_{\Omega} \tau(x, y) \left[ \frac{1}{R} - \frac{(z - y)^2}{\kappa_1 R^3} + K_*(x, y, r, z) \right] dx dy = 2\pi\delta; \quad (r, z) \in \Omega \tag{2.9}$$

$$K_*(x, y, r, z) = \frac{1}{R_0} - \frac{(z_0 + y_0)^2}{\kappa_1 R_0^3} +$$

$$+ \frac{4\theta}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) W_0(u) K_{iu}(\beta x_0) K_{iu}(\beta r_0) \mathcal{C}_0(\beta y, \beta z) du d\beta$$

$$R_0 = \sqrt{(r-x)^2 + (z_0 + y_0)^2}, x_0 = x + \lambda, r_0 = r + \lambda, y_0 = y + \gamma\lambda, z_0 = z + \gamma\lambda$$

$$W_0(u) = S_1^*(u) - \kappa^{-1}S_2^*(u) \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x} + r_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \kappa^{-2}S_3(u)x_0r_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial r}$$

$$C_0(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y-z)) + \cos(\beta(y_0 + z_0)), S_n^*(u) = S_n(u) - \text{cth}(\pi u); n = 1, 2$$

Разложим функцию  $K_*(x, y, r, z)$  в ряд по степеням  $1/\lambda$  при помощи значения интеграла [19]

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty K_{iu}(\beta x_0) K_{iu}(\beta r_0) \cos(\beta z) d\beta = \\ & = \frac{1}{\sqrt{x_0 r_0} \text{ch}(\pi u)} F \left( \frac{1}{2} - iu, \frac{1}{2} + iu, 1; -\frac{(r-x)^2 + z^2}{4x_0 r_0} \right), \end{aligned}$$

где  $F(a, b, c, x)$  – гипергеометрическая функция Гаусса, и биномиальных рядов. Можно показать, что такое разложение сходится при достаточно больших  $\lambda$  и определенных ограничениях на параметр  $\gamma$ . В частности, для пары круговых включений для сходимости достаточно наложить условия

$$\lambda > \max \left( \frac{1}{1-\gamma}, \sqrt{\frac{2}{1-\gamma^2}}, \frac{1}{\alpha-\gamma}, \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2-\gamma^2}} \right); \quad \gamma < \min(1, \alpha) \tag{2.10}$$

Для единичного кругового включения (случай (2.4)) оценки (2.10) меняются на неравенство

$$\lambda > \max(\sqrt{2}, \sqrt{1+\alpha^{-2}})$$

Ограничиваясь первым членом разложения, получим ( $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$K_*(x, y, r, z) = \frac{A}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \quad A = a_0 + a_1 + a_2 \tag{2.11}$$

Для пары включений

$$a_0 = \frac{\theta}{2\gamma}, \quad a_1 = \theta \int_0^\infty \text{th}(\pi u) \left[ S_1^*(u) + \kappa^{-1}S_2^*(u) - \kappa^{-2}S_3(u) \frac{3+4u^2}{8} \right] du$$

$$\begin{aligned} a_2 = \theta \int_0^\infty \text{th}(\pi u) & \left[ S_1^*(u) \sum_{n=0}^\infty V_n(u) + \kappa^{-1}S_2^*(u) \sum_{n=0}^\infty (1+2n)V_n(u) - \right. \\ & \left. - \kappa^{-2}S_3(u) \sum_{n=0}^\infty \left( \frac{1}{4} + n + n^2 - \frac{n}{2\gamma^2} \right) V_n(u) \right] du \\ V_n(u) & = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{1}{2} - iu \right)_n \left( \frac{1}{2} + iu \right)_n \gamma^{2n}, \end{aligned}$$

где  $(a)_n$  – символ Похгаммера [18].

Для единичного включения (задачи С и D) в формулах (2.11) следует положить  $a_0 = a_2 = 0$ .

Для эллиптической области  $\Omega$  регулярное асимптотическое решение интегрального уравнения (2.9), (2.11) получим в виде ( $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$\tau(r, z) = \frac{\delta}{cDL(r, z)} \left[ 1 - \frac{A}{\lambda D} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right], \quad L(r, z) = \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2} - z^2} \quad (2.12)$$

$$D = S_{00} - \frac{S_{10}}{\kappa_1}, \quad S_{00} = K, \quad S_{10} = \frac{K - E}{e^2}$$

$$S_{km} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2k} t \sin^{2m} t}{(1 - e^2 \sin^2 t)^{k+m+1/2}} dt; \quad e^2 = 1 - c^2,$$

где  $K = K(e)$  и  $E = E(e)$  – полные эллиптические интегралы.

