

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 88, вып. 4



НАУКА
— 1727 —

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 88. Iss. 4

EDITORIAL BOARD

I. G. Goryacheva (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

V. G. Baydulov (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)

J. Awrejcewicz (Professor, Politechnika Łódzka, Łódz, Poland),

N. N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F. M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),

A. B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),

A. M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),

M. L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),

Ju. D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),

A. A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),

A. M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia),

V. V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),

A. M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),

Yu. Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

N. F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),

T. J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),

F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,
Technische Universität München, Munich, Germany),

V. V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),

G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),

S. A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V. A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),

Ye. I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F. E. Udvardia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),

S. E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

V. F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N. I. Amelkin, I. M. Anan'evskii, A. S. Andreev, V. A. Babeshko,
A. M. Formalskii, Yu. P. Gupalo, A. P. Ivanov, A. N. Kraiko, A. P. Markeep, S. A. Nazarov,
S. V. Nesterov, V. S. Patsko, A. G. Petrov, N. N. Rogacheva, V. V. Sazonov, A. P. Seyranian,
I. A. Soldatenkov, S. Ya. Stepanov, V. N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

July–August

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В. Г. Байдулов — отв. секретарь

Е. В. Есина — зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте [Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU](http://eLIBRARY.RU) доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала «Прикладная математика и механика» в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V. G. Baydulov — executive secretary

E. V. Esina — head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Памяти Никиты Федоровича Морозова (28.07.1932–25.07.2024)	509
О движении материальной точки по неподвижной эллипсоидальной поверхности <i>А. П. Маркеев</i>	511
Гашение продольных колебаний упругого стержня с помощью пьезоэлектрического элемента <i>Г. В. Костин</i>	525
О движении механических систем в силовых полях, как движении в их отсутствии при наложении связей <i>Е. С. Брискин</i>	540
Нелинейная стохастическая оценка навигационных параметров антенны подвижного радиотехнического комплекса по инерциально-спутниковым измерениям <i>С. В. Соколов, В. А. Погорелов, И. В. Решетникова</i>	549
Математические методы моделирования аномалий ветровых волн на поверхности океана <i>Д. Ю. Князьков, А. С. Шамаев</i>	567
О физических закономерностях реализации неустойчивости заряженных сфероидальных капель <i>А. И. Григорьев, С. О. Ширяева</i>	583
Моделирование осесимметричной формы равновесной капли, покоящейся на идеально гладком горизонтальном основании <i>А. П. Янковский</i>	594
Кинетический вязкий ударный слой около вращающегося острого конуса <i>А. Л. Анкудинов</i>	622
Задача одностороннего дискретного контакта для стратифицированной упругой полосы <i>А. А. Бобылев</i>	630

CONTENTS

In Memory of N. Ph. Morozov (28.07.1932–25.07.2024)	509
On the Motion of a Material Point on a Fixed Ellipsoidal Surface <i>A. P. Markeev</i>	511
Damping of Longitudinal Vibrations of an Elastic Rod by a Piezoelectric Element <i>G. V. Kostin</i>	525
On the Motion of Mechanical Systems in Force Fields, as Motion in Their Absence when Connections Are Applied <i>E. S. Briskin</i>	540
Nonlinear Stochastic Estimation of the Navigation Parameters of the Antenna of a Mobile Radio Engineering Complex by Inertial-Satellite Measurements <i>S. V. Sokolov, V. A. Pogorelov, I. V. Reshetnikova</i>	549
Mathematical Methods for Modeling Wind Wave Anomalies on the Ocean Surface <i>D. Yu. Knyazkov, A. S. Shamaev</i>	567
On the Physical Regularities of the Instability of Charged Spheroidal Droplets <i>A. I. Grigoriev, S. O. Shiryayeva</i>	583
Modeling of an Axisymmetric Shape of an Equilibrium Drop Resting on a Horizontal Plane <i>A. P. Yankovskii</i>	594
Kinetic Viscous Shock Layer Near a Rotating Sharp Cone <i>A. L. Ankudinov</i>	622
A Unilateral Discrete Contact Problem for a Stratified Elastic Strip <i>A. A. Bobylev</i>	630



ПАМЯТИ НИКИТЫ ФЕДОРОВИЧА МОРОЗОВА

(28.07.1932 – 25.07.2024)

25 июля 2024 года ушел из жизни Никита Федорович Морозов, академик РАН, выдающийся российский ученый, заслуженный деятель науки РФ, многолетний член редколлегии журнала «Прикладная математика и механика».

Никита Федорович – признанный во всем мире ученый, обогативший науку ставшими классическими результатами в математической теории упругости, нелинейной теории пластин и оболочек, динамического разрушения и поддерживавший и определявший развитие самых передовых направлений механики, в том числе междисциплинарных. В 2000 году за цикл работ по нелинейным проблемам механики деформируемого твердого тела ему присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники. В 2017 году был награжден медалью Блеза Паскаля Европейской академии наук.

Он был замечательным педагогом, создавшим авторитетную в стране научную школу ленинградских-петербургских механиков. С 1976 года Н.Ф. Морозов заведовал кафедрой теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета, руководство которой с момента ее создания осуществляли выдающиеся меха-

ники Г.В. Колосов, Е.Л. Николаи, С.Г. Лехницкий, В.И. Смирнов, А.А. Ильюшин, В.В. Новожилов, Л.М. Качанов. Многие годы он являлся научным советником РАН в ИПМаш РАН.

Общественно-научная деятельность Н.Ф. Морозова была обширна и многогранна. Он являлся вице-председателем Национального комитета России по теоретической и прикладной механике, председателем Научного Совета РАН по механике деформируемого твердого тела, членом Генеральной ассамблеи IUTAM, членом редакций ведущих отечественных и зарубежных журналов по механике.

Активная научно-педагогическая деятельность Н.Ф. Морозова была отмечена правительственными наградами: орденом Почета, орденом «За заслуги перед Отечеством» IV степени, орденом Дружбы, орденом Александра Невского. Первую правительственную награду – медаль «За оборону Ленинграда» – получил в возрасте 11 лет в годы Великой Отечественной войны за активное участие в тушении пожаров в блокадном Ленинграде.

Никиту Федоровича Морозова отличали энергия, увлеченность наукой, гражданская ответственность, способность самозабвенно трудиться и организовывать других, доброжелательность, доступность в общении и готовность всегда прийти на помощь.

Светлая память о Никите Федоровиче навсегда останется в сердцах коллег, учеников, друзей и близких.

УДК 531.36

О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО НЕПОДВИЖНОЙ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2024 А. П. Маркеев^{1,*}¹Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

*e-mail: anat-markeev@mail.ru

Поступила в редакцию 27.05.2024 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 20.07.2024 г.

Исследована нелинейная динамика точки, которая во все время движения остается на внутренней части абсолютно гладкой поверхности неподвижного трехосного эллипсоида. Движение происходит в однородном поле тяжести, наибольшая из осей эллипсоида направлена вдоль вертикали. Основное внимание уделяется движениям точки вблизи ее устойчивого положения равновесия в наинизшей точке поверхности эллипсоида, лежащей на его вертикальной оси. Дано качественное описание условно-периодических колебаний точки, указана оценка меры множества начальных условий, отвечающих этим колебаниям. В резонансном случае, когда отношение частот малых линейных колебаний равно двум, исследованы периодические движения точки: рассмотрен вопрос об их существовании, устойчивости и геометрическом представлении.

Ключевые слова: консервативная система, устойчивость, условно-периодические и периодические колебания

DOI: 10.31857/S0032823524040017, EDN: WWSDJG

Современные технические устройства зачастую содержат в себе элементы малых размеров, движущиеся по неподвижным (или медленно перемещающимся в пространстве) поверхностям, являющимися частью устройства.

В статье исследуется движение материальной точки по неподвижной абсолютно гладкой поверхности в однородном поле тяжести. Предполагается, что поверхность является частью поверхности трехосного эллипсоида, одна из осей которого вертикальна.

Существует устойчивое положение равновесия, когда материальная точка покоится в лежащей на этой оси наинизшей точке поверхности. Основное внимание в статье уделяется анализу нелинейных колебаний (условно-периодических и периодических) точки в окрестности этого устойчивого положения равновесия. Анализ осуществляется при помощи современных методов и алгоритмов аналитического и численного исследования динамических систем, описываемых уравнениями Гамильтона [1–5].

1. Введение. Функция Гамильтона. Пусть материальная точка весом mg движется в однородном поле тяжести, все время оставаясь на внутренней части неподвижной абсолютно гладкой эллипсоидальной поверхности

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 (a < b < c) \quad (1.1)$$

Ось $O\zeta$ направлена вверх. Предполагается, что движение происходит в области $-c \leq \zeta < 0$, поэтому координаты ξ, η, ζ точки удовлетворяют уравнению

$$\zeta = -c \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} \quad (1.2)$$

Потенциальная и кинетическая энергии вычисляются по формулам

$$\Pi = mg\zeta, T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) \quad (\dot{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \dot{\eta}), \quad (1.3)$$

где точкой обозначена производная по времени t .

Существует очевидное положение равновесия $\xi = \eta = 0, \zeta = -c$. По теореме Лагранжа это положение равновесия устойчиво, так как в нем потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум [6]. Цель статьи состоит в исследовании нелинейных колебаний точки вблизи этого положения равновесия.

Рассматриваемая механическая система является консервативной и имеет две степени свободы. Величины ξ, η – обобщенные координаты, а соответствующие обобщенные импульсы задаются равенствами

$$p_\xi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}, p_\eta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}}$$

Найдя отсюда величины $\dot{\xi}, \dot{\eta}$ как функции ξ, η, p_ξ, p_η и подставив их в выражение $T + \Pi$, получим функцию Гамильтона $H(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta)$. Уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\eta}, \frac{dp_\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \frac{dp_\eta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}$$

Для удобства дальнейших вычислений целесообразно получить уравнения движения в безразмерной форме. Для этого сделаем каноническое (с валентностью $1 / (mc\sqrt{gc})$) преобразование [6, 7] $\xi, \eta, p_\xi, p_\eta \rightarrow q_1, q_2, p_1, p_2$ по формулам

$$\xi = \sqrt{ac}q_1, \eta = \sqrt{bc}q_2, p_\xi = mc\sqrt{\frac{g}{a}}p_1, p_\eta = mc\sqrt{\frac{g}{b}}p_2$$

и введем еще безразмерное время $\tau = \sqrt{g / ct}$.

Несложные выкладки показывают, что в новых переменных уравнения движения примут вид

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2), \quad (1.4)$$

где

$$H = \frac{\omega_1[1 - \omega_1 q_1^2 + \omega_2(\omega_2^2 - 1)q_2^2]p_1^2 - 2\omega_1^2\omega_2^2 q_1 q_2 p_1 p_2 + \omega_2[1 - \omega_2 q_2^2 + \omega_1(\omega_1^2 - 1)q_1^2]p_2^2}{2[1 + \omega_1(\omega_1^2 - 1)q_1^2 + \omega_2(\omega_2^2 - 1)q_2^2]} - \sqrt{1 - \omega_1 q_1^2 - \omega_2 q_2^2} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\omega_1 = \frac{c}{a}, \omega_2 = \frac{c}{b} \quad (\omega_1 > \omega_2 > 1) \quad (1.6)$$

Величины (1.6) – это отвечающие безразмерному времени τ частоты малых линейных колебаний в окрестности изучаемого равновесия $\xi = \eta = 0$, $\zeta = -c$ которому в новых переменных соответствует решение $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ уравнений (1.4).

Отметим, что функция Гамильтона (1.5) не изменяется, если индексы входящих в нее величин поменять местами, т.е.

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2; \omega_1, \omega_2) \equiv H(q_2, q_1, p_2, p_1; \omega_2, \omega_1) \quad (1.7)$$

Вблизи решения $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ функция Гамильтона (1.5) представима в виде сходящегося ряда по формам четных степеней:

$$H = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2) + \sum_{s=2}^{\infty} H_{2s}, \quad H_{2s} = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2s} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \quad (1.8)$$

В разложении (1.8) величина $H_0 = -1$, равная значению функции H на решении $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$, отброшена.

Из 35-ти коэффициентов формы H_4 отличны от тождественного нуля только следующие 6 коэффициентов:

$$h_{4000} = \frac{1}{8}\omega_1^2, \quad h_{2200} = \frac{1}{4}\omega_1\omega_2, \quad h_{2020} = -\frac{1}{2}\omega_1^4 \quad (1.9)$$

$$h_{1111} = -\omega_1^2\omega_2^2, \quad h_{0400} = \frac{1}{8}\omega_2^2, \quad h_{0202} = -\frac{1}{2}\omega_2^4$$

Из 84-х коэффициентов формы H_6 отличны от нуля только 10 коэффициентов:

$$\begin{aligned} h_{6000} &= \frac{1}{16}\omega_1^3, \quad h_{4200} = \frac{3}{16}\omega_1^2\omega_2, \quad h_{4020} = \frac{1}{2}\omega_1^5(\omega_1^2 - 1), \quad h_{3111} = \omega_1^3\omega_2^2(\omega_1^2 - 1) \\ h_{2220} &= \frac{1}{2}\omega_1^4\omega_2(\omega_2^2 - 1), \quad h_{2202} = \frac{1}{2}\omega_1\omega_2^4(\omega_1^2 - 1), \quad h_{2400} = \frac{3}{16}\omega_1\omega_2^2 \\ h_{1311} &= \omega_1^2\omega_2^3(\omega_2^2 - 1), \quad h_{0402} = \frac{1}{2}\omega_2^5(\omega_2^2 - 1), \quad h_{0600} = \frac{1}{16}\omega_2^3 \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. О нормальной форме функции Гамильтона возмущенного движения. Вместо переменных q_j, p_j ($j = 1, 2$) введем новые канонически сопряженные переменные Q_j, P_j при помощи близкого к тождественному канонического преобразования, задаваемого неявно формулами [3,4,6]

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad (j = 1, 2), \quad (2.1)$$

где

$$S = q_1 P_1 + q_2 P_2 + S_4(q_1, q_2, P_1, P_2) + S_6(q_1, q_2, P_1, P_2) \quad (2.2)$$

$$S_{2k} = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2k} s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \quad (k = 2, 3)$$

Из (2.1), (2.2) следует, что q_j, p_j выражаются через новые переменные Q_j, P_j при помощи сходящихся рядов по степеням Q_1, Q_2, P_1, P_2 :

$$q_j = Q_j - \frac{\partial S_4^*}{\partial P_j} + \frac{\partial^2 S_4^*}{\partial P_j \partial Q_1} \frac{\partial S_4^*}{\partial P_1} + \frac{\partial^2 S_4^*}{\partial P_j \partial Q_2} \frac{\partial S_4^*}{\partial P_2} - \frac{\partial S_6^*}{\partial P_j} + O_7 \quad (j = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$p_j = P_j + \frac{\partial S_4^*}{\partial Q_j} - \frac{\partial^2 S_4^*}{\partial Q_j \partial Q_1} \frac{\partial S_4^*}{\partial P_1} - \frac{\partial^2 S_4^*}{\partial Q_j \partial Q_2} \frac{\partial S_4^*}{\partial P_2} + \frac{\partial S_6^*}{\partial Q_j} + O_7 \quad (j = 1, 2) \quad (2.4)$$

Здесь S_{2k}^* – функции S_{2k} из (2.2), в которых q_1, q_2 заменены на Q_1, Q_2 :

$$S_{2k}^* = S_{2k}(Q_1, Q_2, P_1, P_2), \quad (2.5)$$

через O_n здесь и далее обозначается совокупность членов не ниже n -й степени относительно Q_1, Q_2, P_1, P_2 .

Подставив выражения (2.3), (2.4) в функцию Гамильтона (1.8) и подобрав надлежащим образом коэффициенты $s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}$ форм S_4 и S_6 , можно упростить (нормализовать) формы четвертой и шестой степеней в новой функции Гамильтона. При этом существенно наличие резонансов $k_1 \omega_1 = k_2 \omega_2$, где ω_1 и ω_2 задаются равенствами (1.6), а k_1, k_2 – натуральные числа, причем $k_2 > k_1$. Число $k_1 + k_2$ – порядок резонанса.

1. Так как разложение функции Гамильтона в ряд (1.8) не содержит форм нечетных степеней, а сумма показателей $\nu_1 + \mu_1$ и $\nu_2 + \mu_2$ в любом из членов ряда есть четное число, то все резонансы до пятого порядка включительно ($\omega_1 = 2\omega_2$, $\omega_1 = 3\omega_2$, $\omega_1 = 4\omega_2$, $2\omega_1 = 3\omega_2$) не препятствуют приведению функции (1.8) к нормальной форме вида

$$H = H^{(0)}(r_1, r_2) + O_6, \quad H^{(0)} = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2, \quad (2.6)$$

где

$$Q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad P_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad (j = 1, 2) \quad (2.7)$$

Вычисления по подробно описанному в статье [8] алгоритму нормализации консервативной системы показывают, что форма S_4^* содержит только 8 одночленов $s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}(\omega_1, \omega_2) Q_1^{\nu_1} Q_2^{\nu_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2}$. При этом, ввиду свойства (1.7) исходной функции Гамильтона, коэффициенты одночленов удовлетворяют такому свойству симметрии:

$$s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}(\omega_1, \omega_2) \equiv s_{\nu_2 \nu_1 \mu_2 \mu_1}(\omega_2, \omega_1) \quad (2.8)$$

Четыре из коэффициентов формы S_4^* задаются формулами

$$s_{3010} = \frac{1}{64} \omega_1 (5 + 4\omega_1^2), \quad s_{2101} = \frac{\omega_1 (\omega_1^2 - 2\omega_2^2 + 4\omega_1^2 \omega_2^2)}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

$$s_{1012} = -\frac{\omega_2^3 (1 - 4\omega_1^2)}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad s_{1030} = \frac{1}{64} \omega_1 (3 - 4\omega_1^2), \quad (2.9)$$

а оставшиеся четыре коэффициента $s_{0301}, s_{1210}, s_{0121}, s_{0103}$ находятся из (2.8), (2.9).

Коэффициенты c_{ij} нормальной формы (2.6) определяются следующими равенствами:

$$c_{20} = \frac{1}{16} \omega_1^2 (3 - 4\omega_1^2), \quad c_{11} = \frac{1}{4} \omega_1 \omega_2, \quad c_{02} = \frac{1}{16} \omega_2^2 (3 - 4\omega_2^2) \quad (2.10)$$

2. При нормализации функции (1.8) до членов седьмой степени включительно из резонансов шестого и седьмого порядков ($\omega_1 = 5\omega_2$, $\omega_1 = 6\omega_2$, $2\omega_1 = 3\omega_2$, $2\omega_1 = 4\omega_2$, $2\omega_1 = 5\omega_2$, $3\omega_1 = 4\omega_2$) важен только резонанс $2\omega_1 = 4\omega_2$. На самом деле это резонанс третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$. Но его наличие, как замечено выше, не повлияло на функцию S_4^* и нормальную форму (2.6).

Если $\omega_1 \neq 2\omega_2$, то нормальная форма функции (1.8) имеет вид

$$H = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + c_{30} r_1^3 + c_{21} r_1^2 r_2 + c_{12} r_1 r_2^2 + c_{03} r_2^3 + O_8 \quad (2.11)$$

Коэффициенты c_{20}, c_{11}, c_{02} задаются формулами (2.10), а

$$c_{30} = \frac{1}{256} \omega_1^3 (48\omega_1^4 - 72\omega_1^2 + 23), c_{21} = \frac{\omega_1^2 \omega_2 (16\omega_1^4 \omega_2^2 + 8\omega_1^2 \omega_2^2 - 16\omega_1^4 + 10\omega_1^2 - 9\omega_2^2)}{64(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

$$c_{12} = \frac{\omega_1 \omega_2^2 (16\omega_1^2 \omega_2^4 + 8\omega_1^2 \omega_2^2 - 16\omega_2^4 + 10\omega_2^2 - 9\omega_1^2)}{64(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, c_{03} = \frac{1}{256} \omega_2^3 (48\omega_2^4 - 72\omega_2^2 + 23) \quad (2.12)$$

При этом форма S_4^* определяется, как и выше, равенствами (2.8) и (2.9), а форма S_6^* содержит 20 одночленов и представима в виде

$$S_6^* = \frac{R_6}{24576(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 (\omega_1^2 - 4\omega_2^2)^2 (4\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}, \quad (2.13)$$

где

$$R_6 = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 6} r_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}(\omega_1, \omega_2) Q_1^{\nu_1} Q_2^{\nu_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2}, r_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}(\omega_1, \omega_2) \equiv r_{\nu_2 \nu_1 \mu_2 \mu_1}(\omega_2, \omega_1) \quad (2.14)$$

Выпишем выражения для 10-ти из коэффициентов формы R_6 (остальные 10 находятся при помощи второго из соотношений (2.14)):

$$r_{5010} = 3\omega_1^2 [1100\omega_2^8 + (-6875 + 1248\omega_2^2)\omega_2^6\omega_1^2 + 10(1155 - 780\omega_2^2 - 32\omega_2^4)\omega_2^4\omega_1^4 + (-6875 + 13104\omega_2^2 + 2000\omega_2^4)\omega_2^2\omega_1^6 + 20(55 - 390\omega_2^2 - 168\omega_2^4)\omega_1^8 + 16(78 + 125\omega_2^2)\omega_1^{10} - 320\omega_1^{12}]$$

$$r_{4101} = 48\omega_1^2 [144\omega_2^8 - 36(21 + 16\omega_2^2)\omega_2^6\omega_1^2 + 40(23 + 62\omega_2^2 + 8\omega_2^4)\omega_2^4\omega_1^4 - (409 + 2056\omega_2^2 + 1360\omega_2^4)\omega_2^2\omega_1^6 + 8(7 + 70\omega_2^2 + 40\omega_2^4)\omega_1^8 - 48\omega_1^{10}]$$

$$r_{3210} = 24\omega_1 [204\omega_2^9 + \omega_2^7(-1551 + 1216\omega_2^2)\omega_1^2 + \omega_2^5(3255 - 5424\omega_2^2 - 448\omega_2^4)\omega_1^4 + 144\omega_2^3(-15 + 36\omega_2^2 + 11\omega_2^4)\omega_1^6 + 8\omega_2(45 - 266\omega_2^2 + 114\omega_2^4)\omega_1^8 - 32\omega_2(-9 + 10\omega_2^2)\omega_1^{10}]$$

$$r_{3030} = 2\omega_1^2 [1796\omega_2^8 - \omega_2^6(11225 + 5088\omega_2^2)\omega_1^2 + 2\omega_2^4(9429 + 15900\omega_2^2 + 1568\omega_2^4)\omega_1^4 - \omega_2^2(11225 + 53424\omega_2^2 + 19600\omega_2^4)\omega_1^6 + 4(449 + 7950\omega_2^2 + 8232\omega_2^4)\omega_1^8 - 16(318 + 1225\omega_2^2)\omega_1^{10} + 3136\omega_1^{12}]$$

$$r_{3012} = 24\omega_1 \omega_2^3 [2\omega_1^6(-37 + 164\omega_1^2 + 32\omega_1^4) + 9\omega_1^4(49 - 240\omega_1^2 + 48\omega_1^4)\omega_2^2 - 3\omega_1^2(205 - 1208\omega_1^2 + 976\omega_1^4)\omega_2^4 + 4(35 - 232\omega_1^2 + 176\omega_1^4)\omega_2^6]$$

$$r_{2103} = 24\omega_1 \omega_2 [60\omega_1^8 + \omega_1^6(-427 + 128\omega_1^2)\omega_2^2 - \omega_1^4(-1175 + 1184\omega_1^2 + 448\omega_1^4)\omega_2^4 + 4\omega_1^2(-235 + 8\omega_1^2 + 524\omega_1^4)\omega_2^6 + 8(21 + 120\omega_1^2 - 158\omega_1^4)\omega_2^8 + 32(-7 + 6\omega_1^2)\omega_2^{10}]$$

$$r_{2121} = 48 [16\omega_2^{10} - 4\omega_2^8(17 + 32\omega_2^2)\omega_1^2 + 4\omega_2^6(-87 + 404\omega_2^2 + 64\omega_2^4)\omega_1^4 - \omega_2^4(-1007 + 2668\omega_2^2 + 2048\omega_2^4)\omega_1^6 + \omega_2^2(-661 + 104\omega_2^2 + 4656\omega_2^4)\omega_1^8 + 4(27 + 205\omega_2^2 - 580\omega_2^4)\omega_1^{10} + 16(-11 + 20\omega_2^2)\omega_1^{12}]$$

$$r_{1014} = 48\omega_2^4 [12(-1 + 4\omega_1^2)\omega_1^6 - \omega_1^4(-195 + 524\omega_1^2 + 256\omega_1^4)\omega_2^2 + 48\omega_1^2(-4 + \omega_1^2 + 24\omega_1^4)\omega_2^4 + 12(3 + 23\omega_1^2 - 44\omega_1^4)\omega_2^6 + 64(-1 + \omega_1^2)\omega_2^8]$$

$$r_{1050} = 3\omega_1^2 [332\omega_2^8 - \omega_2^6(2075 + 1056\omega_2^2)\omega_1^2 + 2\omega_2^4(1743 + 3300\omega_2^2 + 352\omega_2^4)\omega_1^4 - \omega_2^2(2075 + 11088\omega_2^2 + 4400\omega_2^4)\omega_1^6 + 4(83 + 1650\omega_2^2 + 1848\omega_2^4)\omega_1^8 - 16(66 + 275\omega_2^2)\omega_1^{10} + 704\omega_1^{12}]$$

$$r_{032} = 24\omega_1\omega_2^3[2\omega_1^6(-31 + 92\omega_1^2 + 32\omega_1^4) - \omega_1^4(-337 + 1040\omega_1^2 + 80\omega_1^4)\omega_2^2 - \omega_1^2(371 - 1240\omega_1^2 + 752\omega_1^4)\omega_2^4 + 12(5 - 8\omega_1^2 + 16\omega_1^4)\omega_2^6] \quad (2.15)$$

3. При резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$ к нормальной форме (2.11) добавится слагаемое (резонансный член) вида $\alpha_{12}r_1r_2^2 \cos(2\varphi_1 - 4\varphi_2)$. При этом, как показывают несложные вычисления, коэффициенты нормальной формы будут такими:

$$c_{20} = \frac{1}{4}\omega_2^2(3 - 16\omega_2^2), c_{11} = \frac{1}{2}\omega_2^2, c_{02} = \frac{1}{16}\omega_2^2(3 - 4\omega_2^2) \quad (2.16)$$

$$c_{30} = \frac{1}{32}\omega_2^3(768\omega_2^4 - 288\omega_2^2 + 23), c_{21} = \frac{1}{48}\omega_2^3(256\omega_2^4 - 224\omega_2^2 + 31) \quad (2.17)$$

$$c_{12} = -\frac{1}{48}\omega_2^3(32\omega_2^4 + 8\omega_2^2 - 13), c_{03} = \frac{1}{256}\omega_2^3(48\omega_2^4 - 72\omega_2^2 + 23)$$

$$\alpha_{12} = \frac{3}{64}\omega_2^3(12\omega_2^2 - 1) \quad (2.18)$$

Функции S_4^* и S_6^* в нормализующей замене переменных (2.3), (2.4) имеют следующий вид:

$$S_4^* = \frac{1}{32}\omega_2(16\omega_2^2 + 5)Q_1^3P_1 - \frac{1}{48}\omega_2(16\omega_2^2 - 7)Q_1Q_2^2P_1 - \frac{1}{32}\omega_2(16\omega_2^2 - 3)P_1^3Q_1 + \\ + \frac{1}{48}\omega_2(16\omega_2^2 - 1)P_2^2Q_1P_1 - \frac{1}{6}\omega_2(4\omega_2^2 - 1)P_1^2P_2Q_2 + \frac{1}{12}\omega_2(8\omega_2^2 + 1)Q_1^2Q_2P_2 + \\ + \frac{1}{64}\omega_2(4\omega_2^2 + 5)Q_2^3P_2 - \frac{1}{64}\omega_2(4\omega_2^2 - 3)Q_2P_2^3 \quad (2.19)$$

$$S_6^* = \frac{1}{9216}\omega_2^2(1664\omega_2^4 - 940\omega_2^2 + 401)P_2^3Q_2P_1^2 - \frac{1}{480}\omega_2^2(364\omega_2^2 - 43)Q_2P_2P_1^4 + \\ + \frac{1}{23040}\omega_2^2(6400\omega_2^4 - 16256\omega_2^2 + 2287)Q_1Q_2^2P_1^3 + \frac{1}{23040}\omega_2^2(8960\omega_2^4 + 2336\omega_2^2 - 217)Q_1P_1^3P_2^2 + \\ + \frac{1}{1024}\omega_2^2(640\omega_2^4 - 692\omega_2^2 + 103)P_2P_1^2Q_2^3 - \frac{1}{6144}\omega_2^2(1280\omega_2^4 - 636\omega_2^2 + 73)P_2^4Q_1P_1 - \\ - \frac{1}{7680}\omega_2^2(11520\omega_2^4 - 3392\omega_2^2 - 1441)Q_1^3Q_2^2P_1 + \frac{1}{7680}\omega_2^2(6400\omega_2^4 + 928\omega_2^2 - 71)P_2^2Q_1^3P_1 + \\ + \frac{1}{18432}\omega_2^2(5120\omega_2^4 - 6652\omega_2^2 + 1577)Q_2^4Q_1P_1 - \frac{1}{9216}\omega_2^2(3200\omega_2^4 - 1468\omega_2^2 - 67)P_2^3Q_1^2Q_2 - \\ - \frac{1}{3072}\omega_2^2(1408\omega_2^4 - 2508\omega_2^2 - 199)Q_2^3Q_1^2P_2 + \frac{1}{1440}\omega_2^2(1600\omega_2^4 + 208\omega_2^2 + 109)Q_2Q_1^4P_2 - \\ - \frac{1}{8192}\omega_2^2(80\omega_2^4 - 312\omega_2^2 - 275)Q_2^5P_2 + \frac{1}{12288}\omega_2^2(784\omega_2^4 - 1272\omega_2^2 + 449)Q_2^3P_2^3 + \\ + \frac{1}{2048}\omega_2^2(2816\omega_2^4 - 1056\omega_2^2 + 83)Q_1P_1^5 + \frac{1}{3072}\omega_2^2(12544\omega_2^4 - 5088\omega_2^2 + 449)P_1^3Q_1^3 + \\ + \frac{1}{8192}\omega_2^2(176\omega_2^4 - 264\omega_2^2 + 83)Q_2P_2^5 + \frac{1}{1024}\omega_2^2(128\omega_2^4 + 108\omega_2^2 + 51)P_2^2Q_2^2Q_1P_1 + \\ + \frac{1}{1920}\omega_2^2(2560\omega_2^4 - 3344\omega_2^2 + 403)P_2Q_2P_1^2Q_1^2 - \frac{1}{2048}\omega_2^2(1280\omega_2^4 - 1248\omega_2^2 - 275)Q_1^5P_1 \quad (2.20)$$

3. О невырожденности и изоэнергетической невырожденности системы с функцией Гамильтона (2.6). В рассматриваемой нами задаче о движении точки по поверхности (1.1) функция (2.6) является функцией Гамильтона общего эллиптического типа,

т.е. [1] в окрестности равновесия $r_1 = r_2 = 0$ система с этой функцией Гамильтона является невырожденной или изоэнергетически невырожденной. Система будет невырожденной, если отличен от нуля определитель второго порядка

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2^2} \end{vmatrix} = 4c_{20}c_{02} - c_{11}^2 \quad (3.1)$$

А когда отличен от нуля определитель третьего порядка

$$D_3 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} & \omega_1 \\ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2^2} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{vmatrix} = -2(c_{20}\omega_2^2 - c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2), \quad (3.2)$$

то система будет изоэнергетически невырожденной.

Для проверки выполнения условий невырожденности и изоэнергетической невырожденности удобно ввести обозначения $a = \sqrt{xc}$, $b = \sqrt{yc}$. Из (1.6) следует, что в плоскости x, y область допустимых значений безразмерных параметров x, y представляет собой (см. рис. 1) внутренность прямоугольного треугольника с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$:

$$0 < x < y < 1 \quad (3.3)$$

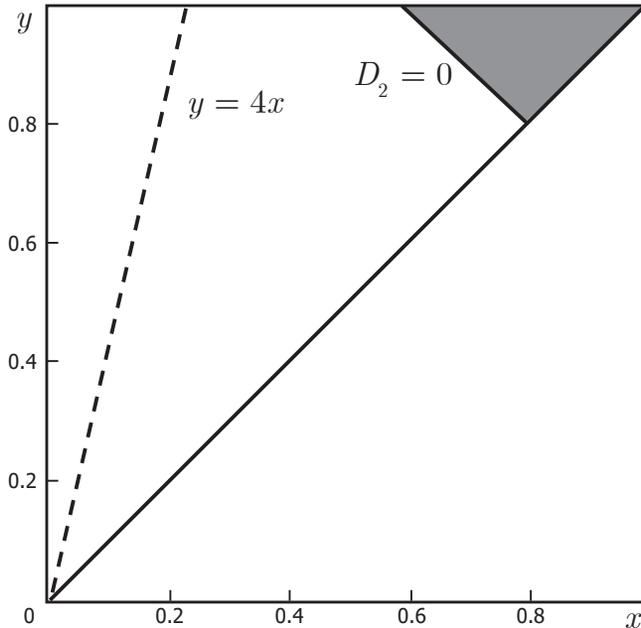


Рис. 1

В области (3.3) выражения (1.6) для частот принимают вид

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (3.4)$$

Из (3.4), (3.1) и (2.10) получаем

$$D_2 = \frac{y(5x - 12) - 4(3x - 4)}{64x^2y^2} \quad (3.5)$$

На рис.1 показана часть кривой $D_2 = 0$, лежащая в треугольнике (3.3). Она является участком гиперболы

$$y = \frac{4(3x - 4)}{(5x - 12)} \quad (3.6)$$

Граничными точками этого участка являются точки (4/7,1) и (4/5,4/5). Область $D_2 < 0$ на рис. 1 выделена серым цветом. Штриховой линией в области $D_2 > 0$ показана прямая $y = 4x$. На ней имеет место резонанс третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$. При этом резонансе полуоси эллипсоида (1.1) связаны равенством $b = 2a$.

Для определителя D_3 из (3.2), (3.4) и (2.10) имеем выражение

$$D_3 = \frac{y(2 - x) + 2x}{4x^2y^2} \quad (3.7)$$

Всюду в области (3.3) величина $D_3 > 0$.

4. Условно-периодические колебания. Общее решение системы дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона $H^{(0)}$ из (2.6) записывается в виде

$$Q_j = \sqrt{2r_{j0}} \sin \varphi_j, P_j = \sqrt{2r_{j0}} \cos \varphi_j, \varphi_j = \Omega_j \tau + \varphi_{j0} \quad (j = 1, 2) \quad (4.1)$$

$$\Omega_1 = \omega_1 + 2c_{20}r_{10} + c_{11}r_{20}, \Omega_2 = \omega_2 + c_{11}r_{10} + 2c_{02}r_{20}, \quad (4.2)$$

где r_{j0}, φ_{j0} – начальные значения величин r_j, φ_j , а ω_1, ω_2 и c_{ij} вычисляются по формулам (1.6) и (2.10) соответственно.

Если нет резонансов $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$, то при малых r_{10}, r_{20} движения в системе с функцией $H^{(0)}$ будут условно-периодическими с рационально независимыми частотами (4.2).

Так как (см. разд. 3) функция (2.6) является функцией Гамильтона общего эллиптического типа, то, согласно КАМ-теории [1], движения в системе с функцией (2.6) для большинства начальных условий r_{10}, r_{20} будут условно-периодическими с частотами (4.2). Множество начальных условий, не принадлежащих этому большинству, имеет малую меру: в окрестности $r_1 + r_2 < \mu$ его относительная мера имеет порядок $\mu^{1/2}$ [1, 9].

Значения координат ξ, η, ζ движущейся материальной точки можно получить с погрешностью O_7 из (1.2), равенств $\xi = \sqrt{acq_1}, \eta = \sqrt{bcq_2}$, формул замены (2.3), (2.4), формул (2.8), (2.9) и (2.13)–(2.15) для функций S_4^* и S_6^* и выражений (2.10), (2.12) для коэффициентов нормальной формы (2.11).

В качестве конкретного примера рассмотрим случай движения точки по эллипсоидальной поверхности (1.2), у которой $c = 2\sqrt{2}a = 2b$. В этом случае $\omega_1 = 2\sqrt{2}$, $\omega_2 = 2$,

$$S_4^* = \frac{37\sqrt{2}}{32} Q_1^3 P_1 - \frac{29}{8} Q_1 Q_2^2 P_1 - \frac{29\sqrt{2}}{32} P_1^3 Q_1 + \frac{31}{8} P_2^2 Q_1 P_1 - \\ - \frac{15\sqrt{2}}{4} P_1^2 P_2 Q_2 + 4\sqrt{2} Q_1^2 Q_2 P_2 + \frac{21}{32} Q_2^3 P_2 - \frac{13}{32} Q_2 P_2^3 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
S_6^* = & -\frac{2349}{1024}P_1Q_1^5 + \frac{243}{2048}P_2Q_2^5 + \frac{1137}{14}P_2Q_1^4Q_2 + \frac{4187}{128}Q_1Q_2^4P_1 - \\
& -\frac{115909\sqrt{2}}{1792}Q_1^3Q_2^2P_1 - \frac{3837\sqrt{2}}{128}Q_1^2Q_2^3P_2 + \frac{13483}{512}Q_1^3P_1^3 + \frac{2635}{1024}Q_2^3P_2^3 + \\
& + \frac{91927\sqrt{2}}{1792}Q_1^3P_1P_2^2 + \frac{2523\sqrt{2}}{64}Q_2^3P_1^2P_2 - \frac{2035\sqrt{2}}{128}Q_1^2Q_2P_2^3 - \frac{14641\sqrt{2}}{1792}Q_1Q_2^2P_1^3 - \\
& - \frac{1429}{28}Q_1^2Q_2P_1^2P_2 - \frac{5225}{128}Q_1Q_2^2P_1P_2^2 - \frac{353}{16}P_1Q_1P_2^4 - \frac{7869}{224}P_1^4Q_2P_2 + \\
& + \frac{9235}{1024}Q_1P_1^5 + \frac{1843}{2048}Q_2P_2^5 + \frac{36971\sqrt{2}}{1792}Q_1P_1^3P_2^2 + \frac{291\sqrt{2}}{32}Q_2P_1^2P_2^3, \quad (4.4)
\end{aligned}$$

а коэффициенты нормальной формы (2.11) имеют такие значения:

$$c_{20} = -\frac{29}{2}, c_{11} = \sqrt{2}, c_{02} = -\frac{13}{4} \quad (4.5)$$

$$c_{30} = \frac{2519\sqrt{2}}{16}, c_{21} = \frac{843}{4}, c_{12} = -63\sqrt{2}, c_{03} = \frac{503}{32} \quad (4.6)$$

Формулы (4.3)–(4.6) позволяют вычислить величины ξ, η с погрешностью O_7 . Для краткости выпишем только первые члены соответствующих разложений:

$$\xi = \frac{c}{2^{1/4}}\sqrt{r_{10}} \sin \varphi_1 + O_2, \quad \eta = c\sqrt{r_{20}} \sin \varphi_2 + O_2 \quad (4.7)$$

В плоскости $O\xi\eta$ траектория материальной точки всюду плотно заполняет прямоугольник со сторонами $2^{3/4}c\sqrt{r_{10}} + O_2$ и $2c\sqrt{r_{20}} + O_2$. Для координаты ζ из (4.7) и (1.2) получаем такое выражение:

$$\zeta = -c + 2c(\sqrt{2}r_{10} \sin^2 \varphi_1 + r_{20} \sin^2 \varphi_2) + O_3 \quad (4.8)$$

Из (4.8) видно, что при малых r_{10}, r_{20} материальная точка во все время движения по поверхности (1.1) не может подняться над ее положением равновесия $\xi = \eta = 0, \zeta = -c$ выше, чем на $2c(\sqrt{2}r_{10} + r_{20}) + O_3$.

5. О колебаниях при резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$. Этот резонанс реализуется на прямой $y = 4x$, показанной на рис. 1 штриховой линией. Согласно разд. 1 и 2 нормальная форма функции Гамильтона возмущенного движения записывается в виде

$$H = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \sum_{m+n=2}^3 c_{mn} r_1^m r_2^n + \alpha_{12} r_1 r_2^2 \cos(2\varphi_1 - 4\varphi_2) + O_8, \quad (5.1)$$

где $\omega_1 = 1/\sqrt{x}$, $\omega_2 = 1/(2\sqrt{x})$, причем $0 < x < 1/4$.

Из (2.16)–(2.18) следует, что коэффициенты нормальной формы (5.1) можно записать как функции величины x :

$$c_{20} = \frac{3x-4}{16x^2}, c_{11} = \frac{1}{8x}, c_{02} = \frac{3x-1}{64x^2} \quad (5.2)$$

$$c_{30} = \frac{23x^2-72x+48}{256x^{7/2}}, c_{21} = \frac{31x^2-56x+16}{384x^{7/2}}, c_{12} = \frac{13x^2-2x-2}{384x^{7/2}} \quad (5.3)$$

$$c_{03} = \frac{23x^2-18x+3}{2048x^{7/2}}, \alpha_{12} = \frac{3(3-x)}{512x^{5/2}}$$

Если в (5.1) отбросить величины O_3 , то придем к приближенной системе, которая, помимо интеграла $H = \text{const}$ (имеющимся и в полной системе), допускает еще один, характерный для рассматриваемого резонанса $\omega_1 = 2\omega_2$, интеграл

$$2r_1 + r_2 = \tilde{c} = \text{const} > 0 \quad (5.4)$$

Для исследования периодических колебаний, обусловленных наличием резонанса, сделаем в функции Гамильтона (5.1) унивалентную каноническую замену переменных $\varphi_j, r_j \rightarrow \psi_j, R_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$\psi_1 = \varphi_1 - 2\varphi_2, \psi_2 = \varphi_2, R_1 = r_1, R_2 = 2r_1 + r_2 \quad (5.5)$$

В приближенной системе величина ψ_2 будет циклической координатой. Соответствующий ей интеграл – это интеграл (5.4), т.е. $R_2 = \tilde{c}$.

Введем вместо ψ_1, R_1 новые канонически сопряженные переменные θ, ρ по формулам

$$\psi_1 = \theta, R_1 = \tilde{c}\rho \quad (0 < \rho < 1/2) \quad (5.6)$$

и примем в качестве новой независимой переменной величину $s = \tilde{c}\tau / 16$. Тогда, если отбросить не зависящие от θ, ρ слагаемые, то функция Гамильтона Γ приближенной системы запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \left(\frac{1-x}{x^2} - \frac{103x^2 - 146x + 43}{192x^{7/2}} \tilde{c} \right) \rho + \left(\frac{2x-5}{x^2} + \frac{41x^2 - 118x + 41}{32x^{7/2}} \tilde{c} \right) \rho^2 - \\ & - \frac{20x^2 - 46x - 55}{48x^{7/2}} \tilde{c}\rho^3 + \frac{3(3-x)\tilde{c}}{32x^{5/2}} \rho(1-2\rho)^2 \cos 2\theta \end{aligned} \quad (5.7)$$

Соответствующие канонические уравнения

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = \frac{3(3-x)\tilde{c}}{16x^{5/2}} \rho(1-2\rho)^2 \sin 2\theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\rho} \quad (5.8)$$

допускают четыре отличающихся одно от другого равновесных решения θ_*, ρ_* , в которых

$$\theta_* = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad (5.9)$$

а ρ_* – корень квадратного уравнения. При четном k оно имеет вид

$$\begin{aligned} 192x^{3/2}[(1-x) - 2(5-2x)\rho_*] - \tilde{c}[(121x^2 - 200x + 43) - \\ - 12(53x^2 - 154x + 41)\rho_* + 12(38x^2 - 100x - 55)\rho_*^2] = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

а при нечетном:

$$\begin{aligned} 192x^{3/2}[(1-x) - 2(5-2x)\rho_*] - \tilde{c}[(85x^2 - 92x + 43) - \\ - 12(29x^2 - 82x + 41)\rho_* + 12(2x^2 + 8x - 55)\rho_*^2] = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

При малых \tilde{c} равновесное значение ρ_* можно представить в виде ряда по степеням \tilde{c} : $\rho_* = \rho_0 + \tilde{c}\rho_1 + \dots$. Из (5.10) и (5.11) следует, что, как для четных, так и для нечетных значений k , имеем

$$\rho_0 = \frac{1-x}{2(5-2x)} \quad (5.12)$$

В интервале $0 < x < 1/4$ допустимых значений x функция ρ_0 монотонно убывает, причем

$$\frac{1}{10} > \rho_0 > \frac{1}{12} \quad (5.13)$$

Из (5.10) и (5.11) получаем, что при четных k величина ρ_1 задается равенством

$$\rho_1 = -\frac{(4-x)^2(19x^2-11x+10)}{192x^{3/2}(2x-5)^3}, \quad (5.14)$$

а при нечетных:

$$\rho_1 = \frac{(4-x)(x^3-69x^2+162x-40)}{192x^{3/2}(2x-5)^3} \quad (5.15)$$

На интервале $0 < x < 1/4$ обе функции (5.14) и (5.15) являются монотонно убывающими, причем функция (5.14) удовлетворяет неравенству

$$+\infty > \rho_1 > \frac{125}{2304} = 0.0542534722\dots,$$

а функция (5.15) – неравенству

$$+\infty > \rho_1 > \frac{7}{768} = 0.0065104166\dots$$

Характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности равновесия θ_*, \tilde{c} системы (5.8) имеет вид

$$\lambda^2 + (-1)^k \tilde{c} \frac{3(1-x)(3-x)(4-x)^2}{8x^{9/2}(5-2x)^2} + O(\tilde{c}^2) = 0 \quad (5.16)$$

Коэффициент при $(-1)^k$ положителен для любых значений x из интервала $0 < x < 1/4$, поэтому для малых \tilde{c} найденным равновесиям в случае четных k отвечают в фазовой плоскости особые точки типа центр, а в случае нечетных k – точки типа седло.

Методом Пуанкаре [5] можно показать, что в полной системе с функцией Гамильтона (5.1) существуют периодические движения, аналитические относительно $\sqrt{\tilde{c}}$. При четных k эти периодические движения орбитально устойчивы, а при нечетных k – неустойчивы.

Соответствующие периодическим движениям координаты $\xi = \sqrt{ac}q_1, \eta = \sqrt{bc}q_2$ материальной точки могут быть получены с погрешностью порядка $\tilde{c}^{7/2}$ из формул (2.3), (2.4), (2.19), (2.20) замены $q_j, p_j \rightarrow Q_j, P_j$, выражений (1.6) и (3.4) для частот линейных колебаний и равенств (2.7), (5.5), (5.6), (5.9). Выпишем в явном виде только первые члены разложений ξ, η по степеням $\tilde{c}^{1/2}$. С погрешностью порядка $\tilde{c}^{3/2}$ имеем такие выражения:

$$\xi = c^4 \sqrt{x} \sqrt{2\tilde{c}\rho_*} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + 2\varphi_2\right), \eta = 2c^4 \sqrt{x} \sqrt{\tilde{c}(1-2\rho_*)} \sin \varphi_2 \quad (5.17)$$

Отсюда, с учетом равенств (1.2), (1.6) и (3.4), находим, что с погрешностью порядка \tilde{c}^2 координата ς материальной точки может быть вычислена по формуле

$$\varsigma = -c + c \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{x}} [2\rho_* \sin^2\left(\frac{k\pi}{2} + 2\varphi_2\right) + (1-2\rho_*) \sin^2 \varphi_2] \quad (5.18)$$

В (5.17) и (5.18) введено обозначение

$$\varphi_2 = \Omega_2 \tau + \varphi_2(0) \quad (5.19)$$

Величина Ω_2 определяется равенством, аналогичным равенству (8.12) из статьи [10]:

$$\Omega_2 = \omega_2 + [c_{11}\rho_* + 2c_{02}(1 - 2\rho_*)]\tilde{c} + \\ + \{c_{21}\rho_*^2 + 2[c_{12} + (-1)^k \alpha_{12}]\rho_*(1 - 2\rho_*) + 3c_{03}(1 - 2\rho_*)^2\}\tilde{c}^2 + O(\tilde{c}^3)$$

Принимая во внимание выражения (3.4) и (5.2), (5.3), получаем, что при четных значениях k

$$\Omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3x-1}{32x^2}\tilde{c} + \frac{3(23x^2-18x+3)}{2048x^{7/2}}\tilde{c}^2 - \frac{1}{1536}\left[\frac{96(x-1)}{x^2}\tilde{c} + \right. \\ \left. + \frac{121x^2-200x+43}{x^{7/2}}\tilde{c}^2\right]\rho_* + \frac{53x^2-154x+41}{512x^{7/2}}\tilde{c}^2\rho_*^2 + O(\tilde{c}^3),$$

где ρ_* – корень уравнения (5.10). А при нечетных k :

$$\Omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3x-1}{32x^2}\tilde{c} + \frac{3(23x^2-18x+3)}{2048x^{7/2}}\tilde{c}^2 - \frac{1}{1536}\left[\frac{96(x-1)}{x^2}\tilde{c} + \right. \\ \left. + \frac{85x^2-92x+43}{x^{7/2}}\tilde{c}^2\right]\rho_* + \frac{29x^2-82x+41}{512x^{7/2}}\tilde{c}^2\rho_*^2 + O(\tilde{c}^3),$$

где ρ_* – корень уравнения (5.11).

Вычисляемая по формуле (5.18) координата ζ изменяется (с периодом π по φ_2) между своими минимальным ζ_{\min} и максимальным ζ_{\max} значениями, которые ζ принимает соответственно при $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$. Для четных k

$$\zeta_{\min} = -c, \zeta_{\max} = -c + c\frac{\tilde{c}}{2\sqrt{x}}(1 - 2\rho_*), \quad (5.20)$$

а при нечетных k

$$\zeta_{\min} = -c + c\frac{\tilde{c}}{\sqrt{x}}\rho_*, \zeta_{\max} = -c + c\frac{\tilde{c}}{2\sqrt{x}} \quad (5.21)$$

В (5.20) и (5.21) ρ_* – корни уравнений (5.10) и (5.11) соответственно.

В плоскости $O\xi\eta$ траектории (5.17) движущейся материальной точки при четных и нечетных k существенно отличаются. При четных k (когда периодическое движение точки орбитально устойчиво) траектория является кривой четвертого порядка, имеющей форму восьмерки. Для нечетных k (когда периодическое движение неустойчиво) траектория представляет собой параболу, которую материальная точка проходит дважды за период.

В качестве иллюстрации на рис. 2 и 3 показаны траектории материальной точки при конкретных значениях параметров: $x = 1/7$, $\tilde{c} = 1/100$. За единицу длины на этих рисунках принята длина полуоси c поверхности (1.1).

На рис. 2, где $k = 0$, имеем $\rho_* = 0.0921670583\dots$ и $\xi = 0.0263954062\sin 2\varphi_2$, $\eta = 0.1110482283\sin \varphi_2$, а на рис. 3, где $k = 1$, $\rho_* = 0.0915908343\dots$ и $\xi = 0.0263127655\cos 2\varphi_2$, $\eta = 0.1111266502\sin \varphi_2$. При этом в случае $k = 0$ $-1 \leq \zeta \leq -0.9892097546\dots$, а в случае $k = 1$: $-0.9975767342\dots \leq \zeta \leq -0.9867712434\dots$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00162, <https://rscf.ru/project/24-11-00162/> в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

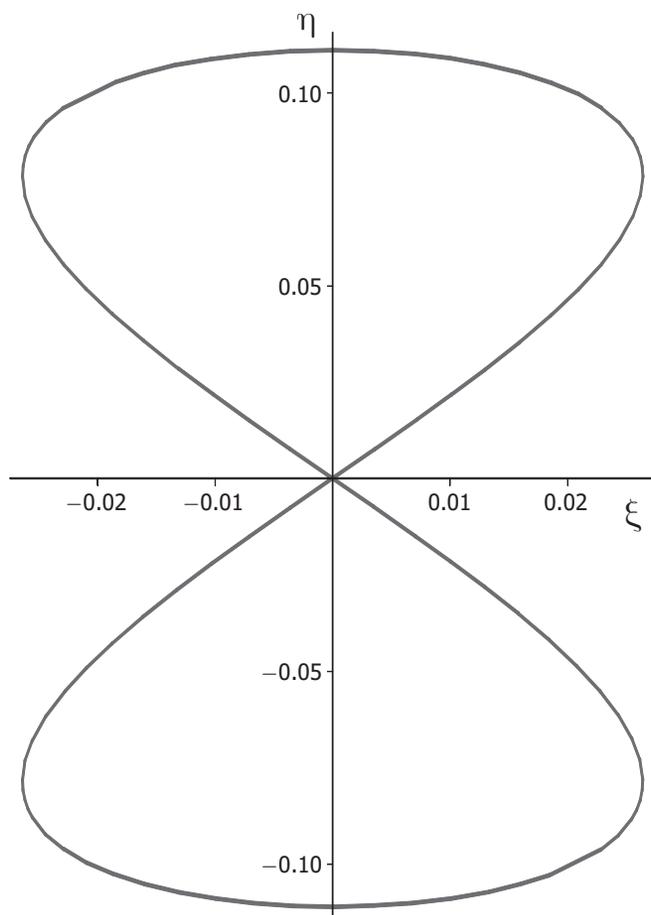


Рис. 2

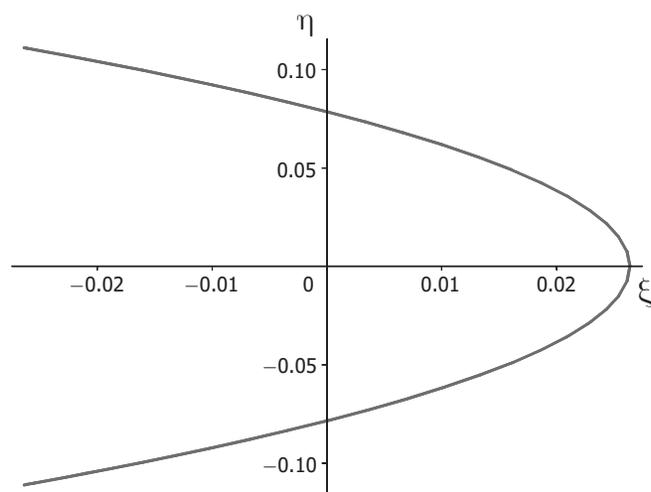


Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
2. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
3. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.;Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
4. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.;Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.
8. *Маркеев А.П.* К задаче о нелинейных колебаниях консервативной системы при отсутствии резонанса // ПММ. 2024. Т. 88. Вып. 3. С. 347–358.
9. *Pöschel J.* Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Commun. Pure&Appl. Math. 1982. V. 35. № 5. P. 653–696.
10. *Маркеев А.П.* О нелинейных колебаниях трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 784–800.

On the Motion of a Material Point on a Fixed Ellipsoidal Surface**A. P. Markeev^{a,*}**^a*Moscow Aviation Institute (NRU), Moscow, Russia*^{*}*e-mail: anat-markeev@mail.ru*

The nonlinear dynamics of a point that remains throughout its motion on the inner part of an absolutely smooth surface of a fixed triaxial ellipsoid is studied. The motion occurs in a uniform field of gravity, the largest of the axes of the ellipsoid is directed along the vertical. The main attention is paid to the motions of the point near its stable equilibrium position at the lowest point of the ellipsoid's surface lying on its vertical axis. A qualitative description of conditionally periodic oscillations of the point is given, and an estimate of the measure of the set of initial conditions corresponding to these oscillations is defined. In the resonant case, when the ratio of the frequencies of small linear oscillations is equal to two, the periodic motions of the point are studied; the question of their existence, stability and geometric representation is considered.

Keywords: conservative system, stability, conditionally periodic and periodic oscillations

REFERENCES

1. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopedia Math. Sci. Vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
2. *Moser J.K.* Lectures on Hamiltonian systems // Mem. Amer. Math. Soc., no. 81, Providence, R.I.: AMS, 1968.
3. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. AMS Coll. Publ., Vol. 9, Providence, R.I.: AMS, 1966.
4. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.: Springer, 1972. 369 p.
5. *Malkin I.G.* Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations. In 2 Vols., Germantown, Md.:US Atom. Energy Commis., Techn. Inform. Serv., 1959.
6. *Gantmacher F.R.* Lectures on Analytical Mechanics. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 296 p. (in Russian)
7. *Markeev A.P.* Theoretical Mechanics. Moscow;Izhevsk: R&C Dyn., 2007. 592 p. (in Russian)
8. *Markeev A.P.* On the problem of nonlinear oscillations of a conservative system in the absence of resonance // JAMM, 2024, vol. 88, no. 3, pp. 347–358.
9. *Pöschel J.* Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Commun. Pure&Appl. Math., 1982, vol. 35, no. 5, pp. 653–696.
10. *Markeev A.P.* On nonlinear oscillations of a triaxial ellipsoid on a smooth horizontal plane // Mech. of Solids, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 1805–1818.

УДК 534.[113:143]

ГАШЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПОМОЩЬЮ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА

© 2024 г. Г. В. Костин^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: kostin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 08.05.2024 г.

После доработки 10.07.2024 г.

Принята к публикации 15.07.2024 г.

Исследуется возможность гашения продольных колебаний тонкого однородного упругого стержня при воздействии на него нормальной силы в поперечном сечении. Эта переменная во времени сила, которая может возбуждаться, например, с помощью пьезоэлектрических элементов, однородно распределена по длине на заданном сегменте консольно закрепленного стержня и равна нулю вне его. Представлены такие расположения концов сегмента, при которых возбуждаемая сила не влияет на амплитуду определенных мод. Найдено минимальное время, за которое можно погасить колебания всех остальных мод, и на основе метода Фурье построен в виде ряда соответствующий закон изменения демпфирующей силы. Дана обобщенная формулировка краевой задачи о переводе стержня за это время в нулевое терминальное состояние, для которой предложен алгоритм точного решения в случае рациональных соотношений на геометрические параметры. Незвестные функции состояния стержня ищутся в виде линейной комбинации функций бегущих волн и нормальной силы, которые определяются из линейной системы алгебраических уравнений, следующих из граничных соотношений и условий непрерывности. Проведено сравнение решений, полученных в рядах методом Фурье и в виде бегущих волн Даламбера.

Ключевые слова: упругий стержень, пьезоэлектрические силы, метод Фурье, гашение колебаний, бегущие волны

DOI: 10.31857/S0032823524040022, EDN: WWGMFD

1. Введение. Актуальной областью в теории управления динамическими системами с распределенными параметрами остается исследование возможности гашения начальных колебаний за конечное время при использовании внешнего воздействия, когда существуют ограничения либо на область его приложения, либо на его пространственную форму. Управление в этом случае описывается конечным набором зависящих от времени функций, которые обычно входят в правые части как определяющих уравнений в частных производных (УЧП), так и, возможно, краевых условий [1, 2]. Очевидное преимущество управления, которое воздействует на систему в каждой пространственной точке, заключается в том, что в некоторых случаях допустима декомпозиция колебаний с независимым воздействием на каждую собственную моду [3, 4]. Такую систему бывает невозможно реализовать в приложениях, и тогда важно рассмотрение ограниченных в пространстве или по форме воздействий. При этом построение допустимого закона управления на конечном интервале времени бывает затруднено или даже невозможно, при наличии, например, предельной

скорости распространения сигнала в системе [5]. В статье рассмотрены продольные колебания упругого стержня, на фиксированном связанном сегменте которого возбуждаются нормальные силы в поперечном сечении, равномерно распределенные вдоль центральной линии. Вне этого участка действуют только упругие напряжения. Такие управляющие нормальные силы можно создать одним или несколькими пьезоэлектрическими элементами (ПЭ), присоединенными на активном участке к стержню. Если элементов несколько, они должны располагаться симметрично относительно центральной линии и работать синхронно, способствуя продольному растяжению или сжатию упругого материала. Антисимметрично возбуждаемые элементы воздействуют на изгибы стержня, и такая схема управления изучена в [6]. Создаваемая пьезоэлектрическая сила рассмотрена в рамках простейшей модели ПЭ как независимая функция времени [7]. Так как итоговое распределение нормальной силы в пространстве кусочно-постоянно, волновое УЧП, которое описывает продольные колебания стержня, содержит в правой части дельта-функции вследствие скачков силы при переходе от ПЭ к свободным от управления участкам [8] и решение должно строиться с помощью обобщенных функций.

Альтернативный подход предложен в [9], где в рамках метода интегриродифференциальных соотношений (МИДС) решение начально-краевой задачи о продольных колебаниях однородного упругого стержня удается построить в явном виде, как и решение некоторых оптимизационных задач [10]. При этом состояние стержня передается функцией перемещений и динамическим потенциалом, который через первые частные производные определяет плотность импульса и нормальную силу в поперечном сечении. Решение представляется в виде бегущих волн, определенных на пространственно-временной сетке, образуемой некоторыми характеристиками. Как результат, оптимизация заключается в интегрировании линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными коэффициентами. Этот подход приемлем для построения оптимального управления в случае свободного стержня с рядом ПЭ, между которыми либо отсутствуют промежутки [10], либо когда ПЭ образуют периодическую структуру [11]. Более простой вариант, когда время управления в безразмерных единицах кратно длине ПЭ, представлен в [12]. Исследован также вопрос помодового гашения колебаний стержня и разделения мод на отдельные группы, каждая из которых имеет независимый управляющий вход [10, 13]. В отличие от предыдущих исследований в этой работе рассмотрен специальный тип стержня с жестким закреплением одного конца и свободным вторым концом. Исследуется вопрос о неуправляемости волнового уравнения для случая скалярного управляющего воздействия, что является частным случаем демпфирования при воздействии распределенной силой только на часть длины [14]. Определено, что управляемость зависит от геометрических параметров ПЭ. Как показано в [15–17], правильный выбор расположения ПЭ – это важная проблема в инженерных приложениях. Найдены координаты концов интервала приложения управления, при выборе которых пьезоэлектрическая сила не воздействует на определенные моды колебаний. Существует предельное время, за которое можно погасить колебания всех остальных мод. Для этого времени построен закон изменения управляющей силы в виде ряда. Для рациональных соотношений на геометрические параметры, предложен алгоритм точного решения задачи управления в виде линейной алгебраической комбинации начального состояния. Проведено сравнение решений, полученных в рядах и в виде бегущих волн Даламбера.

2. Классическая формулировка краевой задачи. Рассмотрим продольные колебания тонкого прямолинейного однородного упругого стержня под воздействием распределенной по длине x и переменной во времени t управляющей силы $f(t, x)$, направленной по нормали к его поперечному сечению. Опишем поведение динамической системы в безразмерных переменных, выбранных так, чтобы длина стержня,

коэффициент жесткости на растяжение сжатие и линейная плотность равнялась единице. Схематически стержень, ориентированный вдоль оси x , представлен на рис. 1. Начало координат расположено в жестко закрепленном конце стержня, а ось x направлена на свободный от каких либо нагрузок конец.

Сила f , возбуждаемая, например, с помощью ПЭ, задается произвольно на интервале времени $t \in T = (0, t_f)$ и распределена кусочно-постоянно по длине $x \in X = (0, 1)$. При использовании простейшей модели [7] можно обеспечить постоянство этой силы на интервале $x \in U = (x^-, x^+) \subset X$ и ее обнуление вне этого участка:

$$f(t, x) = \begin{cases} \dot{u}(t), & x \in U, \\ 0, & x \notin U, \end{cases} \quad u(0) = 0 \quad (2.1)$$

Здесь введена вспомогательная функция управления $u : T \rightarrow \mathbf{R}$. Интервал U длины $\lambda = x^+ - x^-$, на котором дополнительно к упругим напряжениям в поперечном сечении возникает растягивающая или сжимающая нагрузка \dot{u} , выделен на рис. 1 серым тоном.

Область определения неизвестных функций состояния стержня – это декартово произведение временного и пространственного интервалов $D = T \times X$. В качестве неизвестных переменных выбираются линейная плотность импульса $p : D \rightarrow \mathbf{R}$, нормальная сила в поперечном сечении $q : D \rightarrow \mathbf{R}$ и упругие перемещения точек стержня $v : D \rightarrow \mathbf{R}$.

Закон изменения импульса записывается через функции p и q в виде

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial q(t, x)}{\partial x}; \quad (t, x) \in D \quad (2.2)$$

Для выбранной тройки переменных в качестве законов состояния выступают линейное соотношение между импульсом p и скоростью, и аффинная связь силы q и деформации:

$$p(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t}, \quad q(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + f(t, x); \quad (t, x) \in D \quad (2.3)$$

Если бы управляющая сила f была непрерывно дифференцируема по x [18], то в классической постановке уравнение движения в перемещениях получается после исключения в (2.2) переменных p и q в силу (2.3):

$$\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}; \quad (t, x) \in D \quad (2.4)$$

В дальнейшем ставится задача гашения в конечный момент времени t_f начальных импульсов и деформаций:

$$\begin{aligned} p(0, x) &= p_0(x), & v(0, x) &= v_0(x); & x &\in X \\ p(t_f, x) &= 0, & v(t_f, x) &= 0; & x &\in X \end{aligned} \quad (2.5)$$

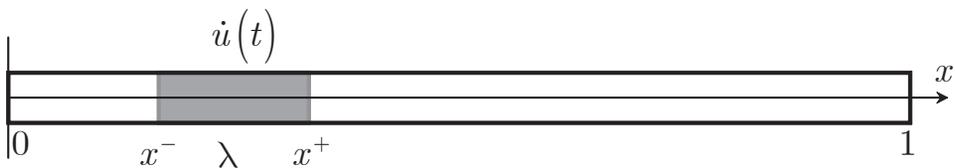


Рис. 1. Схема стержня с управляющим элементом

Здесь p_0 и v_0 – известные начальные распределения [19]. Для консольно закрепленного стержня должны выполняться следующие краевые условия:

$$v(t,0) = 0, \quad q(t,1) = 0; \quad t \in T \quad (2.6)$$

Дополнительно к этим условиям стержень, из физических соображений, должен оставаться неразрывным твердым телом, а полная нормальная сила q не может иметь скачков по пространственной координате x согласно третьему закону Ньютона. Все это приводит к определению класса допустимых распределений p_0 и v_0 , а также управления u .

В соответствии с МИДС [9], для обобщения краевой задачи (2.2)–(2.6) определим на области D новую переменную $r : D \rightarrow \mathbf{R}$, называемую в дальнейшем динамическим потенциалом, который удовлетворяет следующие соотношения:

$$p = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial r}{\partial t} \quad (2.7)$$

Подстановкой (2.7) в (2.2) показывается, что второй закон Ньютона автоматически выполняется при таком представлении импульса p и силы q .

После исключения из рассмотрения p и q , согласно (2.7), локальные законы состояния (2.3) предстают в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(t,x)}{\partial x} &= \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \\ \frac{\partial r(t,x)}{\partial t} &= \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} + f(t,x); \quad (t,x) \in D \end{aligned} \quad (2.8)$$

Через неизвестные r и v переписываются и начально-терминальные условия (2.5), и краевые ограничения (2.6):

$$\begin{aligned} r(0,x) &= r_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x); \quad x \in X \\ r(t_f,x) &= r^0, \quad v(t_f,x) = 0; \quad x \in X \\ v(t,0) &= 0, \quad r(t,1) = r^0; \quad t \in T, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $r_0(x) = r^0 - \int_x^1 p_0(\chi) d\chi$.

Ненулевые правые части в первом терминальном и последнем краевом условии из (2.9) обеспечивают требуемую в дальнейшем непрерывность решения. Отметим, что динамическая переменная r определяется с точностью до константы r^0 , значение которой не влияет на движение стержня, заданного изначально через переменные p , q , v . Поэтому для определенности выбираем $r^0 = 0$.

3. Обобщенная формулировка задачи. Важно, что функция силы (2.1) имеет разрывы первого рода по координате x , если интервал U не совпадает с пространственной областью X . Следует также допустить возможность таких разрывов силы f по времени. Все это требует обобщения дифференциальных законов состояния (2.8) на области D [19]. Для расширения класса допустимых функций, согласно МИДС [9], локальные соотношения (2.8) можно заменить на один глобальный закон, который основан на минимизации интегральной невязки функций состояния от неизвестных r и v . Тогда поиск решения сведется к условной минимизации функционала, квадратичного по первым производным от кинематической и динамической переменных.

Более конкретно, обобщенная краевая задача ставится следующим образом. Даны функции $r_0, v_0 \in H^1(X)$ и $u \in H^1(T)$, т.е. начальные распределения со своими первыми производными и возбуждаемая сила квадратично-интегрируемы на своих областях определения. Следует найти такие функции состояния $r^*(t,x), v^*(t,x) \in H^1(D)$,

которые при выполнении начальных и краевых ограничений (2.9) минимизируют функционал состояния F :

$$F[r^*, v^*] = \min_{r, v \in H^1(D)} F[r, v] = 0, \quad F = \int_D \varphi dt dx \geq 0 \quad (3.1)$$

$$\varphi = \frac{g^2}{2} + \frac{h^2}{2}, \quad g = \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t}, \quad h = \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + f,$$

где сила f определена в (2.1). Согласно формулировке (2.1), (2.9), (3.1), функционал F достигает абсолютного минимума на решении. По определению подинтегральное выражение φ представляет собой неотрицательную квадратичную форму от первых производных функций r , v и u . Из этого вытекает принадлежность переменных r и v к гильбертовому пространству $H^1(D)$.

4. Условия неуправляемости. В краевой задаче динамики (2.1), (2.9), (3.1) возможность выполнения однородных терминальных ограничений связана с вопросом управляемости рассматриваемой системы с распределенными параметрами. Условия возможности погашения произвольных колебаний из заданного пространства можно вывести, применяя метод Фурье. Для этого сформулируем соответствующую задачу на собственные значения.

Представим собственные колебания стержня в виде

$$r(t, x) = R_n(x) \cos \omega_n t, \quad v(t, x) = V_n(x) \sin \omega_n t \quad (4.1)$$

$$R_n = -\frac{2 \cos \omega_n x}{\omega_n}, \quad V_n = \frac{2 \sin \omega_n x}{\omega_n}, \quad \omega_n = n\pi - \frac{\pi}{2}; \quad n \in \mathbf{N}$$

Здесь функции R_n и V_n определяют форму n -й моды колебаний с собственной частотой ω_n .

Используем прием разделения переменных для уравнений (2.3) и спроецируем их в гильбертовом пространстве $L^2(X)$ на функции $R_n : X \rightarrow \mathbf{R}$ и $V_n : X \rightarrow \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, которые представляют собой нетривиальные решения соответствующей краевой задачи на собственные значения

$$R_n'(x) = \omega_n V_n(x), \quad V_n'(x) = -\omega_n R_n(x) \quad (4.2)$$

$$V_n(0) = 0, \quad R_n(1) = 0; \quad n \in \mathbf{N}$$

Решение начально-краевой задачи (2.1), (2.9), (3.1) представимо как разложение по базису $\{(R_j, V_j)\}_{j \in \mathbf{N}}$ в виде

$$r(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} R_n(x) r_n(t), \quad v(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} V_n(x) v_n(t) \quad (4.3)$$

После интегрирования по частям с учетом (4.3) и того, что сила f из (2.1) кусочно-постоянна по x , получаем счетную систему линейных ОДУ:

$$\dot{v}_n(t) = \omega_n r_n(t); \quad v_n(0) = v_n^0 \quad (4.4)$$

$$\dot{r}_n(t) = -\omega_n v_n(t) + \omega_n^{-1} c_n \dot{u}(t); \quad r_n(0) = r_n^0$$

Здесь $n \in \mathbf{N}$, а r_n^0 и v_n^0 — проекции начальных распределений $r_0(x)$ и $v_0(x)$ на собственные функции $R_n(x)$ и $V_n(x)$, соответственно. Для компактности в (4.4) введен коэффициент усиления

$$c_n = V_n(x^-) - V_n(x^+) \quad (4.5)$$

Из (4.4) напрямую следует, что n -я мода неуправляема, если для любого допустимого управления u правая часть уравнений (4.4) тождественно равна нулю, т.е., согласно (4.1), должно быть выполнено условие

$$\sin(\omega_n x^-) - \sin(\omega_n x^+) = 0$$

Проведем тригонометрическое преобразование

$$\sin \frac{\omega_n(2x_c - \lambda)}{2} - \sin \frac{\omega_n(2x_c + \lambda)}{2} = -2 \cos \omega_n x_c \sin \frac{\omega_n \lambda}{2} = 0$$

$$x_c = \frac{x^- + x^+}{2}$$

Здесь введена координата x_c центральной точки ПЭ. В результате получаем два геометрических условия неуправляемости

$$x_c = \frac{2k-1}{2n-1} < 1 \quad \vee \quad \lambda = \frac{2k}{2n-1} \leq 1; \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что n -я мода становится неуправляемой, когда собственная форма V_n достигает экстремума в центре ПЭ или длина ПЭ кратна длине волны функции V_n . Если для фиксированных геометрических параметров x^\pm несколько мод такие, что для каждой из них выполняется одно из условий (4.6), все они принадлежат неуправляемой группе мод. Так, например, если для m -й моды $\lambda = 2 / (2m - 1)$, то неуправляемыми будут и все моды $n > m$, для которых число $2n - 1$ кратно $2m - 1$. Так, например, если по этому условию нельзя изменять колебания моды с номером $m = 3$, при любом управлении сохранится изначальная энергия мод с номерами $n = 8, 13, 18, \dots$

5. Решение краевой задачи в рядах. Можно показать, что решение краевой задачи (2.1), (2.9), (3.1), для произвольного начального состояния стержня (r_0, v_0) возможно только для безразмерного времени управления не меньше критического: $t_f \geq t_f^* = 2$. Допустим, что построено управление $u^* \in H^1(T^*)$, где $u^* = u^*(t, r_0, v_0)$ и $T^* = (0, t_f^*)$, которое способно подавить любые колебания за критическое время t_f^* . Для большего времени $t_f > t_f^*$ допустимым будет управление

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, t_f - t_f^*) \\ u^*(t - t_f + t_f^*), & t \in (t_f - t_f^*, t_f) \end{cases}$$

где u^* строится для промежуточного состояния стержня $r(t_f - t_f^*, x)$ и $v(t_f - t_f^*, x)$.

Используя метод Фурье, найдем управление u^* на интервале T^* в виде ряда

$$u^*(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \sin \omega_n t + b_n (\cos \omega_n t - 1)) \quad (5.1)$$

Для анализа движения, соответствующего u^* , допустим, что в начальный момент времени в стержне запасена единичная энергия, при этом либо стержень недеформирован и динамический потенциал r распределен по моде с номером n :

$$r(0, x) = R_n(x), \quad v(0, x) = 0, \quad (5.2)$$

либо стержень в этот момент неподвижен и деформирован по n -й моде:

$$r(0, x) = 0, \quad v(0, x) = V_n(x) \quad (5.3)$$

Если реализовано начальное условие (5.2), в ряде (5.1) неравным нулю будет только коэффициент a_n . В случае (5.3) ненулевым будет лишь параметр управления b_n . Построим решение счетной системы (4.4) для выбранного управления при начальных распределениях (5.2):

$$r_{mn}^a(t) = \begin{cases} a_n c_m \frac{\omega_n \sin \omega_n t - \omega_m \sin \omega_m t}{\omega_m^2 - \omega_n^2}, & m \neq n \\ \cos \omega_n t - a_n c_n \frac{\omega_n t \cos \omega_n t + \sin \omega_n t}{2\omega_n}, & m = n \end{cases} \quad (5.4)$$

$$v_{mn}^a(t) = \begin{cases} a_n c_m \omega_n \frac{\cos \omega_m t - \cos \omega_n t}{\omega_m^2 - \omega_n^2}, & m \neq n \\ \sin \omega_n t - a_n c_n \frac{t \sin \omega_n t}{2}, & m = n \end{cases}$$

Решение (4.4) для выбранного управления при начальных состояниях (5.3) имеет вид

$$r_{mn}^b(t) = \begin{cases} b_n c_m \omega_n \frac{\cos \omega_n t - \cos \omega_m t}{\omega_m^2 - \omega_n^2}, & m \neq n \\ \sin \omega_n t + b_n c_n \frac{t \sin \omega_n t}{2}, & m = n \end{cases} \quad (5.5)$$

$$v_{mn}^b(t) = \begin{cases} b_n c_m \frac{\omega_m \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_m t}{\omega_m^2 - \omega_n^2}, & m \neq n \\ \cos \omega_n t - b_n c_n \frac{\omega_n t \cos \omega_n t - \sin \omega_n t}{2\omega_n}, & m = n \end{cases}$$

Приравнивая нулю терминальные значения $r_{mn}^a, v_{mn}^a, r_{mn}^b, v_{mn}^b$ при $t = t_f^* = 2$ получаем, согласно (5.4) и (5.5), что $a_n = b_n = -c_n^{-1}$. Учитывая значения r_n^0 и v_n^0 для проекций начальных распределений r_0 и v_0 соответственно на собственные функции R_n и V_n , управление u^* из (5.1) для произвольных начальных условий примет вид

$$u^*(t) = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n} (r_n^0 \sin \omega_n t + v_n^0 (\cos \omega_n t - 1)) \quad (5.6)$$

Если модуль c_n отделен от нуля, из-за его ограниченности ряд (5.6) сходится в том же пространстве, которому принадлежат функции r_0, v_0 , т.е. $u^* \in H^1(0, 2)$.

Управление $u^*(t)$ определяет, согласно (5.4) и (5.5), движение в виде ряда

$$r^*(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} R_n(x) (r_n^0 r_{mn}^a(t) + v_n^0 r_{mn}^b(t))$$

$$v^*(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} V_n(x) (r_n^0 v_{mn}^a(t) + v_n^0 v_{mn}^b(t)) \quad (5.7)$$

6. Прямое решение обобщенной задачи. Управление $u^*(t)$, заданное в виде ряда (5.6) на критическом интервале времени T^* , не всегда удобно в применении. В случае, когда геометрические параметры расположения ПЭ представлены рациональными числами, решение краевой задачи можно получить в виде конечного набора алгебраических соотношений [6]. Используя представление решения в виде бегущих волн Даламбера, построим при таких параметрах управление.

Пусть, для некоторой пары x^\pm каждая мода колебаний в отдельности управляема. Тогда для нахождения движения возьмем функции состояния (r, v) в виде линейной комбинации бегущих волн и управления. Сформируем конечную сетку из характеристик на пространственно-временной области D , с использованием которой удастся

свести рассматриваемую краевую задачу с распределенными параметрами к линейной алгебраической системе.

В рассматриваемом случае без потери общности можно положить, что

$$x^\pm = \xi n^\pm, \quad \xi = \frac{1}{n_x}; \quad n^+, n_x \in \mathbf{N}, \quad n^- \in \mathbf{Z}_+, \quad n^- < n^+ \leq n_x \quad (6.1)$$

Здесь натуральное число n_x такое, что либо x^+ – несократимая дробь, либо координата x^- не равна нулю и несократима. Критическое время управления кратно безразмерной элементарной длине ξ , т.е. $t_f^* = 2n_x \xi$. Длина ПЭ выражается как $\lambda = (n^+ - n^-)\xi$.

Для построения сетки на области D разобьем временной интервал T на $2n_x$ равных подынтервалов T_i , а пространственный интервал X – на n_x подынтервалов X_k так, что

$$\begin{aligned} T_i &= (t_{i-1}, t_i); \quad i \in M = \overline{1, 2n_x} \\ t_j &= j\xi; \quad j \in M^* = \{0, 2n_x\} \\ X_k &= (x_{k-1}, x_k); \quad k \in N = \overline{1, n_x} \\ x_l &= l\xi; \quad l \in N^* = \{0, n_x\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Каждому интервалу X_k соответствует открытая подобласть $D_k = T \times X_k$ области D (см. рис. 2.) и три одномерные функции:

$$\begin{aligned} w_k^+ &: (x_{k-1}, T + x_k) \rightarrow \mathbf{R}, \quad w_k^- : (-x_k, T - x_{k-1}) \rightarrow \mathbf{R} \\ y_k &: (0, T) \rightarrow \mathbf{R}, \quad y_k(t) = \frac{1}{\xi} \int_{x_k}^t \int_0^t f(\tau, x) d\tau dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

На области D_k искомые функции v и r представляются в виде

$$\begin{aligned} v(t, x) &= w_k^+(t + x) + w_k^-(t - x) \\ r(t, x) &= w_k^+(t + x) - w_k^-(t - x) + y_k(t); \quad (t, x) \in D_k, \quad k \in N, \end{aligned} \quad (6.4)$$

После непосредственной подстановки (6.4) в функционал состояния F получается, что $F = 0$, потому что $\partial r / \partial x \equiv \partial v / \partial t$ и $\partial r / \partial t \equiv \partial v / \partial x - f$.

Введем новые декартовы координаты (z^+, z^-) , орты которых связаны с двумя характеристиками решения. Сами орты показаны на рис. 2 сплошными наклонными линиями, причем ось z^- показана для наглядности со сдвигом вдоль оси z^+ . Два семейства характеристик – это прямолинейные сегменты в области D , на которых не меняются значения функций $w_j^\pm(t \pm x)$. Новые координаты связаны с (t, x) биективными линейными преобразованиями:

$$z^\pm = t \pm x, \quad t = \frac{z^+ + z^-}{2}, \quad x = \frac{z^+ - z^-}{2} \quad (6.5)$$

Показанные пунктиром на рис. 2 наклонные ребра сетки – это образующие сетку характеристики, определяемые в новых координатах как

$$S_i^\pm = \{(z^+, z^-) \in D : z^\pm = j\xi, j \in \mathbf{Z}\}$$

Строящаяся сетка дополняется прямолинейными сегментами, параллельными осям t и x . Эти отрезки проще задавать в старых координатах:

$$\begin{aligned} S_j^t &= \{(t, x) \in D : t = t_j\}; \quad j \in M^* \\ S_k^x &= \{(t, x) \in D : x = x_k\}; \quad k \in N^* \end{aligned}$$

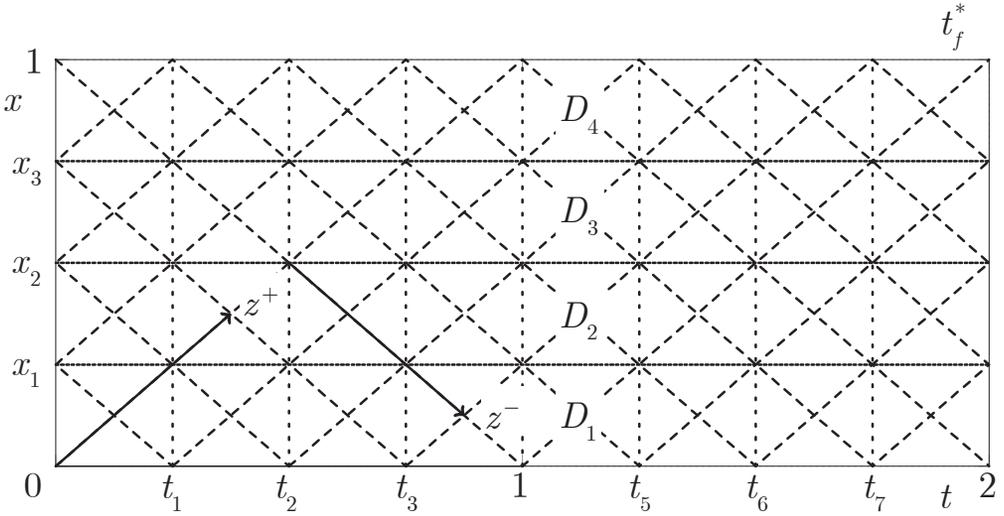


Рис. 2. Сетка в пространственно-временной области D для $n_x = 4$

Определим на каждой области D_j вспомогательные функции:

$$\begin{aligned}
 w_{j,k}^\pm : Z \rightarrow \mathbf{R} : w_{j,k}^\pm(z) &= w_j^\pm(z + z_{j,k}^\pm); \quad z_{j,k}^\pm = z_j^\pm + k\xi \\
 z_j^+ &= (j-1)\xi, \quad z_j^- = -j\xi; \quad j \in N, \quad k \in M^*, \quad Z = (0, \xi) \\
 y_{j,l} : Z \rightarrow \mathbf{R} : y_{j,l}(z) &= y_j(z + t_l); \quad j \in N, \quad l \in M
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Согласно (6.4), линейная комбинация $w_{j,k}^+$, $w_{j,l}^-$ и $y_{j,m}$ с допустимой комбинацией индексов j, k, l, m уникально определяет пару переменные (v, r) на каждом треугольном элементе сетки.