На основе формул (2.12) найдем интегральную характеристику (2.2)

$$T = \iint_{\Omega} \tau(x, y) dx dy = \frac{2\pi\delta}{D} T_0; \quad T_0 = 1 - \frac{A}{\lambda D} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

Асимптотики (2.12) и (2.13) эффективны как для пары включений, так и для единичного включения для относительно удаленных от ребра клина областей контакта.

**3. Периодические системы включений.** Пусть срединная полуплоскость клина  $\varphi = 0$  контактирует с периодической системой тонких жестких эллиптических включений (полуоси эллипсов  $c$  и  $b$ ,  $b \geq c$ ), расположенных вдоль оси  $z$  (рис. 1). Ось цепочки удалена от ребра клина на расстояние  $a > c$ , период равен  $2l$  ( $l > b$ ). Грани клина подчинены условиям жесткой или скользящей заделки (задачи E и F соответственно). В размерных обозначениях периодические задачи сводятся к интегральному уравнению (2.3), в котором следует взять

$$C(\beta y, \beta z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2kl)) \quad (3.1)$$

Сходимость ряда в ядре уравнения (2.3), (3.1) обеспечивается поведением функций-символов  $L(u)$  типа тангенса гиперболического, которые в задачах E и F такие же, как соответственно в задачах A, C и B, D. Исключим из рассмотрения значение  $\alpha = \pi$  в задаче F, когда (периодическая система включений в упругом пространстве, ряд в ядре расходится). Значение  $\alpha = \pi/2$  в задаче F ( $L(u) = \text{cth}(\pi u/2)$ ) соответствует самоуравновешенной системе двух параллельных периодических цепочек включений в упругом пространстве (рис. 2, условия скользящей заделки возникают на пунктирной линии). В этом случае ядро представляется сходящимся рядом

$$K(x, y, r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k} - \frac{(z - y + 2kl)^2}{\kappa_1 R_k^3} - \frac{1}{P_k} + \frac{(z - y + 2kl)^2}{\kappa_1 P_k^3} \right] \quad (3.2)$$

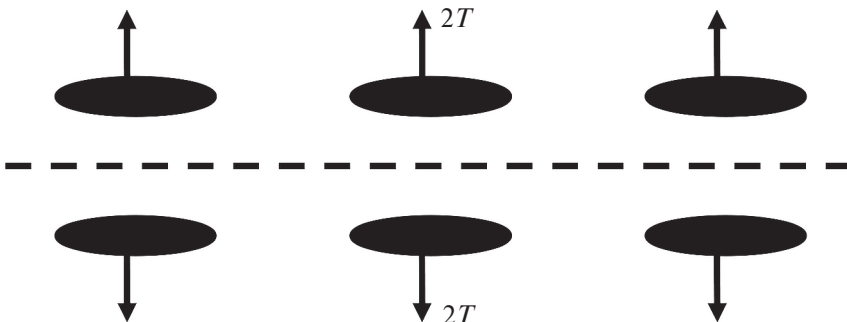


Рис. 2. Самоуравновешенная система двух параллельных периодических цепочек включений в упругом пространстве



$$R_k = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y+2kl)^2}, \quad P_k = \sqrt{(r+x)^2 + (z-y+2kl)^2}$$

Для выделения главных членов ядра уравнения (2.3), (3.1) применим известную методику, основанную на замене тригонометрического ряда (3.1) рядом обобщенных функций [10,12,13,20] и вычислении пределов и интегралов [18,19]. В результате представим ядро в форме ( $C$  – постоянная Эйлера)

$$\begin{aligned} K(x,y,r,z) = & \frac{1}{R} - \frac{(z-y)^2}{\kappa_1 R^3} + \frac{\theta}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} + \frac{\theta C}{l} - \frac{1}{\kappa_1 l} + \\ & + \frac{\theta}{l} \int_0^\infty \left\{ [L(u) - 1] \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} + \theta \sum_{k=1}^\infty \left[ \frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right] + \\ & + \frac{(r-x)^2}{\kappa_1} \sum_{k=1}^\infty \left[ \frac{1}{(R_k^+)^3} + \frac{1}{(R_k^-)^3} \right] + \frac{4\theta}{\pi l} \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) W_*(u) \sum(u) du \\ & R_k^\pm = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} W_*(u) = & S_1^*(u) - \kappa^{-1} S_2^*(u) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \kappa^{-2} S_3(u) x r \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} \\ & \sum(u) = \sum_{k=1}^\infty K_{iu} \left( \frac{\pi k}{l} x \right) K_{iu} \left( \frac{\pi k}{l} r \right) \cos \left( \frac{\pi k}{l} (z-y) \right) \end{aligned}$$