Поскольку решение принадлежит гильбертову пространству $(v, r) \in H^1(D; \mathbf{R}^2)$, в силу непрерывности линейного преобразования (6.4) подобным же пространствам должны принадлежать и одномерные функции $w_{j,k}^\pm \in H^1(Z)$, $y_{j,l} \in H^1(Z)$. Дополнительно, в силу леммы Соболева [20] эти функции непрерывны и продолжаемы непрерывно на замыкание области определения: $w_{j,k}^\pm \in C^0(\bar{Z})$, $y_{j,l} \in C^0(\bar{Z})$.

Для непрерывности решения (v, r) на замыкании области \bar{D} необходимо выполнить граничные соотношения (2.9) и условия непрерывности динамической переменной r и кинематической переменной v на внутренних ребрах сетки S_k^x . Принимая во внимание (2.9), (6.4), (6.6), а так же вытекающие из (2.1) и (6.3) точечные условия $y_{j,0}(0) = 0$, терминальные ограничения на сегменте S_0' для каждой области D_j после эквивалентных преобразований примут вид

$$\begin{aligned}
 w_{j,2n_x}^+(z) + w_{j,2n_x}^-(\xi - z) &= 0 \\
 w_{j,2n_x}^+(z) - w_{j,2n_x}^-(\xi - z) &= 0; \quad j \in N
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

В свою очередь начальные условия на бегущие волны предстанут в форме

$$\begin{aligned}
 w_{j,0}^+(z) + w_{j,0}^-(\xi - z) &= v_0(z + z_j^+) \\
 w_{j,0}^+(z) - w_{j,0}^-(\xi - z) &= r_0(z + z_j^+); \quad j \in N
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

Краевые условия из (2.9) для ребер сетки, лежащих на граничных сегментах S_0^x и $S_{n_x}^x$, переписываются в форме

$$\begin{aligned} w_{1,k-1}^+(z) + w_{1,k}^-(z) &= 0 \\ w_{n_x,k}^+(z) - w_{n_x,k-1}^-(z) + y_{n_x,k}(z) &= 0; \quad k \in M \end{aligned} \quad (6.9)$$

Условия непрерывности функций v и r на внутренних сегментах S_j^x задаются как

$$\begin{aligned} w_{j,k}^+(z) + w_{j,k-1}^-(z) &= w_{j+1,k-1}^+(z) + w_{j+1,k}^-(z) \\ w_{j,k}^+(z) - w_{j,k-1}^-(z) + y_{j,k}(z) &= w_{j+1,k-1}^+(z) - w_{j+1,k}^-(z) + y_{j+1,k}(z) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$j \in N_* = \{1, n_x - 1\}, \quad k \in M$$

Следует отметить, что по построению, согласно (6.3) и (6.6), вспомогательные функции $y_{j,k}$ либо равны нулю, если $X_k \cap U = \emptyset$, либо определяются через значения управления $u(t)$, если $X_k \subset U$. Введем новые функции управления в виде

$$\begin{aligned} u_k : Z \rightarrow \mathbf{R} : u_k(z) &= u(z + t_k), \quad k \in M \\ y_{j,k} &= \begin{cases} u_k, & n^- < j \leq n^+ \\ 0, & j \leq n^- \vee j > n^+ \end{cases} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Удобно сгруппировать независимые переменные в два вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_j)_{j=1}^{2n_x}, \quad \mathbf{w} = (w_j)_{j=1}^{n_w}, \quad n_w = 2n_x(2n_x + 1) \\ w_k &= \begin{cases} w_{l,m}^+, & k = (l-1)(2n_x + 1) + m \\ w_{l,m}^-, & k = (l-1)(2n_x + 1) + m + n_w / 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Тогда, с учетом (6.11), систему (6.7)–(6.10) можно рассматривать как линейную алгебраическую, которая задается относительно компонент вектор-функций \mathbf{u} и \mathbf{w} , заданных на интервале $Z = (0, \xi)$. Число переменных и уравнений в этой системе совпадает и равно $4n_x(n_x + 1)$.

Подсистема (6.8)–(6.10), которая определяет начально-краевую задачу о движении стержня при произвольном управлении, всегда разрешима относительно компонент функции \mathbf{w} . Для этого предлагается следующий алгоритм.

На нулевом шаге для каждой области D_j , $j \in N$, разрешаются начальные условия (6.8) относительно двух переменных $w_{j,0}^+$ и $w_{j,0}^-$. Складывая и вычитая два уравнения, а также заменяя в уравнении относительно бегущей волны $w_{j,0}^+$ аргумент z на $z' = \xi - z$, искомые переменные удается выразить через начальные функции:

$$\begin{aligned} w_{j,0}^+(z) &= \frac{1}{2}v_0(z_j^+ + z) + \frac{1}{2}r_0(z_j^+ + z) \\ w_{j,0}^-(z') &= \frac{1}{2}v_0(z_{j+1}^+ - z') - \frac{1}{2}r_0(z_{j+1}^+ - z'); \quad j \in N \end{aligned} \quad (6.13)$$

На следующих шагах с номерами $k \in M$ удовлетворяются краевые и межэлементные условия (6.9), (6.10) с соответствующими индексами. При этом два крайних уравнения из (6.9) разрешаются относительно переменных $w_{1,k}^-$ и $w_{n_x,k}^+$. На том же k -м шаге парами разрешаются уравнения с теми же значениями k из (6.10) относительно бегущих волн $w_{j,k}^+$ и $w_{j+1,k}^-$. Отметим, что остальные функции бегущих волн $w_{j,k-1}^-$ и $w_{j+1,k-1}^+$, входящие в эту подсистему, уже выражены на предыдущих шагах через начальные распределения v_0 , r_0 и возможно управления u_l ; $l = 1, k - 1$.

В результате решения начально-краевой системы (6.8)–(6.10) вектор-функция бегущих волн может быть представлена в линейной зависимости от известного начального состояния стержня и вектор-функции управления: $\mathbf{w}(r_0, v_0, \mathbf{u})$. Подставляя необходимые компоненты вектора \mathbf{w} в терминальные соотношения (6.7), получим систему линейных уравнений относительно управления \mathbf{u} .

Разрешимость этой системы напрямую зависит от отсутствия условий помодовой неуправляемости (4.6) и отделимости от нуля коэффициентов c_n , заданных в (4.5) и определяющих ряд (5.6). Сходимость этого ряда доказывается заменой в (5.6) множителя c_n^{-1} у каждого члена ряда на константу $C = \max\{c_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Можно показать [13], что тригонометрическое выражение (4.5), задающее величину константы c_n , пробегает, согласно (4.1), конечное число значений (не более n_x , см. (6.1)) в случае выбора рациональных параметров x^\pm . Если же не выполняется ни одно из условий (4.6), для всякого n коэффициент c_n не равен нулю, а это значит, существует положительная константа $C < \infty$, мажорирующая ряд.

7. Пример гашения колебаний стержня. Рассмотрим случай, когда длина ПЭ равна $\lambda = 1/4$, расстояние от его левого края до жесткой заделки принимает только четыре значения $x^- = n^- \xi = n^- \lambda$, $n^- = 0, 1, 2, 3$. В качестве критерия качества управления может служить отношение квадрата нормы управляющей силы $\|f\|^2 = \frac{1}{2t_f^*} \int_D f dt dx = \frac{1}{16} \int_0^2 \dot{u}(t) dt$ к энергии стержня в начальный момент

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 (r_0^2(x) + v_0^2(x)) dx \tag{7.1}$$

В табл. 1 для четырех возможных положений ПЭ приведены значения усредненной энергии управляющей силы $\|f\|^2$ в случае, когда стержень в начальный момент неподвижен ($r_0(x) \equiv 0$), а перемещения распределены, согласно (4.1), по n -ой моде: $v_0(x) = V_n(x)$. В силу нормировки базисных функций $\{(R_n, V_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ по функционалу (7.1) в начальный момент полная энергия стержня равна $E_0 = 1$. В табл. 1 показаны результаты расчета квадрата нормы силы для восьми низших мод ($n = 1, 8$). Эти величины обратно пропорциональны квадрату коэффициента c_n , определенного в (4.5). В силу периодичности выражения (4.5) получается, что $c_{n+2n_x} = c_n$, поэтому и значения $\|f\|^2$ будут повторяться при увеличении n с периодом $2n_x = 8$. Более того, можно показать, что $\|f\|^2$ совпадают для мод с номерами $m \leq n_x$ и $n = n_x - m + 1$.

Согласно приведенным в таблице данным, самым “энергетически” эффективным для выбранных геометрических параметров оказалось расположение ПЭ с $x^- = 1/4$ и $x^- = 1/2$ при воздействии на моды с номерами $n \in \{4 + 8j, 5 + 8j : j \in \mathbb{Z}_+\}$ и $n \in \{2 + 8j, 7 + 8j : j \in \mathbb{Z}_+\}$, соответственно. Если же говорить о минимизации максимального значения нормы силы, то наилучшим расположением для ПЭ будет непосредственно у жесткой заделки ($n^- = 0, \max_{n \in \mathbb{N}} \|f\|^2 = 1.707$), а наихудшим у свободного конца стержня ($n^- = 3, \max_{n \in \mathbb{N}} \|f\|^2 = 42.15$).

Таблица 1. Квадраты норм управляющих сил $\|f\|^2$ для начальных распределений перемещений по n -й моде ($v_0 = V_n, r = 0$) при различных положениях ПЭ ($\lambda = \xi = 1/4$)

$n^- \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1.707	0.293	0.293	1.707	0.293	0.293	1.707
1	2.375	5.320	0.094	0.211	0.211	0.094	5.320	2.375
2	5.320	0.211	2.375	0.094	0.094	2.375	0.211	5.320
3	43.15	0.656	0.131	0.068	0.068	0.131	0.656	43.15

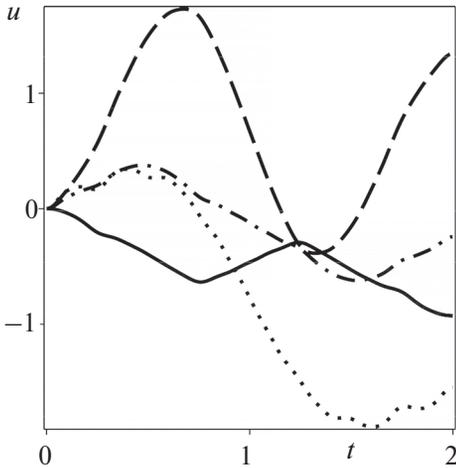


Рис. 3. Управление $u^*(t)$ для $\lambda = 1/4$:
 $x^- = 0$ (сплошная кривая),
 $x^- = 1/4$ (штриховая),
 $x^- = 1/2$ (штрихпунктирная),
 $x^- = 3/4$ (пунктирная).

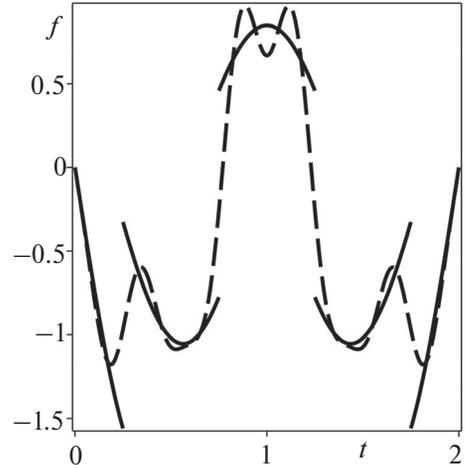


Рис. 4. Сила $f(t, 1/8)$ для $x^- = 0$ и $\lambda = 1/4$:
 точное решение (сплошная кривая)
 и 8-модовое приближение (штриховая кривая).

В качестве примера расчета управления, которое гасит колебания на минимально допустимом интервале времени $t \in (0, 2)$, возьмем изначально неподвижный стержень, перемещения точек которого определяются тригонометрической функцией:

$$r_0(x) = 0, \quad v_0(x) = \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4 \sin 4 + 4}} \quad (7.2)$$

не пропорциональной никакой собственной форме V_n . Знаменатель дроби в (7.2) выбран так, чтобы энергия стержня в момент времени $t = 0$ была единичной.

На рис. 3 показаны графики функций управления $u^*(t)$ для начального состояния (7.2) при различных расположениях ПЭ ($n^- = 0, 1, 2, 3$, $\lambda = \xi = 1/4$). По построению $u^*(0) = 0$ и все сигналы управления непрерывно меняются во времени. Максимальное значение управление достигает при $n^- = 1$, а минимальное – при $n^- = 3$.

График управляющей силы $f(t, 1/8)$ при $n^- = 0$ (ПЭ примыкает к заделке) приведен на рис. 4 сплошной линией. Как видно из графика, функция f терпит разрыв по времени в четырех точках: $t = 1/4, 3/4, 5/4, 7/4$. На рис. 4 штриховая кривая отображает приближенные значения этой силы, найденные дифференцированием помодового выражения (5.6), в котором суммируются только 8 членов ряда. Полученная аппроксимация – аналитическая функция, которая будет с ростом числа учтенных слагаемых приближаться в пространстве $L^2(0, 2)$ к точному выражению, полученному в предыдущем разделе с помощью бегущих волн. Следует отметить, что 8-модовая аппроксимация самого управления $u^*(t)$ почти сливается с точным решением, поэтому не приведена на рис. 3.

На рис. 5 для выбранных геометрических параметров ($n^- = 0$, $\lambda = 1/4$) и начального распределения (7.2) в пространственно-временной области D построены значения динамического потенциала $r(t, x)$. Этот график показывает, что потенциал, но не его частные производные, непрерывно изменяется в пространстве и времени и строго удовлетворяет краевое ограничение $r(t, 1) = 0$, а также однородные условия в начале и в конце процесса.

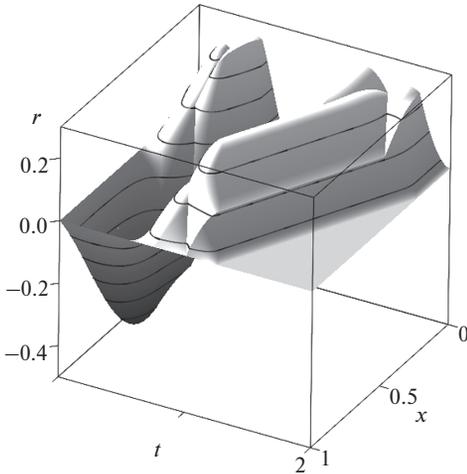


Рис. 5. Распределение динамического потенциала $r(t, x)$ при критическом управлении для $x^- = 0$ и $\lambda = 1/4$

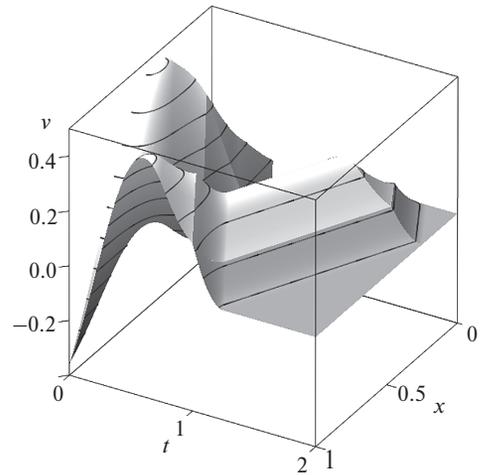


Рис. 6. Распределение упругих перемещений $v(t, x)$ при критическом управлении для $x^- = 0$ и $\lambda = 1/4$

На рис. 6 изображены перемещения v как функции временной и пространственной координат (t, x) . Распределение $w(t, x)$ тоже непрерывны, в заделке сдвиги нулевые ($w(t, 0) = 0$), а в терминальный момент времени $t = 2$ стержень переходит в недеформированное состояние с нулевой скоростью (везде кроме точки $(t, x) = (2, 1/4)$, где сходятся линии разрывов первой производной по направлениям нормальным к характеристикам). Максимум модуля перемещений достигается на границе области D в точках $(t, x) = (0, \pi/8)$ и $(t, x) = (\pi/8, 0)$.

Заключение. Рассмотрен вопрос об управляемости продольных колебаний однородного упругого стержня при скалярном управляющем воздействии нормальной силы в поперечном сечении, возбуждаемой равномерно на заданном участке. Найдены координаты концов этого участка, при которых управление не влияет на амплитуду некоторых собственных мод колебаний. В отсутствие выявленных условий неуправляемости закон демпфирования построен в виде ряда, сходящегося в энергетическом пространстве на кратчайшем допустимом интервале времени. В случае рациональных соотношений на геометрические параметры ПЭ предложен алгоритм явного решения задачи о гашении колебаний за это время в виде конечной алгебраической комбинации начальных распределений.

Исследование выполнено по теме государственного задания (госрегистрация № 124012500443-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
2. Lions J.L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. New York: Springer, 1971. 400 p.
3. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
4. Chen G. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. II // SIAM J. Control Optim. 1981. V. 19. № 1. P. 114–122.
5. Романов И.В., Шамаев А.С. О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 109–116.

6. *Гавриков А.А., Костин Г.В.* Изгибные колебания упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическими силами // ПММ. 2023. Т. 87. № 5. С. 801–819.
7. IEEE Standard on Piezoelectricity // ANSI/IEEE Std 176-1987. 1988.
<https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
8. *Kucuk I., Sadek I., Yilmaz Y.* Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam vibrations using piezoelectric actuators // J. Franklin Inst. 2014. V. 351. № 2. P. 656–666.
9. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
10. *Kostin G., Gavrikov A.* Controllability and optimal control design for an elastic rod actuated by piezoelements // IFAC-PapersOnLine. 2022. V. 55. № 16. P. 350–355.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.049>
11. *Гавриков А.А., Костин Г.В.* Оптимизация продольных движений упругого стержня с помощью периодически распределенных пьезоэлектрических сил // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 6. С. 93–109.
12. *Kostin G., Gavrikov A.* Modeling and optimal control of longitudinal motions for an elastic rod with distributed forces // ArXiv. 2022. arXiv:2206.06139 5. P. 1–11.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.06139>
13. *Gavrikov A., Kostin G.* Optimal LQR control for longitudinal vibrations of an elastic rod actuated by distributed and boundary forces // Mech.&Machine Sci. V. 125. 2023. P. 285–295.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_28
14. *Ho L.F.* Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28. № 3. P. 733–748.
15. *Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M.* A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures // J. Sound&Vibr. 2001. V. 243. № 5. P. 861–882.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>
16. *Gupta V., Sharma M., Thakur N.* Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: A technical review // J. Intell. Mater. Syst.&Struct. 2010. V. 21. № 12. P. 1227–1243.
<https://doi.org/10.1177/1045389X10381659>
17. *Botta F., Rossi A., Belfiore N.P.* A novel method to fully suppress single and bi-modal excitations due to the support vibration by means of piezoelectric actuators // J. Sound&Vibr. 2021. V. 510. № 13. P. 116260.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116260>
18. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
19. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
20. *Иосада К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1968. 624 с.

Damping of Longitudinal Vibrations of an Elastic Rod by a Piezoelectric Element

G. V. Kostin^{a, #}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: kostin@ipmnet.ru*

Possible damping of longitudinal vibrations of a thin homogeneous elastic rod under the influence of a normal force in the cross section is studied. This time-varying force, which can be excited, for example, by using piezoelectric elements, is uniformly distributed along the length on a given segment of the cantilevered rod and is equal to zero outside it. Those placements of the ends of the segment are presented in which the excited force does not affect the amplitude of certain modes. The minimum time in which the oscillations of all other modes can be damped is found, and based on the Fourier method, the corresponding law of the damping force is obtained in the form of a series. A generalized formulation of the boundary value problem on moving the rod during this time to the zero terminal state is given, for which an algorithm for exact solution is proposed in the case of rational relations on the geometric parameters. Unknown functions of the rod state are sought in the form of a linear combination of the traveling wave and normal force functions, which are determined from a linear system of algebraic equations following from boundary relations and continuity conditions. The solutions obtained in series by the Fourier method and in the form of d'Alembert traveling waves are compared.

Keywords: elastic rod, piezoelectric forces, Fourier method, vibration damping, traveling waves

REFERENCES

1. *Butkovskii A.G.* Distributed Control Systems. N.Y.: Elsevier, 1970. 446 p.
2. *Lions J.L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. N.Y.: Springer, 1971. 400 p.
3. *Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A.* Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications. Berlin: Springer, 2008. 408 p.
4. *Chen G.* Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. II // *SIAM J. Control Optimization*, 1981, vol. 19, no. 1, pp. 114–122.
5. *Romanov I.V., Shamaev A.S.* On a boundary controllability problem for a system governed by the two-dimensional wave equation // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 2019, vol. 58, no. 1, pp. 105–112.
6. *Gavrikov A.A., Kostin G.V.* Bending vibrations of an elastic rod controlled by piezoelectric forces // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 8, pp. 2803–2817.
7. IEEE Standard on Piezoelectricity // *ANSI/IEEE Std 176-1987*. 1988.
<https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
8. *Kucuk I., Sadek I., Yilmaz Y.* Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam vibrations using piezoelectric actuators // *J. Franklin Inst.*, 2014, vol. 351, no. 2, pp. 656–666.
9. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
10. *Kostin G., Gavrikov A.* Controllability and optimal control design for an elastic rod actuated by piezoelements // *IFAC-PapersOnLine*, 2022, vol. 55, no. 16, pp. 350–355.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.049>
11. *Gavrikov A.A., Kostin G.V.* Optimization of longitudinal motions of an elastic rod using periodically distributed piezoelectric forces // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 2023, vol. 62, no. 5, pp. 800–816.
12. *Kostin G., Gavrikov A.* Modeling and optimal control of longitudinal motions for an elastic rod with distributed forces // *ArXiv*, 2022, arXiv: 2206.06139v2, pp. 1–11.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.06139>
13. *Gavrikov A., Kostin G.* Optimal LQR control for longitudinal vibrations of an elastic rod actuated by distributed and boundary forces // *Mech.&Machine Sci.*, 2023, vol. 125, pp. 285–295.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_28
14. *Ho L.F.* Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control // *SIAM J. Control&Optim.*, 1990, vol. 28, no. 3, pp. 733–748.
15. *Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M.* A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures // *J. Sound&Vibr.*, 2001, vol. 243, no. 5, pp. 861–882.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>
16. *Gupta V., Sharma M., Thakur N.* Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: A technical review // *J. Intell. Mater. Syst.&Struct.*, 2010, vol. 21, no. 12, pp. 1227–1243.
<https://doi.org/10.1177/1045389X10381659>
17. *Botta F., Rossi A., Belfiore N.P.* A novel method to fully suppress single and bi-modal excitations due to the support vibration by means of piezoelectric actuators // *J. Sound&Vibr.*, 2021, vol. 510, no. 13, pp. 116260.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116260>
18. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Equations of Mathematical Physics. Oxford: Pergamon, 1963. 800 p.
19. *Mikhlin S.G.* Mathematical physics; an Advanced Course. Amsterdam: North-Holland, 1971. 576 p.
20. *Yosida K.* Functional Analysis. Berlin: Springer, 1965. 504 p.

УДК 531.36

О ДВИЖЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СИЛОВЫХ ПОЛЯХ, КАК ДВИЖЕНИИ В ИХ ОТСУТСТВИИ ПРИ НАЛОЖЕНИИ СВЯЗЕЙ

© 2024 Е. С. Брискин^{1,*}

¹Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

*e-mail: dtm@vstu.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.

После доработки 10.07.2024 г.

Принята к публикации 22.07.2024 г.

Изучается возможность обратимости принципа освобожденности от связей, широко используемого при решении задач механики. Формулируется обратное положение, в соответствии с которым движение системы не изменится, если игнорировать действующие на нее силы и наложить связи, реакции которых и обеспечивают исходное движение. В этом случае изучаемая механическая система получается из другой, с большим числом степеней свободы, на которую накладываются как голономные идеальные связи, так и неголономные, а движение происходит в отсутствие действующих активных сил. Основной задачей является определение уравнений связей в расширенном пространстве конфигураций, однозначно порождающих заданные силовые поля в исходном пространстве.

Ключевые слова: принцип освобожденности, обратимость, голономные связи, потенциальные силы, уравнения Лагранжа

DOI: 10.31857/S0032823524040034, EDN: WWFHDC

1. Введение. В механике известна аксиома об освобожденности от связей. Так, например, в [1] она формулируется следующим образом: «Механическое состояние системы не изменится, если освободить ее от связей, приложив к точкам системы силы, равные реакциям связей». Для однозначного определения реакции связи требуется дополнительное условие [2]. Обычно принимается условие идеальности связи и тогда между той или иной связью и силой (реакцией связи) устанавливается однозначное соответствие. Применение принципа освобождения от связей предполагает увеличение числа степеней свободы исходной механической системы на число отброшенных связей.

Формулируется обратное положение, в соответствии с которым движение системы не изменится, если игнорировать действующие на нее силы и наложить связи, реакции которых и обеспечивают заданное движение [3, 4]. Такая аксиома для однозначного соответствия между силами и связями также требует дополнительных условий, например, их идеальности. В этом случае происходит обратное явление: изучаемая исходная механическая система получается из другой, с большим числом степеней свободы механической системы, на которую накладываются голономные идеальные связи, а движение происходит в отсутствие действующих активных сил. Таким образом основной задачей является определение уравнений связей в расширенном пространстве конфигураций, однозначно порождающих заданное силовое поле в исходном пространстве.

2. Постановка задачи. Как известно [1, 2, 5] изучение динамики движения механической системы с s степенями свободы на которую накладываются стационарные голономные связи можно осуществлять с помощью уравнений Лагранжа

$$a_{ij}\ddot{q}^j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^n} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^n \dot{q}^j = Q_i \quad (i, j, n = 1 \dots s) \quad (2.1)$$

В дифференциальных уравнениях (2.1) q^i – обобщенные координаты, a_{ij} – элементы матрицы инерционных коэффициентов, в общем случае зависящих от всех обобщенных координат, Q_i – обобщенные силы, зависящие от внешних стационарных, не зависящих от времени сил, действующих на механическую систему и соответствующие каждой i обобщенной координате. Повторяющиеся в (1.1) верхние и нижние индексы, как это принято в тензорном анализе [6] означают по ним суммирование.

Рассматривается и другая механическая система с $s + 1$ степенями свободы отличающаяся от исходной отсутствием внешних сил, генерирующих в (2.1) обобщенные силы Q_i , но дополненная уравнением движения относительно новой введенной координаты $q^{s+1}(t)$ и уравнением голономной идеальной связи между координатами q^i, \dots, q^s, q^{s+1}

$$f = f(q^1, \dots, q^s, q^{s+1}) = 0 \quad (2.2)$$

Ставится задача определения такого уравнения связи (2.2), которое при известном законе изменения координаты $q^{s+1}(t)$ обеспечивает те же законы изменения координат $q^i(t)$ новой рассматриваемой механической системы, как и у исходной при тех же начальных условиях. Если такая связь существует, то справедлив принцип обратный принципу освобожденности от связей, а именно: можно игнорировать действующие на механическую систему силы и заменить их действие наложением связей.

3. Метод решения. Для новой рассматриваемой механической системы вводится матрица инерционных коэффициентов a_{pr}^* отличающаяся от такой же матрицы для исходной a_{ij} системы наличием дополнительной строки и столбца

$$a_{pr}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2s} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_{s+1,s+1} \end{pmatrix} \quad (p, r = 1 \dots s + 1) \quad (3.1)$$

Причем ненулевой элемент $a_{s+1,s+1}$ считается функцией обобщенных координат q^1, \dots, q^s, q^{s+1} . Такая структура матрицы инерционных коэффициентов соответствует ортогональности дополнительно введенной координаты q^{s+1} всем остальным. Примером такой новой механической системы может являться исходный плоский механизм с s степенями подвижности, которому сообщается движение, как единому целому, вдоль оси, ортогональной исходной поверхности.

С геометрической точки зрения такая матрица инерционных коэффициентов соответствует метрике расширенного риманова пространства, которое всегда может быть реализовано во вращающемся евклидовом пространстве размерность N которого определяется формулой [6]

$$N = \frac{(s + 1)(s + 2)}{2} \quad (3.2)$$

Кинетическая энергия T^* новой системы определяется выражением

$$T^* = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} a_{s+1,s+1} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} \quad (3.3)$$

Тогда уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа в отсутствии действия внешних сил можно разделить на две группы. В первую группу входят s уравнений, соответствующих s первым координатам

$$a_{ij}\ddot{q}^j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^n} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^n \dot{q}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} \quad (i, j, n = 1 \dots s) \quad (3.4)$$

Во второй группе содержится только одно уравнение, составленное для $s + 1$ координаты

$$a_{s+1,s+1}\ddot{q}^{s+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s+1,s+1}}{\partial q^{s+1}} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} = - \frac{\partial a_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^{s+1} \quad (3.5)$$

Для того чтобы уравнения (3.4) описывали движение исходной механической системы необходимо, чтобы инерционный коэффициент $a_{s+1,s+1}$ определялся из системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно координат q^1, \dots, q^s

$$Q_i = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} \quad (3.6)$$

В уравнениях (3.6), в силу независимости Q_i от времени \dot{q}^{s+1} должна быть величиной постоянной и рассматриваться как параметр. Результатом решения будет являться функция $a_{s+1,s+1} = \varphi_{s+1,s+1}$ зависящая от координат q^1, \dots, q^s с точностью до аддитивной функции $\psi_{s+1,s+1}$, зависящей от дополнительно введенной координаты q^{s+1}

$$a_{s+1,s+1} = \varphi_{s+1,s+1}(q^1, \dots, q^s) + \psi_{s+1,s+1}(q^{s+1}) \quad (3.7)$$

Тогда уравнения (3.4) и (3.5) можно представить в форме

$$a_{ij}\ddot{q}^j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^n} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^n \dot{q}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} \quad (3.8)$$

$$\left(\psi_{s+1,s+1} + \varphi_{s+1,s+1} \right) \ddot{q}^{s+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{s+1,s+1}}{\partial q^{s+1}} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} = - \frac{\partial \varphi_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^{s+1}$$

Такая структура уравнений (3.8) позволяет правые части полученных уравнений рассматривать как характеристики взаимодействия исходной системы, перемещающейся в исходном s -мерном пространстве конфигураций, с той же системой, но перемещающейся как твердое тело поступательно относительно дополнительно введенной координаты q^{s+1} . При отсутствии внешних сил Q_i , действующих на исходную систему, правые части уравнений в соответствии с (3.8) обращаются в нуль, рассматриваемые движения независимы, а кинетическая энергия в каждом движении сохраняется. При наличии внешних сил Q_i , действующих на исходную механическую систему, кинетическая энергия всей системы с учетом ее дополнительного движения также сохраняется. В процессе движения может осуществляться лишь перераспределение кинетической энергии между отдельными видами движения.

Особенность уравнения (3.6) состоит также в том, что рассматриваемый метод замены сил уравнениями связей может быть реализован только для потенциальных сил

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q^i}, \quad (3.9)$$

где Π – потенциальная энергия исходной механической системы.

Сопоставление (3.9) с (3.6) и (3.3) показывает, что потенциальная энергия Π исходной системы с точностью до аддитивной постоянной равна части кинетической энергии той же системы, определяемой поступательным движением как единого

твердого тела, с изменением дополнительно введенной виртуальной координаты q^{s+1} , ортогональной всем действительным координатам q^1, \dots, q^s .

Для того, чтобы уравнения имели форму уравнений Лагранжа с неопределенными множителями λ необходимо ввести уравнение связи (2.2), а правые части уравнений (3.8) представить в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_{s+1, s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial q^i} \\ - \frac{\partial \varphi_{s+1, s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^{s+1} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial q^{s+1}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.10) следует рассматривать как уравнения для определения уравнения связи (2.2) и неопределенного множителя λ . Этим уравнениям удовлетворяет решение

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \mu \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} = \frac{1}{2} \mu v^2 = \text{const} \\ f &= \frac{1}{\mu} \left[\varphi_{s+1, s+1}(q^1 \dots q^s) + \frac{1}{2} \psi_{s+1, s+1}(q^{s+1}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где μ – произвольный нормирующий размерный постоянный множитель, позволяющий уравнение связи (2.2) представлять в безразмерной форме.

Следует иметь в виду, что решение (3.11) представлено с точностью до постоянного слагаемого.

Аддитивная функция $\psi_{s+1, s+1}$, входящая в (3.7), (3.8), (3.11) должна быть дифференцируемой функцией. Наиболее простой ее вид

$$\psi_{s+1, s+1} = \mu q^{s+1} \quad (3.12)$$

Тогда из (3.11) можно установить связь введенной дополнительной координаты q^{s+1} , со всеми обобщенными координатами изначально рассматриваемой механической системы (2.1)

$$\mu q^{s+1} = a_{s+1, s+1}(q^1, \dots, q^{s+1}) - \varphi_{s+1, s+1}(q^1, \dots, q^s) \quad (3.13)$$

4. Метод Г. Герца и «скрытые движения». Рассматриваемый метод игнорирования действующих на механическую систему сил и замена их связями согласуется с идеями Герца [7], которые А. Пуанкаре сформулировал следующим образом [8]:

1. «В природе имеются лишь системы со связями, свободные от действия любой внешней силы».

2. «Если некоторые тела кажутся нам подчиненными каким-либо силам, это значит, что они связаны с другими телами, для нас невидимыми».

Однако, по мнению К. Ланцош [9, стр. 157–158], «эта любопытная гипотеза так и осталась в виде эскизных набросков», хотя «теория относительности ... дала эффективный пример бессиловой механики Герца».

Вместе с тем имеются и некоторые отличия от предлагаемого Герцем метода. В частности, в бессиловой механике обязательно вводятся циклические координаты, за счет чего получают первые интегралы движения. Поэтому и возникает возможность формировать воздействия на изучаемую механическую систему и трактовать эти воздействия как силы.

Действительно, если материальная точка движется по поверхности вращения и ее положение определяется координатами $u^1 u^1$ и $u^2 = \varphi$ (рис. 1), то ее кинетическая энергия T будет определяться выражением

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{u}^1)^2 + \frac{1}{2}mr^2(u^1)\dot{\phi}^2, \quad (4.1)$$

где $r(u^1)$ – радиус окружности в сечении поверхности с координатой u^1 , ϕ циклическая координата.

Тогда, при отсутствии внешних активных сил, рассматривая поверхность вращения как идеальную связь, можно получить дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned} m\ddot{u}^1 - mru^1 \frac{dr}{du^1} \dot{\phi}^2 &= 0 \\ mr^2(u^1)\dot{\phi} &= K = \text{const} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Второе уравнение в (6.2) – и есть первый интеграл, а физический смысл постоянной K – момент количества движения точки относительно оси Ox^3 .

Теперь можно считать, что на материальную точку действует сила Q , направленная по касательной к координатной оси u^1 в каждой точке траектории

$$Q(u_1) = \frac{K^2}{m} \frac{1}{r^3} \frac{dr}{du^1} = \frac{K^2}{2mr_0^2} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(-\frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (4.3)$$

где r_0 – радиус окружности в начальном сечении поверхности вращения.

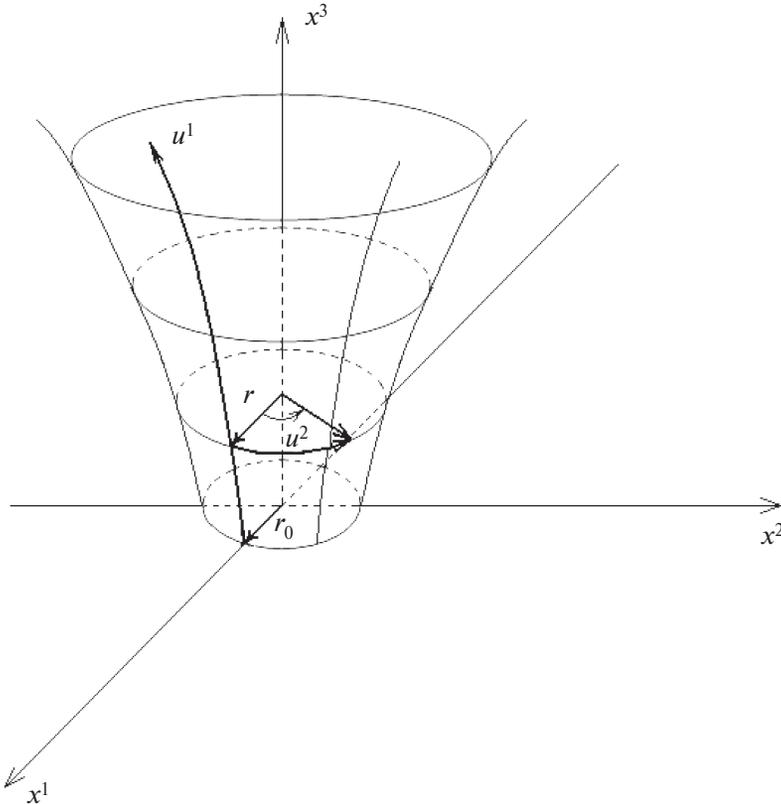


Рис. 1. Поверхность, соответствующая голономной связи, генерирующей активную силу $Q = Q(u^1)$

Предлагаемый метод учета сил наложением связей не предполагает наличия циклических координат, но первый интеграл имеется – постоянство и равенство скоростей всех точек рассматриваемой механической системы, перемещающейся относительно дополнительно введенной координаты ортогональной всем остальным.

5. Одномерное движение материальной точки массы m под действием различных сил
Уравнение для исходной механической системы согласно (2.1) имеет вид

$$m\ddot{q}^1 = Q(q^1) \quad (5.1)$$

Вводится координата q^2 и определяется инерционный коэффициент $a_{22}(q^1, q^2)$ из уравнения типа (3.6) при $\dot{q}^2 = v = \text{const}$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial q^1} = \frac{1}{v^2} Q(q^1) \quad (5.2)$$

Тогда кинетическая энергия новой механической системы в соответствии с (3.3) определяется выражением

$$T^* = \frac{1}{2} m(\dot{q}^1)^2 + \frac{1}{2} a_{22}(\dot{q}^2)^2 \quad (5.3)$$

В этом случае уравнения (3.8) приобретают форму

$$\begin{aligned} m\ddot{q}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial q^1} v^2 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial q^2} v^2 &= -\frac{\partial a_{22}}{\partial q^1} \dot{q}^1 v, \end{aligned} \quad (5.4)$$

но в соответствии с (3.7) и (3.12)

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial q^1} \dot{q}^1 = \frac{\partial \Psi_{s+1, s+1}}{\partial q^1} \dot{q}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_{s+1, s+1}}{\partial q^2} v, \quad (5.5)$$

и поэтому второе уравнение в (5.4) обращается в тождество, а первое уравнение преобразуется к форме уравнения Лагранжа с неопределенным множителем

$$m\ddot{q}^1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^1}, \quad (5.6)$$

где λ и $f(q^1, q^2)$ определяется в соответствии с (3.10), (3.11).

5.1. Действие постоянной силы $Q = \text{const}$

Тогда

$$a_{22} = \frac{2Q}{v^2} q^1 + \mu q^2, \quad \lambda = \frac{1}{2} \mu v^2, \quad f = \frac{2Q}{\mu v^2} q^1 + \frac{1}{2} q^2 = 0 \quad (5.7)$$

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q}^1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^1} = Q \quad (5.8)$$

5.2. Действие восстанавливающей силы, пропорциональной координате $Q = -kq^1$

Тогда

$$a_{22} = -\frac{k(q^1)^2}{v^2} + \mu q^2, \quad \lambda = \frac{1}{2} \mu v^2, \quad f = -\frac{k(q^1)^2}{\mu v^2} + \frac{1}{2} q^2 = 0 \quad (5.9)$$

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q}^1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^1} = -kq^1 \quad (5.10)$$

5.3. Действие силы притяжения $Q = -\gamma / q^{1^2}$

Тогда

$$a_{22} = \frac{2\gamma}{v^2 q^1} + \mu q^2, \quad \lambda = \frac{1}{2} \mu v^2, \quad f = -\frac{2\gamma}{\mu v^2 q^1} + q^2 = 0 \quad (5.11)$$

Уравнение движения имеет вид

$$m \ddot{q}^1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^1} = -\frac{\gamma}{q^{1^2}} \quad (5.12)$$

На рис. 2 для всех трех примеров для наглядности представлены графики зависимостей уравнений голономных связей для рассматриваемых случаев. Размерности параметров, при которых построены графики согласуются с размерностями обобщенных координат q^1 и q^2 .

Выводы. Рассмотренный метод замещения действующих на механическую систему потенциальных сил, не зависящих от времени, соответствует концепции Г. Герца о «скрытых движениях». Отличие состоит в необязательности введения циклических координат и в отсутствии придания формальному механико-математическому методу физической сущности. Практическая значимость предложенного метода не очевидна, но может состоять в более глубоком понимании равноправности решения задач механики как с помощью введения в расчетную схему решаемой задачи сил, подчиняющихся той или иной закономерности или уравнений связи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00477, <https://rscf.ru/project/24-21-00477/>

Автор выражает благодарность участникам семинара по теории управления и динамике систем ИПМех РАН под руководством академика Черноусько Ф.Л. за ценные замечания, способствующие улучшению содержания статьи.

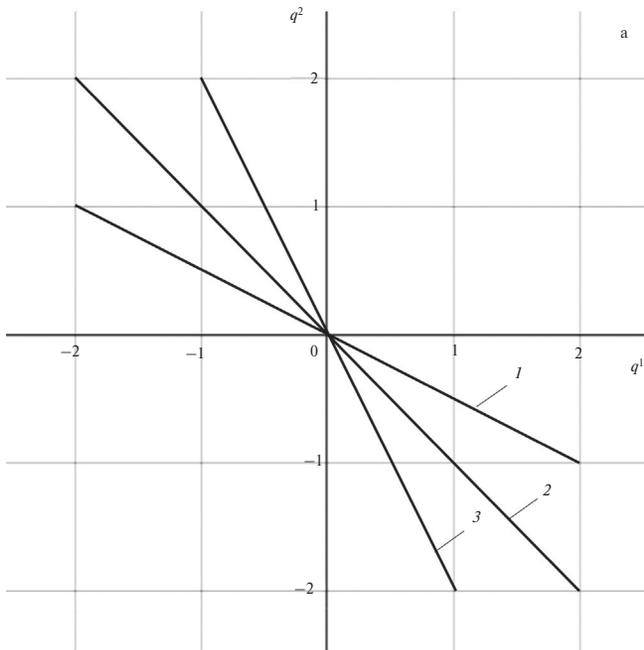


Рис. 2а. Графическое представление уравнений голономных связей: 1–3: $\frac{4Q}{\mu v^2} = -\frac{1}{2}, -1, -2$

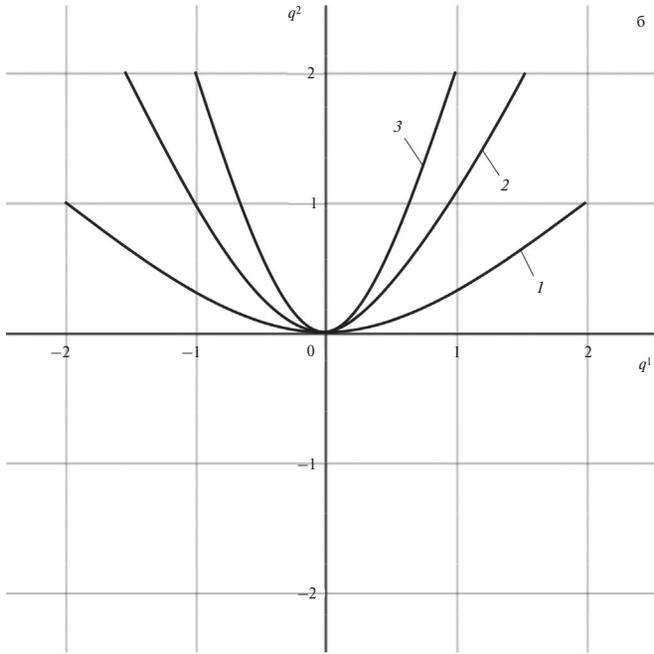


Рис. 26. Графическое представление уравнений голономных связей: $Q = -kq^1$, 1-3: $\frac{2k}{\mu v^2} = 0.25, 1, 2$

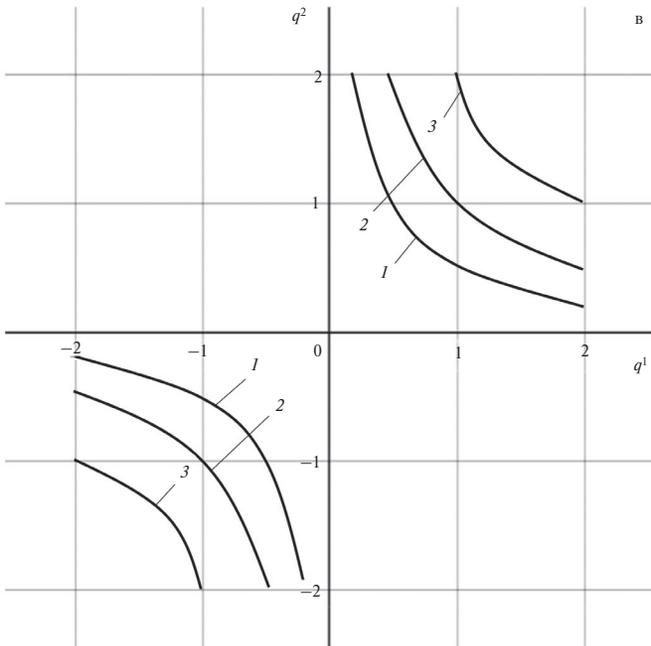


Рис. 27. Графическое представление уравнений голономных связей: $Q = \gamma / v^2 q^1$, 1-3: $\frac{2\gamma}{\mu v^2} = 0.5, 1, 2$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. Т. 1 М.: Наука. 1972. 456 с.
2. *Добронравов В.В.* Основы аналитической механики. М.: Высшая школа. 1976. 262 с.
3. *Брискин Е.С.* Исследование динамики материальной точки на основе замены силовых полей связями // *Вопр. мат. физ. и прикл. матем.*: матер. сем., СПб, 18 декабря 2006 г. Санкт-Петербург: Физ.-тех. ин-т им. А.Ф. Иоффе РАН, 2007. С. 264–271.
4. *Брискин Е.С.* Обратимости принципа освобожденности от связей // в сб.: Теоретическая механика. Вып. 28 / под ред. *Мартыненко Ю.Г.* М.: Изд-во МГУ, 2012. 224 с.
5. *Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую механику. М.: Наука. 1991. 255 с.
6. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. 1967. 664 с.
7. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи / под общ. ред. *Артоболевского И.И.* М.: Изд-во АН СССР, 1959. 386 с.
8. *Пуанкаре А.* Идеи Герца в механике // в кн.: *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи / под общ. ред. *Артоболевского И.И.* М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 310–333.
9. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики / под ред. *Полака Л.С.* М.: Мир, 1965. 408 с.

**On the Motion of Mechanical Systems in Force Fields,
as Motion in Their Absence when Connections Are Applied**

E. S. Briskin^{a,#}

^a*Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia*

[#]*e-mail: dtm@vstu.ru*

The possibility of reversibility of the principle of release from connections, widely used in solving problems of mechanics, is studied. The opposite position is formulated, according to which the movement of the system will not change if the forces acting on it are ignored and connections are imposed, the reactions of which provide the initial movement. In this case, the studied mechanical system is obtained from another, with a large number of degrees of freedom, on which both holonomic ideal connections and nonholonomic ones are superimposed, and movement occurs in the absence of active active forces. The main task is to determine the equations of relations in an expanded space of configurations that uniquely generate given force fields in the original space.

Keywords: principle of releasing, reversibility, holonomic connections, potential forces, Lagrange equations

REFERENCES

1. *Kil'chevskiy N.A.* Course of Theoretical Mechanics. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1972. 456 p. (in Russian)
2. *Dobronravov V.V.* Fundamentals of Analytical Mechanics. Moscow: Vysshaya shkola, 1976. 262 p. (in Russian)
3. *Briskin E.S.* Investigation of the dynamics of a material point based on the replacement of force fields by connections // *Vopr. Matem. Fiziki i Prikl. Matem.*: Materialy Sem., SPb, Dec 18, 2006 Sankt-Peterburg: Ioffe Institute of the RAS, 2007, pp. 264–271. (in Russian)
4. *Briskin E.S.* On the reversibility of the principle of freedom from connections // in: *Teoreticheskaya Mekhanika*. no. 28 / ed. by *Martynenko Yu.G.* Moscow: MSU Pub., 2012. 224 p. (in Russian)
5. *Butenin N.V., Fufayev N.A.* Introduction to Analytical Mechanics. Moscow: Nauka, 1991. 255 p. (in Russian)
6. *Rashevskiy P.K.* Riemann's Geometry and Tensor Analysis. Moscow: Nauka, 1967. 664 p. (in Russian)
7. *Gerts G.* Principles of Mechanics Set Forth in a New Connection. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1959. 386 p. (in Russian)
8. *Puankare A.* Hertz's Ideas in Mechanics // in: *Hertz G.* Principles of Mechanics Set Forth in a New Connection. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1959. pp. 310–333. (in Russian)
9. *Lantsosh K.* Variational Principles of Mechanics. Moscow: Mir, 1965, 408 p. (in Russian)

УДК 621.391

НЕЛИНЕЙНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ АНТЕННЫ ПОДВИЖНОГО РАДИОТЕХНИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ПО ИНЕРЦИАЛЬНО-СПУТНИКОВЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

© 2024 г. С. В. Соколов^{1,*}, В. А. Погорелов^{1,**}, И. В. Решетникова^{1,***}

*¹Московский технический университет связи и информатики,
Москва, Россия*

e-mail: s.v.s.888@yandex.ru, e-mail: vadim-pva@narod.ru**,
irina_reshetnikova@mail.ru****

Поступила в редакцию 21.10.2023 г.

После доработки 01.02.2024 г.

Принята к публикации 10.02.2024 г.

Рассмотрено общее решение задачи стохастической оценки навигационных параметров мачтовых антенн радиотехнических комплексов (РТК), размещенных на подвижных объектах. Показано, что существующие методы определения навигационных параметров, использующие измерения спутниковых навигационных систем или инерциальных систем ориентации, не обеспечивают требуемой точности решения данной задачи для подобного класса антенн при действии случайных возмущений на объект и/или мачту.

Предлагается алгоритм стохастической оценки навигационных параметров мачтовой антенны радиотехнического комплекса, расположенной на подвижном объекте, инвариантный как к характеру движения мачты, так и к характеру движения объекта. Показано, что данный алгоритм позволяет обеспечить устойчивость и требуемую точность оценивания при самых общих предположениях о характере помех чувствительных элементов (ЧЭ) используемой бесплатформенной инерциальной системы ориентации (БИСО).

В качестве наблюдаемых векторов навигационных параметров антенны и объекта используются векторы параметров Родрига–Гамильтона, а в качестве их наблюдателя – вектор выходных сигналов ДУС, расположенных в центре масс антенны. Приведенные результаты численного моделирования.

Ключевые слова: мачтовая антенна, подвижный объект, нелинейная стохастическая оценка, навигационные параметры, пространственная ориентация, параметры Родрига–Гамильтона

DOI: 10.31857/S0032823524040049, EDN: WWETSB

1. Введение. Для современных подвижных радиотехнических комплексов (РТК) точность пространственной ориентации их антенн, размещенных на мачтах различной конструкции, расположенных на объекте, является одним из основных факторов, определяющих эффективность функционирования подвижных РТК. Это, в свою очередь, выдвигает в качестве одной из центральных задач повышение точности определения ориентации антенн как в условиях возмущенного движения мачты, так и при произвольном характере движения объекта, причем, при неизбежных помехах измерения параметров движения как антенны, так и объекта [1–3].

Актуальность этой задачи привела к интенсивным исследованиям в данном направлении и разработке ряда методов оценки пространственной ориентации антенны в условиях, как внешних возмущений, так и внутренних помех измерительного комплекса [4–9]. Одним из широко распространенных является метод, использующий спутниковые измерения, применение которого позволяет решать одновременно как задачу пространственной ориентации, так и задачу определения текущих координат подвижного объекта [7–13]. Главным преимуществом данного метода является отсутствие операции непрерывного интегрирования измерений чувствительных элементов (ЧЭ), приводящей к накоплению ошибок с течением времени (характерной для непосредственной обработки инерциальных измерений). В то же время низкая частота спутниковых сообщений наряду с высокой интенсивностью помех при их приеме существенно затрудняют использование подобных методов для решения задачи определения ориентации антенны, находящейся на высокодинамичном подвижном основании [14–18].

Альтернативным направлением определения ориентации антенн является использование показаний бесплатформенных инерциальных систем ориентации (БИСО) [18–23]. Но в большинстве современных методов, использующих БИСО, не учитывается динамика изменения параметров ориентации, измеряемых в условиях интенсивных помех, что не позволяет достичь требуемой точности и устойчивости процесса определения ориентации антенны подвижного РТК [1–3]. В работе [22] был построен алгоритм оценки ориентации антенны стационарного РТК с учетом помех измерения БИСО в предположении, что антенна может изменять (в общем случае случайным образом) свою ориентацию относительно мачты. Реализация данного алгоритма, решающего задачу определения ориентации антенны на качающейся мачте, требует привлечения в составе БИСО трех датчиков угловой скорости (ДУС) и трех акселерометров. Но при расположении мачты с антенной на подвижном объекте определить ее ориентацию с данным составом ЧЭ БИСО и с использованием алгоритма [22] уже не удается.

В связи с этим рассмотрим далее для мачтовой антенны подвижного РТК синтез алгоритма оценки ее параметров ориентации, инвариантного к характеру движения, как подвижного объекта, так и мачты относительно объекта, и обеспечивающего устойчивость и требуемую точность оценивания ориентации при самых общих предположениях о характере помех ЧЭ, используемых в данном случае в составе БИСО.

2. Постановка задачи. Для последующего решения задачи автономной ориентации антенны на подвижном основании по измерениям БИСО в общей постановке полагаем далее, что центр масс (ЦМ) антенны соединен жестким стержнем длиной R (моделирующим мачту) с ЦМ подвижного объекта и может вращаться вокруг него с произвольной угловой скоростью во всех направлениях под действием внешних возмущений (рис. 1). В свою очередь, объект перемещается по сфере Земли с переменной высотой и совершает произвольное вращение относительно его ЦМ.

Также введем следующие системы координат (СК) (рис. 1):

– первую приборную СК J_1 (ПСК1) $Ox_1y_1z_1$ с началом в ЦМ объекта, оси которой направлены по взаимно ортогональным осям чувствительности ЧЭ первой группы, входящих в общий состав БИСО;

– вторую приборную СК J_2 (ПСК2) $Ox_2y_2z_2$ с началом в ЦМ антенны, оси которой направлены по взаимно ортогональным осям чувствительности ЧЭ второй группы, входящих в состав БИСО;

– сопровождающую СК S (ССК) $Ox_sy_sz_s$ с началом в ЦМ объекта (одновременно – в точке крепления стержня длиной R), ось OY_s которой лежит в плоскости местного меридиана и направлена на Север, ось OZ_s направлена от центра Земли, а ось Ox_s дополняет СК до правой;

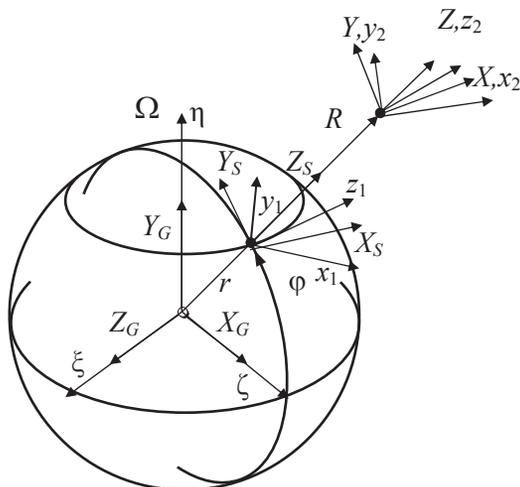


Рис. 1. Системы координат

– опорную СК Q (ОСК) $OXYZ$ с началом в ЦМ антенны, ось OZ которой направлена вдоль стержня длиной R , направления осей OX , OY , OZ в начальный момент времени совпадают с направлениями соответствующих осей ССК OX_S , OY_S , OZ_S ;

– инерциальную СК I (ИСК) $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре Земли, ось $O\eta$ которой направлена по оси вращения Земли от ее центра, ось $O\xi$ в начальный момент времени лежит в плоскости нулевого меридиана, а ось $O\zeta$ дополняет СК до правой;

– геоцентрическую СК G (ГСК) $OX_GY_GZ_G$ с началом в центре Земли, ось OY_G которой направлена по оси вращения Земли от ее центра, ось OZ_G лежит в плоскости нулевого меридиана, а ось OX_G дополняет систему координат до правой.

В соответствии с введенными СК, под задачей ориентации антенны, расположенной на качающейся мачте, размещенной, в свою очередь, на подвижном объекте, далее понимается текущая оценка параметров разворота (в качестве которых далее рассматриваются параметры Родрига–Гамильтона [23]) ПСК2 J_2 относительно ССК S при одновременном определении текущих координат (долготы λ и широты φ) ЦМ подвижного объекта в ГСК.

Полагаем также, что в состав БИСО входят две группы ЧЭ, состоящих из трех акселерометра и трех ДУС, расположенных ортогонально: первая группа – в ЦМ объекта, вторая группа – в ЦМ антенны. С целью сохранения общности решения в качестве моделей помех ЧЭ БИСО выберем аддитивные белые гауссовские шумы (БГШ) с нулевыми математическими ожиданиями и известными интенсивностями как наиболее адекватные практике использования БИСО. Учет корреляции помех или наличия в них регулярных составляющих (в том числе с неизвестными параметрами) легко обеспечивается соответствующим расширением вектора оцениваемых параметров и не влияет на существо предлагаемого далее подхода [24]. В этом случае модели выходных сигналов ЧЭ БИСО имеют вид [19–21]:

– для акселерометров:

$$\mathbf{Z}_{ai} = \mathbf{a}_{Ji} + \mathbf{W}_{ai},$$

где $i = 1, 2$ – номер группы ЧЭ, $\mathbf{Z}_{ai} = [Z_{axi} \quad Z_{ayi} \quad Z_{azi}]^T$ – вектор выходных сигналов трех ортогональных акселерометров i -й группы; $\mathbf{a}_{Ji} = [a_{xi} \quad a_{yi} \quad a_{zi}]^T$ – вектор ускоре-

ний ЦМ (объекта или антенны) в i -й ПСК; $\mathbf{W}_{ai} = \begin{bmatrix} W_{xi} & W_{yi} & W_{zi} \end{bmatrix}^T$ – вектор помех измерения акселерометров i -й группы (центрированный БГШ с матрицей интенсивностей \mathbf{D}_{ai});

– для ДУС:

$$\mathbf{Z}_{di} = \omega_{ji} + \mathbf{W}_{di},$$

где $\mathbf{Z}_{di} = \begin{bmatrix} Z_{xi} & Z_{yi} & Z_{zi} \end{bmatrix}^T$ – вектор выходных сигналов трех ортогональных ДУС i -й группы; $\omega_{ji} = \begin{bmatrix} \omega_{xi} & \omega_{yi} & \omega_{zi} \end{bmatrix}^T$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения i -й ПСК; $\mathbf{W}_{di} = \begin{bmatrix} W_{xi} & W_{yi} & W_{zi} \end{bmatrix}^T$ – вектор помех измерения ДУС i -й группы (центрированный БГШ с матрицей интенсивностей \mathbf{D}_{di}).

Таким образом, окончательно поставленную задачу можно сформулировать как задачу стохастического оценивания текущей ориентации ПСК2 J_2 относительно ССК S при одновременном определении текущих координат (долготы и широты) ЦМ подвижного объекта по зашумленным измерениям ЧЭ БИСО при *a priori* неопределенном характере изменения векторов угловой скорости ЦМ антенны относительно начала ЦМ объекта (точки крепления мачты длиной R), антенны относительно ее ЦМ и самого подвижного объекта относительно его ЦМ при неизвестных углах начального рассогласования ПСК2 J_2 и ССК S (т.е. неточно решенной задаче начальной выставки БИСО).

3. Решение задачи. Для решения поставленной задачи в самом общем случае математическая модель БИСО объекта должна быть инвариантна к характеру его движения, виду физической модели, модели возмущающих воздействий и т.п. Поэтому дальнейший синтез математической модели БИСО будем осуществлять в предположении обязательной ее инвариантности ко всем перечисленным факторам. С этой целью проведем следующие построения.

Текущая ориентация трехгранника S ССК относительно триэдра G ГСК описывается известными уравнениями [18, 20, 21, 25]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\cos\phi)^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{Y_S} \\ V_{X_S} \end{bmatrix} (r + H)^{-1}; \lambda(0) = \lambda_0, \quad \phi(0), \quad V_{Z_S}, \quad (3.1)$$

где λ – долгота, ϕ – широта объекта, V_{X_S}, V_{Y_S} – проекции линейной скорости объекта на оси ССК, r – радиус Земли, $H = H_0 + \int_0^t V_{Z_S}(\tau) d\tau$ – текущая высота объекта, H_0 – начальная высота, V_{Z_S} – вертикальная скорость объекта в ССК.

Для синтеза уравнений неизвестных проекций V_{X_S}, V_{Y_S} и V_{Z_S} обратимся к основному уравнению инерциальной навигации [23, 25], записанному в ССК S для вектора ускорений $\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} A_{X_S} & A_{Y_S} & A_{Z_S} \end{bmatrix}^T$, измеряемых акселерометрами при движении объекта по поверхности сферы Земли:

$$\mathbf{A}_S = \dot{V}_S + (2\Omega_S + \omega_S) \times V_S - g_S, \quad (3.2)$$

где $V_S = \begin{bmatrix} V_{X_S} & V_{Y_S} & V_{Z_S} \end{bmatrix}^T$, $\Omega_S = \begin{bmatrix} \Omega_{X_S} & \Omega_{Y_S} & \Omega_{Z_S} \end{bmatrix}^T$ – вектор угловой скорости вращения Земли, проекции которого на оси выбранной ССК имеют вид:

$$\Omega_{X_S} = 0, \quad \Omega_{Y_S} = \Omega \cos\phi, \quad \Omega_{Z_S} = \Omega \sin\phi,$$

Ω – угловая скорость вращения Земли, $\boldsymbol{\omega}_S = \left[\omega_{x_S} \ \omega_{y_S} \ \omega_{z_S} \ \text{tg}\varphi \right]^T$ – вектор угловой скорости ССК, обусловленной движением объекта относительно Земли, $\omega_{y_S} = V_{x_S} (r + H)^{-1} \omega_{x_S} = -V_{y_S} (r + H)^{-1}$, \mathbf{g}_S – вектор ускорения силы тяжести.

Для рассматриваемой ориентации осей ССК проекции вектора $\mathbf{g}_S = \left[g_{x_S} \ g_{y_S} \ g_{z_S} \right]^T$ на оси ССК определяются как:

$$g_{x_S} = 0, \quad g_{y_S} = -\Omega^2 (r + H) \cos\varphi \sin\varphi, \quad g_{z_S} = \Omega^2 (r + H) \cos^2\varphi - g,$$

g – гравитационное ускорение.

Система уравнений (3.2) в проекциях на оси ССК S , с учетом приведенных проекций векторов \mathbf{g}_S и $\boldsymbol{\Omega}_S$, трансформируется к виду:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{x_S} &= A_{x_S} + \left(2\Omega \sin\varphi + V_{x_S} \text{tg}\varphi (r + H)^{-1} \right) V_{y_S} - \left(2\Omega \cos\varphi + V_{x_S} (r + H)^{-1} \right) V_{z_S} \\ \dot{V}_{y_S} &= A_{y_S} - \left(2\Omega \sin\varphi + V_{x_S} \text{tg}\varphi (r + H)^{-1} \right) V_{x_S} - V_{y_S} (r + H)^{-1} V_{z_S} - \Omega^2 (r + H) \cos\varphi \sin\varphi, \\ \dot{V}_{z_S} &= A_{z_S} + \left(2\Omega \cos\varphi + V_{x_S} (r + H)^{-1} \right) V_{x_S} + V_{y_S}^2 (r + H)^{-1} + \Omega^2 (r + H) \cos^2\varphi - g \end{aligned} \quad (3.3)$$

В свою очередь, вектор ускорений A_S , измеряемых акселерометрами, может быть представлен в ССК следующим образом:

$$A_S = C^T (\mathbf{Z}_{a1} - \mathbf{W}_{a1}), \quad (3.4)$$

где \mathbf{Z}_{a1} – вектор выходных сигналов акселерометров первой группы, \mathbf{W}_{a1} – вектор помех акселерометров первой группы, $\mathbf{C} = \mathbf{DB}^T$ – матрица поворота (текущей ориентации) ПСК1 относительно ССК, \mathbf{D} – матрица поворота [21,25] ПСК1 относительно ИСК, \mathbf{B} – матрица текущей ориентации ССК относительно ИСК (Приложение 1).

Соотношения (3.3), (3.4) позволяют записать дифференциальные уравнения, описывающие изменение проекций скорости V_{x_S} , V_{y_S} и V_{z_S} , в следующей векторной форме Ланжевена:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{V}_{x_S} \\ \dot{V}_{y_S} \\ \dot{V}_{z_S} \end{pmatrix} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Z}_{a1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Omega \cos\varphi \\ \Omega \sin\varphi \end{pmatrix} + (r + H)^{-1} \begin{pmatrix} -V_{y_S} \\ V_{x_S} \\ V_{x_S} \text{tg}\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_{x_S} \\ V_{y_S} \\ V_{z_S} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega^2 (r + H) \cos\varphi \sin\varphi \\ \Omega^2 (r + H) \cos^2\varphi - g \end{pmatrix} - \mathbf{C}^T \mathbf{W}_{a1}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где высота объекта, входящая в уравнения (3.5), описывается уравнением

$$\dot{H} = V_{z_S}$$

В свою очередь, текущую ориентацию трехгранника ПСК1 J_1 относительно трехгранника I ИСК зададим, используя параметры Родрига–Гамильтона $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, определяющие матрицу $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu})$ (Приложение 2):

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{2} \Phi(\boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\omega}_{J1, \mu_1}(0) = \mu_{10}, \mu_2(0) = \mu_{20}, \mu_3(0) = \mu_{30}, \mu_4(0) = \mu_{40}, \quad (3.6)$$

где

$$\boldsymbol{\mu} = |\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \mu_4|^T, \quad \Phi(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} -\mu_2 & -\mu_3 & -\mu_4 \\ \mu_1 & -\mu_4 & \mu_3 \\ \mu_4 & \mu_1 & -\mu_2 \\ -\mu_3 & \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\omega}_{J_1}$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения первого приборного трехгранника, который может быть выражен через вектор показаний \mathbf{Z}_{d1} трех ДУС первой группы:

$$\boldsymbol{\omega}_{J_1} = \mathbf{Z}_{d1} - \mathbf{W}_{d1}, \quad (3.7)$$

где \mathbf{W}_{d1} – вектор помех измерения ДУС первой группы.

С учетом (3.7) угловое движение объекта (3.6) относительно ИСК может быть представлено следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{2} \Phi(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{Z}_{d1} - \mathbf{W}_{d1})$$

Полученные выше уравнения и соотношения позволяют представить систему уравнений навигационных параметров исследуемого объекта в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2} \Phi(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{Z}_{d1} - \mathbf{W}_{d1}) \\ \begin{vmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & (\cos\varphi)^{-1} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{Y_S} \\ V_{X_S} \end{vmatrix} (r + H)^{-1} \\ \begin{vmatrix} \dot{V}_{X_S} \\ \dot{V}_{Y_S} \\ \dot{V}_{Z_S} \end{vmatrix} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Z}_{a1} + \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 2|\Omega \cos\varphi| \\ |\Omega \sin\varphi| \end{vmatrix} + (r + H)^{-1} \begin{vmatrix} -V_{Y_S} \\ V_{X_S} \\ V_{X_S} \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix} \right) \times \begin{vmatrix} V_{X_S} \\ V_{Y_S} \\ V_{Z_S} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 0 \\ -\Omega^2 (r + H) \cos\varphi \sin\varphi \\ \Omega^2 (r + H) \cos^2\varphi - g \end{vmatrix} - \mathbf{C}^T \mathbf{W}_{a1}, \\ \dot{H} &= V_{Z_S}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $C = C(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varphi}, t) = D(\boldsymbol{\mu}) B^T(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varphi}, t)$.

Для дальнейшего построения уравнений текущей ориентации антенны рассмотрим предварительно уравнения ее углового движения относительно мачты – разворота ПСК2 J_2 относительно ОСК Q , описываемого вектором параметров Родрига–Гамильтона $\boldsymbol{\eta} = |\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3 \quad \eta_4|^T$ [23, 25]:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{2} \Phi(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\omega}_{J_2}; \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0, \quad (3.9)$$

где $\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0$ – неизвестные параметры начального рассогласования ПСК2 J_2 и ОСК Q ; \boldsymbol{w}_{J_2} – вектор случайной угловой скорости ПСК2 J_2 (второго триэдра БИСО) относительно ОСК Q , аппроксимируемый центрированным БГШ с матрицей интенсивностей \mathbf{D}_J .

Аналогично рассмотрим динамику изменения ориентации мачты относительно объекта – разворота ОСК Q относительно ПСК1 J_1 , описываемую вектором параметров Родрига–Гамильтона $\lambda = |\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4|^T$:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}\Phi(\lambda)\omega_Q; \quad \lambda(0) = \lambda_0, \quad (3.10)$$

где $\omega_Q = |\omega_x \ \omega_y \ 0|^T$ – вектор угловой скорости вращения ОСК Q относительно ПСК1 J_1 .

Для описания вектора ω_Q угловой скорости движения ОСК Q относительно ПСК1 J_1 воспользуемся выражением для вектора ускорения, возникающего при движении материальной точки (МТ) по сфере радиуса R , записанным в ОСК Q :

$$\mathbf{A}_Q = \dot{\mathbf{V}}_Q + (2\Omega_Q + \omega_Q) \times \mathbf{V}_Q - \mathbf{g}_Q, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{A}_Q = |A_x \ A_y \ A_z|^T$ – вектор ускорений МТ в ОСК Q , $\mathbf{V}_Q = |V_x \ V_y \ V_z|^T$ – вектор скорости МТ в ОСК; $\Omega_Q = |\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z|^T$ – вектор угловой скорости вращения Земли в ОСК; $\mathbf{g}_Q = |g_x \ g_y \ g_z|^T$ – вектор ускорения силы тяжести в ОСК.

В соответствии с приведенными выше выражениями проекций вектора угловой скорости вращения Земли и вектора ускорения силы тяжести на оси ССК S проекции векторов \mathbf{g}_Q , Ω_Q на оси ОСК Q определяются как

$$\Omega_Q(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) = |\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z|^T = D(\lambda)C(\mu, \lambda, \varphi, t) \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{g}_Q(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) = |g_x \ g_y \ g_z|^T = D(\lambda)C(\mu, \lambda, \varphi, t) \begin{vmatrix} 0 \\ -\Omega(r+H)\cos\varphi\sin\varphi \\ \Omega^2(r+H)\cos\varphi - g \end{vmatrix}$$

где $D(\lambda)$ – матрица поворота (направляющих косинусов) ОСК Q относительно ПСК1 J_1 .

Система уравнений (3.11) в проекциях на оси ОСК с учетом очевидных равенств

$$\omega_x = -V_y R^{-1}, \quad \omega_y = V_x R^{-1},$$

а также приведенных выше проекций векторов \mathbf{g}_Q , Ω_Q , трансформируется к виду:

$$\begin{aligned} A_x &= \dot{\omega}_y R - 2\Omega_z(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t)R\omega_x - g_x(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) \\ A_y &= \dot{\omega}_x R - 2\Omega_z(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t)\omega_x R - g_y(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) \\ A_z &= (2\Omega_y(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) + \omega_y)R\omega_y + (2\Omega_x(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) + \omega_x)R\omega_x - g_z(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Вторая группа акселерометров измеряет как проекции вектора ускорений \mathbf{A}_Q на оси ПСК2: $D(\eta)\mathbf{A}_Q$, так и проекции вектора ускорений ЦМ объекта, измеряемые первой группой акселерометров в ПСК1 (т.е. $\mathbf{Z}_{a1} - \mathbf{W}_{a1}$), на оси ПСК2: $D(\eta)D(\lambda)\mathbf{Z}_{a1} - \mathbf{W}_{a1}$. Таким образом, с учетом принятой модели измерений акселерометров, справедливо равенство:

$$D(\eta)\mathbf{A}_Q + D(\eta)D(\lambda)(\mathbf{Z}_{a1} - \mathbf{W}_{a1}) + \mathbf{W}_{a2} = \mathbf{Z}_{a2},$$

где \mathbf{Z}_{a2} – вектор выходных сигналов акселерометров второй группы, \mathbf{W}_{a2} – вектор помех акселерометров второй группы, откуда имеем выражение вектора ускорений \mathbf{A}_Q :

$$\mathbf{A}_Q = D^T(\boldsymbol{\eta})(\mathbf{Z}_{a2} - \mathbf{W}_{a2}) - D(\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{Z}_{a1} - \mathbf{W}_{a1})$$

Данное соотношение совместно с уравнениями (3.12) позволяет сформировать стохастические уравнения, описывающие вектор $\boldsymbol{\omega}_Q$ угловой скорости движения ОСК относительно ПСК1:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_Q = & -R^{-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} (D^T(\boldsymbol{\eta})\mathbf{Z}_{a2} - D(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{Z}_{a1}) + 2\Omega_Z(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{\omega}_Q + \\ & + R^{-1} \begin{vmatrix} -g_Y(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) \\ -g_X(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) \\ 0 \end{vmatrix} - R^{-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \left| D(\boldsymbol{\lambda}) \right| - D^T(\boldsymbol{\eta}) \begin{vmatrix} \mathbf{W}_{a1} \\ \mathbf{W}_{a2} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь важно отметить, что полученная система уравнений, описывающая текущую ориентацию ОСК в ПСК1, в соответствии с поставленной задачей оказывается полностью инвариантна к характеру динамики движения основания (мачты), качающегося относительно начала ПСК1.

Объединяя системы уравнений (3.8)–(3.10), (3.13), стохастические уравнения полного вектора параметров текущей ориентации БИСО на подвижном основании запишем следующим образом:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{F}_1(\mathbf{Y}, t)\mathbf{W}, \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = & \left| \mu^T \quad \lambda \quad \varphi \quad V_S \quad H \quad \boldsymbol{\eta}^T \quad \boldsymbol{\lambda}^T \quad \boldsymbol{\omega}_Q^T \right|^T, \quad \mathbf{W} = \left| \mathbf{W}_{d1}^T \quad \mathbf{W}_{a1}^T \quad \mathbf{W}_{a2}^T \quad \mathbf{W}_{JQ}^T \right|^T \\ \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t) = & \left| \begin{aligned} & \frac{1}{2}\Phi(\boldsymbol{\mu})\mathbf{Z}_{a1} \\ & \begin{vmatrix} 0 & (\cos\varphi^{-1}) \left| \begin{vmatrix} V_{Y_S} \\ V_{X_S} \end{vmatrix} \end{vmatrix} (r+H)^{-1} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ & C^T \mathbf{Z}_{a1} + \left(\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 2\Omega \cos\varphi \\ \Omega \sin\varphi \end{vmatrix} + (r+H)^{-1} \begin{vmatrix} -V_{Y_S} \\ V_{X_S} \\ V_{X_S} \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix} \right) \times V_S \right) + \begin{vmatrix} 0 \\ -\Omega^2(r+H)\cos\varphi \sin\varphi \\ \Omega^2(r+H)\cos\varphi - g \end{vmatrix} \\ & V_{Z_S} \\ & \mathbf{0} \\ & \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2}\Phi(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\omega}_Q \\ & -R^{-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} (D^T(\boldsymbol{\eta})\mathbf{Z}_{a2} - D(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{Z}_{a1}) + 2\Omega(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{\omega}_Q + \\ & + R^{-1} \begin{vmatrix} -g_Y(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) \\ g_X(\mu, \lambda, \lambda, \varphi, t) \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \right| \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{H}_d(\mathbf{Y}, t) = D(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\omega}_0 + D(\boldsymbol{\eta})D(\lambda)C(\boldsymbol{\mu}, \lambda, \varphi, t) \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \end{vmatrix} + D(\boldsymbol{\eta})D(\lambda)\mathbf{Z}_{d1} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{H}_{d1}(\mathbf{Y}) = |E_3 \vdash -D(\boldsymbol{\eta})D(\lambda) \vdash E_3|,$$

E_3 – единичная матрица размерности 3.

Несмотря на то, что данный наблюдатель позволяет в явном виде наблюдать подавляющее большинство компонентов вектора состояния \mathbf{Y} , его особенностью является невозможность наблюдения вектора линейной скорости объекта V_S , что существенно влияет на сходимость и устойчивость процесса оценивания всего вектора состояния. Для формирования сигнала наблюдения вектора скорости объекта V_S можно привлечь или измерения доплеровского датчика скорости, или доплеровские измерения спутника. Рассмотрим второй вариант как более технологичный и дешевый, полагая при этом частоту поступления спутниковых измерений высокой (в настоящее время – до 100 Гц), позволяющей считать характер спутниковых измерений по отношению к динамике изменения навигационных параметров рассматриваемого объекта непрерывным [1,4]. В этом случае информационный сигнал доплеровских измерений (псевдоскорости) Z_V в ССК S может быть представлен, как показано в [20], следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_V = & \left[(\xi_c - (r + H)\cos\varphi\sin\lambda)(V_{\xi_c} - \mathbf{B}_{(1)}^T(\varphi, \lambda)V_S) + (\eta_c - (r + H)\sin\varphi)(V_{\eta_c} - \right. \\ & \left. - \mathbf{B}_{(2)}^T(\varphi, \lambda)V_S) + (\zeta_c - (r + H)\cos\varphi\cos\lambda)(V_{\zeta_c} - \mathbf{B}_{(3)}^T(\varphi, \lambda)V_S) \right] \times \\ & \times \sqrt{(\xi_c - (r + H)\cos\varphi\sin\lambda)^2 + (\eta_c - (r + H)\sin\varphi)^2 + (\zeta_c - (r + H)\cos\varphi\cos\lambda)^2}^{-1} + \\ & + W_{Z_V} = H_V(\mathbf{Y}, t) + W_V, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где ξ_c, η_c, ζ_c – известные декартовы координаты спутника в ГСК, $V_{\xi_c}, V_{\eta_c}, V_{\zeta_c}$ – известные проекции вектора скорости спутника на оси ГСК, W_V – БГШ с нулевым средним и известной интенсивностью D_V , обусловленный погрешностями измерения, $\mathbf{B}_{(i)}^T(\varphi, \lambda)$ – i -я строка матрицы $\mathbf{B}^T(\varphi, \lambda) \left(\mathbf{B}(\varphi, \lambda) = \mathbf{B}(\lambda, \varphi, t) \Big|_{t=0} \right)$.

Функция наблюдения $H_V(\mathbf{Y}, t)$ в (2.16) явно зависит от всех параметров линейного движения объекта, в т.ч. и от вектора скорости объекта V_S , что позволяет в совокупности с наблюдателем (3.15) сформировать наблюдатель **всех** компонентов вектора \mathbf{Y} . Т.к. спутниковый навигационный приемник кроме доплеровских измерений принимает еще и кодовые измерения, то для повышения информативности наблюдения их также целесообразно включить в состав комплексного наблюдателя. Учитывая, что модель информационного сигнала кодовых измерений имеет вид [13, 20]:

$$\begin{aligned} Z_R = & \sqrt{(\xi_c - (r + H)\cos\varphi\sin\lambda)^2 + (\eta_c - (r + H)\sin\varphi)^2 + (\zeta_c - (r + H)\cos\varphi\cos\lambda)^2} + \\ & + W_{Z_R} = H_R(\mathbf{Y}, t) + W_{Z_R}, \end{aligned}$$

где W_R – центрированный БГШ с известной интенсивностью D_R , обусловленный алгоритмически нескомпенсированными ошибками часов спутников и приемника, задержками сигнала при прохождении ионосферы и тропосферы, ошибками многолучевости и другими погрешностями, уравнивания комплексного наблюдателя можно записать следующим образом:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{d2} \\ Z_V \\ Z_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_d(\mathbf{Y}, t) \\ H_V(\mathbf{Y}, t) \\ H_R(\mathbf{Y}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{d1}(\mathbf{Y}) & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{JQ} \\ \mathbf{W}_{d1} \\ \mathbf{W}_{d2} \\ W_V \\ W_R \end{pmatrix} = \mathbf{H}(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{H}_1(\mathbf{Y}) \begin{pmatrix} \omega_{JQ} \\ \mathbf{W}_{d1} \\ \mathbf{W}_{d2} \\ W_V \\ W_R \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_d(\mathbf{Y}, t) \\ H_V(\mathbf{Y}, t) \\ H_R(\mathbf{Y}, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{d1}(\mathbf{Y}) & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & E_2 \end{pmatrix},$$

где E_2 – единичная матрица размерности 2.

Уравнения (3.14), (3.17) «объект–наблюдатель» позволяют построить оценку вектора состояния \mathbf{Y} в виде расширенного фильтра Калмана – наиболее эффективного на сегодняшний день алгоритма оценивания для динамических нелинейных стохастических систем. Особенностью здесь является наличие корреляции шумов объекта (3.14) и наблюдателя (3.17), которую необходимо далее учитывать при последующем построении фильтра.

Расширенный фильтр Калмана, построенный по уравнениям «объект–наблюдатель» (3.14), (3.17) и обеспечивающий принципиальное решение поставленной задачи, имеет следующий вид [21,24]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}} &= F(\hat{\mathbf{Y}}, t) + K(\hat{\mathbf{Y}}, t) [\mathbf{Z} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{Y}}, t)] \\ K(\hat{\mathbf{Y}}, t) &= \left(R \frac{\partial \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} + \Theta \left(\mathbf{H}_1(\hat{\mathbf{Y}}) D_H \mathbf{H}_1^T(\hat{\mathbf{Y}}) \right)^{-1} \right) \\ \dot{R}(\hat{\mathbf{Y}}, t) &= \left\{ \frac{\partial F^T(\hat{\mathbf{Y}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} - \Theta \left(\mathbf{H}_1(\hat{\mathbf{Y}}) D_H \mathbf{H}_1^T(\hat{\mathbf{Y}}) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \right\} R(\hat{\mathbf{Y}}, t) + \\ &+ R(\hat{\mathbf{Y}}, t) \left\{ \frac{\partial F^T(\hat{\mathbf{Y}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} - \Theta \left(\mathbf{H}_1(\hat{\mathbf{Y}}) D_H \mathbf{H}_1^T(\hat{\mathbf{Y}}) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \right\} + \mathbf{F}_1(\hat{\mathbf{Y}}, t) D_0 \mathbf{F}_1^T(\hat{\mathbf{Y}}, t) - \\ &- R \frac{\partial \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \left(\mathbf{H}_1(\hat{\mathbf{Y}}) D_H \mathbf{H}_1^T(\hat{\mathbf{Y}}) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} R - \Theta \left(\mathbf{H}_1(\hat{\mathbf{Y}}) D_H \mathbf{H}_1^T(\hat{\mathbf{Y}}) \right)^{-1} \Theta^T, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\hat{\mathbf{Y}}$ – вектор текущей оценки вектора состояния $\mathbf{Y}(t)$; $R(\hat{\mathbf{Y}}, t)$ – апостериорная ковариационная матрица;

$$\hat{\mathbf{Y}}_0 = M(\mathbf{Y}_0); \quad R_0 = M \left\{ (\mathbf{Y}_0 - \hat{\mathbf{Y}}_0) (\mathbf{Y}_0 - \hat{\mathbf{Y}}_0)^T \right\}$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} D_{d1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{a1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{a2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_J \end{pmatrix}, \quad D_H = \begin{pmatrix} D_J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{d1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{d2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_R \end{pmatrix}, \quad \Theta = \mathbf{F}_1(\mathbf{Y}, t) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & D_{d1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D_J & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{H}_1^T(\mathbf{Y})$$

Для иллюстрации возможности эффективной практической реализации предложенного подхода был рассмотрен следующий пример.