В представлении (3.3) улучшена сходимость всех интегралов с учетом асимптотического поведения символов в бесконечности. Ядро (3.3) интегрального уравнения линейно-периодической задачи включает члены, входящие в ядра интегральных уравнений как пространственных, так и плоских контактных задач о включениях в клине; в пределе при  $l \rightarrow \infty$  оно переходит в известное ядро для единичного включения. Логарифмическая особенность плоской задачи в формуле (3.3) при  $r = x$  является устранимой ( $x > 0$ ):

$$\lim_{r \rightarrow x} \ln \frac{|r-x|}{|\ln(r/x)|} = \ln |x| \tag{3.4}$$

Проверку эквивалентности форм (3.2) и (3.3) для задачи F при  $\alpha = \pi/2$  проведем, отбрасывая главные члены, в частном случае  $r = x \neq 0, z = y, l = 1$ . При учете предела (3.4) и соотношений [19]

$$\int_0^\infty K_{iu}^2(x) du = \frac{\pi}{2} K_0(2x), \quad \frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x)$$

можно численно убедиться в справедливости равенства

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{4} + C - \frac{1}{\kappa} + \int_0^\infty \left[ \text{th} \frac{\pi u}{2} - 1 + \exp(-u) \right] \frac{du}{u} - 2 \sum_{k=1}^\infty \left[ K_0(2\pi k x) + \frac{4\pi k x}{\kappa} K_1(2\pi k x) \right] = \\ = -\frac{1}{2\theta x} + \sum_{k=1}^\infty \left[ \frac{1}{k} - \frac{k^2 + \theta^{-1} x^2}{(k^2 + x^2)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

Для решения интегрального уравнения (2.3) с ядром (3.3) снова применим регулярный асимптотический метод [12–14], вводя безразмерные обозначения (2.7), (2.8). Придем к уравнению (2.9) с ядром (2.11), в котором следует положить

$$A = \frac{\theta}{\gamma} \ln \frac{1}{4\gamma} + \frac{\theta C}{\gamma} - \frac{1}{\kappa_1 \gamma} + \frac{\theta}{\gamma} \int_0^\infty [L(u) - 1 + \exp(-u)] \frac{du}{u} -$$

$$- \frac{2\theta}{\pi\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh}(\pi u) \cos(ut) \cos(us) \left[ \mathcal{S}_1^*(u) \frac{\exp(-\frac{\pi}{\gamma}(cht + chs)) - 1}{\operatorname{ch}(\frac{\pi}{\gamma}(cht + chs)) - 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{\gamma\kappa} \mathcal{S}_2^*(u) \frac{cht + chs}{\operatorname{ch}(\frac{\pi}{\gamma}(cht + chs)) - 1} + \frac{\pi^2}{\gamma^2 \kappa^2} \mathcal{S}_3(u) \frac{\operatorname{sh}(\frac{\pi}{\gamma}(cht + chs))cht chs}{[\operatorname{ch}(\frac{\pi}{\gamma}(cht + chs)) - 1]^2} \right] dt ds du$$

В результате получим асимптотики вида (2.12) и (2.13), справедливые при достаточно больших значениях  $\lambda$ .

**4. Численный анализ.** В табл. 1 для разных углов клина  $2\alpha$  приведены значения величины  $A$  в асимптотиках (2.12), (2.13) для шести задач, рассчитанные при  $\nu = 0.25$  (для задач А, В и Е, F брали  $\gamma = 0.5$ ). В табл. 2 даны значения приведенной интегральной характеристики  $T_0$  (2.13), рассчитанные для круговых включений при  $\nu = 0.25$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 4$  и разных  $\gamma$ . Значение  $T_0 = 1$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  соответствует единичному включению в упругом пространстве (задача D при  $\alpha = \pi$ ). При сближении включе-

**Таблица 1.** Значения величины  $A$  в асимптотиках (2.12), (2.13) при  $\nu = 0.25$

Задача	A	B	C	D	E	F
$\alpha = \pi/4$	-0.805	-0.615	-0.895	-0.736	-0.693	-0.564
$\alpha = \pi/2$	-0.376	-0.251	-0.583	-0.500	-0.0638	0.103
$\alpha = 3\pi/4$	-0.0757	0.196	-0.398	-0.249	0.478	1.790
$\alpha = \pi$	0.0667	0.667	-0.318	0	1.027	-

**Таблица 2.** Значения величины  $T_0$  (2.13) при  $\nu = 0.25$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 4$