4. Результаты имитационного моделирования. Для анализа устойчивости и сходимости процесса оценивания вектора $\mathbf{Y}(t)$ с использованием фильтра (3.18) было выполнено численное моделирование процесса оценки ориентации антенны на высокочастотном подвижном основании. Моделирование осуществлялось на временном интервале $[0, 1000]$ секунд с использованием при интегрировании уравнений оценки метода Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 с.

Движение объекта задавалось вдоль местного меридиана из точки с долготой 30° , широтой 45° и высотой 3 м. Проекция скорости объекта на оси ССК задавались в функции времени как:

$$V_x = 0, \quad V_y = 100 + \sin 0.02t, \quad V_z = 1.5 \cos t,$$

проекция вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{j1}$, соответственно:

$$\omega_{x1} = 10^{-1} \cos 3t, \quad \omega_{y1} = 10^{-3} \cos 4t, \quad \omega_{z1} = 1.5 \cdot 10^{-2} \cos 7t$$

Истинные текущие координаты объекта формировались путем интегрирования данных проекций скорости в соответствии с уравнениями (3.1), (3.6).

Угловые скорости, определяющие динамику движения антенны относительно мачты, были заданы центрированными случайными гауссовскими последовательностями с с.к.о. 10^{-2} рад/с, а динамику движения мачты относительно объекта, соответственно, как:

$$\omega_x = 0.43 \cos(2.45t) \text{ рад/с}, \quad \omega_y = 0.3 \cos(2.7t) \text{ рад/с}$$

Определение истинного углового положения антенны осуществлялось путем интегрирования уравнений (3.9), (3.10) с учетом выбранных моделей углового движения.

Компоненты векторов помех измерения акселерометров \mathbf{W}_{ai} и ДУС \mathbf{W}_{di} моделировались центрированными случайными гауссовскими последовательностями с соответствующими с.к.о., приведенными ниже. Формирование реальных показаний ДУС осуществлялось путем наложения данных случайных гауссовских последовательностей на соответствующие векторы угловых скоростей.

На рис. 2–5 представлены графики изменения погрешностей оценивания параметров текущей ориентации антенны и самого объекта относительно рассмотренных выше СК. Обобщенный анализ результатов моделирования показал:

1. Предложенный алгоритм оценки ориентации обеспечивает быструю сходимость и высокую устойчивость процесса оценивания. Погрешности оценивания углового положения антенны по окончании переходного процесса по всем углам ориентации не превысили 10^{-5} рад, объекта, соответственно, $-1.5 \cdot 10^{-6}$ рад, что соответствует не только современным, но и перспективным, требованиям к системам ориентации.

2. Увеличение погрешностей начальной оценки параметров $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ приводит к увеличению времени определения пространственной ориентации. Вариации частоты и амплитуды колебаний мачты в пределах 50–80% приводят к незначительному росту погрешностей оценивания (не более 6%), т.е. их влияние на точность ориентации оказывается существенно меньше, нежели погрешностей начальной оценки и с.к.о. шумов измерений.

На рис. 2 приведены погрешности оценивания ориентации ПСК1 относительно ИСК, выраженные вектором параметров Родрига–Гамильтона $\boldsymbol{\mu}$. Погрешности их начальной оценки – при пересчете в углы Эйлера, были заданы в пределах 0.01 рад, с.к.о. помех измерения ДУС – $5 \cdot 10^{-8}$ рад/с, с.к.о. помех измерения акселерометров – 10^{-4} м/с².

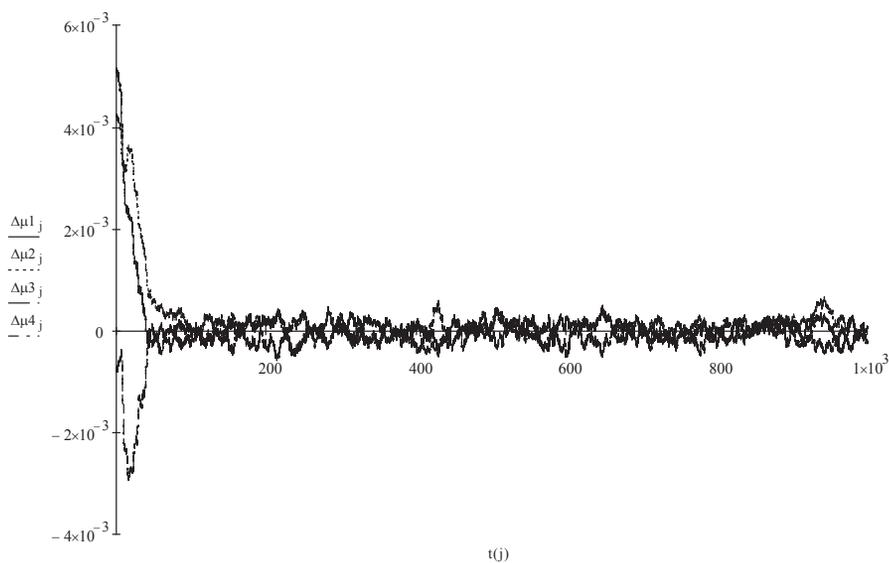


Рис. 2. Погрешности оценивания ориентации ПСК1 относительно ИСК, выраженные вектором параметров Родрига–Гамильтона μ .

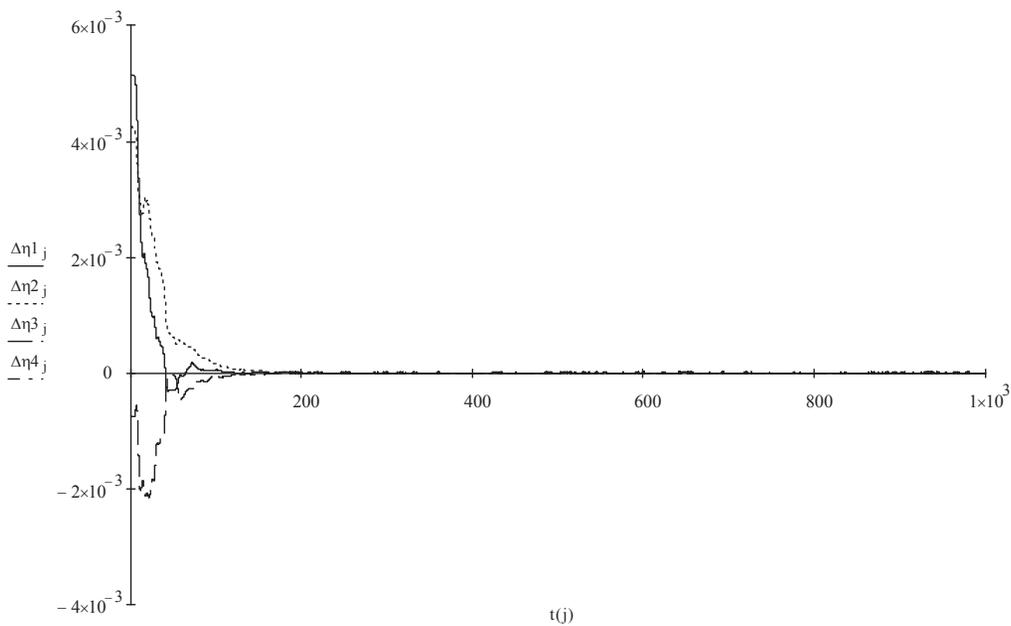


Рис. 3. Погрешности оценивания ориентации ПСК2 относительно ОСК, выраженные вектором параметров Родрига–Гамильтона η .

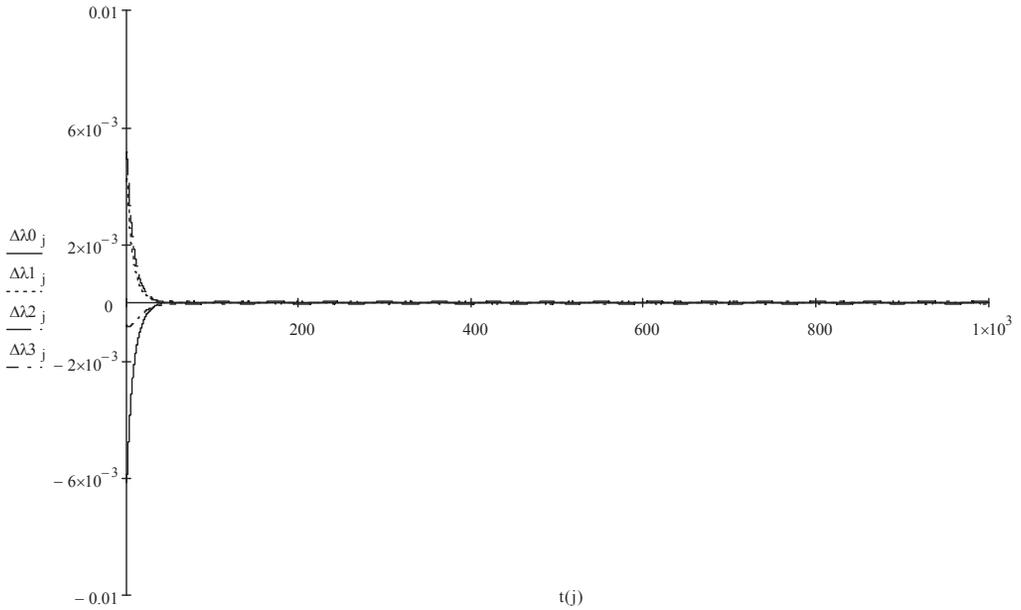


Рис. 4. Погрешности оценивания ориентации ОСК относительно ПСК1, выраженные вектором параметров Родрига–Гамильтона λ .

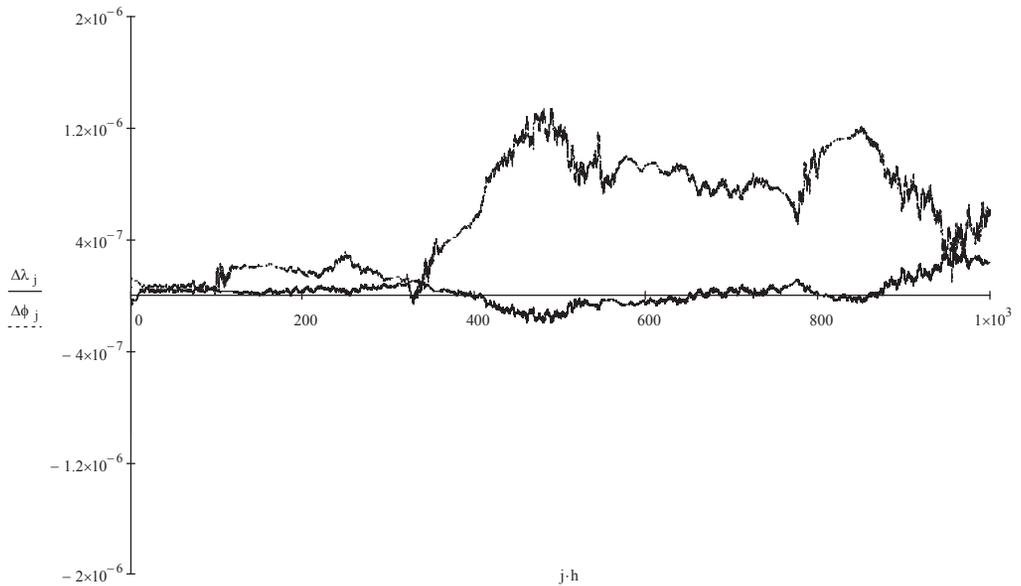


Рис. 5. Ошибки оценки координат подвижного РТК

При данном уровне помех погрешности оценки компонентов вектора μ с 50-й секунды не превышали 10^{-4} , что при расчете ориентации в углах Эйлера определяет ошибку оценивания в интервалах: для курсового угла: $-2.7 \cdot 10^{-4} - 2.8 \cdot 10^{-4}$ рад, для угла тангажа: $-2.5 \cdot 10^{-4} - 2.5 \cdot 10^{-4}$ рад, для угла крена: $-2.5 \cdot 10^{-5} - 2.5 \cdot 10^{-5}$ рад.

На рис. 3 приведены погрешности оценивания ориентации ПСК2 относительно ОСК, выраженные вектором параметров Родрига–Гамильтона η . Как видно из рис. 3, погрешности оценки компонентов вектора η после 200-й секунды не превышают $2.5 \cdot 10^{-5}$, что в углах Эйлера определяет ошибку оценивания в интервалах: для курсового угла: $-2.1 \cdot 10^{-5} - 2.6 \cdot 10^{-5}$ рад, для угла тангажа: $-2.2 \cdot 10^{-5} - 2.4 \cdot 10^{-5}$ рад, для угла крена: $-2.3 \cdot 10^{-5} - 2.4 \cdot 10^{-5}$ рад.

На рис. 4 приведены погрешности оценивания ориентации ОСК относительно ПСК1, выраженные вектором параметров Родрига–Гамильтона λ . В данном случае погрешности оценки компонентов вектора λ после 50-й секунды не превышают величины $2 \cdot 10^{-5}$, что в углах Эйлера определяет ошибку оценивания в интервалах: для курсового угла: $-1.1 \cdot 10^{-5} - 1.6 \cdot 10^{-5}$ рад, для угла тангажа: $-1.3 \cdot 10^{-5} - 1.7 \cdot 10^{-5}$ рад, для угла крена: $-1.4 \cdot 10^{-5} - 1.8 \cdot 10^{-5}$ рад.

Очевидно, что в целом полученные результаты удовлетворяют требованиям по точности определения ориентации антенн, предъявляемым не только к современным, но и перспективным БИСО. На рис. 5 показаны ошибки оценки координат ЦМ подвижного РТК. Как видно из полученных результатов, ошибки оценки долготы λ не превысили $4 \cdot 10^{-7}$ рад, а ошибки определения широты $\varphi - 1.5 \cdot 10^{-6}$ рад, что вполне соответствует требованиям, предъявляемым к современным системам навигации подвижных РТК.

Заключение. В целом, результаты имитационного моделирования позволяют сделать вывод о том, что устойчивость предложенного алгоритма и его высокая точность обеспечивают возможность его использования для решения задачи оперативной ориентации мачтовых антенн подвижных РТК с использованием средне- и высокоточных БИСО без коррекции в течение достаточно длительного времени.

Приложение 1

$$B = B(\lambda, \varphi, t) = \begin{vmatrix} \cos(\lambda + \Omega t) & 0 & -\sin(\lambda + \Omega t) \\ -\sin(\lambda + \Omega t) \sin \varphi & \cos \varphi & -\cos(\lambda + \Omega t) \sin \varphi \\ \sin(\lambda + \Omega t) \cos \varphi & \sin \varphi & \cos(\lambda + \Omega t) \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Приложение 2

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} 2\mu_1^2 + 2\mu_2^2 - 1 & 2(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_4) & 2(\mu_2\mu_4 - \mu_1\mu_3) \\ 2(\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_4) & 2\mu_1^2 + 2\mu_3^2 - 1 & 2(\mu_3\mu_4 + \mu_1\mu_2) \\ 2(\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3) & 2(\mu_3\mu_4 - \mu_1\mu_2) & 2\mu_1^2 + 2\mu_4^2 - 1 \end{vmatrix}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дардари Д., Фаллетти Э., Луизе М. Методы спутникового и наземного позиционирования. Перспективы развития технологий обработки сигналов М.: Техносфера, 2012. 528 с.
2. Зайцев Д.В. Многопозиционные радиолокационные системы. Методы и алгоритмы обработки информации в условиях помех М.: Радиотехника, 2007. 96 с.
3. Коновалов А.А. Основы траекторной обработки радиолокационной информации С.Пб. Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. 164 с.
4. Rapoport L., Barabanov I., Khvalkov A., Kutuzov A., Ashjaee J. Octopus: Multi antennae GPS/GLONASS RTK System // ION GPS-2000. P. 797–804.
5. Gebre-Egziabher D., Hayward R.C., Powell J.D. Design of multi-sensor attitude determination systems // IEEE Trans. on Aerospace & Electronic Syst. 2004. V. 40(2). P. 627–649.

6. Красильщиков М.Н., Себряков Г.Г. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2009. 556 с.
7. Sokolov S.V., Pogorelov V.A. Measurements in information technologies nonlinear dynamic estimation of the orientation angles of a moving object from distributed satellite measurements // Meas. Tech. 2019. V. 62. № 3. P. 30–36
8. Лукаевич В.И., Погорелов В.А., Соколов С.В. Алгоритм оценки параметров вращения распределенной антенны по спутниковым измерениям // Радиотехника. 2015. № 6. С. 122–132.
9. Hirokawa R., Ebinuma T. A Low-cost tightly coupled GPS/INS for small UAVS augmented with multiple GPS antennas // Navigation: J. of the Inst. of Navigation. 2009. V. 56. № 1. P. 35–44.
10. Grewal M.S., Andrews A.P., Bartone C.G. Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration. Wiley, 2013.
11. Tijing Cai, Qimeng Xu, Emelyantsev G.I., Stepanov A.P., Daijin Zhou, Shuaipeng Gao, Yang Liu, Junxiang Huang. A multimode GNSS/MIMU integrated orientation and navigation system // 26th St. Petersburg Int. Conf.on Integrated Navigation Syst. 2019.
12. Emelyantsev G.I., Stepanov A.P., Blazhnov B.A. Initial alignment of SINS measuring unit and estimation of its errors using satellite phase measurements // Gyroscopy&Navigation. 2019. V. 10. Iss. 2. P. 62–69.
13. Кинкулькин И.Е. Глобальные навигационные спутниковые системы. Алгоритмы функционирования аппаратуры потребления. М.: Радиотехника, 2018. 328 с.
14. Jahromi A.J., Broumandan A., Nielsen J., Lachapelle G. GPS vulnerability to spoofing threats and a review of anti-spoofing techniques // Int. J. of Navigation&Observation. 2012. V. 2012. Art. ID 127072. P. 1–16.
15. Bazaar A.R., Moazedi M., Mosavi M.R. Analysis of single frequency GPS receiver under delay and combining spoofing algorithm // J. of Wireless Personal Commun. 2015. V. 83. № 3. P. 1955–1970.
16. Bhatti J., Humphreys T.E. Hostile Control of ships via false GPS signals: demonstration and detection // J. of the Inst. of Navigation. 2017. V. 64(1). P. 51–66.
17. Psiaki M.L., O'Hanlon B.W., Powell S.P., Bhatti J.A., Humphreys T.E., Schofield A. GNSS lies, GNSS truth: Spoofing detection with two-antenna differential carrier phase // GPS World. 2014. V. 25. № 11. P. 36–44.
18. Salychev O.S. Verified approaches to inertial navigation. М.: BMSTU Pub., 2017. 368 p.
19. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации на МЭМС датчиках. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 225 с.
20. Розенберг И.Н., Соколов С.В., Уманский В.И., Погорелов В.А. Теоретические основы тесной интеграции инерциально-спутниковых навигационных систем. М.: Физматлит, 2018. 312 с.
21. Емельянцеv Г.И., Степанов А.П. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / Под ред. Пешехонова В.Г. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. 394 с.
22. Sokolov S.V., Pogorelov V.A., Shatalov A.B. Solving the autonomous initial navigation task for strapdown inertial navigation system on the perturbed basis using Rodriguez–Hamilton parameters // Rus. Aeronaut. 2019. V. 62. № 1. P. 42–51.
23. Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
24. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2006. 640 с.
25. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
26. Миллер Б.М., Колосов К.С. Робастное оценивание на основе метода наименьших модулей и фильтра Калмана // Автоматика и телемех. 2020. № 11. С. 72–92.

Nonlinear Stochastic Estimation of the Navigation Parameters of the Antenna of a Mobile Radio Engineering Complex by Inertial-Satellite Measurements

S. V. Sokolov^{1,##}, V. A. Pogorelov^{1,##}, I. V. Reshetnikova^{1,###}

¹Moscow Technical University of Communications and Informatics,
Moscow, Russia

e-mail: s.v.s.888@yandex.ru[#], vadim-pva@narod.ru^{##}, irina_reshetnikova@mail.ru^{###}

A general solution to the problem of stochastic estimation of navigation parameters of mast antennas of radio engineering complexes (RTCs) located on mobile objects is considered. It is shown that the existing methods for determining navigation parameters using measurements of satellite navigation systems or inertial orientation systems do not provide the required accuracy for solving this problem for such a class of antennas under the action of random disturbances on an object and/or mast.

In this regard, an algorithm is proposed for stochastic estimation of the navigation parameters of a mast antenna of a radio engineering complex located on a mobile object, invariant both to the nature of the movement of the mast and to the nature of the movement of the object. It is shown that this algorithm makes it possible to ensure stability and the required accuracy of estimation under the most general assumptions about the nature of interference of sensitive elements (CE) using a strapless inertial orientation system (BIS). To solve the problem, in the most general case, the BISO includes two groups of CES consisting of three orthogonal accelerometers and three angular velocity sensors (ARC) located, respectively, in the centers of mass of the object and the antenna.

The vectors of the Rodrigue–Hamilton parameters are used as the observed vectors of the navigation parameters of the antenna and the object, and the vector of the DUS output signals located in the center of mass of the antenna is used as their observer. Based on stochastic nonlinear equations of their state vectors and equations of stochastic models of DUS output signals constructed for the most general case of antenna and object motion, a generalized Kalman filter was formed, providing a general solution to the problem of estimating the navigation parameters of a mast antenna of arbitrary design placed on a moving object.

The presented results of numerical modeling allow us to conclude that the proposed approach can be used to solve the problem of high-precision determination of navigation parameters of mast antennas of radio engineering complexes located on mobile objects, using medium and high-precision BIS without correction over a long period of time.

Keywords: mast antenna, mobile object, nonlinear stochastic estimation, navigation parameters, spatial orientation, Rodrigue–Hamilton parameters

REFERENCES

1. *Dardari D., Falletti E., Luise M.* Methods of Satellite and Ground Positioning. Prospects for the Development of Signal Processing Technologies. Moscow: Technosphere, 2012. 528 p.
2. *Zaitsev D.V.* Multi-Position Radar Systems. Methods and Algorithms of Information Processing in Conditions of Interference. Moscow: Radio Engng, 2007. 96 p.
3. *Kononov A.A.* Fundamentals of Trajectory Processing of Radar Information. St.Petersburg: SPbSETU “LETI” Pub., 2013. 164 p.
4. *Raport L., Barabanov I., Khvalkov A., Kutuzov A., Ashjaee J.* Octopus: multi antennae GPS/GLONASS RTK system // ION GPS-2000, pp. 797–804.
5. *Gebre-Egziabher D., Hayward R.C., Powell J.D.* Design of multi-sensor attitude determination systems // IEEE Trans. on Aerospace&Electronic Syst., 2004, vol. 40(2), pp. 627–649.
6. *Krasilshchikov M.N., Sebryakov G.G.* Modern Information Technologies in Navigation Tasks and Guidance of Unmanned Maneuverable. Moscow: Fizmatlit, 2009. 556 p.
7. *Sokolov S.V., Pogorelov V.A.* Measurements in information technologies nonlinear dynamic estimation of the orientation angles of a moving object from distributed satellite measurements // Meas. Tech., 2019, vol. 62, no. 3, pp. 30–36

8. *Lukasevich V.I., Pogorelov V.A., Sokolov S.V.* Algorithm for estimating the rotation parameters of a distributed antenna using satellite measurements // *Radio Engng.*, 2015, no. 6, pp. 122–132.
9. *Hirokawa R., Ebinuma T.* A Low-cost tightly coupled GPS/INS for small UAVs augmented with multiple GPS antennas // *Navigation: J. of the Inst. of Navigation*, 2009, vol. 56, no. 1, pp. 35–44.
10. *Grewal M.S., Andrews A.P., Bartone C.G.* *Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration*, Wiley, 2013.
11. *Tijing Cai, Qimeng Xu, Emelyantsev G.I., Stepanov A.P., Daijin Zhou, Shuaipeng Gao, Yang Liu, Junxiang Huang.* A multimode GNSS/MIMU integrated orientation and navigation system // 26th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst., 2019.
12. *Emelyantsev G.I., Stepanov A.P., Blazhnov B.A.* Initial alignment of SINS measuring unit and estimation of its errors using satellite phase measurements // *Gyroscopy&Navigation*, 2019, vol. 10, iss. 2, pp. 62–69.
13. *Kinkulkin I.E.* *Global Navigation Satellite Systems. Algorithms for the Functioning of Consumer Equipment*. Moscow: Radio Engng., 2018. 328 p.
14. *Jahromi A.J., Broumandan A., Nielsen J., Lachapelle G.* GPS vulnerability to spoofing threats and a review of anti-spoofing techniques // *Int. J. of Navigation&Observation*, 2012, vol. 2012, art. ID 127072, pp. 1–16.
15. *Baziar A.R., Moazedi M., Mosavi M.R.* Analysis of single frequency GPS receiver under delay and combining spoofing algorithm // *J. of Wireless Personal Commun.*, 2015, vol. 83, no. 3, pp. 1955–1970.
16. *Bhatti J., Humphreys T.E.* Hostile control of ships via false GPS signals: demonstration and detection // *J. of the Inst. of Navigation*, 2017, vol. 64(1), pp. 51–66.
17. *Psiaki M.L., O'Hanlon B.W., Powell S.P., Bhatti J.A., Humphreys T.E., Schofield A.* GNSS lies, GNSS truth: Spoofing detection with two-antenna differential carrier phase // *GPS World*, 2014, vol. 25, no. 11, pp. 36–44.
18. *Salychev O.S.* *Verified Approaches to Inertial Navigation*. Moscow: BMSTU Pub., 2017. 368 p.
19. *Matveev V.V., Raspopov V.Ya.* *Instruments and Systems of Orientation, Stabilization and Navigation on MEMS Sensors*. Tula: TulSU Pub., 2017. 225 p.
20. *Rosenberg I.N., Sokolov S.V., Umansky V.I., Pogorelov V.A.* *Theoretical Foundations of Close Integration of Inertial Satellite Navigation Systems*. Moscow: Fizmatlit, 2018. 312 p.
21. *Emelyantsev G.I., Stepanov A.P.* Integrated inertial-satellite orientation and navigation systems / ed. by *Peshekhonov V.G.* St. Petersburg: SSC RF JSC “Concern” Central Res. Inst. “Electropri-bor”, 2016. 394 p.
22. *Sokolov S.V., Pogorelov V.A., Shatalov A.B.* Solving the autonomous initial navigation task for strapdown inertial navigation system on the perturbed basis using Rodriguez–Hamilton parameters // *Rus. Aeronaut.*, 2019, vol. 62, no. 1, pp. 42–51.
23. *Chelnokov Yu.N.* *Quaternion Models and Methods of Dynamics, Navigation and Motion Control*. Moscow: Fizmatlit, 2011. 560 p.
24. *Sinitsyn I.N.* *Kalman and Pugachev Filters*. Moscow: Logos, 2006. 640 p.
25. *Ishlinskiy A.Y.* *Orientation, Gyroscopes and Inertial Navigation*. Moscow: Nauka, 1976. 670 p.
26. *Miller B.M., Kolosov K.S.* Robust estimation based on the method of least modules and the Kalman filter // *Automat.&Telemch.*, 2020, no. 11, pp. 72–92.

УДК 532.2

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АНОМАЛИЙ
ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА**© 2024 Д. Ю. Князьков^{1,*}, А. С. Шамаев^{1,**}¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия**e-mail: knyaz@ipmnet.ru*, sham@rambler.ru***

Поступила в редакцию 01.07.2024 г.

После доработки 20.07.2024 г.

Принята к публикации 01.08.2024 г.

Работа посвящена построению математической модели воздействия течений на ветровое волнение на поверхности океана и исследованию флуктуаций морского волнения неконтактными средствами (радиолокация, радиометрия, оптические средства зондирования). Приводится обзор многочисленных публикаций в данной области и предлагается новый подход к расчету флуктуаций ветровых волн с помощью специального асимптотического метода. Этот метод позволяет получить явные аналитические формулы для возмущений ветрового волнения. При этом имеется возможность в аналитической форме рассчитать упомянутые возмущения как в спектральной, так и в координатной форме. Это в свою очередь позволяет в явной форме рассчитать возмущения отраженных радиолокационных сигналов и собственного радиоизлучения взволнованной морской поверхности под воздействием течений.

Ключевые слова: ветровое волнение, модели течений, радиолокация, радиометрия, асимптотические методы, двумерное преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S0032823524040055, EDN: WVXXMZ

1. Введение. Важнейшие результаты в области исследования аномалий морской поверхности неконтактными средствами

К настоящему времени накоплен большой объем экспериментальных данных, посвященных наблюдению за морским волнением, в том числе за эффектами, связанными с воздействием на поверхность океана ветра, течений, а также наблюдению за эффектами взаимодействия поверхностных волн и течений. Эти экспериментальные данные получены средствами радиолокационного зондирования, исследованию собственного радиоизлучения взволнованной морской поверхности, лазерного зондирования, исследованию поверхности в видимом оптическом диапазоне [1–8]. Большое количество работ посвящено построению гидродинамических моделей для различных аномалий поверхности океана, в том числе с учетом неоднородной структуры в толще морской воды [1, 9–15].

Исследования поверхности океана средствами радиолокации. Воздействие течений приводят к ряду интересных и сложных явлений на поверхности моря. К одному из таких явлений относится возникновение зон деформации амплитуды поверхностного волнения за счет воздействия вышедших из глубины на поверхность воды течений.

Давно было замечено, что при наличии океанских течений над неоднородностями морского дна возникают зоны, в которых амплитуда поверхностного волнения

в определенном диапазоне изменена. На рис. 1 приведено сравнение радиолокационного изображения участка морской поверхности в Северном море и батиметрической карты данного участка.

Видимые на радиолокационных кадрах светлые зоны примерно соответствуют неоднородностям морского дна. При этом хорошо известно, что сигналы лоатора не проникают в толщу морской воды. Чтобы объяснить это явление, требуется привлечь достаточно сложные модели взаимодействия течений с поверхностным волнением и модели отражения электромагнитных волн от поверхности моря.

Известно, что причины возникновения и распространения волн в толще воды весьма разнообразны. Это и природные океанические (или приливные) течения, набегающие на неоднородности морского дна, и извержение подводных вулканов, землетрясения, движение морских животных и пр.

Волны, вышедшие на поверхность океана, нельзя наблюдать непосредственно дистанционными методами, однако взаимодействие возникших на поверхности течений с ветровым волнением приводит к изменению спектра поверхностного волнения. Это изменение спектра уже можно “почувствовать” по данным радиоизмерений. Это могут быть как данные радиолокационных измерений, так и данные радиометрических измерений (т.е. данные о собственном радиоизлучении поверхности моря).

Остановимся сначала на радиолокационных измерениях. Представим себе (разумеется, упрощенно) морскую поверхность в виде синусоидальной волны. Хорошо известно, что в случае падения плоской электромагнитной волны на такую поверхность при определенном соотношении между длиной падающей электромагнитной волны Λ (или ее волновым числом $K = 2\pi / \Lambda$), углом падения α и периодом отражающей поверхности λ (см. рис. 2) часть энергии падающей волны возвращается точно назад – эффект резонансного рассеяния Брэгга–Вульфа. Это соотношение имеет вид

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = 2\sin\alpha \quad (1.1)$$

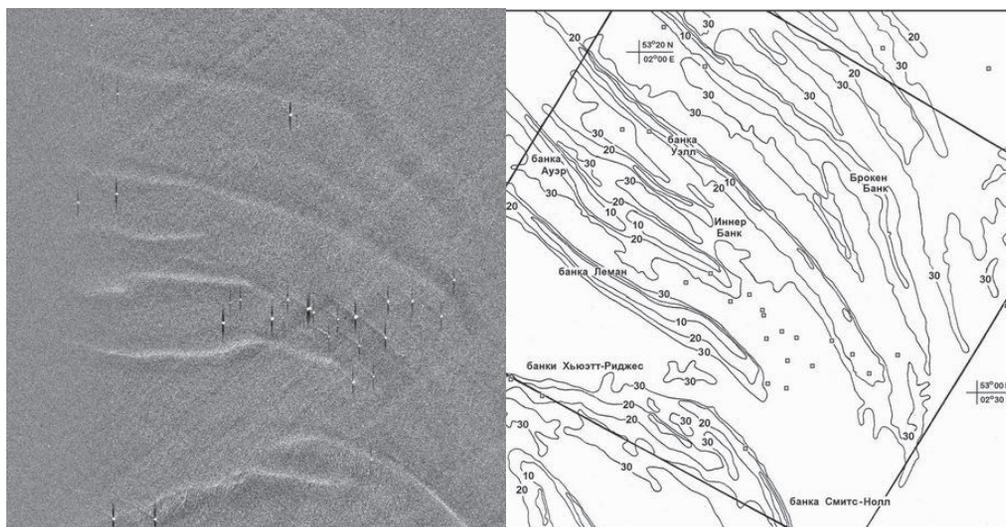


Рис. 1. Радиолокационное изображение, полученное с помощью космического аппарата “Алмаз-1” в Северном море и батиметрическая схема участка съемки

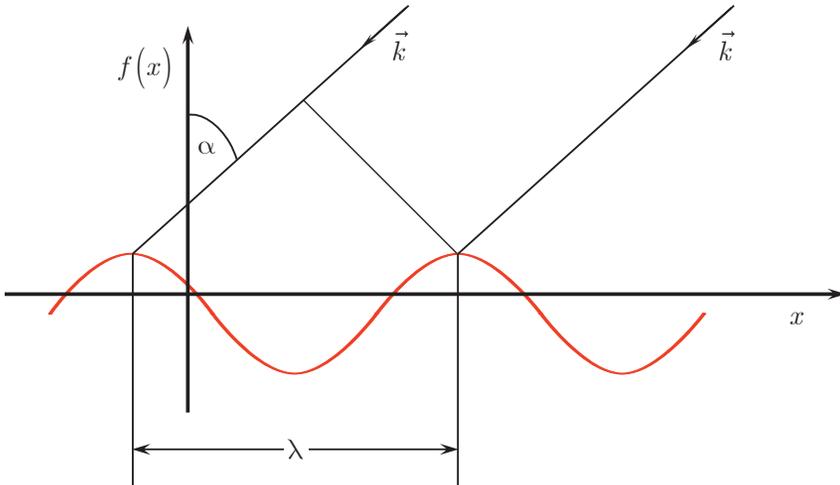


Рис. 2. Явление резонансного рассеивания на периодической поверхности

Оказывается (это проверено в эксперименте и с помощью численных расчетов), что сигнал, отраженный точно назад, примерно пропорционален амплитуде h синусоиды, описывающей отражающую поверхность, если величина h невелика (например, $h / \lambda < 0.1$). Таким образом, по интенсивности обратного рассеяния радиоволн можно было бы судить об амплитуде поверхностных волн, длина которых связана с длиной электромагнитной волны соотношением (1.1).

Однако поверхность моря представляет собой, естественно, не одну синусоиду.

Пространственный спектр рельефа поверхности моря весьма широк. Он содержит как короткие (сантиметровые и миллиметровые волны), так и крупные волны, длина которых достигает десятков и даже сотен метров. Наличие длинноволновых компонент в спектре рельефа поверхности моря “портит” описанный выше эффект резонансного рассеяния, и реальный результат одного измерения отраженного сигнала уже не будет пропорционален амплитуде интересующей нас поверхностной гармоники.

Несмотря на сказанное, результаты экспериментов и математического моделирования показали, что если проделать достаточное количество измерений отраженных сигналов (причем время задержки между измерениями должно быть таким, чтобы поверхностные гармоники успели изменить фазовые соотношения между собой), то среднее значение полученных результатов измерений уже будет примерно пропорционально амплитуде интересующей нас гармоники. При приближении угла падения электромагнитной волны к прямому (отвесное падение) эта зависимость становится более слабой и исчезает.

Данный результат является крайне важным для проблемы выявления аномалий поверхности, характеризующихся увеличением или, наоборот, уменьшением средней амплитуды в коротковолновой части спектра морского волнения. Во-первых, оказывается доступным простое средство определить среднюю амплитуду резонансных гармоник поверхности путем усреднения амплитуды пришедшего сигнала по достаточному количеству облученных поверхностей. Во-вторых, на основе результатов моделирования появляется возможность установить диапазон углов, для которых такая процедура корректна. Связь между усредненными амплитудами волн и отраженных сигналов была обнаружена ранее эмпирически. Считалось, что зависимость существует только лишь для скользящих углов падения. Численное моделирование

показывает, что зависимость (не обязательно являющаяся прямой пропорциональностью) среднего отраженного сигнала от резонансной гармоники поверхности прослеживается вплоть до 30° (угол отсчитывается от вертикали).

На рис. 3 изображен радиолокационный кадр со стороной L , элемент разрешения локатора (a) и квадрат, по элементам которого проводится усреднение (l). Характерные масштабы: $L \sim 10 - 20$ км, $a \sim 2 - 4$ км, $\lambda \sim 200 - 400$ м.

Исследования поверхности океана средствами пассивной радиолокации. Важным и эффективным средством исследования аномалий поверхности моря является исследование собственного радиоизлучения поверхности. С помощью измерений собственного радиоизлучения можно получить интересные результаты о возмущениях (о которых было сказано выше при описании метода радиолокационного зондирования) поверхности океана на большой площади. Собственное радиоизлучение поверхности весьма чувствительно к небольшим флуктуациям поверхности. Эффект резонансной зависимости собственного радиоизлучения поверхности был впервые исследован в работе [4]. Было установлено, что на определенных углах наклона зондирования (около 30° с вертикалью) собственное инфракрасное радиоизлучение взволнованной поверхности максимально чувствительно к амплитуде миллиметровых и сантиметровых волн излучающей поверхности. Поэтому при исследовании поверхности средствами пассивной радиолокации крутые углы зондирования предпочтительнее пологих.

Радиометры космического базирования получают информацию об интенсивности радиоизлучения поверхности моря на площади в десятки тысяч квадратных километров. Описанные выше аномалии морского волнения могут быть обнаружены

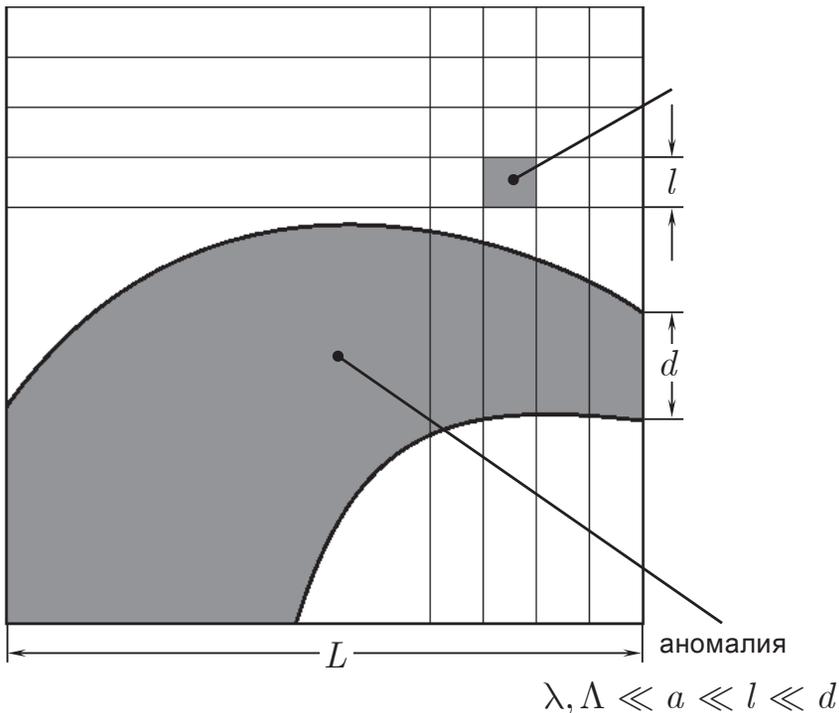


Рис. 3. Обработка радиолокационного кадра с помощью процедуры усреднения. Сравнение различных масштабов задачи

также во многих случаях и радиометрическими средствами. Математическое моделирование собственного радиоизлучения взволнованной поверхности осуществляется в работах [1, 6]. Интересный эксперимент по определению параметров излучающей поверхности в лабораторных условиях проделан под руководством Ю.Г. Трохимовского. Была установлена возможность определить характеристики формы волнистой поверхности воды, которая создана с помощью частично погруженной в воду капроновой сетки. Было проведено сравнение экспериментальных данных о собственном радиоизлучении волнистой поверхности воды и результатов математического моделирования данного излучения. Оно основано на использовании связи между мощностью собственного радиоизлучения в данном направлении и величиной поглощенной энергии когерентной плоской волны, падающей на поверхность в противоположном направлении [5].

Взаимодействие приповерхностных течений с поверхностными волнами. Вопросам количественного описания трансформаций ветровых поверхностных волн под воздействием возмущений, вышедших из глубины, посвящено также большое количество работ. Обратим здесь внимание на две группы исследований, связанных, во-первых, с выводом и анализом так называемого кинетического уравнения для плотности волнового действия [3] и численным моделированием на его основе и, во-вторых, посвященных выводу и анализу двумерного уравнения типа Шредингера и расчетам на его основе трансформаций поверхностных волн, удовлетворяющих так называемому “условию синхронизма” [9]. Приведем результаты эксперимента, выполненного на Черном море в 80-х гг. прошлого века, и обсудим его результаты в свете существующих теоретических моделей взаимодействия поверхностных волн с течениями. На рис. 4 представлена схема обтекания подводного препятствия, имеющего вид продолговатого хребта высотой около 10 м и длиной около 100 м, расположенного на глубине примерно 50 м.

На рис. 5 представлена картина трансформаций ветровой ряби волн с длиной около 4 см над препятствием, схема обтекания которого показана на рис. 4.

Эта картина получена с помощью радиолокатора, расположенного на вертолете, который совершил несколько пролетов над зоной трансформаций. Течение набегает на препятствие со скоростью около 3 м/с по направлению, указанному стрелкой. Трансформация ветровой ряби наблюдается внутри “восьмерки”. Для того, чтобы дать этим экспериментальным данным теоретическое объяснение, необходимо сначала сделать расчет поля скоростей течений, вышедших из глубины на поверхность, который может быть выполнен с помощью различных теоретических моделей.