Задача	A	B	C	D	E	F
$\gamma = 0.5$						
$\alpha = \pi/4$	1.153	1.117	1.171	1.141	1.132	1.108
$\alpha = \pi/2$	1.072	1.048	1.111	1.095	1.012	0.980
$\alpha = 3\pi/4$	1.014	0.963	1.076	1.048	0.909	0.658
$\alpha = \pi$	0.987	0.873	1.061	1.000	0.804	-
$\gamma = 0.4$						
$\alpha = \pi/4$	1.137	1.096	1.171	1.141	1.094	1.063
$\alpha = \pi/2$	1.047	1.021	1.111	1.095	0.944	0.904
$\alpha = 3\pi/4$	0.986	0.932	1.076	1.048	0.815	0.502
$\alpha = \pi$	0.958	0.841	1.061	1.000	0.684	-

**Таблица 3.** Значения величины  $T_0$  при  $\alpha = \pi/2$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 4$  и разных  $\nu$ 

$\nu$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Задача А	1.043	1.052	1.064	1.082	1.111	1.165
Задача В	1.032	1.037	1.044	1.053	1.066	1.085
Задача Е	0.949	0.968	0.995	1.033	1.092	1.195
Задача F	0.933	0.949	0.968	0.995	1.032	1.090

ний в задачах А, В и Е, F (уменьшении  $\gamma$ ) значение сдвигающей силы уменьшается. При жесткой заделке граней клина (задачи А, С и Е) включения сдвинуть труднее, чем в соответствующих случаях при скользящей заделке (задачи В, D и F). Как видно из табл. 2, периодическую систему включений (задачи Е и F) сдвинуть легче, чем пару включений (задачи А и В), которую, в свою очередь, легче сместить, чем единичное включение (задачи С и D). Как показывают расчеты, эллиптические включения ( $c < 1$ ) сдвинуть легче, чем круговые ( $c = 1$ ). В табл. 3 для четырех задач приведены значения  $T_0$  при различных коэффициентах Пуассона  $\nu$  ( $\alpha = \pi/2$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 4$ ). Требуемая для сдвига включений сила возрастает с ростом  $\nu$ . Как видно из табл. 3, для несжимаемого материала периодическую систему включений сдвинуть труднее, чем пару включений, хотя для сжимаемого материала ситуация противоположная. В первом приближении концентрация напряжений на границе сопряжения клина с включением, описываемая коэффициентом при корневой особенности в асимптотическом разложении (2.12), снижается с увеличением числа или плотности включений и повышается при росте коэффициента Пуассона, а также при уменьшении угла клина.

**Заключеие.** Показана связь интегральных уравнений пространственных и плоских задач о включениях в упругом клине. В пространственном случае важно привести ядра интегральных уравнений к симметричной форме по радиальной координате. Закрепление граней пространственного упругого клина жесткой или скользящей заделкой позволяет получить корректные интегральные уравнения задач линейно-периодического контакта жестких включений с упругим материалом в срединной полуплоскости клина. Структура ядер интегральных уравнений пространственных линейно-периодических задач о системах включений в клине аналогична структуре ядра интегрального уравнения контактной задачи о вдавливании периодической системы штампов в грань клина, другая грань которого жестко заделана [12, 13].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00014, <https://rscf.ru/project/24-21-00014/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 520–529.
2. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 542–549.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
5. Khludnev A.M. On thin inclusions in elastic bodies with defects // ZAMP. 2019. V. 70. №2. P. 45.

6. Попова Т.С. Задача о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в упругом теле // Матем. зам. СВФУ. 2023. Т. 30. №2. С. 40–55.
7. *Khudnev A.M., Rodionov A.A.* Elastic body with thin nonhomogeneous inclusion in non-coercive case // *Math. Mech. Solids*. 2023. V. 28. №10. P. 2141–2154.
8. *Khudnev A.M., Fankina I.V.* Noncoercive problems for elastic bodies with thin elastic inclusions // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2023. V. 46. №13. P. 14214–14228.
9. Горячева И.Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036–1044.
10. Александров В.М. Двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 307–315.
11. *Goryacheva I., Yakovenko A.* The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // *Tribol. Int.* 2021. V. 161. P. 107078.
12. Золотов Н.Б., Пожарский Д.А. Периодические контактные задачи для полупространства с частично закрепленной границей // ПММ. 2022. Т. 86. №3. С. 394–403.
13. Пожарская Е.Д., Пожарский Д.А., Соболев Б.В. Периодические контактные задачи для клина с учетом сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2023. №5. С. 170–179.
14. *Pozharskaya E.D.* Periodic system of rigid inclusions in a spatial elastic wedge // Тенденции развития науки и образования. 2023. №96. Ч. 9. С. 177–180.
15. Александров В.М., Пожарский Д.А. Задача о включении в трехмерном упругом клине // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 635–646.
16. Александров В.М., Пожарский Д.А. Пространственная задача о тонком включении в составном упругом клине // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 843–849.
17. Пожарский Д.А. Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения. Ростов-на-Дону: ДГТУ-Принт, 2019. 312 с.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Спец. функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
20. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 486 с.