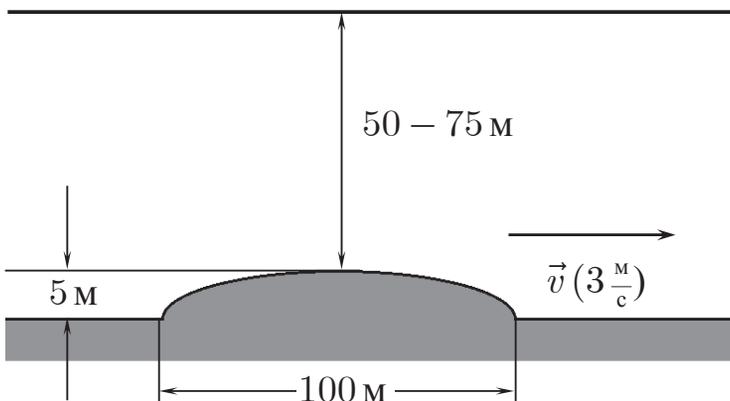


Рис. 4. Схема обтекания подводного препятствия

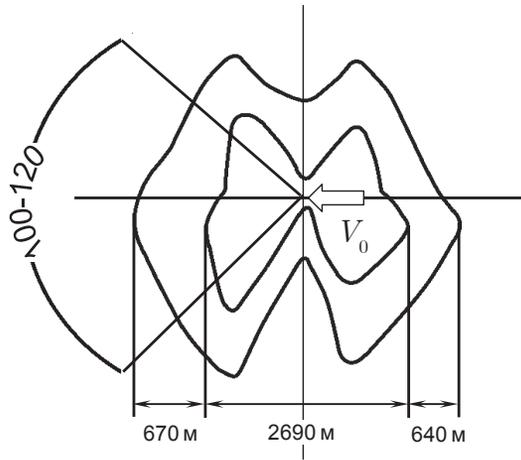


Рис. 5. Трансформация ветровой ряби над обтекаемыми неоднородностями дна

Расчеты приводят к результатам, отраженным на рис. 6, из которого видно, что возмущение скорости локализовано строго над началом препятствия, а зона существенного возмущения скорости имеет небольшую протяженность – примерно 10 м.

Вернемся к картине возмущения поверхностных волн, полученной с помощью радиолокатора вертолетного базирования, представленной на рис. 5. Кроме того, известна экспериментальная картина трансформации ветровых волн с групповыми скоростями $V_1 = 0.1$ м/с, $V_2 = 0.2$ м/с, $V_3 = 4.2$ м/с с длинами волн, соответственно $\Lambda_1 = 0.04$ м, $\Lambda_2 = 0.24$ м.

Зона трансформации ветровых волн в диапазонах Λ_1 и Λ_2 примерно соответствует “восьмерке” на рис. 5. Согласно теории резонансного рассеяния амплитуды первых двух кривых примерно пропорциональны амплитудам поверхностных волн длиной 2 и 12 см.

Эксперименты показывают, что зона трансформации поверхностной ряби может существенно превышать размеры области, занятой течением, вызывающим эту трансформацию.

Кроме того, многочисленные экспериментальные данные говорят о том, что изменение спектра под действием течений имеют место и в длинноволновой части спек-

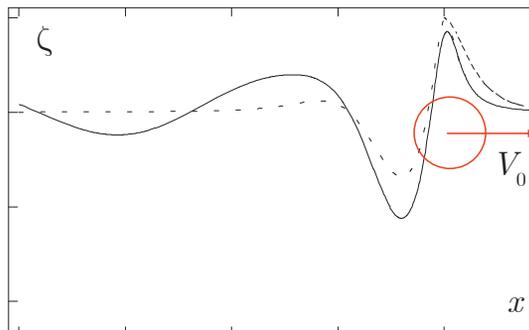


Рис. 6. Поле скоростей на поверхности воды непосредственно над движущимся телом

тра, и для волн средней и малой длины. Ниже приводится модель, которая может претендовать на объяснение эффекта присутствия в спектре трансформаций ветрового волнения компонент различной длины, включая короткие волны (миллиметры—сантиметры).

В настоящей работе представлен метод расчета деформации поверхности моря, основанный на модели трехмерной идеальной жидкости (см., напр., [9, 16]). Ранее задача о деформации поверхности океана под действием течений, набегающих на неровности морского дна рассматривались во многих работах российских и зарубежных авторов (см., напр., монографию [1] и приведенную в ней литературу). В настоящей работе излагается новый асимптотический подход к определению возмущения ветровой волны на поверхности океана под действием течения, вышедшего из глубины. Получена явная формула для деформации спектра поверхности через преобразование Фурье от поля скоростей течения, вышедшего на поверхность, а также указан метод построения формы деформированной поверхности в исходных координатах.

Настоящая работа существенно использует следующее соображение. Уравнение деформации поверхности жидкости, выведенное в [9] весьма сложное, оно содержит нелокальные операторы. Но если предположить, что поток жидкости представляет собой однородный поток, двигающийся с постоянной скоростью с возмущением, величина которого существенно меньше скорости основного однородного потока, то можно получить методом асимптотического разложения явные формулы для спектра возмущения ветровых волн, содержащие спектр поля скоростей возмущения однородного потока на поверхности жидкости. Указанное предположение о малости возмущения однородного потока часто действительно выполняется для реальных ситуаций, и эти формулы могут быть полезны для математического моделирования гидродинамических полей на поверхности океана.

2. Постановка задачи о деформации ветрового волнения под действием течений

Приведем в этом разделе для полноты изложения вывод основного уравнения, следуя [9]. Далее асимптотическими методами осуществляется вывод уравнения для приближенной модели трансформации спектра водной поверхности, ранее такой подход применялся в [17].

Будем рассматривать невязкую жидкость с безвихревым движением [16]. Введем потенциал скорости Φ ; из условия несжимаемости следует, что $\nabla^2 \Phi = 0$. Обозначим свободную поверхность $z = \zeta(x, y, t)$. Пусть $\nabla_{xy} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ — оператор горизонтального градиента. Кинематическое условие для рассматриваемого движения на свободной поверхности имеет вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} - \left(\nabla_{xy} \Phi \Big|_{z=\zeta}, \nabla_{xy} \zeta \right)$$

Динамическое условие на поверхности обусловлено требованием, чтобы перепад давления по обе стороны определялся только поверхностным натяжением. Учитывая известное уравнение Бернулли для движения, получим на поверхности следующее уравнение:

$$\frac{p}{\rho} + g\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\nabla_{xy} \Phi \right)^2 \Big|_{z=\zeta} = 0,$$

где p — плотность воды, а p — давление. Пусть рассматривается модель жидкости бесконечной глубины, тогда, пренебрегая влиянием атмосферы, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= Q \\ \frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} - \left(\nabla_{xy}\Phi \Big|_{z=\zeta}, \nabla_{xy}\zeta \right) \\ g\xi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left| \nabla_{xy}\Phi \Big|_{z=\zeta} \right|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \right)^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где Q — мощность источников течения. Представим потенциал Φ в виде суммы компоненты F , отвечающей за неоднородное течение, и компоненты Ψ , связанной с поверхностным течением. Смещение поверхности ζ также разделим на смещение η для неоднородного и ξ для течения на поверхности. Разложим компоненту F в ряд Тейлора в точке $z = \eta$:

$$F = F \Big|_{z=\eta} + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \xi + \dots$$

Учитывая, что для F система (2.1) выполнена, получим, что первое уравнение системы переходит в $\Delta\Psi = 0$.

Рассмотрим подробнее третье уравнение системы. Подставляя в него $\Phi = F + \Psi$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} \Big|_{z=\eta} \xi + g\xi + g\eta + \frac{1}{2} \left| \nabla_{xy} \left(\Psi + F + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right) \right|^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \Big|_{z=\eta} \xi \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \nabla_{xy} \left(\Psi + F + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right) \right|^2 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \Big|_{z=\eta} \xi \right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ + 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial\Psi}{\partial x} + 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \Big|_{z=\eta} \xi + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \Big|_{z=\eta} \frac{\partial\Psi}{\partial x} \xi + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} \right)^2 + \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \Big|_{z=\eta} \xi \right)^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial\Psi}{\partial y} + 2 \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \Big|_{z=\eta} \xi + 2 \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \Big|_{z=\eta} \right), \end{aligned}$$

будем считать амплитуду поверхностных волн малой, поэтому можно пренебречь квадратичными членами по Ψ и ξ , тогда получим

$$\frac{1}{2} \left| \nabla_{xy} \left(\Psi + F + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right) \right|^2 = \frac{1}{2} (\nabla_{xy} F)^2 + \left(\nabla_{xy} F \frac{\partial \nabla_{xy} F}{\partial z} \right) \xi + \left(\nabla_{xy} F \nabla_{xy} \Psi \right) \Big|_{z=\eta}$$

Аналогично распишем для последнего слагаемого равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=\eta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \Big|_{z=\eta} \xi + \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right)^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \Big|_{z=\eta} \xi \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial\Psi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \Big|_{z=\eta} \xi + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial\Psi}{\partial z} \xi \end{aligned}$$

Учитывая, что F – стационарный поток, для которого система приобретает вид (2.1), получим следующее выражение для третьего уравнения в (2.1) относительно потенциала Ψ :

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + g\xi + \left(\nabla_{xy} F \frac{\partial \nabla_{xy} F}{\partial z} \right) \xi + \left(\nabla_{xy} F \nabla_{xy} \Psi \right) \Big|_{z=\eta} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \Big|_{z=\eta} + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right|_{z=\eta} \xi = 0$$

Аналогично, расписав второе уравнение системы (2.1) через F, Ψ, ξ, η , получим уравнение:

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right|_{z=h} \xi + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=\eta} - \left(\nabla_{xy} F \nabla_{xy} \xi \right) - \left(\nabla_{xy} \Psi \nabla_{xy} \eta \right) = 0$$

Тогда система (2.1) переходит в систему:

$$\Delta \Psi = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + g\xi + \left(\nabla_{xy} F \frac{\partial \nabla_{xy} F}{\partial z} \right) \xi + \left(\nabla_{xy} F \nabla_{xy} \Psi \right) \Big|_{z=\eta} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \Big|_{z=\eta} + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right|_{z=\eta} \xi = 0 \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right|_{z=h} \xi + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=\eta} - \left(\nabla_{xy} F \nabla_{xy} \xi \right) - \left(\nabla_{xy} \Psi \nabla_{xy} \eta \right) = 0$$

Теперь предположим, что наклон поверхности жидкости мал, т.е. $|\nabla_{xy} \eta| \ll 1$ и, обозначив $\nabla_{xy} F$ через U , запишем систему (2.2) в виде:

$$\Delta \Psi = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla_{xy}) \right) \Psi \Big|_{z=\eta} + g\xi = 0 \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla_{xy}) \right) \xi - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=h} = 0$$

С помощью преобразования Фурье по x и y решим первое уравнение системы (2.3) с учетом краевого условия, в качестве которого выступает третье уравнение. Избавляясь от Ψ , подставим решение во второе уравнение и получим уравнение для поверхностного смещения $\xi(x, y, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla_{xy}) \right) A \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla_{xy}) \right) \xi + g\xi = 0, \quad (2.4)$$

где $A = (-\Delta_{xy})^{-1/2}$, $t > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$. Степень оператора Лапласа определяется по формуле:

$$(-\Delta_{xy})^{-1/2} f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int \exp(ik_1 x) \exp(ik_2 y) \frac{\hat{f}(k_1, k_2)}{k} dk_1 dk_2,$$

где

$$\hat{f}(k_1, k_2) = \int \exp(-ik_1 x) \exp(-ik_2 y) f(x, y) dx dy, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

3. Асимптотический анализ решений уравнения динамики морской поверхности

Пусть вышедшее на поверхность течение имеет вид

$$\vec{U} = \varepsilon \vec{u}(x, y, t) + U_0 \vec{e}_1,$$

где $U_0 \vec{e}_1$ – вектор скорости основного потока, $\vec{u}(x, y, t) = (u_1(x, t), u_2(y, t))$ – вектор скорости возмущения основного потока, соразмерный по модулю со скоростью основного потока, ε – малый параметр. Будем считать, что при $t < 0$ возмущение u основного потока отсутствует, далее при $t > 0$ оно возникает, развиваясь от нуля до некоторого стационарного состояния $u^*(x, y) = (u_1(x), u_2(y))$.

Будем искать решение задачи (2.4) в виде

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \xi_1 + \dots$$

Подставим ξ в исходное уравнение (2.4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения для ξ_0 и ξ_1 , нулевого и первого приближений соответственно.

Нулевое приближение

Имеем

$$\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} + 2U_0 \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t \partial x} + U_0^2 \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial x^2} = -gA^{-1} \xi_0, \quad (3.1)$$

где $A^{-1} \xi(x, y, t) = \sqrt{-\Delta} \xi(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \exp \int (ik_1 x) \exp(ik_2 y) \hat{\xi}(k_1, k_2, t) k dk_1 dk_2$.

Пусть решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\xi_0 = e^{i\Omega x} e^{i\gamma_1 x} e^{i\gamma_2 y} \quad (3.2)$$

Подставим (3.2) в (3.1) и получим, что решение в виде (3.2) существует при $\Omega = -U_0 \gamma_1 \pm \sqrt{g^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}$.

Первое приближение

Для первого приближения получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + 2U_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t \partial x} + U_0^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = -gA^{-1} \xi_1 + F(x, y, t), \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} F = & \Omega \gamma_1 A(u_1 \xi_0) + \Omega \gamma_2 A(u_2 \xi_0) + \Omega \gamma_1 u_1 A \xi_0 + \\ & + \Omega \gamma_2 u_2 A \xi_0 + U_0 \gamma_1^2 u_1 A \xi_0 + U_0 \gamma_1 \gamma_2 u_2 A \xi_0 - \\ & - iU_0 \gamma_1 A \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \xi_0 + u_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right) - iU_0 \gamma_2 A \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \xi_0 + u_2 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Пусть нам известно Фурье-преобразование компонент вектора скорости, $\hat{u}_1 = v_1$ и $\hat{u}_2 = v_2$. Сделаем Фурье-преобразование от правой и левой частей уравнения (3.3) и будем искать его решение в виде $\hat{\xi}_1 = \hat{\eta}(k_1, k_2) e^{i\Omega t}$.

Итак,

$$\begin{aligned} \hat{F} = & \frac{\Omega \gamma_1 (u_1 \xi_0)^\wedge + \Omega \gamma_2 (u_2 \xi_0)^\wedge}{k} + \frac{1}{\gamma} (\Omega \gamma_1 v_1 * \delta(k_1 - \gamma_1, k_2 - \gamma_2) + \\ & + \Omega \gamma_2 v_2 * \delta(k_1 - \gamma_1, k_2 - \gamma_2)) e^{i\Omega t} + \frac{1}{\gamma} (U_0 \gamma_1^2 v_1 * \delta(k_1 - \gamma_1, k_2 - \gamma_2) + \\ & + U_0 \gamma_1 \gamma_2 v_2 * \delta(k_1 - \gamma_1, k_2 - \gamma_2)) e^{i\Omega t} - iU_0 \gamma_1 \frac{ik_1 v_1 * \hat{\xi}_0 + i\gamma_1 v_1 * \hat{\xi}_0}{4\pi^2 k} - \\ & - U_0 \gamma_2 \frac{ik_1 v_2 * \hat{\xi}_0 + i\gamma_1 v_2 * \hat{\xi}_0}{4\pi^2 k}, \end{aligned}$$

где символом $*$ – обозначен оператор свертки двух функций.

Обозначим $\tilde{v}_{1,2} = v_{1,2}(k_1 - \gamma_1, k_2 - \gamma_2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} e^{-i\Omega t} (A^{-1}F)^\wedge &= e^{-i\Omega t} \cdot \hat{F} \cdot |\vec{k}| = \Omega\gamma_1 \tilde{v}_1 + \Omega\gamma_2 \tilde{v}_2 + \\ &+ \frac{k}{\gamma} (\Omega\gamma_1 \tilde{v}_1 + \Omega\gamma_2 \tilde{v}_2 + U_0\gamma_1^2 \tilde{v}_1 + U_0\gamma_1\gamma_2 \tilde{v}_2) + U_0\gamma_1(k_1 - \gamma_1) \tilde{v}_1 + U_0\gamma_1^2 \tilde{v}_1 + \\ &+ U_0\gamma_2(k_1 - \gamma_1) \tilde{v}_2 + U_0\gamma_1\gamma_2 \tilde{v}_2 = \\ &= \left(\Omega\gamma_1 \left(1 + \frac{k}{\gamma} \right) + U_0\gamma_1(k_1 + \gamma_1) \right) \tilde{v}_1 + \left(\Omega\gamma_2 \left(1 + \frac{k}{\gamma} \right) + U_0\gamma_2(k_1 + \gamma_1) \right) \tilde{v}_2 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем Фурье-преобразование уравнения (3.3):

$$\frac{\partial^2 \hat{\xi}_1}{\partial t^2} + 2U_0 + U_0^2 \frac{\partial^2 \hat{\xi}_1}{\partial x^2} = -gk \hat{\xi}_1 + (A^{-1}F)^\wedge \quad (3.4)$$

Далее, подставляем $\hat{\xi}_1 = \hat{\eta}(k_1, k_2)e^{i\Omega t}$ в уравнение (3.4) и находим

$$\hat{\eta} = \frac{1}{k - (\Omega + k_1 U_0)^2} \left(\Omega\gamma_1 \left(1 + \frac{k}{\gamma} \right) + U_0\gamma_1(k_1 + \gamma_1) \right) \tilde{v}_1 + \left(\Omega\gamma_2 \left(1 + \frac{k}{\gamma} \right) + U_0\gamma_2(k_1 + \gamma_1) \right) \tilde{v}_2 \quad (3.5)$$

4. Явное выражение решения задачи о трансформации спектра взволнованной поверхности под действием течений

Общее решение задачи о трансформации спектра принимает вид:

$$\hat{\xi} = \hat{\xi}_0 + \varepsilon \hat{\xi}_1 = 4\pi^2 \delta(k_1 - \gamma_1, k_2 - \gamma_2) e^{i\Omega t} + \varepsilon \hat{\eta} e^{i\Omega t} \quad (4.1)$$

Формула (4.1) позволяет просто вычислить спектр возмущенной течением поверхностной ветровой волны, если известно двумерное преобразование Фурье проекции на горизонтальную плоскость поля скорости течения, вышедшего из глубины. Возмущение поверхности в спектральном представлении может быть получено из спектрального представления для плоской компоненты поля течений путем сдвига и умножения на некоторую “передаточную функцию”.

При этом знаменатель в формуле (3.5) обращается в ноль на некоторой линии в плоскости k_1, k_2 . Для этих значений формула (3.5) теряет смысл. Связано это с тем, что в принятой линейной модели данные значения k_1 и k_2 являются резонансными значениями, при которых амплитуда соответствующей компоненты спектра возмущенной волны неограниченно возрастает при стремлении времени к бесконечности. Но при больших амплитудах не будет выполнено предположение о малости градиентов поверхности, которое лежит в основе вывода уравнений рассматриваемой модели. Поэтому деформации спектров будут достоверными только в некоторой окрестности кривой, на которой знаменатель в формуле (3.5) не обращается в нуль.

Для исследования возможности наблюдения деформации поверхности моря с помощью неконтактных измерительных приборов удобно именно представление деформированной поверхности в спектральной форме, так как для моделирования флуктуаций сигналов, полученных от радиометров и радиолокаторов удобно именно такое представление. Формулы для расчетов возмущений сигналов от радиометров и радиолокаторов приведены, например, в [2]. Имеется, как уже было отмечено выше, большой экспериментальный материал, подтверждающий связь возмущений океанских течений за счет неоднородности дна с радиолокационными и радиометрическими изображениями поверхности. Очевидно, между двумя изображениями на рис. 1 существует связь, но ведь электромагнитные волны в соленую воду не про-

никают! Это явление давно вызывало большой интерес и, несомненно, требовало теоретического объяснения. В данной работе рассматривается связь вышедших на поверхность течений и деформаций поверхностного волнового поля в спектральных и координатных представлениях. При этом локализованное в некоторой области поверхности течение порождает также локализованную в некоторой другой области флуктуацию поверхностного волнения, что вытекает из свойств преобразования Фурье и наблюдается также в экспериментах, о которых упоминалось выше.

Кроме того, спектр возмущения поверхности может содержать более широкий набор частот, чем спектр вышедшего на поверхность поля скоростей течения, поскольку в формуле (3.5) присутствует сдвиг спектра поля скорости возмущающего течения. Подобный эффект также наблюдается в эксперименте, когда крупномасштабное течение, которое в спектре не содержит коротких по длине волны компонент, вызывает изменение по всему спектру деформаций поверхности. Так, конвекционные течения, возникающие в океане в результате перегрева верхних слоев океана, влияют на коротковолновую (миллиметры- сантиметры) составляющую спектра поверхности океана. Изменения в этой части спектра можно зафиксировать в инфракрасном диапазоне собственного радиоизлучения поверхности океана даже с помощью радиометров космического базирования. Такого рода измерения используются, в частности, для предсказания возникновения тайфунов в зоне перегрева океанской поверхности.

5. Переход от спектрального представления возмущенного профиля поверхности моря к координатному

Естественный вопрос – как получить форму возмущенной поверхности в исходных координатах (x, t) . Спектральное представление содержит в знаменателе множитель, который обращается в ноль на целой линии, поэтому непосредственное применение формулы обращения двумерного преобразования Фурье затруднено. Ниже предлагается способ решения уравнения вида (3.3) в явном виде с помощью формулы, эффективно реализуемой при численных расчетах.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{\xi} + 2\xi'_x + \xi''_{xx} + \sqrt{-\Delta_{xy}} \xi = f(x, y, t)$$

Будем считать, что при $t < t_0 < 0$ $f \equiv 0$ и $\xi \equiv 0$. Используя замену переменных $x = x + t$, $y = y$, $t = t$, получаем уравнение в переменных (x, y, t)

$$\ddot{\xi} + \sqrt{-\Delta_{xy}} \xi = f(x, y, t)$$

Положив $f = \delta(x)\delta(y)$ и используя преобразование Фурье по переменным (x, y) , найдем фундаментальное решение этого уравнения, через решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{\xi} + \sqrt{k^2 + l^2} \xi = 0$$

с начальными условиями

$$\xi(0) = 0, \dot{\xi}(0) = 1$$

Получаем $\xi(t, \rho) = \theta(t) \sin(\sqrt{\rho}t) / \sqrt{\rho}$, где $\rho = \sqrt{k^2 + l^2}$, а $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Обращая образы Фурье, получаем

$$\xi(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ik\alpha + il\beta}}{\sqrt{\rho}} \sin(\sqrt{\rho}t) dk dl f(x - \alpha, y - \beta, t - \tau) d\alpha d\beta d\tau$$

Последний интеграл сходится, если функция f достаточно быстро убывает на бесконечности.

Численная реализация расчетов на основе последней формулы – отдельный вопрос, который требует специального рассмотрения. Для этого необходимо получить двумерное преобразование Фурье функции f , которая выражается через спектр возмущающего течения и через его сдвиги.

Далее приводится пример расчета поля скоростей, вызванного движущимся источником [14] в координатном и спектральном представлении (см. рис. 7, 8). С помощью него можно осуществить моделирование возмущения поверхности также в спектральном и координатном представлении. Для этого нужно воспользоваться формулой (4.1). Именно, нужно получить картину поверхностного поля скоростей в спектральном представлении, сдвинуть эту картину на постоянный волновой вектор возмущаемой ветровой волны и, далее, умножить на передаточную функцию (которая, заметим при этом, имеет особенности на целой линии). Затем осуществляется переход к исходным координатам (x, t) , описанным выше методом.

Поле скоростей на поверхности, изображенное на рис. 7, рассчитано с применением сеточного метода для уравнения Буссинеска с краевым условием свободной поверхности на верхней границе жидкости. Установлено хорошее соответствие между исходными полями скоростей и результатами применения прямого и обратного преобразования Фурье к ним (в спектральной области вблизи начала координат, см. рис. 8), что свидетельствует о достаточной точности численных методов при использовании преобразования Фурье.

Важный вопрос, который можно исследовать в рамках описанной модели – влияние неоднородной стратификации жидкости на картину возмущений поля ветрового волнения.

Изложенные в настоящей работе методы позволяют осуществить «сквозное» моделирование:

- стратифицированная водная среда,
- поток, обтекающий неоднородности дна,
- течение, вышедшее на поверхность океана, связанное с неоднородностью дна,
- деформация ветрового волнения, вызванная течением,
- флуктуации отраженных радиолокационных сигналов или собственного радиозлучения поверхности океана.

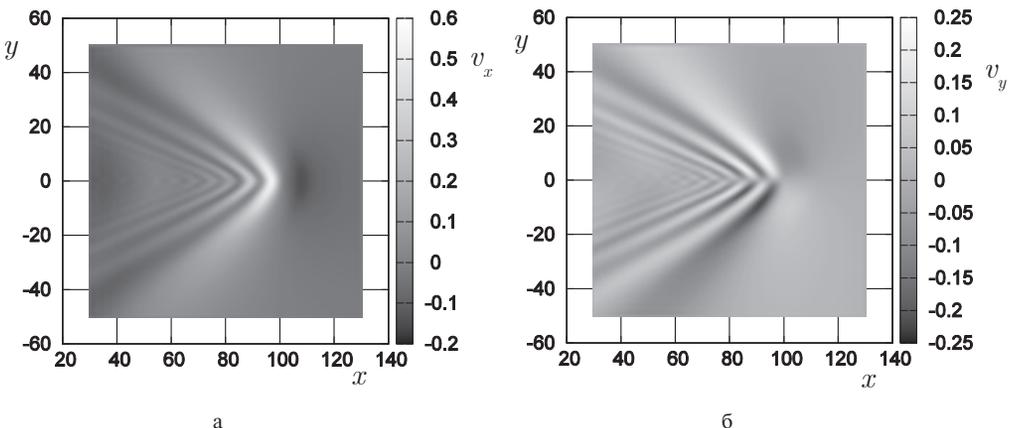


Рис. 7. Карты компонент v_x, v_y поля скорости течений на поверхности жидкости в координатном представлении

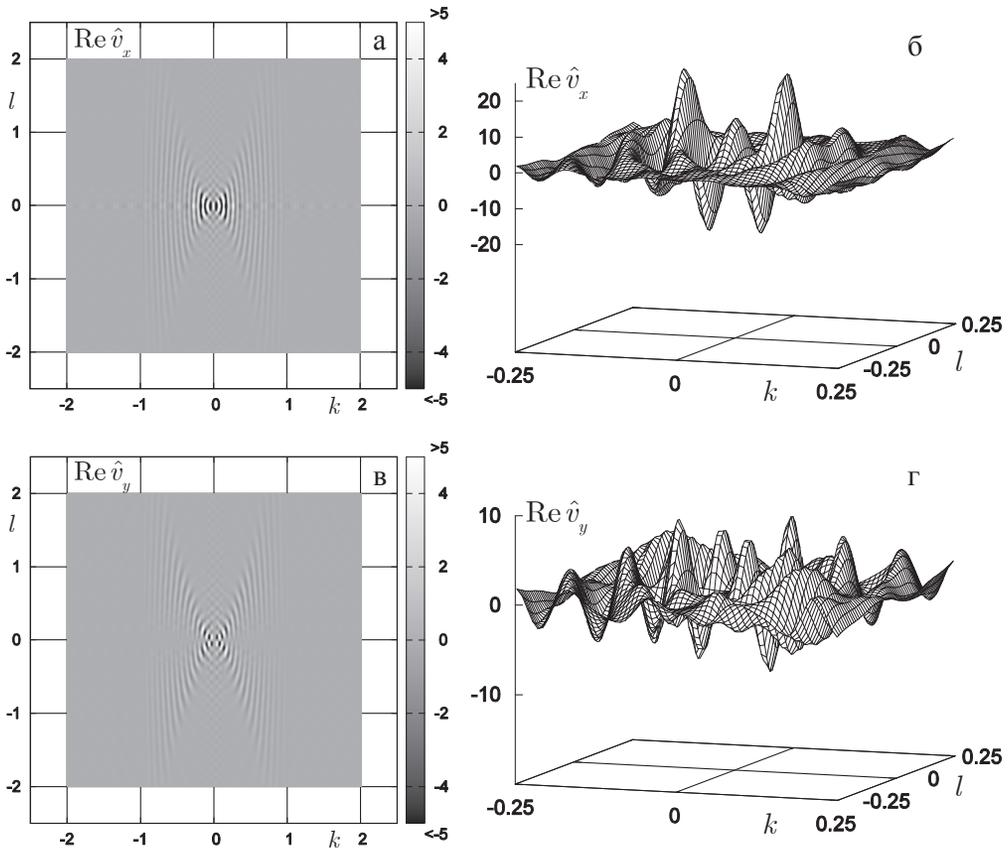


Рис. 8. Вещественные составляющие Фурье-образов компонент скорости течения на поверхности жидкости:
 компонента $\text{Re } \hat{v}_x$: а: в области $[-2, 2] \times [-2, 2]$ и
 б: – в области $[-0.25, 0.25] \times [-0.25, 0.25]$ вблизи начала координат (изометрическая проекция);
 компонента $\text{Re } \hat{v}_y$: в: в области $[-2, 2] \times [-2, 2]$ и
 г: – в области $[-0.25, 0.25] \times [-0.25, 0.25]$ вблизи начала координат (изометрическая проекция)

Результаты расчетов, приведенные выше, были получены как на персональных компьютерах, так и с использованием вычислительных кластеров Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН (МСЦ РАН). Авторы выражают глубокую признательность руководству и сотрудникам МСЦ РАН, предоставившим возможность и техническую поддержку проведенных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 24-61-00025 (<https://rscf.ru/project/24-61-00025/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нестеров С.В., Шамаев А.С., Шамаев С.И.* Методы, процедуры и средства аэрокосмической компьютерной радиотомографии приповерхностных областей Земли. М.: Научный мир, 1996. 272 с.
2. *Gilman M.A., Sadov S.Yu., Shamaev A.S., Shamaev S.I.* Computer simulation of the scattering of electromagnetic waves: some problems associated with remote radar sensing of the sea surface // J. of Comm. Technol. Electron. 2000. V. 45. № 2. P. 229–246.
3. *Bass F.G., Fuks I.M.* Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces Pergamon, 1979. 540 p.

4. *Кравцов Ю.А., Мировская Е.А., Попов А.Е., Троицкий И.А., Эткин В.С.* Критические явления при тепловом излучении периодически неровной водной поверхности // Изв. АН СССР. ФАО. 1978. Т. 14. № 7. С. 733–739.
5. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля. М.: Мир, 1976. 428 с.
6. *Гершензон В.Е., Ирисов В.Г., Трохимовский Ю.Г., Эткин В.С.* Критические явления в радиотепловом излучении неровной водной поверхности при произвольных углах наблюдения // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 9. С. 1159–1183.
7. *Irisov V.G.* Azimuthal variation of the microwave radiation from a slightly non Gaussian surface // Radio Sci. 2000. V. 35. № 1. P. 65–82.
8. *Лаврова О.Ю., Серебряный А.Н., Митягина М.И., Бочарова Т.Ю.* Подспутниковые наблюдения мелкомасштабных гидродинамических процессов в северо-восточной части Черного моря // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2013. Т. 10. № 4. С. 308–322.
9. *Баханов В.В., Таланов В.И.* Преобразование нелинейных поверхностных волн в поле неоднородных течений // в сб.: Приповерхностный слой океана. Физические процессы и дистанционное зондирование. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1999. Т. 2. С. 81–107.
10. *Монин А.С., Красицкий В.П.* Явления на поверхности океана. Л.: Гидрометеоздат, 1986. 375 с.
11. *Басович А.Я., Баханов В.В., Браво-Животовский Д.М. и др.* О корреляции изменений спектральной плотности сантиметровых и дециметровых поверхностных волн в поле внутренней волны / Препринт № 153. Горький: ИПФ АН СССР, 1986. 9 с.
12. *Басович А.Я., Баханов В.В., Таланов В.И.* Влияние интенсивных внутренних волн на ветровое волнение (кинематическая модель) // в сб.: Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1982. С. 8–30.
13. *Baydulov V.G., Knyazkov D., Shamaev A.S.* Motion of mass source in stratified fluid // J. Phys.: Conf. Ser. V. 2224. 2021 2nd Int. Symp. on Automation, Information and Computing (ISAIC 2021) December 03 – 06 2021 Online. P. 012038–1–8. 2022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2224/1/012038>
14. *Князьков Д.Ю., Байдулов В.Г., Савин А.С., Шамаев А.С.* Прямые и обратные задачи динамики поверхностного волнения, вызванного обтеканием подводного препятствия // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 3. С. 442–453. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030074>
15. *Knyazkov D., Shamaev A.* Rectilinear motion of mass source in non-uniformly stratified fluid // AIP Conf. Proc. 2024. V. 3094(1). P. 500028-1–4. <https://doi.org/10.1063/5.0210166>
16. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
17. *Зарубин Н.А., Шамаев А.С.* Исследование взаимодействия поверхностных ветровых волн с течением // Морские интеллект. технол. 2023. Т. 3. № 4. С. 93–99.

Mathematical Methods for Modeling Wind Wave Anomalies on the Ocean Surface

D. Yu. Knyazkov^{a,*}, A. S. Shamaev^{a,**}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

e-mail: knyaz@ipmnet.ru^{}, sham@rambler.ru^{**}*

The work is devoted to the construction of a mathematical model of the effect of currents on wind waves on the ocean surface and the study of fluctuations in sea waves by non-contact means (radar, radiometry, optical sensing devices). A review of numerous publications in this field is given and a new approach to calculating wind wave fluctuations using a special asymptotic method is proposed. This method allows us to obtain explicit analytical formulas for wind disturbance disturbances. At the same time, it is possible to analytically calculate the mentioned disturbances in both spectral and coordinate forms. This, in turn, allows us to explicitly calculate the perturbations of reflected radar signals and of the self-radiation from the agitated sea surface under the influence of currents.

Keywords: wind waves, flow models, radiolocation, radiometry, asymptotic methods, two-dimensional Fourier transform

REFERENCES

1. *Nesterov S.V., Shamaev A.S., Shamaev S.I.* Methods, Algorithms and Facilities of Aerospace Computer Radar Tomography of Earth Surface Regions. Moscow: Nauch. Mir, 1996. 272 p. (in Russian)
2. *Gilman M.A., Sadov S.Yu., Shamaev A.S., Shamaev S.I.* Computer simulation of the scattering of electromagnetic waves: some problems associated with remote radar sensing of the sea surface // *J. Comm. Technol. Electron.*, 2000, vol. 45, no. 2, pp. 229–246.
3. *Bass F.G., Fuks I.M.* Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces Pergamon, 1979. 540 p.
4. *Kravtsov Yu.A., Mirovskaya Ye.A., Popov A.E., Troitskiy I.A., Etkin V.S.* Critical effects in the thermal radiation of a periodically uneven water surface // *Izv. of the AS USSR. Atmosph. & Oceanic Phys.*, 1978, vol. 14, no. 7, pp. 522–526.
5. *Rytov S.M., Kravtsov Yu.A., Tatarsky V.I.* Introduction to Statistical Radiophysics. Random Fields. Moscow: Mir, 1976. 428 p. (in Russian)
6. *Gershenson V.E., Irisov V.G., Trokhimovsky Yu.G., Etkin V.S.* Critical phenomena in radiothermal radiation of an uneven water surface at arbitrary observation angles // *Izv. vuzov. Radiofizika*, 1987, vol. 30, no. 9, pp. 1159–1183.
7. *Irisov V.G.* Azimuthal variation of the microwave radiation from a slightly non Gaussian surface // *Radio Sci.*, 2000, vol. 35, no. 1, pp. 65–82.
8. *Lavrova O.Yu., Serebryany A.N., Mityagina M.I., Bocharova T.Yu.* Subsatellite observations of small-scale hydrodynamic processes in the northeastern black sea // *Sovrem. Probl. Distanc. Zondir. Zemli iz Kosmosa*, 2013, vol. 10, no. 4, pp. 308–322. (in Russian)
9. *Bakhanov V.V., Talanov V.I.* Transformation of nonlinear surface waves in the field of inhomogeneous currents // in: *The Near-Surface Layer of the Ocean. Phys. Proc.&Remote Sensing*, 1999. Vol. 2, pp. 81–107. (in Russian)
10. *Monin A.S., Krasitsky V.P.* Phenomena on the Ocean Surface. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1986. 375 p. (in Russian)
11. *Basovich A.Ya., Bakhanov V.V., Bravo-Zhivotovskiy D.M. et al.* On the correlation of changes in the spectral density of centimeter and decimeter surface waves in the field of an internal wave / Preprint no. 153. Gorky: IPF of the AS USSR, 1986. 9 p. (in Russian)
12. *Basovich A.Ya., Bakhanov V.V., Talanov V.I.* The effect of intense internal waves on wind waves (kinematic model) // *The Impact of Large-Scale Internal Waves on the Sea Surface*. Gorky: Publishing House of the IPF of the AS USSR, 1982. P. 8–30. (in Russian)
13. *Baydulov V.G., Knyazkov D., Shamaev A.S.* Motion of mass source in stratified fluid // *J. Phys.: Conf. Ser. V. 2224. 2021 2nd Int. Symp. on Automation, Information and Computing (ISAIC 2021) 03/12/2021 - 06/12/2021 Online*. pp. 012038-1–8. 2022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2224/1/012038>
14. *Knyazkov D.Y., Baydulov V.G., Savin A.S., Shamaev A.S.* Direct and inverse problems of the dynamics of surface waves caused by the flow around an underwater obstacle // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, pp. 1725–1733. <https://doi.org/10.1134/S0015462823603030>
15. *Knyazkov D., Shamaev A.* Rectilinear motion of mass source in non-uniformly stratified fluid // *AIP Conf. Proc.*, 2024, vol. 3094(1), pp. 500028-1–4. <https://doi.org/10.1063/5.0210166>
16. *Sretenskii L.N.* Theory of Wave Motions in a Fluid. Moscow: Nauka, 1977. 816 p. (in Russian)
17. *Zarubin N.A., Shamaev A.S.* Investigation of the model of interaction of wind waves with the sea current // *Marine Intellect. Technol.*, 2023, vol. 62, pp. 93–98. (in Russian) <https://doi.org/10.37220/MIT.2023.62.4.070>

УДК 532.6

О ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ КАПЕЛЬ

© 2024 А. И. Григорьев^{1,*}, С. О. Ширяева^{2,**}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: grigorai@mail.ru

²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

**e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 25.03.2024 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 20.07.2024 г.

Асимптотическими методами исследуются условия реализации электростатической неустойчивости осесимметрично осциллирующих сильно заряженных сплюснутых и вытянутых сфероидальных капель в зависимости от величин их эксцентриситетов. Выяснилось, что электростатическая устойчивость сплюснутой сфероидальной капли по отношению к осесимметричным деформациям увеличивается с ростом величины эксцентриситета, а вытянутой сфероидальной капли снижается. Показано, что сама электростатическая неустойчивость сплюснутой заряженной капли реализуется на ее экваторе, где поверхностная плотность заряда достигает максимальной величины, а для вытянутой капли на ее вершинах.

Ключевые слова: сплюснутая и вытянутая сфероидальные капли, заряд, неустойчивость

DOI: 10.31857/S0032823524040069, EDN: WVXUUY

1. Введение. Проблема изучения физических закономерностей реализации электростатической неустойчивости по отношению к собственному заряду осциллирующих заряженных капель электропроводной жидкости, сопровождающейся дроблением родительской капли на более мелкие, сильно заряженные дочерние капельки, занимает исследователей уже почти полтора столетия, начиная с конца 19 века [1–3]. Такой интерес вызван многочисленными приложениями явления в геофизике, технической физике, химической технологии и т.п. [4–9]. К этому примыкают и исследования деформаций осциллирующих капель, мицелл и сопутствующих им явлений [4, 10–12], в том числе и изучение физического механизма развития неустойчивости сильно заряженной плоской поверхности жидкости [13–14] и электростатические распады сильно заряженных капель, см., напр., [15–19].

Говоря о каплях и мицеллах, будем иметь в виду капли (мицеллы) простейших форм: сферические, сплюснутые или вытянутые сфероиды, тем более, что последние две формы капель реализуются при осцилляциях сферической капли на основной (легче всего возбуждаемой) моде [3, 5–7, 9–10]. Но, если электростатическая неустойчивость вытянутой сфероидальной капли исследована более-менее детально (см., напр., [3, 15–19] и указанные там работы), то про неустойчивость сплюснутых сфероидальных заряженных капель известно весьма мало [20]. В частности известно,

что электростатическая устойчивость сплюснутой сфероидальной заряженной капли по отношению к осесимметричным осцилляциям только повышается с увеличением эксцентриситета, в то время как для вытянутой сфероидальной капли она снижается [3, 15–20]. В этой связи представляет интерес исследование электростатической устойчивости как вытянутой, так и сплюснутой сфероидальных заряженных капель электропроводной несжимаемой жидкости по отношению к осесимметричным осцилляциям, проведенное для обеих капель одинаковыми методами. Этому и посвящено настоящее рассмотрение.

2. Сплюснутый сфероид. Постановка задачи. Пусть имеется капля радиуса R , заряженная зарядом Q , несжимаемой идеальной (для простоты и сокращения объема математических выкладок) электропроводной жидкости с массовой плотностью ρ_1 в идеальной несжимаемой диэлектрической среде внешней среде с плотностью ρ_2 и коэффициентом межфазного натяжения σ , имеющая сплюснутую сфероидальную форму. Поверхность капли (границы раздела сред) будет возмущена капиллярным волновым движением весьма малой амплитуды, по порядку величины определяемой выражением: $|\xi| \sim \sqrt{kT / \sigma}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура [21]; т.к. в силу теплового движения молекул жидкости на границе раздела сред создается капиллярное волновое движение, не превышающая по амплитуде 0.1 нм. Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре капли (r, ϑ, φ) .

Волновые движения в капле и среде будем принимать потенциальными [22] с потенциалами скоростей $\varphi_1(r, t)$ и $\varphi_2(r, t)$, которые будут удовлетворять уравнениям Лапласа:

$$\nabla \varphi_i(r, t); i = 1, 2, \quad (2.1)$$

где индекс «1» соответствует жидкости капли, «2» – среде.

Уравнение возмущенной капиллярным волновым движением поверхности капли запишем в виде:

$$r(\vartheta, t) = r(\vartheta) + \xi(\vartheta, t),$$

где $r(\vartheta)$ – уравнение сплюснутого сфероида:

$$r(\vartheta) = R \frac{(1 - e^2)^{1/3}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}, e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad (2.2)$$

$\xi(\vartheta, t)$ – волновое возмущение поверхности.

Для нижеследующего качественного анализа на границе раздела сред (2.2) в первом приближении по малым параметрам $e^2 \ll 1$ и $(|\xi(\vartheta, t)|/R) \ll 1$ потребуем выполнения стандартных гидродинамических условий к уравнениям Лапласа (2.1):

кинематического:

$$\frac{\partial \xi(\vartheta, t)}{\partial t} \approx \frac{\partial \varphi_1(r, t)}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_2(r, t)}{\partial n_2} \equiv \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial n} \quad (2.3)$$

и динамического:

$$\Delta p = \rho_2 \frac{\partial \varphi_2(r, t)}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1(r, t)}{\partial t} + p_\sigma + p_e, \quad (2.4)$$

где \vec{n}_i – вектор положительной нормали к границе раздела сред для капли и среды; Δp – перепад давлений на границе раздела сред; p_σ – капиллярное давление; p_e – электрическое давление собственного заряда на каплю.

В используемом приближении: $e^2 \ll 1$ и $(|\xi(\vartheta, t)|/R) \ll 1$, производные по нормали в кинематическом граничном условии (2.3) отнесем к поверхности $r = R$, в итоге производные по нормальям заменятся на производные по радиусу:

$$\frac{\partial \varphi_1(r, t)}{\partial n_1} \rightarrow \frac{\partial \varphi_1(r, t)}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi_2(r, t)}{\partial n_2} \rightarrow -\frac{\partial \varphi_2(r, t)}{\partial r}$$

Гидродинамические потенциалы $\varphi_1(r, t)$ и $\varphi_2(r, t)$ должны быть гармоническими функциями, и их можно записать в виде:

$$\varphi_1(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) r^n P_n(\mu), \quad \varphi_2(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad \mu \equiv \cos \vartheta, \quad (2.5)$$

где $P_n(\cos \vartheta)$ – полиномы Лежандра; $B_n(t)$ и $C_n(t)$ – неопределенные коэффициенты, зависимость, которых от времени для капиллярного волнового движения в идеальной жидкости определяется как: $\varphi_i(r, t) \sim \exp(i\omega t)$, где ω – частота. В силу (2.3) следует записать в виде разложения и возмущение границы раздела:

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) P_n(\mu) \quad (2.6)$$

Кроме граничных условий потребуем также выполнения интегральных условий условия неизменности при осцилляциях объема капли, неподвижности ее центра масс и постоянства заряда капли:

$$\int_V r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \vec{r} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = 0$$

$$V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (2.7)$$

Подставляя (2.5), (2.6), (2.7) в (2.2) – (2.4) после простых, но громоздких вычислений, как это делалось, например, в [3,20,21], найдем дисперсионное уравнение задачи в линейном приближении по e^2 , в виде:

$$\Omega^2 = \frac{1}{M(n, e^2, \rho_1, \rho_2)} \left\{ 4W \left[(n-1) - e^2(n-4)\kappa_n \right] - \left[(n+2)(n-1) + 2e^2(n^2 + n + 4)\kappa_n \right] \right\}, \quad (2.8)$$

где

$$M(n, e^2, \rho_1, \rho_2) \equiv \frac{1}{n} \left(1 - e^2 \frac{n+3}{n} \kappa_n \right) + \frac{\rho_2}{\rho_1(n+1)} \left(1 - e^2 \frac{n-2}{n+1} \kappa_n \right)$$

$$\Omega^2 \equiv (\omega^2 \rho_1 R^3 / \sigma), \quad W \equiv (Q^2 / 16\pi\sigma R^3), \quad \kappa_n \equiv \frac{2n}{3(2n-1)(2n+3)}$$

Следует отметить, что безразмерный параметр W характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду капли [1–3].

Приравнивая в дисперсионном уравнении (2.8) квадрат безразмерной частоты Ω^2 нулю, можно найти условия реализации электростатической неустойчивости заряженной капли в форме сплюснутого сфероида в линейном же приближении по e^2 в виде зависимости зарядового параметра W от номера моды осцилляций n :

$$W_{cr} \equiv \frac{n+2}{4} \left(1 + e^2 \frac{n^3(n+1)}{(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+3)} \right); \quad n \geq 2 \quad (2.9)$$

Несложно видеть, что с увеличением e^2 критическое значение параметра W увеличивается пропорционально первой степени квадрата эксцентриситета, поскольку именно в этом приближении проводились расчеты. Но, тем не менее, встает вопрос: в каком месте сплюснутого сфероида, на поверхности которого плотность поверхностного заряда распределена неравномерно, реализуется неустойчивость. В монографии [23] приведено аналитическое выражение для распределения заряда по поверхности заряженного электропроводного сфероида, но сделано это в декартовых координатах, не наглядных в рассматриваемой ситуации. В Приложении 1 эта зависимость приводится в сферических координатах с началом в центре капли. Эта выражение имеет вид:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1 - e^2)^{1/3} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}{\sqrt{(-2e^2 + e^4) \sin^2 \vartheta + 1}} \quad (2.10)$$

Видно, что при $e = 0$ получается плотность заряда, характерная для электропроводной сферы.

Для сплюснутого сфероида при $\vartheta = 0$ получим на вершинах сфероида:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} (1 - e^2)^{1/3},$$

что несколько ниже, на множитель $(1 - e^2)^{1/3}$, заряда на сфере, и чем больше эксцентриситет, тем меньше поверхностная плотность заряда.

Для сплюснутого сфероида при $\vartheta = \pi/2$ получим на экваторе сфероида:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{1}{(1 - e^2)^{1/6}}$$

Это больше плотности поверхностного заряда на сфере, на множитель $(1 - e^2)^{-1/6}$. Таким образом, при сплющивании сильно заряженной капли в сфероид увеличивается плотность заряда на экваторе.

На рис. 1 приведен построенный по (2.10) трехмерный график зависимости безразмерной поверхностной плотности собственного электрического заряда Ξ на сплюснутой сфероидальной капле несжимаемой электропроводной жидкости,

$$\Xi \equiv \frac{4\pi R^2 \sigma}{Q} = \frac{(1 - e^2)^{1/3} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}{\sqrt{(-2e^2 + e^4) \sin^2 \vartheta + 1}},$$

от величины ее эксцентриситета e и ее полярного угла ϑ , который отсчитывается от вертикальной оси в сферической системе координат с началом в центре капли. Обезразмеривание поверхностной плотности заряда проведено на плотность поверхностного заряда равновеликой сферической капли.

Видно, что неустойчивость осесимметричных осцилляций капли может реализоваться только при больших значениях эксцентриситета $e \geq 0.95$ и значениях полярного угла $\vartheta \rightarrow \pi/2$, т.е. на экваторе сплюснутой сфероидальной капли. Это экспериментально подтвердилось несколько десятков лет назад при разработке устройств для электрокапельструйной печати [24]. Капли чернил, с которыми экспериментировали, были электропроводны и сильно заряжены, чтобы ими можно было управлять с помощью внешних электрических полей. Но оказалось, что такие капли, сталкиваясь с бумагой, претерпевали электростатическую неустойчивость и распадались, образуя чернильный ореол вокруг каждой из букв. В итоге, от указанного метода пришлось отказаться.

3. Вытянутый сфероид. Что касается вытянутой сфероидальной капли электропроводной жидкости, то механизм реализации ее электростатической неустойчивости подробно описан в [3].

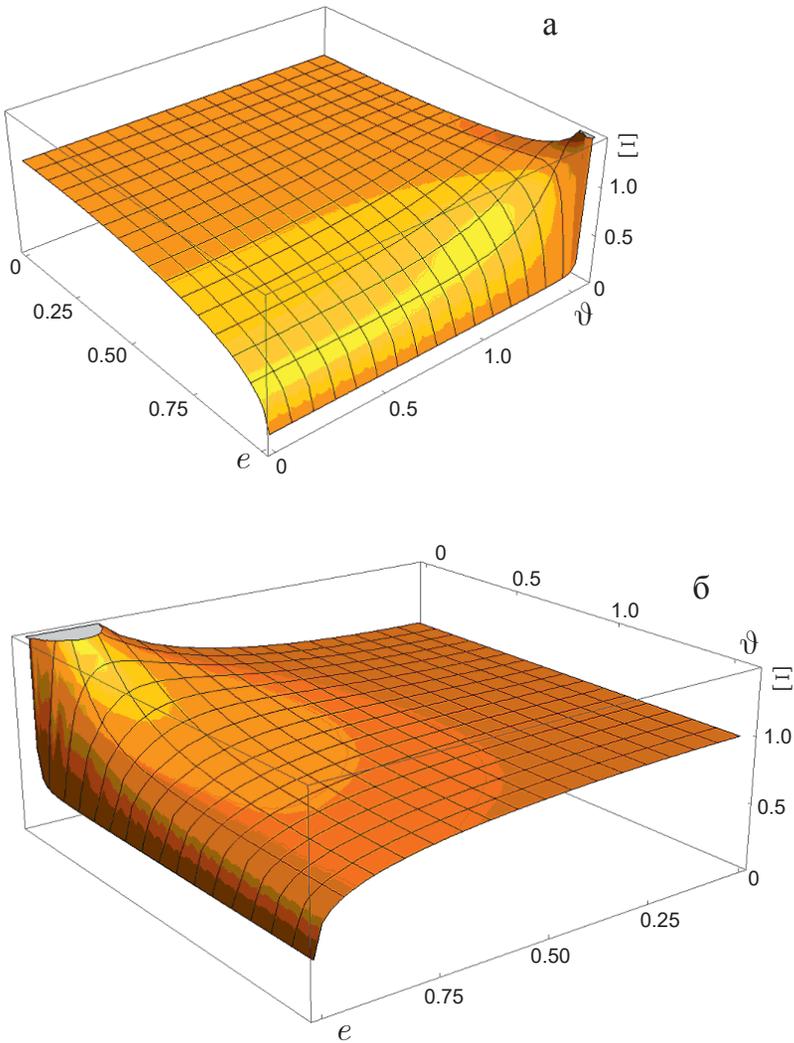


Рис. 1. График зависимости безразмерной поверхностной плотности собственного электрического заряда Ξ на сфероидальной капле несжимаемой электропроводной жидкости от величины ее эксцентриситета e и ее полярного угла ϑ : а – сплюснутая капля; б – вытянутая капля.

Уравнение вытянутого сфероида в сферической системе координат с началом в центре капли имеет вид:

$$r(\vartheta) = \frac{R(1 - e^2)^{1/6}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}}; e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2} \quad (3.1)$$

Повторяя все рассуждения, предпринятые во втором разделе, получим аналитическое выражение для критических условий реализации электростатической неустойчивости заряженной капли в форме вытянутого сфероида в линейном приближении по e^2 в виде зависимости зарядового параметра W от номера моды осцилляций n :

$$W_{cr} \equiv \frac{n+2}{4} \left(1 - e^2 \frac{n^3(n+1)}{(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+3)} \right); \quad n \geq 2 \quad (3.2)$$

Несложно видеть, что с увеличением эксцентриситета вытянутой сфероидальной капли критическое значение зарядового параметра только снижается.

Аналитическое выражение для распределения заряда по поверхности заряженной вытянутой электропроводной сфероидальной капли, приведено в Приложении 2 в сферических координатах с началом в ее центре:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1-e^2)^{1/6} \sqrt{1-e^2 \cos^2 \vartheta}}{\sqrt{1+e^2(-2+e^2) \cos^2 \vartheta}} \quad (3.3)$$

Видно, что при $e = 0$ получается стандартная для электропроводной сферы плотность заряда.

Для вытянутого сфероида при $\vartheta = 0$ получим на вершинах сфероида:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1-e^2)^{1/6} \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{(1-e^2)^2}} = \frac{Q}{4\pi R^2} (1-e^2)^{-1/3},$$

что на множитель $(1-e^2)^{-1/3}$, больше плотности заряда на сфере, и чем больше эксцентриситет, тем больше поверхностная плотность заряда. То есть при критическом для сферы заряде на капле она сбросит избыточный заряд.

Для вытянутого сфероида при $\vartheta = \pi/2$ получим на экваторе сфероида:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} (1-e^2)^{1/6}$$

Это на множитель $(1-e^2)^{1/6}$ меньше плотности заряда на сфере, и при критическом заряде на сфере вытянутая сфероидальная капля при $\vartheta = \pi/2$ устойчива.

На рис. 1,б приведен график зависимости безразмерной поверхностной плотности собственного электрического заряда Ξ на вытянутой сфероидальной капле несжимаемой электропроводной жидкости:

$$\Xi \equiv \frac{4\pi R^2 \sigma}{Q} = \frac{(1-e^2)^{1/6} \sqrt{1-e^2 \cos^2 \vartheta}}{\sqrt{1+e^2(-2+e^2) \cos^2 \vartheta}}$$

от величины ее эксцентриситета e и ее полярного угла ϑ , который отсчитывается от вертикальной оси в сферической системе координат с началом в центре капли. Обезразмеривание поверхностной плотности заряда проведено на плотность поверхностного заряда равновеликой сферической капли.

Видно, что неустойчивость осесимметричных осцилляций вытянутой сфероидальной капли может реализоваться только при значениях эксцентриситета $e \geq 0.7$ и малых значениях полярного угла $\vartheta \rightarrow 0$.

В заключение хотелось бы отметить, почему вытянутый и сплюснутый сфероиды рассмотрены по отдельности. Дело в том, что чисто математические определения эксцентриситетов сплюснутого и вытянутого сфероидов, например, в [3], не описываются одной непрерывной функцией. Для сплюснутого сфероида величина его эксцентриситета изменяется в диапазоне от 1 до 0, и эксцентриситет описывается одной функцией, а для вытянутого – величина эксцентриситета меняется от 0 до 1, и описывается другой функцией.

Во всех ситуациях истинный эксцентриситет это корень квадратный из разницы единицы и квадрата отношения меньшей полуоси к большей. При переходе от сплюснутого сфероида к вытянутому меньшая полуось при переходе величины эксцентриситета через ноль становится большей и наоборот.

Вообще-то есть другое определение (см. [25, стр. 47]), данное для эллипса, но подходящее для сфероида эксцентриситет есть отношение межфокусного расстояния к высоте сфероида вдоль оси симметрии. Но поскольку мы исходили из аналитических формул, приведенных в [23], то остановились на изложенном варианте.

Заключение. Исследованы физические закономерности реализации электростатической неустойчивости сильно заряженных капель, имеющих сфероидальные формы, как сплюснутые, так и вытянутые. Выяснилось, что неустойчивость осесимметричных сплюснутых капель имеет место на экваторе капли, не смотря на его протяженность – что и приводит к повышению их электростатической устойчивости при увеличении эксцентриситета, неустойчивость же осесимметричных вытянутых капель реализуется на вершинах капли, – что и приводит к уменьшению их электростатической устойчивости при увеличении эксцентриситета.

Приложение 1. Поверхностная плотность $\sigma(\vartheta)$ собственного заряда на электропроводном сплюснутом сфероиде в сферической системе координат с началом в центре сфероида

Примем для определенности, как в [23, стр. 40], что сфероид сплюснут вдоль оси OZ (чтобы удобнее было ссылаться на формулы).

Поверхностная плотность $\sigma(\vartheta)$ собственного электрического заряда на сплюснутом сфероиде $c < a = b$ с началом в центре капли (в [23, стр. 42]), формула (4.16):

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2 c} \left(\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Подставляя сюда выражения декартовых координат через сферические:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta,$$

получим:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi a^2 c} \left(\frac{r(\vartheta)^2 \sin^2 \vartheta}{a^4} + \frac{r(\vartheta)^2 \cos^2 \vartheta}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4\pi a^2 c r(\vartheta)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta}{a^4} + \frac{\cos^2 \vartheta}{c^4}}}, \quad (\text{П1.1})$$

$r(\vartheta)$ – выражение для уравнения сплюснутого сфероида, выписанного в сферических координатах с началом в центре капли:

$$r(\vartheta) = \frac{R(1 - e^2)^{1/3}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}, \quad (\text{П1.2})$$

где R – радиус равновеликой сферической капли.

Из (П1.2) меньшая полуось сфероида найдется при $\vartheta = 0$:

$$c = r(\vartheta)_{\vartheta=0} = R(1 - e^2)^{1/3}, \quad (\text{П1.3})$$

а большая при $\vartheta = \pi/2$:

$$a = r(\vartheta)_{\vartheta=\pi/2} = R(1 - e^2)^{-1/6} = \frac{R}{(1 - e^2)^{1/6}} \quad (\text{П1.4})$$

Подставляя (П1.2)–(П1.4) в (П1.1) найдем аналитическое выражение для распределения по поверхности сплюснутого электропроводного сфероида поверхностной плотности собственного заряда Q :

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1 - e^2)^{1/3} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}{\sqrt{(-2e^2 + e^4) \sin^2 \vartheta + 1}}$$

Видно, что неустойчивость осесимметричных осцилляций капли может реализоваться только при больших значениях эксцентриситета $e \geq 0.95$ и значениях полярного угла $\vartheta \rightarrow \pi/2$.

Приложение 2. Поверхностная плотность $\sigma(\vartheta)$ собственного заряда на поверхности вытянутого электропроводного сфероида в сферической системе координат с началом в центре сфероида

Примем для определенности, как в разд. 4 в [23, стр. 40], что сфероид вытянут вдоль оси OZ (чтобы удобнее было сослаться на формулы). Принято, что $c > a = b$.

Поверхностная плотность $\sigma(\vartheta)$ собственного электрического заряда на сфероиде (в [23, стр. 42]), формула (4.16):

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2 c} \left(\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Учитывая, что

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

В сферических координатах получим:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi a^2 c} \left(\frac{r(\vartheta)^2 \sin^2 \vartheta}{a^4} + \frac{r(\vartheta)^2 \cos^2 \vartheta}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4\pi a^2 c r(\vartheta)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta}{a^4} + \frac{\cos^2 \vartheta}{c^4}}}, \quad (\text{П2.1})$$

$r(\vartheta)$ — определяется уравнением вытянутого сфероида с началом системы координат в центре капли

$$r(\vartheta) = \frac{R(1 - e^2)^{1/6}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}}, \quad (\text{П2.2})$$

где R — радиус равновеликой сферической капли, а эксцентриситет e выражается через полуоси сфероида как:

$$e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}, \quad c = R(1 - e^2)^{-1/3}, \quad a = R(1 - e^2)^{1/6} \quad (\text{П2.3})$$

Подставляя (П2.2)–(П2.3) в (П2.1) получим окончательное аналитическое выражение для поверхностной плотности заряда на вытянутом электропроводном заряженном сфероиде:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{(1 - e^2)^{1/6} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}}{\sqrt{1 + e^2(-2 + e^2) \cos^2 \vartheta}}$$

Видно, что неустойчивость осесимметричных осцилляций капли может реализоваться только при значениях эксцентриситета $e \geq 0.7$ и малых значениях полярного угла $\vartheta \rightarrow 0$.

Работа, выполнена в ИПМех РАН в рамках Государственного задания № госрегистрации 124012500442-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh (Strutt J.W.)* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // *Phil. Mag.* 1882. V. 14. P. 184–186.
2. *Hendrics C.D., Schneider J.M.* Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces // *J. Amer. Phys.* 1963. V. 1. № 6. P. 450–453.
3. *Григорьев А.И.* О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли // *ЖТФ*. 1986. Т. 56. № 7. С. 1272–1278.
4. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* Сплющивание и дробление капли в звуковом поле // *Акустич. ж.* 1987. Т. 33. № 2. С. 233–239.
5. *Стерлядкин В.В.* Рассеяние света дождевыми каплями // *Оптика атмосферы и океана*. 2000. Т. 13. № 5. С. 534–537.
6. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Поверхностные колебания свободно падающей капли идеальной жидкости // *Изв. РАН. ФАО*. 2018. Т. 54. № 2. С. 1–7.
<https://doi.org/10.1134/S0001433818020123>
7. *Сергеев М.Н.* К теории дробления заряженной капли в потоке. // *Инж. ж.: Наука и инновации*. 2018. № 4. С. 1–11.
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1751>
8. *Илюшин Я.А., Кутуза Б.Г.* Мультиспектральные поляризационные характеристики уходящего микроволнового излучения дождевых осадков // *Физич. основы приборостр.* 2018. Т. 7. № 1(27). С. 37–48.
<https://doi.org/10.25210/jfop-1801-037047>
9. *Самухина Ю.В., Матюшин Д.Д., Поляков П.А., Буряк А.К.* О зарядовой неустойчивости и метастабильном состоянии равновесия заряженной проводящей капли при электрораспылении жидкости // *Коллоидный ж.* 2021. Т. 83. № 4. С. 449–455.
<https://doi.org/10.31857/S0023291221040108>
10. *Федяева О.А., Пошелюжная Е.Г.* Размеры и ориентация мицелл тритона x-10 в водных растворах поданным турбидиметрии // *ж. Физич. химии*. 2019. Т. 93. № 12. С. 1910–1912.
<https://doi.org/10.1134/S0044453719120070>
11. *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* Об акустическом и электромагнитном излучениях осциллирующей в материальной среде заряженной капли // *Изв. РАН. ФАО*. 2023. Т. 59. № 3. С. 352–372.
<https://doi.org/10.31857/S0002351523030045>
12. *Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryayeva S.O.* Nonlinear monopole and dipole acoustic radiation of a weakly charged droplet oscillating in a uniform electrostatic field // *Fluid Dyn.* 2022. V. 57. № 8. P. 982–997.
<https://doi.org/10.1134/S0015462822080031>
13. *Zubarev N.M.* Self-similar solutions for conic cusps formation at the surface of dielectric liquids in electric field // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 65. № 055301. P. 1–4.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.055301>
14. *de la Mora J.F.* The fluid dynamics of Taylor cones // *Ann. Rev. of Fluid Mech.* 2007. V. 39. P. 217–243.
<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110159>
15. *Taflin D.C., Ward T.L., Davis E.J.* Electrified droplet fission and the Rayleigh limit // *Langmuir*. 1989. V. 9. № 2. P. 376–384.
<https://doi.org/10.1021/la00086a016>
16. *Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al.* Rayleigh jets from levitated microdroplets // *Nature*. 2003. V. 421. P. 128.
17. *Kuo-Yen Li, Haohua Tu, Asit K. Ray.* Charge limits on droplets during evaporation // *Langmuir*. 2005. V. 21. № 9. P. 3786–3794.
<https://doi.org/10.1021/la047973n>
18. *Fong Chee Sheng, Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A.* An experiment on the Rayleigh instability of charged liquid drops // *Am.J. Phys.* 2007. V. 75. № 6. P. 499–503.
<https://doi.org/10.1119/1.2717221>
19. *Hunter H.C., Ray Asit K.* On progeny droplets emitted during Coulombic fission of charged microdrops // *Phys. Chem.&Chem. Phys.* 2009. V. 11. № 29. P. 6156–6165.
<https://doi.org/10.1039/b820457h>

20. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Критические условия неустойчивости сплюснутой сферoidalной сильно заряженной капли // ЭОМ. 1992. № 6. С. 20–23.
21. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1982. 620 с.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1992. 662 с.
24. Безруков В.И. Научно-технические основы и аппаратное обеспечение автоматизированной электрокапельструйной маркировки изделий. Дисс. на соискание уч. ст. доктора технич. наук: Санкт-Петербургский гос. политехн. ун-т, Санкт-Петербург: 2003. 505 с.
25. Фильчаков Л.Ф. Справочник по высшей математике. Киев: Наукова думка, 1973. 744 с.

On the Physical Regularities of the Instability of Charged Spheroidal Droplets

A. I. Grigoriev^{a,#}, S. O. Shiryaeva^{b,##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: grigorai@mail.ru*

^b*Yaroslavl State University named after P.G. Demidov, Yaroslavl, Russia*

^{##}*e-mail: shir@uniyar.ac.ru*

Asymptotic methods study the conditions for the implementation of electrostatic instability of oscillating highly charged flattened and elongated spheroidal droplets depending on the values of their eccentricities. It turned out that the electrostatic stability of the flattened spheroidal droplet with respect to axisymmetric deformations increases with an increase in eccentricity, and the elongated spheroidal droplet decreases. It is shown that the electrostatic instability of the flattened charged droplet itself is realized at its equator, where the surface density of the charge reaches the maximum value, and for the elongated droplet at its vertices.

Keywords: flattened and elongated spheroidal drops, charge, instability

REFERENCES

1. Rayleigh (Strutt J.W.) On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag., 1882, vol. 14, pp. 184–186.
2. Hendriens C.D., Schneider J.M. Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces // J. Amer. Phys., 1963, vol. 1, no. 6, pp. 450–453.
3. Grigoriev A.I. On the mechanism of instability of a charged conductive drop // J. of Tech. Phys., 1986, vol. 56, no. 7, pp. 1272–1278.
4. Danilov S.D., Mironov M.A. Flattening and crushing of the drop in the sound field // Acoustic J., 1987, vol. 33, no. 2, pp. 233–239.
5. Sterlyadkin V.V. Light scattering by raindrops // Optics of the Atmos.&Ocean, 2000, vol. 13, no. 5, pp. 534–537.
6. Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D. Surface fluctuations of the free-falling drop of the ideal liquid // Izv. RAS. FAO, 2018, vol. 54, no. 2, ss. 1–7.
7. Sergeev M.N. To the theory of crushing a charged drop in a stream // Engng. J.: Sci.&Innov., 2018, no. 4, ss. 1–11.
8. Iyushin Ya.A., Kutuza B.G. Multispectral polarization characteristics of outgoing microwave radiation of rainfall // Physical Foundations of Instrumentation, 2018, T. 7, no. 1(27), pp. 37–48.
9. Samukhina Yu.V., Matyushin D.D., Polyakov P.A., Buryak A.K. On charge instability and metastable equilibrium state of a charged conductive drop during liquid electrospray // Colloid J., 2021, vol. 83, no. 4, pp. 449–455.
10. Fedyeva O.A., Poshelyuzhnaya E.G. Dimensions and orientation of triton micelles x-10 in aqueous solutions according to turbidimetry data // J. of Phys. Chem., 2019, vol. 93, no. 12, pp. 1910–1912.

11. *Grigoriev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryayeva S.O.* On acoustic and electromagnetic radiation oscillating in the material medium of a charged drop // *Izv. RAS. FAO*, 2023, vol. 59, no. 3, ss. 352–372.
<https://doi.org/10.31857/S0002351523030045>
12. *Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryayeva S.O.* Nonlinear monopole and dipole acoustic radiation of a weakly charged droplet oscillating in a uniform electrostatic field // *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 982–997.
<https://doi.org/10.1134/S0015462822080031>
13. *Zubarev N.M.* Self-similar solutions for conic cusps formation at the surface of dielectric liquids in electric field // *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 65, no. 055301, pp. 1–4.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.055301>
14. *de la Mora J.F.* The fluid dynamics of Taylor cones // *Ann. Rev. of Fluid Mech.*, 2007, vol. 39, pp. 217–243,
<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110159>
15. *Taflin D.C., Ward T.L., Davis E.J.* Electrified droplet fission and the Rayleigh limit // *Langmuir*, 1989, vol. 9, no. 2, pp. 376–384.
<https://doi.org/10.1021/la00086a016>
16. *Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al.* Rayleigh jets from levitated microdroplets // *Nature*, 2003, vol. 421, pp. 128.
17. *Kuo-Yen Li, Haohua Tu, Ray A.K.* Charge limits on droplets during evaporation // *Langmuir*, 2005, vol. 21, no. 9, pp. 3786–3794.
<https://doi.org/10.1021/la047973n>
18. *Fong Chee Sheng, Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A.* An experiment on the Rayleigh instability of charged liquid drops // *Am.J. Phys.*, 2007, vol. 75, no. 6, pp. 499–503.
<https://doi.org/10.1119/1.2717221>
19. *Hunter H.C., Ray Asit K.* On progeny droplets emitted during Coulombic fission of charged microdrops // *Phys. Chem.&Chem. Phys.*, 2009, vol. 11, no. 29, pp. 6156–6165.
<https://doi.org/10.1039/b820457h>
20. *Grigoriev A.I., Shiryayeva S.O.* Critical conditions of instability of flattened spheroidal highly charged drop // *EOM*, 1992, no. 6, pp. 20–23.
21. *Frenkel J.I.* To the Tonks theory of liquid surface rupture by a constant electric field in vacuum // *PETF*, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 348–350.
22. *Landau L.D., Lifshits E.M.* *Hydrodynamics*. Moscow: Nauka, 1982. 620 p.
23. *Landau L.D., Lifschitz E.M.* *Theoretical Physics. Vol. 8. Electrodynamics of Continuous Media*. Moscow: Nauka, 1992. 662 p.
24. *Bezrukov V.I.* *Scientific and Technical Foundations and Hardware of Automated Electrocaplest-jet Marking of Products / Diss. for the degree of Doctor of Tech. Sci.* St. Petersburg State Polytechnic Univ., St. Petersburg: 2003. 505 p.
25. *Filchakov L.F.* *Handbook of Higher Mathematics*. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 744 p.

УДК 532.6; 532.22

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСНОЙ КАПЛИ, ПОКОЯЩЕЙСЯ НА ИДЕАЛЬНО ГЛАДКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ОСНОВАНИИ

© 2024 г. А. П. Янковский^{1,*}

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия

*e-mail: yankovsky_ap@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 01.04.2024 г.

После доработки 17.06.2024 г.

Принята к публикации 25.06.2024 г.

Сформулирована задача расчета равновесной осесимметричной формы жидкой капли, покоящейся на недеформируемой горизонтальной плоскости. Впервые получено уравнение баланса сил, действующих на каплю в вертикальном направлении и замыкающее постановку рассматриваемой задачи. Разработан высокоточный численный метод решения поставленной нелинейной задачи. Исследована зависимость углов смачивания капель от варьирования входных данных задачи: химического состава капли, давления газа, силы дополнительного слабого взаимодействия (например, ван-дер-ваальсовых или электрохимического происхождения). Для капель малых диаметров показана возможность существования двух решений, которым соответствуют существенно разные углы смачивания: в первом решении углы смачивания меньше 90° , а во втором – больше 90° , достигая значений 160° и более. Существование двух равновесных форм капли малого диаметра подтверждено натурными экспериментами. Равновесные формы капель больших диаметров могут существовать только при наличии дополнительной слабой отталкивающей силы между жидкостью и опорной поверхностью, имеющей интенсивность порядка $10^{-7} \dots 10^{-5}$ Па. При этом для капель больших диаметров существует только одно решение.

Ключевые слова: моделирование равновесной формы капли, расчетные углы смачивания, гидрофильность, гидрофобность, супергидрофобность, неединственность решения

DOI: 10.31857/S0032823524040079, EDN: WYWAMI

1. Введение. Поверхностные явления на данный момент времени представляют собой одну из актуальных проблем исследования, так как сведения о состоянии поверхности и поверхностном натяжении играют существенную роль во многих инженерных приложениях, в частности они оказывают значительное влияние на эффективность процессов в теплообменниках [1], а также и на работу других изделий [2]. При этом важную роль играет смачивающая способность жидкости по отношению к твердой поверхности, на которую она конденсируется или падает в виде капель. Для покоящихся капель жидкости эта способность количественно характеризуется краевым (критическим [2] или контактным [3]) углом смачивания θ . Если $\theta < 90^\circ$, то поверхность считается гидрофильной; если же $\theta > 90^\circ$ – гидрофобной; при $\theta > 150^\circ$ поверхность определяется как супергидрофобная.

К поверхностям различных элементов одних и тех же инженерных изделий одновременно могут предъявляться и различные требования к их смачиваемости (гидрофильные и гидрофобные) [1], обеспечить которые можно либо за счет использования материалов, обладающих естественными поверхностно активными свойствами, либо за счет специального текстурирования контактной поверхности. Так, в [4, 5] супергидрофобность поверхности достигается не только за счет формирования ее иерархической структуры, но и благодаря природным водоотталкивающим свойствам, используемых оксидов редкоземельных металлов. В работе же [6] гидрофобность и почти супергидрофобность поверхности были получены исключительно за счет текстуры керамического покрытия из оксида циркония, который обычно проявляет тенденцию к гидрофильности. Так как в последнем случае смачивающие свойства поверхности характеризуются только геометрией ее шероховатости, то возникает задача определения зависимости краевых углов смачивания капель, покоящихся на таких поверхностях, от параметров их геометрии. Для решения этой проблемы, очевидно, необходимо построить математические модели, описывающие формы капель, лежащих на шероховатых подложках.

Однако, прежде всего следует построить аналогичные адекватные модели для капель, покоящихся на идеализированной, абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. Несмотря на то, что публикации по этой теме весьма многочисленны [2, 3, 7–11 и др.], с позиций механики эта проблема так и не была решена, оставаясь логически не замкнутой. Действительно, из обзора, представленного в [2], и из более поздних работ [3, 12] следует, что до сих пор для капель весомых жидкостей, покоящихся на горизонтальной плоскости, не составлен баланс сил в вертикальном направлении – в направлении действия силы тяжести.

Так, в классическом решении Юнга краевой угол θ вычисляется через силы (в [2, 3] использован термин «коэффициенты») поверхностного натяжения межфазных границ жидкость–газ σ_{LG} , твердое тело–жидкость σ_{SL} и твердое тело–газ σ_{SG} (рис. 1). При этом рассматривается баланс указанных сил только в горизонтальном направлении (см. точку A на рис. 1), из которого вытекает формула [2]

$$\cos \theta = (\sigma_{SG} - \sigma_{SL}) / \sigma_{LG} \quad (1.1)$$

Соотношение (1.1) предполагается справедливым для идеально гладкой горизонтальной поверхности. Однако реальные опорные поверхности практически всегда обладают шероховатостью, что, как уже отмечалось, может влиять на их смачиваемость.

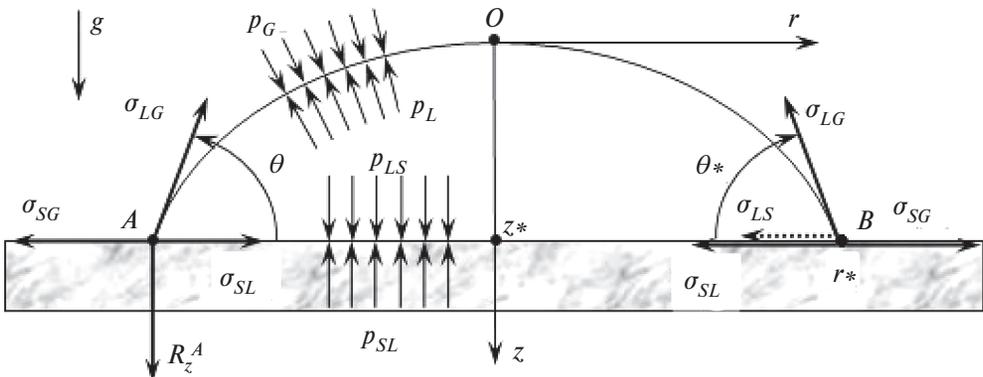


Рис. 1. Меридиональное сечение равновесной осесимметричной капли, покоящаяся на горизонтальной недеформируемой подложке

мость. В [2] со ссылкой на эксперименты предлагается в равенстве (1.1) учитывать шероховатость следующим образом. Пусть r – фактор неровности опорной поверхности, а именно отношение реальной площади поверхности к площади проекции этой поверхности на горизонтальную плоскость, тогда правую часть в уравнении (1.1) следует умножить на r . Однако справедливость такого учета шероховатости поверхности подложки вызывает определенные сомнения. Действительно, если искусственно профилировать опорную поверхность, например, в соответствии с поведением функции Вейерштрасса, то согласно ее фрактальным свойствам, можно получить сколь угодно большое значение r . Но тогда в силу ограниченности функции косинуса, при достаточно больших r равенство в преобразованном соотношении (1.1) будет невозможно. По-видимому, именно неудачность такого выбора параметра шероховатости опорной поверхности приводит к тому, что в экспериментах угол смачивания принимает не какое-то конкретное значение θ , а его величина попадает в некоторый диапазон $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$, причем разность $\theta_{\max} - \theta_{\min}$ может достигать величины порядка 10° [2]. А это означает, что разным шероховатым поверхностям при одинаковых значениях r могут соответствовать существенно разные критические углы θ .

При выводе формулы (1.1) Юнг предполагал, что форму покоящейся на поверхности капли можно аппроксимировать сегментом шара. Однако такая аппроксимация формы капли не подтверждается экспериментально (особенно в случаях капель больших объемов [6]) и не удовлетворяет уравнению Лапласа [2, 3]

$$\sigma_{LG} (1/R_1 + 1/R_2) = p_L - p_G, \quad (1.2)$$

где p_L и p_G – давление на поверхности капли со стороны жидкости и газа соответственно; R_1 и R_2 – радиусы главной кривизны этой поверхности. Действительно, для сферической формы капли имеем $1/R_1 = 1/R_2 = \text{const}$, т.е. левая часть в соотношении (1.2) является постоянной, а правая же часть в случае весомой капли – функция, зависящая от вертикальной координаты (см. рис. 1), а значит равенство в выражении (1.1) не возможно.

Из рассмотрения равновесия точки A на рис. 1 вытекает, что даже при использовании классического подхода в вертикальном направлении со стороны опорной поверхности на каплю (точнее на краевую точку A) действует сила реакции, направленная вниз:

$$R_z^A = \sigma_{LG} \sin \theta, \quad (1.3)$$

которую можно рассчитать, если из равенства (1.1) уже определен угол θ .

Как видно, согласно модели Юнга, сила R_z^A никак не участвует в расчете угла смачивания θ . Однако, как будет показано в настоящей работе, для весомых капель именно силы реакции со стороны опорной поверхности, действующие на каплю в вертикальном направлении и аналогичные R_z^A в соотношении (1.3), определяют величину угла θ , а отнюдь не баланс сил в горизонтальном направлении, из которого получено выражение (1.1).

Известным недостатком формулы (1.1) при ее практическом применении является необходимость знания коэффициентов натяжения σ_{SG} и σ_{SL} , которые предварительно нужно как-то определить из каких-то независимых экспериментов, которые, как правило, в литературе никак не обсуждаются.

С физической точки зрения силы поверхностного натяжения возникают в жидком или твердом теле в очень малой окрестности поверхности контакта с другим телом или средой (газовой, жидкой или твердофазной). Поэтому, строго говоря, для жидкой капли, покоящейся на горизонтальной плоскости, в точке поворота ее контура

(в точке контакта [3]) следует рассматривать не три коэффициента поверхностного натяжения, как это делается в модели Юнга (см. выражение (1.1) и силы, приложенные к точке A на рис. 1), а четыре коэффициента (см. систему сил, приложенных к точке B на рис. 1): прежние коэффициенты натяжения σ_{LG} и σ_{SG} , а вместо одной прежней силы σ_{SL} необходимо различать два коэффициента: σ_{LS} — силу поверхностного натяжения жидкости на границе с твердым телом (пунктирная стрелка на рис. 1) и σ_{SL} — силу поверхностного натяжения, действующую в твердой подложке на границе ее контакта с жидкостью (см. силу σ_{SL} , исходящую из точки B на рис. 1). В силу этого обстоятельства в окрестности точки B на рис. 1 силы σ_{SL} и σ_{SG} сознательно изображены чуть ниже границ разделов твердое тело—жидкость и твердое тело—газ, а сила σ_{LS} — чуть выше границы раздела жидкость—твердое тело. На рис. 2 изображена в увеличенном масштабе окрестность точки B на рис. 1. Штриховыми линиями на рис. 2 условно изображены границы слоев в жидкой и твердой средах, в которых действуют введенные выше силы поверхностного (строго говоря, приповерхностного) натяжения. Такое уточнение коэффициентов поверхностного натяжения потребуется далее при составлении баланса сил в краевой точке жидкой капли.

В более поздней, чем обзор [2], работе [3] проводится расчет равновесной формы весомой капли, покоящейся на горизонтальной плоскости. И хотя при этом используется уравнение Лапласа (1.2), баланс сил в вертикальном направлении для капли в целом по-прежнему не рассматривается. Поэтому в [3] делается вывод, «что семейство кривых, образующих поверхность капли, является однопараметрическим... Основным естественным параметром, определяющим семейство образующих кривых, является кривизна на вершине капли». Даже при известных значениях силы поверхностного натяжения σ_{LG} и объема капли авторы в [3] не могут рассчитать форму капли, так как отсутствует дополнительное уравнение, позволяющее однозначно

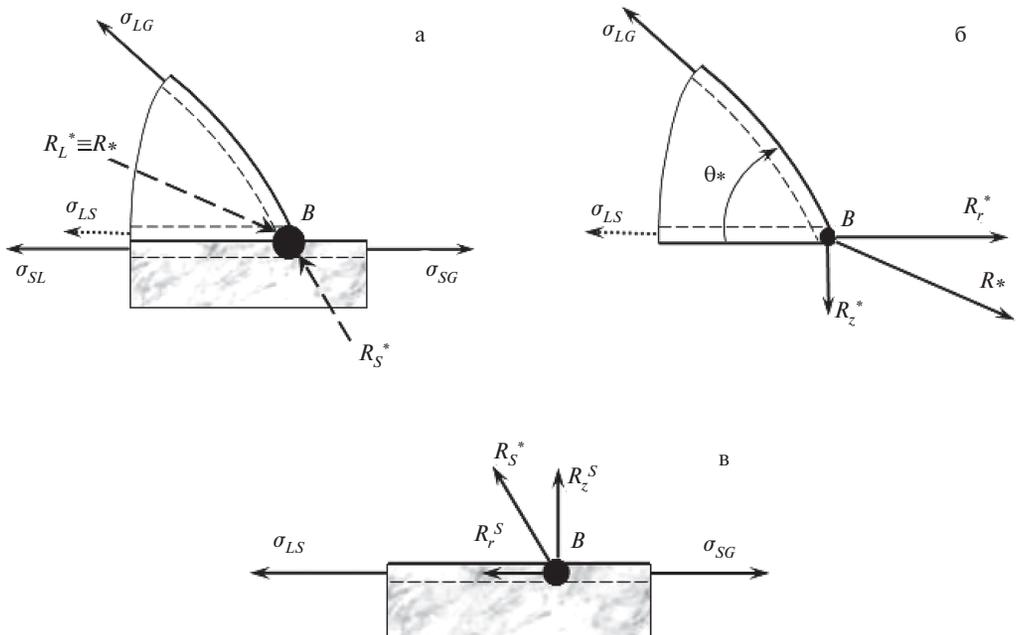


Рис. 2. Краевая точка и ее окрестность в капле и подложке (а), только в капле (б) и только в подложке (в) с указанием системы сил, приложенных к этой точке

определить значение указанного свободного параметра. Его значение в [3] предлагается рассчитывать каждый раз по данным специально проведенного по методу ADSA (Axisymmetric Drop Shape Analysis [13,14]) эксперимента. Как будет показано ниже, этим недостающим соотношением для весомой капли как раз и является уравнение баланса сил в вертикальном направлении.