### Systems of Inclusions in a Spatial Elastic Wedge

E.D. Pozharskaya<sup>a</sup>, D.A. Pozharskii<sup>a, #</sup>, B.V. Sobol<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

<sup>#</sup>e-mail: [pozharda@rambler.ru](mailto:pozharda@rambler.ru)

Contact problems are considered for two identical thin rigid elliptic inclusions in a three-dimensional elastic wedge of two-sided angle outer faces of which are subjected to rigid or sliding support. The problems are reduced to integral equations with symmetric kernels. Two dimensionless geometric parameters are introduced to characterize location of the inclusions in the bisecting half-plane of the wedge. Assuming linear connection between the parameters, the regular asymptotic method is used to solve the problems. The asymptotic for two inclusions is compared with corresponding solutions for unit inclusion in the wedge as well as for a periodic chain of inclusions the axis of which is parallel to the wedge edge.

*Keywords:* spatial elastic wedge, inclusions, integral equations

### REFERENCES

1. *Grilitskii D.V., Sulim G.T.* Periodic problem for an elastic plane with thin-walled inclusions // *JAMM*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 494–503.
2. *Grilitskii D.V., Evtushenko A.A., Sulim G.T.* Stress distribution in a strip with a thin elastic inclusion // *JAMM*, 1979, vol. 43, no. 3, pp. 582–589.
3. *Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M.* Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Interlayers. Moscow: Nauka, 1983. 488 p. (in Russian)

4. *Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol B.V.* Thin Stress Concentrators in Elastic Bodies. Moscow: Nauka, 1993. 224 p. (in Russian)
5. *Khudnev A.M.* On thin inclusions in elastic bodies with defects // *ZAMP*, 2019, vol. 70, no. 2, pp. 45.
6. *Popova T.S.* The problem of T-shaped junction of two thin Timoshenko inclusions in a two-dimensional elastic body // *Math. Notes of NEFU*, 2023, vol. 30, no. 2, pp. 40–55. (in Russian)
7. *Khudnev A.M., Rodionov A.A.* Elastic body with thin nonhomogeneous inclusion in non-coercive case // *Math. Mech. Solids.*, 2023, vol. 28, no. 10, pp. 2141–2154.
8. *Khudnev A.M., Fankina I.V.* Noncoercive problems for elastic bodies with thin elastic inclusions // *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023, vol. 46, no. 13, pp. 14214–14228.
9. *Goryacheva I.G.* The periodic contact problem for an elastic half-space // *JAMM*, 1998, vol. 62, no. 6, pp. 959–966.
10. *Aleksandrov V.M.* Doubly periodic contact problems for and elastic layer // *JAMM*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 297–305.
11. *Goryacheva I., Yakovenko A.* The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // *Tribol. Int.*, 2021, vol. 161, pp. 107078.
12. *Zolotov N.B., Pozharskii D.A.* Periodic contact problems for a half-space with a partially fixed boundary // *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 152–159.
13. *Pozharskaya E.D., Pozharskii D.A., Sobol B.V.* Periodic contact problems for a wedge with friction forces taken into account // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1578–1586.
14. *Pozharskaya E.D.* Periodic system of rigid inclusions in a spatial elastic wedge // *Tend. Razvitiya Nauki i Obraz.*, 2023, no. 96, pt. 9, pp. 177–180.
15. *Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A.* The problem of an inclusion in a three-dimensional elastic wedge // *JAMM*, 2002, vol. 66, no. 4, pp. 617–628.
16. *Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A.* The three-dimensional problem of a thin inclusion in a composite elastic wedge // *JAMM*, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 589–594.
17. *Pozharskii D.A.* Fundamental Solutions of Elastic Wedge Statics and Applications. Rostov-on-Don: DGTU-Print, 2019. 312 p. (in Russian)
18. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 1. Elementary Functions. N.Y.: Gordon&Breach Sci. Pub., 1986. 798 p.
19. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 2. Special Functions. N.Y.: Gordon&Breach Sci. Pub., 1986. 750 p.
20. *Gel'fand I.M., Shilov G.E.* Generalized Functions and Actions on Them. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 486 p. (in Russian)