В еще более поздней работе [12] на основе решеточного метода Больцмана проводится расчет равновесной формы капли диэлектрика, покоящейся на горизонтальной плоскости и находящейся под действием сил тяжести и электростатического поля, действующих противоположно в вертикальном направлении. По сути, проводится динамический расчет капли до установившегося ее состояния после приложения к ней электростатической силы. Недостатком этой работы является то, что в качестве начальной формы капли, находящейся под действием только силы тяжести в покое на поверхности одного из горизонтально установленных электродов, авторы используют сегмент шара. Но, как уже отмечалось выше, такая форма весомой капли не удовлетворяет уравнению Лапласа (1.2). А значит, и в данной статье баланс сил в вертикальном направлении для весомой капли в ее начальном положении (до приложения электростатической силы) не учитывается, поэтому все выводы, сделанные в [12], вызывают серьезные сомнения.

На основании всего вышеизложенного в данной работе представлены результаты математического моделирования осесимметричной формы жидкой весомой капли, покоящейся в равновесном состоянии на горизонтальной поверхности, которая на данном этапе исследования предполагается идеально гладкой и недеформируемой, т.е. является плоскостью. Получены уравнения силового баланса такой капли как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Разработан численный метод решения сформулированной нелинейной задачи. Обсуждаются результаты расчетов для капель разных объемов и разного химического состава.

2. Постановка задачи. Рассматривается равновесная весомая капля жидкости осесимметричной формы, покоящаяся на идеально гладкой горизонтальной недеформируемой поверхности – плоскости (рис. 1). Внешняя поверхность капли, контактирующая с газом, представляет собой поверхность вращения относительно вертикальной оси Oz , которую для удобства дальнейшего изложения направим вниз. Точку начала отсчета O поместим в вершине капли – в ее полюсной точке. Направление, перпендикулярное Oz , обозначим r – радиальное направление в цилиндрической системе координат $r\varphi z$, где φ – полярный угол ($0 \leq \varphi < 2\pi$). Введем вдоль меридиана внешней поверхности капли естественную параметризацию s – длину дуги меридиана (образующей), отсчитываемую от вершины капли O . Тогда, согласно рис. 3, выполняются следующие геометрические соотношения [2,15] (решение рассматриваемой осесимметричной задачи не зависит от координаты φ):

$$\frac{dr}{ds} = \sin \vartheta(s), \quad \frac{dz}{ds} = \cos \vartheta(s); \quad s \geq 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d\vartheta(s)}{ds} = -\frac{1}{R_1(s)}, \quad \frac{1}{R_2(s)} = \frac{\cos \vartheta(s)}{r(s)}; \quad s > 0, \quad (2.2)$$

где $\vartheta(s)$ – угол между касательной к меридиану поверхности капли и осью Oz , отсчитываемый от этой оси (см. рис. 3), $r(s)$ – расстояние от точки на поверхности капли до оси Oz , $z(s)$ – осевая координата текущей точки на поверхности капли, R_1 и R_2 определены в равенстве (1.2) и изображены на рис. 3.

На поверхность капли с внешней стороны действует давление газа p_G (см. рис. 1 и 3), которое на данном этапе исследования предполагаем известным и постоянным при тех линейных размерах капель, которые будут рассматриваться ниже ($p_G = \text{const} > 0$).

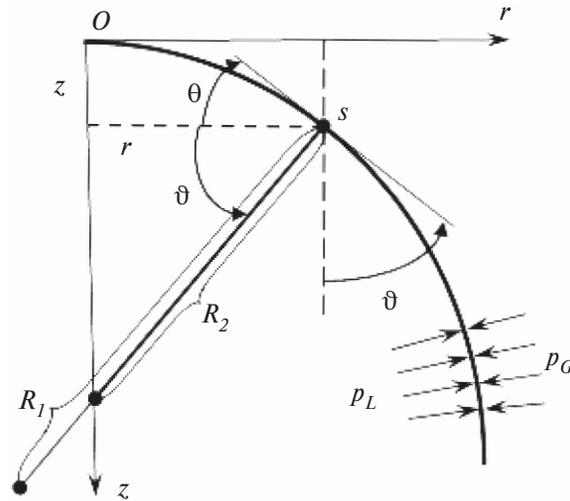


Рис. 3. Форма меридиана капли и его геометрические характеристики

С внутренней стороны на поверхность капли действует гидростатическое давление в жидкости

$$p_L(s) = p_L^0 + g\rho z(s); s \geq 0, \quad (2.3)$$

где $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; ρ – заданная объемная плотность несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const} > 0$); p_L^0 – давление жидкости в вершине капли, так как при $s = 0$ имеем $z(0) = 0$.

Используя выражения (2.2) и (2.3), преобразуем уравнение Лапласа (1.2) к виду [2, 3]

$$\frac{d\vartheta(s)}{ds} = \frac{\cos\vartheta(s)}{r(s)} - \bar{p}(z(s)); s > 0, \quad (2.4)$$

где

$$\bar{p}(z(s)) \equiv \frac{p_L(s) - p_G}{\sigma_{LG}} = \frac{\bar{p}_L^0}{\sigma_{LG}} + \frac{g\rho}{\sigma_{LG}} z(s); \quad \bar{p}_L^0 \equiv p_L^0 - p_G = \text{const}, \quad (2.5)$$

$g\rho / \sigma_{LG}$ – капиллярная постоянная [2], \bar{p}_L^0 – избыточное давление в вершине капли.

Система трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1) и (2.4) при учете выражений (2.5) определяет форму меридиана поверхности осесимметричной капли при $s > 0$. В полюсной точке ($s = 0$) имеет место равенство $R_1(0) = R_2(0)$ [2,3,15], подставляя которое в уравнение (1.2) и используя первое равенство (2.2), получим необходимое соотношение в вершине капли

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{\bar{p}(0)}{2} = -\frac{\bar{p}_L^0}{2\sigma_{LG}}; s = 0 \quad (2.6)$$

Таким образом, в полюсной точке вместо системы трех уравнений (2.1) и (2.4) при учете выражений (2.5) необходимо использовать равенства (2.1) и (2.6).

В соответствии с рис. 3 в вершине капли имеем следующие значения неизвестных функций:

$$r(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \vartheta(0) = \pi / 2 \quad (2.7)$$

Обозначим через s_* длину дуги OB вдоль меридиана капли и введем обозначения (см. рис. 1)

$$r_* \equiv r(s_*), \quad z_* \equiv z(s_*), \quad \vartheta_* \equiv \vartheta(s_*), \quad p_{LS} \equiv p_L(z_*), \quad \theta_* \equiv \theta(s_*), \quad (2.8)$$

где функция p_L имеет выражение в (2.3), а из рис. 3 вытекает соотношение между углами

$$\theta(s) = \pi / 2 - \vartheta(s); \quad s \geq 0 \quad (2.9)$$

Согласно последнему равенству (2.8) при учете выражения (2.9), значение угла θ_* соответствует критическому углу смачивания, который и следует в конечном итоге определить.

Предполагаем, что объем капли задан и равен $V_0 > 0$. Каплю объема V_0 , имеющую форму шара диаметра D_0 (форма капли в невесомости), будем называть эталонной. Объем V_0 выражается через диаметр эталонной капли D_0 так:

$$V_0 = \pi D_0^3 / 6 \quad (2.10)$$

Вес капли определяется по формуле

$$G_0 = g\rho V_0 \quad (2.11)$$

Объем V капли, покоящейся на горизонтальной плоскости, должен быть равен V_0 , поэтому, согласно рис. 1, имеем соотношение [2]

$$V = \pi \int_0^{z_*} r^2 dz = \pi \int_0^{s_*} r^2(s) \cos \vartheta(s) ds = V_0 = \text{const} > 0 \quad (2.12)$$

Как видно из равенств (2.5)–(2.7), решение соответствующей задачи Коши (для уравнений (2.1) и (2.4) при учете соотношения (2.6)) зависит от свободного пока параметра $\bar{p}(0) = \bar{p}_L^0 / \sigma_{LG}$, который, используя первое равенство (2.2) и формулу (2.6), можно выразить через кривизну меридиана капли в ее вершине: $\bar{p}_L^0 / \sigma_{LG} = 2\kappa_0$, где $\kappa_0 \equiv 1 / R_1(0)$.

Именно от такой однопараметрической зависимости (от κ_0) формы капли упоминалось в разд. 1 при обсуждении результатов работы [3]. Для однозначного определения величины κ_0 в [3] предлагается численно интегрировать нелинейную задачу Коши (2.1), (2.4) и (2.7) при учете соотношений (2.5) и (2.6) до тех пор, пока не будет выполнено равенство (2.12), которое и определяет значение s_* при учете обозначений (2.8). Далее, параметр κ_0 итерационно подбирается так, чтобы при его искомом значении выполнялось последнее равенство (2.8) при учете выражения (2.9). При этом величина критического угла смачивания θ_* предполагается уже известной из предварительно проведенного эксперимента с обработкой его результатов по методу ADSA [13, 14].

Покажем, что в действительности проведение такого дополнительного эксперимента не является необходимостью. Для однозначного определения значения рассматриваемого параметра (κ_0 или, что то же самое, $\bar{p}_L^0 / \sigma_{LG}$) достаточно получить еще одно уравнение. Этим уравнением является баланс сил, действующих на весомую каплю заданного объема в вертикальном направлении. С целью вывода требуемого соотношения используем традиционный в механике метод сечения, а именно мысленно отсечем каплю от подложки (вдоль горизонтальной линии AB на рис. 1) и рас-

смотрим систему сил, приложенных к капле (рис. 4), заменив воздействие основания на каплю распределенными силами реакции $p_{SL} = p_{SL}(r), 0 \leq r \leq r_*$.

На каплю действуют активные силы: ее вес G_0 и давление газа p_G , которые можно привести к равнодействующей силе

$$P_a = G_0 + \pi r_*^2 p_G > 0 \tag{2.13}$$

Активным силам противодействуют силы реакции со стороны подложки p_{SL} .

Рассмотрим два способа получения дополнительного уравнения, необходимого для вычисления критического угла смачивания θ_* , один из которых базируется на рассмотрении баланса сил в краевой точке B (см. рис. 2), а второй способ не требует отдельного рассмотрения условий равновесия в этой точке.

Первый способ получения дополнительного уравнения. Так как вдоль плоскости контакта капли с основанием в ней действует сила поверхностного натяжения $\sigma_{LS} = \text{const}$ (см. рис. 1 и 4), то для этой (нижней, опорной) части поверхности капли также можно составить уравнение Лапласа, аналогичное (1.2):

$$\sigma_{LS} \left(1 / R_1^b + 1 / R_2^b \right) = p_{SL} - p_{LS}, \tag{2.14}$$

где R_1^b и R_2^b – радиусы главной кривизны поверхности основания, силы p_{SL} и p_{LS} изображены на рис. 1 и 4. Так как поверхность подложки является плоскостью, то $1 / R_1^b = 1 / R_2^b \equiv 0$. Поэтому из соотношения (2.14) получаем

$$p_{SL} = p_{LS} \tag{2.15}$$

Согласно же предпоследнему равенству (2.8) и выражению (2.3), из уравнения (2.15) следует

$$p_{SL} = p_L^0 + g\rho z_* = \text{const}, \tag{2.16}$$

т.е. распределенная реакция со стороны основания p_{SL} не зависит от полярного радиуса r .

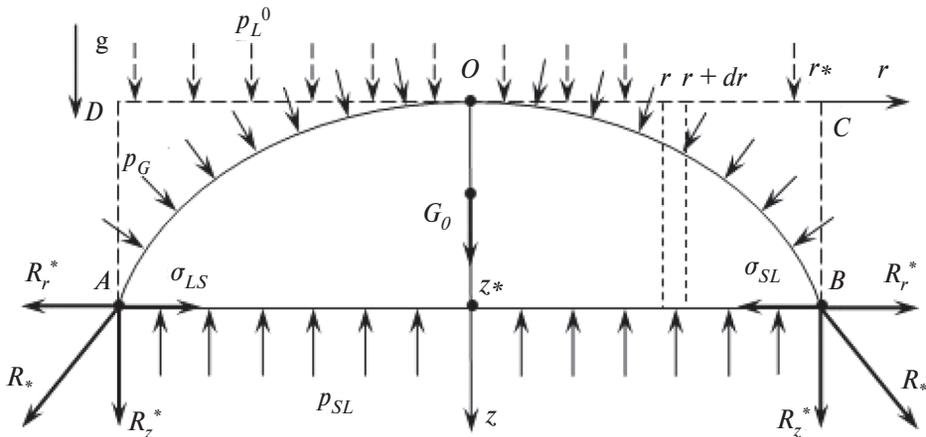


Рис. 4. Мериональное сечение капли с краевым углом смачивания меньше 90° и система сил, приложенных к ней

Покажем: предположение о том, что кроме p_{SL} никакие силы реакции со стороны подложки на каплю не действуют, является неверным. С этой целью рассмотрим произвольный элемент площади основания капли $dS = r dr d\varphi$. Снизу на этот элемент действует распределенная сила реакции опоры, по значению равная (2.16). Чтобы эта сила реакции была полностью уравновешена активными силами, действующими на жидкость, необходимо, чтобы столб жидкости, возвышающийся над этой площадью, имел высоту z_* (см. прямоугольник, выделенный на рис. 4 штриховыми линиями и по горизонтали ограниченный сечениями с координатами r и $r + dr$) и чтобы сверху на него действовало давление газа, имеющее значение p_L^0 (см. штриховые стрелки на рис. 4). Но тогда силы реакции (2.16), действующие на всю нижнюю поверхность капли ($0 \leq r \leq r_*$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $z = z_*$) могут быть уравновешены активными силами только в том случае, если над основанием капли возвышается цилиндр жидкости радиуса r_* и высотой z_* (след этого цилиндра на рис. 4 изображен штриховым прямоугольником $ABCD$), а на верхнюю горизонтальную плоскость этого цилиндра действует давление газа, равное p_L^0 . Так как в вершине капли (при $s = 0$) ее кривизна ненулевая ($1/R_1 = 1/R_2 > 0$) и $\sigma_{LG} > 0$, то из уравнения Лапласа (1.2) в этой точке получаем неравенство

$$p_L^0 > p_G > 0 \quad (2.17)$$

Равнодействующая активных сил, приложенных к рассматриваемому цилиндру в вертикальном направлении, имеет значение

$$P_c = G_c + \pi r_*^2 p_L^0 > 0; \quad G_c = g\rho V_c, \quad V_c = \pi r_*^2 z_*, \quad (2.18)$$

где G_c и V_c – вес и объем цилиндра.

Из рис. 4 видно, что объем цилиндра V_c больше объема капли V_0 , а значит для случая, изображенного на рис. 4, и $G_c > G_0$. Но тогда из сопоставления выражений (2.13) и (2.18) при учете неравенства (2.17) следует $P_c \neq P_a$. А это неравенство означает, что кроме распределенных сил реакции p_{SL} (см. соотношение (2.16)) на каплю со стороны основания в краевых точках (см. точки A и B на рис. 4) должны действовать дополнительные погонные силы реакции R_* , имеющие ненулевые компоненты R_r^* , R_z^* и в общем случае некасательные к меридиану капли в этих точках и к линии ее основания AB .

Полученный результат не является столь уж неожиданным. Действительно, как отмечалось в разд. 1, даже в рамках классической модели Юнга баланс сил в вертикальном направлении приводит к необходимости введения дополнительной силы реакции R_z^A (см. выражение (1.3)), приложенной к краевой точке капли (см. точку A на рис. 1). В рассматриваемой же модели силы поверхностного натяжения σ_{LG} и σ_{LS} , действующие в жидкости на границах с газом и твердой подложкой соответственно, стремятся свернуть каплю в шар. И именно наличие погонной силы реакции со стороны подложки R_* , приложенной к краевой точке (точке B на рис. 2) препятствует этому свертыванию.

Для вычисления вертикальной компоненты R_z^* силы реакции R_* достаточно составить баланс сил, действующих на каплю в вертикальном направлении и изображенных на рис. 4:

$$2\pi r_* R_z^* - \pi r_*^2 p_{SL} + P_a = 0,$$

откуда при учете выражений (2.13) и (2.16) и последнего равенства (2.5) получаем

$$R_z^* = \frac{r_*}{2} (\bar{p}_L^0 + g\rho z_*) - \frac{G_0}{2\pi r_*} \quad (2.19)$$

Рассмотрим теперь баланс сил в краевой точке капли (в точке B на рис. 1). Увеличенная окрестность этой точки изображена на рис. 2,а. На краевую точку действуют силы поверхностного натяжения σ_{LG} , σ_{LS} , σ_{SL} и σ_{SG} , а также две силы реакции: сила $R_L^* \equiv R_*$, действующая на каплю со стороны подложки, и сила R_S^* , действующая на подложку со стороны капли. Распределенные силы p_G , p_L , p_{LS} и p_{SL} (см. рис. 1) на рис. 2 не изображены, так как после стягивания окрестности краевой точки в саму эту точку указанные силы вносят исчезающе малый вклад в баланс сил, приложенных к точке B .

После применения описанного выше метода сечений окрестность краевой точки, изображенная на рис. 2,а, разделяется на две части, представленные на рис. 2,б и в, где указаны и соответствующие системы сил, действующих на точку B в капле (см. рис. 2,б) и в подложке (см. рис. 2,в). Из рис. 2,б следует, что баланс сил, приложенных к краевой точке капли и действующих в вертикальном направлении, приводит к равенству (ср. с формулой (1.3))

$$R_z^* = \sigma_{LG} \sin \theta_*$$

откуда при учете выражения (2.19) получаем

$$2\pi\sigma_{LG}r_* \sin \theta_* = \pi r_*^2 (\bar{p}_L^0 + g\rho z_*) - G_0 \quad (2.20)$$

Уравнение (2.20) и является тем самым недостающим соотношением, необходимым для однозначного определения свободного параметра $\bar{p}_L^0 / \sigma_{LG}$ ($= 2\kappa_0$), о котором шла речь выше. Используя выражение (2.9) равенство (2.20) можно переписать, выделив в нем в явном виде указанный параметр:

$$2\pi r_* \cos \vartheta_* - \pi r_*^2 (\bar{p}_L^0 / \sigma_{LG} + g\rho z_* / \sigma_{LG}) + G_0 / \sigma_{LG} = 0 \quad (2.21)$$

Баланс сил, действующих на краевую точку капли в горизонтальном направлении, приводит к выражению (см. рис. 2,б)

$$R_r^* = \sigma_{LS} + \sigma_{LG} \cos \theta_* = \sigma_{LS} + \sigma_{LG} \sin \vartheta_*, \quad (2.22)$$

где вновь использована формула (2.9).

Из третьего закона Ньютона при рассмотрении всех сил, действующих в вертикальном направлении на подложку со стороны капли, и при учете равенства (2.15) получаем, что для вертикальной компоненты R_z^S силы реакции R_z^* , действующей на основание со стороны капли в краевой точке (см. рис. 2,а и в), выполняется соотношение

$$R_z^S = R_z^*, \quad (2.23)$$

где величина R_z^* определяется по формуле (2.19).

Баланс сил, изображенных на рис. 2,в и действующих в горизонтальном направлении, позволяет определить горизонтальную компоненту R_r^S силы реакции R_r^* :

$$R_r^S = \sigma_{SG} - \sigma_{SL}, \quad (2.24)$$

где правая часть совпадает с числителем в формуле (1.1), т.е. в модели Юнга.

Таким образом, если из каких-либо соображений известен критический угол смачивания θ_* (подробнее см. ниже), то выражения (2.19) и (2.22)–(2.24) позволяют определить все компоненты R_z^* , R_r^* и R_z^S , R_r^S погонных сил реакции $R_L^* \equiv R_*$ и R_S^* , дей-

ствующих в краевой точке на каплю со стороны основания и на подложку со стороны капли соответственно.

Второй способ получения дополнительного уравнения. Как и прежде, применим метод сечений, отделив мысленно каплю от основания, и рассмотрим равновесие капли без подложки (рис. 5, где в отличие от рис. 4 изображен случай $\theta_* > 90^\circ$). На нижнюю горизонтальную часть поверхности капли по-прежнему действуют силы реакции p_{SL} , закон распределения которых по радиусу r на данном этапе предполагается неизвестным: $p_{SL} = p_{SL}(r)$, $0 \leq r \leq r_*$ (поэтому-то силы p_{SL} на рис. 5,а изображены стрелками разной длины). Равнодействующую распределенных сил $p_{SL}(r)$ обозначим как P_{SL} (см. рис. 5,а). И хотя функция $p_{SL}(r)$ неизвестна величину P_{SL} все же можно вычислить из условия равновесия капли в вертикальном направлении:

$$P_{SL} = P_a, \quad (2.25)$$

где P_a – равнодействующая активных сил (действующих на каплю в вертикальном направлении), определяемая по формуле (2.13). На участках меридиана $AA'D$ и $BB'C$ (см. рис. 5,а) давление газа p_G в вертикальном направлении самоуравновешено, поэтому вклад в вертикальную составляющую всех активных сил вносит давление газа p_G , действующее на участок меридиана COD . В силу этого обстоятельства величина P_a имеет такое же выражение (2.13), как и в случае капли, изображенной на рис. 1 и 4, для которой $\theta_* < 90^\circ$.

Вновь применим метод сечений: мысленно рассежем каплю горизонтальной плоскостью, отстоящей от ее основания на малом расстоянии δ (след этой плоскости изображен на рис. 5,а штриховой линией $A'B'$), и рассмотрим нижнюю часть капли, приложив к ней все действующие на нее силы (рис. 5,б). Точкой O_* на рис. 5 обозначена точка пересечения оси Oz с плоскостью основания капли (см. рис. 5,а). В силу осевой симметрии задачи к этой точке приложена равнодействующая сил реакции подложки P_{SL} (см. рис. 5,б). Кроме того, в верхнем сечении рассматриваемой нижней части капли действуют распределенная сила гидростатического давления p_L и погонные силы поверхностного натяжения σ_{LG} . Устремим расстояние между двумя гори-

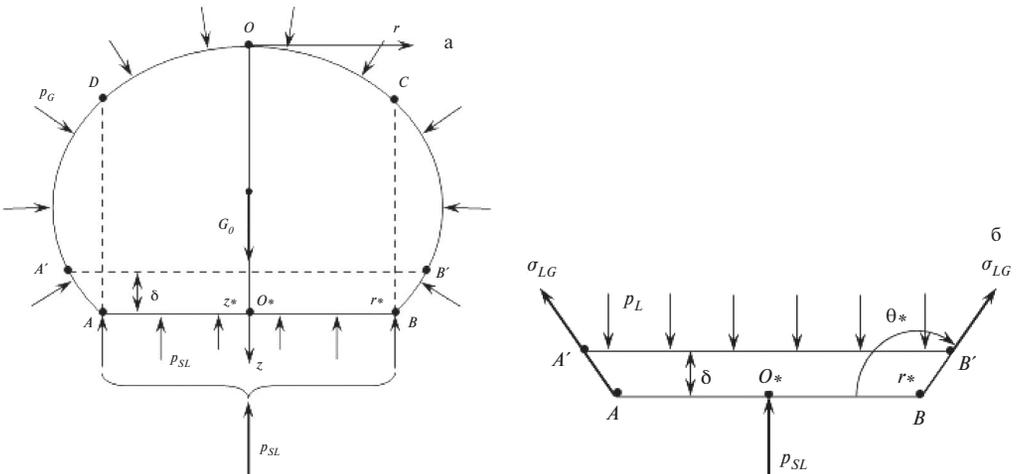


Рис. 5. Профиль капли с краевым углом смачивания больше 90° (а) и нижняя часть этой капли после применения метода сечений (б) с указанием системы сил, приложенных к ней

зонтальными сечениями δ к нулю, т.е. рассмотрим предельные переходы точек $A' \rightarrow A$ и $B' \rightarrow B$. При этом получим, что $p_L \rightarrow p_{LS}$ (см. рис. 1). Составим баланс всех вертикальных сил, изображенных на рис. 5,б, тогда при указанном предельном переходе получаем

$$P_{SL} + 2\pi r_* \sigma_{LG} \sin \theta_* - \pi r_*^2 p_{LS} = 0,$$

откуда при учете обозначения $p_{LS} \equiv p_L(s_*)$ и выражений (2.3), (2.13) и (2.25) вновь приходим к уравнению (2.20), а затем и к равенству (2.21).

Далее, из уравнения Лапласа (2.14) вновь получаем соотношения (2.15) и (2.16). Предполагая, что критический угол смачивания θ_* каким-то образом уже известен из решения исследуемой задачи при учете дополнительного уравнения (2.20) (подробнее см. ниже), и рассматривая баланс сил в краевой точке капли (см. рис. 2,б) опять получим равенство, предшествующее формуле (2.20), и выражение (2.22). Затем из рассмотрения баланса сил, приложенных к подложке в краевой точке (см. рис. 2,в), вновь приходим к соотношениям (2.23) и (2.24).

Таким образом, оба способа получения дополнительного уравнения приводят к одним и тем же результатам, только последовательность получения этих результатов в них разная.

Следует особо подчеркнуть, что с позиции теории оболочек уравнения Лапласа (1.2) и (2.14) можно трактовать как уравнения равновесия элементов составной равнопрочной безмоментной оболочки, заполненной весомой жидкостью. При этом коэффициенты поверхностного натяжения σ_{LG} и σ_{LS} можно трактовать как мембранные усилия в этой оболочке [16]. В краевой точке капли ее меридиан испытывает излом (см. точки A и B на рис. 4 и 5,а), т.е. по линии границы области контакта капли с подложкой происходит сопряжение двух частей «составной оболочки»: нижней плоской части (след ее изображен горизонтальной линией AB на рис. 4 и 5,а) с мембранными усилиями, равными $\sigma_{LS} = \text{const}$, и верхней изогнутой части (след ее изображен кривой AOB на рис. 4 и 5,а) с мембранными усилиями, равными $\sigma_{LG} = \text{const}$. Из теории тонких оболочек известно, что при сопряжении двух частей составной безмоментной оболочки к линии сопряжения обязательно должна быть приложена специально подобранная погонная сила (в противном случае невозможно добиться безмоментного состояния в обеих частях конструкции), в общем случае некасательная к обеим сопрягаемым поверхностям [16]. В проведенных выше рассуждениях эта погонная сила соответствует силе реакции $R_L^* \equiv R_*$, изображенной на рис. 2,а,б, 4 и имеющей компоненты R_z^* и R_r^* .

С другой стороны, из теории изгибаемых элементов конструкций, покоящихся на упругом основании, известно, что на поверхности контакта этих конструкций с основанием возникают распределенные силы реакции со стороны основания, которые аналогичны давлению p_{SL} в рассматриваемой задаче (см. рис. 1, 4 и 5,а). Если при этом конструкция сопрягается с основанием негладко на границе контактной области (изгибаемые балки и пластины, покоящиеся на основании), то вдоль линии границы контактной зоны дополнительно возникают погонные силы реакции [17], которым в рассматриваемой задаче соответствует сила R_z^S , изображенная на рис. 2,в. Качественно аналогичный результат имеет место и в общеизвестной задаче о вдавлении абсолютно жесткого плоского штампа в упругое полупространство: на границе контактной области под штампом силы реакции со стороны полупространства имеют особенность типа бесконечности [18]. В некотором приближении такое специфическое поведение сил реакции основания также можно трактовать как приложение погонной силы к линии границы контактной зоны под штампом, аналогичной силе R_z^S .

Таким образом, с позиций механики деформируемого твердого тела появление в краевой точке капли дополнительных сил $R_L^* \equiv R_*^*$ и R_S^* , приложенных к самой капле и к подложке под ней, является вполне естественным. Однако в отличие от задач о штампе [18] и об изгибе элементов конструкций, покоящихся на упругом основании [17], в данном исследовании в силу учета поверхностного натяжения подложки (см. коэффициенты натяжения σ_{SL} и σ_{SG} на рис. 2,в) погонная сила реакции R_S^* имеет не только вертикальную R_z^S , но и горизонтальную R_r^S составляющую.

3. Метод расчета. Для расчета формы жидкой весомой капли, покоящейся на горизонтальной плоскости, система уравнений (2.1) и (2.4) при учете соотношений (2.3), (2.5)–(2.7), (2.10) и при некотором заданном значении свободного параметра p_L^0 (см. формулы (2.3), (2.5) и (2.21)) интегрируется вдоль s до тех пор, пока не будет устранена невязка в равенстве (2.12). Выполнение этого равенства, как и в [3], определяет длину меридиана капли s_* при фиксированном значении p_L^0 , т.е. имеет место зависимость $s_* = s_*(p_L^0)$. Однако при произвольно выбранном значении p_L^0 не будет удовлетворяться равенство (2.21). Поэтому необходимо подобрать давление жидкости в вершине капли p_L^0 так, чтобы при $s = s_*$, т.е. при выполнении равенства (2.12), выполнялось одновременно и равенство (2.21), которое ранее другими исследователями не использовалось. Следовательно, необходимо проводить пристрелку по параметру p_L^0 [19]. Для этого предварительно нужно определить диапазон допустимых значений свободного параметра p_L^0 .

Согласно рис. 1, 4, 5,а и формулам (1.2), (2.3) и (2.6), давление p_L^0 не может быть меньше давления газа p_G . Поэтому при $p_L^0 = p_G$ получаем

$$\frac{1}{R_1(0)} = \frac{1}{R_2(0)} = \frac{\bar{p}(0)}{2} = \frac{p_L^0 - p_G}{2} = 0 \quad (3.1)$$

С другой стороны, кривизна весомой капли в полярной точке $s = 0$ не может быть больше, чем у эталонной капли в форме шара того же объема V_0 , для которой, согласно формулам (1.2) и (2.3), имеем

$$\frac{1}{R_1(0)} + \frac{1}{R_2(0)} = \frac{4}{D_0} = \frac{p_L(0) - p_G}{\sigma_{LG}} = \frac{p_L^0 - p_G}{\sigma_{LG}},$$

откуда следует

$$p_L^0 = p_G + \frac{4\sigma_{LG}}{D_0} \quad (3.2)$$

На основании соотношений (3.1) и (3.2) получаем диапазон изменения свободного параметра p_L^0 для весомой капли, покоящейся на горизонтальном основании:

$$p_G \leq p_L^0 \leq p_G + \frac{4\sigma_{LG}}{D_0} \quad (3.3)$$

Зная диапазон изменения параметра p_L^0 , можно методом пристрелки решить рассматриваемую задачу об определении осесимметричной формы равновесной весомой капли, покоящейся на горизонтальной плоскости. При этом критический угол смачивания θ_* вычисляется при активном использовании соотношения (2.20) (или, что то же самое, равенства (2.21) при учете выражения (2.9)), которое получено как следствие составления баланса всех сил, действующих на каплю в вертикальном направлении, а отнюдь не в горизонтальном направлении, как это принято делать в рамках классической модели Юнга [2] (см. выражение (1.1)). Кроме того, в рамках построенной модели для определения угла θ_* требуется знать только коэффициент поверхностного натяжения жидкости на границе с газом σ_{LG} , т.е. в отличие от модели

Юнга, аналогичные коэффициенты на границах контакта твердое тело – жидкость (σ_{SL}) и твердое тело – газ (σ_{SG}), которые, как уже отмечалось выше, нужно еще предварительно определить из каких-то независимых экспериментов, вообще не используются. Это обстоятельство является несомненным преимуществом рассматриваемой модели.

Рассмотрим численный алгоритм решения исследуемой задачи. При фиксированном значении p_L^0 , выбранном из диапазона (3.3), нелинейную задачу Коши (2.1) и (2.4) при учете соотношений (2.5)–(2.7) целесообразно интегрировать численно с применением, например, методов Рунге – Кутты [3, 20]. При этом шаг интегрирования Δs выбирается произвольно, но достаточно малым. Чтобы получить практически приемлемый шаг интегрирования Δs , величину s_* в начальном (нулевом) приближении можно принять равной длине дуги полуокружности меридионального сечения эталонной капли диаметра D_0 :

$$s_*^0 = \pi D_0 / 2, \quad (3.4)$$

тогда шаг интегрирования в нулевом приближении Δs^0 можно задать так:

$$\Delta s^0 = s_*^0 / N, \quad (3.5)$$

где N – количество отрезков, на которые в начальном (оценочном) приближении разбивается дуга длиной $s_* = s_*^0$.

Очевидно, что для выполнения равенства (2.12) на последнем шаге интегрирования с номером N_* необходим специальный подбор величины шага Δs , который в общем случае будет отличен от значения Δs^0 , заданного соотношением (3.5) при учете выражения (3.4). Добиться этого результата при численной реализации можно за счет дробления шага интегрирования Δs (например, за счет его уменьшения вдвое).

Так как в общем случае шаг интегрирования Δs является переменным, то интегральное соотношение (2.12) при учете (2.1) целесообразно заменить на эквивалентное дифференциальное уравнение

$$\frac{dV(s)}{ds} = \pi r^2(s) \cos \vartheta(s); \quad s \geq 0 \quad (3.6)$$

и дополнительные краевые условия

$$V(0) = 0 \quad (3.7)$$

$$V(s_*) = V_0 \quad (3.8)$$

В этом случае при заданном из диапазона (3.3) значении p_L^0 численно интегрируется задача Коши (2.1), (2.4) и (3.6) при учете соотношений (2.5)–(2.7) и (3.7) до тех пор, пока не будет выполнено равенство (3.8). Далее вновь используется пристрелка по параметру p_L^0 (см. выше).

Для численного интегрирования уравнений (2.1), (2.4) и (3.6) при начальных условиях (2.7), (3.7) и учете равенств (2.5) и (2.6) использовался неклассический (неявный) метод Рунге–Кутты, а именно трехстадийный диагональный метод Барриджа (Burrage), имеющий матрицу Бутчера (Butcher) следующего вида [20]:

$$\begin{vmatrix} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 - \gamma & \gamma & 0 \\ 1 - \gamma & 2\gamma & 1 - 4\gamma & \gamma \\ & \beta / 2 & 1 - \beta & \beta / 2 \end{vmatrix}; \quad \beta \equiv \frac{1}{12(0.5 - \gamma)^2} \quad (3.9)$$

Элементы матрицы (3.9) зависят от числового параметра γ , при произвольном задании которого метод Барриджа имеет 3-й порядок точности [20]. Если же γ является одним из корней уравнения

$$24\gamma^3 - 36\gamma^2 + 12\gamma - 1 = 0, \quad (3.10)$$

то метод имеет 4-й порядок точности. По соображениям устойчивости в [20] рекомендуется выбирать следующий корень уравнения (3.10):

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\pi}{18}$$

Однако предварительно проведенные численные эксперименты показали, что в рассматриваемой задаче непротиворечивые и устойчивые результаты дает другой корень уравнения (3.10), а именно:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \frac{\pi}{18} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{18} \quad (3.11)$$

Расчеты проводились с двойной машинной точностью (до 15-ти значащих цифр). Шаг интегрирования Δs^0 определялся по формуле (3.5) при учете равенства (3.4), причем для капли с эталонным диаметром $D_0 = 1$ мм значение N принималось равным 15. Для капель других эталонных диаметров N изменялось пропорционально изменению их диаметров относительно значения $D_0 = 1$ мм, т.е. во всех расчетах использовалось примерно одно и то же значение $\Delta s^0 = 1.05 \cdot 10^{-4}$ м. Поэтому на каждом шаге интегрирования при использовании выражения (3.11) расчет проводился с точностью порядка 10^{-16} , сопоставимой с используемой машинной точностью расчета (по крайней мере, при вычислении функции $\mathfrak{F}(s)$).

При численном расчете краевое условие (3.8) заменялось системой неравенств

$$V(s) \leq V_0; \quad s > 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\Delta V_*}{V_0} \leq \varepsilon = 10^{-15}, \quad (3.13)$$

где ΔV_* – приращение объема капли на последнем шаге интегрирования уравнения (3.6) при нарушении неравенства (3.12). Если в процессе расчета нарушались оба неравенства (3.12) и (3.13), то шаг интегрирования Δs уменьшался вдвое и расчет повторялся, начиная с предыдущего шага. Интегрирование системы (2.1), (2.4) и (3.6) при фиксированном значении параметра p_L^0 прекращалось либо при выполнении строго равенства в условии (3.12), либо при нарушении неравенства (3.12), но выполнении ограничения (3.13).

Для решения систем трансцендентных уравнений, возникающих на каждой стадии при реализации метода Барриджа, использовался метод установления с параметром итерационного процесса $\tau = 0.5$. Системы этих уравнений решались с точностью до 15-ти значащих цифр, что соответствует двойной машинной точности расчета.

Замечание 1. Необходимость использования такой высокой точности расчетов (см., например, значение величины ε в неравенстве (3.13)) обусловлена тем, что невязка $\bar{P}(p_L^0)$ в уравнении силового баланса (2.20) при изменении параметра p_L^0 в диапазоне (3.3) имеет порядок $10^{-12} \dots 10^{-4}$ Н. Проведение же расчетов с более грубой точностью приводит к тому, что зависимость $\bar{P}(p_L^0)$ перестает быть гладкой (возникают

достаточно сильные «биения»), что не позволяет надежно определять корни уравнения (2.20) или, что то же самое, (2.21) (подробнее см. ниже).

Из физических соображений следует, что угол ϑ (см. рис. 3) может изменяться только в пределах

$$-\pi / 2 \leq \vartheta(s) \leq \pi / 2 \quad (3.14)$$

Угол же θ связан с ϑ соотношением (2.9) (см. рис. 3), поэтому для критического угла смачивания получаем выражение $\theta_* = \pi / 2 - \vartheta_*$ (см. рис. 1 в окрестности точки B и рис. 2,б), которое уже использовалось при переходе от равенства (2.20) к уравнению (2.21), причём значение ϑ_* определено третьим соотношением (2.8). Далее для упрощения изложения критический угол смачивания будем обозначать традиционно [2, 3] как θ (см. рис. 1 в окрестности точки A и равенства (1.1) и (1.3)) и называть просто углом смачивания.

4. Обсуждение результатов расчетов. В настоящем разделе обсуждаются равновесные формы водяных капель ($\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\sigma_{LG} = 72.86 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$) и капля этилового спирта ($\rho = 789 \text{ кг/м}^3$, $\sigma_{LG} = 22.8 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$), покоящихся на горизонтальной плоскости.

Анализ соотношений, представленных в разд. 2, показывает: если коэффициент поверхностного натяжения σ_{LG} не зависит от давления газа p_G (что далее и принимается), то варьирование значения $p_G = \text{const}$ никак не влияет на форму равновесной капли и на угол смачивания θ . Действительно, величина p_G входит в правую часть дифференциального уравнения (2.4) (или (2.6)) и в уравнение баланса сил (2.20) (или (2.21)) только в виде разности $\bar{p}_L^0 = p_L^0 - p_G$ (см. выражения (2.5)), т.е. решение рассматриваемой задачи зависит не от величины давления газа p_G , а от величины избыточного давления в вершине капли \bar{p}_L^0 . Поэтому изменение значения p_G приводит к равновеликому изменению давления жидкости в полюсной точке капли p_L^0 без изменения величины \bar{p}_L^0 и, как следствие, без изменения формы капли и угла смачивания θ . В силу этого обстоятельства в качестве параметра пристрелки (см. разд. 3) целесообразно использовать не величину p_L^0 , а значение избыточного давления \bar{p}_L^0 , которое, согласно неравенствам (3.3), может изменяться в диапазоне

$$0 \leq \bar{p}_L^0 \leq 4\sigma_{LG} / D_0 \quad (4.1)$$

Замечание 2. Сразу же отметим, что среди возможных решений рассматриваемой задачи всегда существует одно решение, которое будем называть тривиальным: из анализа системы уравнений (2.1) и (2.4) вытекает, что ее решением является такое, при котором капля бесконечно тонким слоем (толщиной dz) растекается по всей опорной плоскости (при этом $r_* \rightarrow \infty$; см. рис. 1 и 5). Если уравнение силового баланса (2.20) (или (2.21)) поделить на r_*^2 и затем осуществить предельный переход $r_* \rightarrow \infty$, то получим $\bar{p}_L^0 = 0$ (т.е. $p_L \equiv p_L^0 = p_G$), что полностью согласуется с уравнением Лапласа (1.2), так как в этом случае $1 / R_1 = 1 / R_2 \equiv 0$. Очевидно, что такое решение в практическом плане малоинтересно, поэтому далее оно не обсуждается.

4.1. Капли малых эталонных диаметров. На рис. 6 изображены зависимости невязки \bar{P} в уравнении силового баланса (2.20) от величины избыточного давления в вершине водяной капли \bar{p}_L^0 , изменяющейся в диапазоне значений (4.1). Номера кривых на рис. 6 соответствуют следующим значениям диаметров D_0 эталонных капель: кривая 1 — $D_0 = 1 \text{ мм}$, кривая 2 — $D_0 = 2 \text{ мм}$, кривая 3 — $D_0 = 3 \text{ мм}$ и кривая 4 — $D_0 = 3.894 \text{ мм}$. Полностью наглядно изобразить зависимости $\bar{P}(\bar{p}_L^0)$ не представляется возможным, так как ординаты некоторых точек на представленных кривых имеют значения на 4...6 порядков большие, чем ординаты точек на фрагментах этих

кривых, изображенных на рис. 6. Стрелки указывают на поведение зависимостей $\bar{P}(\bar{p}_L^0)$ на соответствующих их возрастающих или убывающих ветвях.

Все кривые на рис. 6 проходят через начало координат, что соответствует тривиальному решению, поэтому, согласно замечанию 2, далее соответствующие корни уравнения (2.20) не рассматриваются. Остальные нули зависимостей $\bar{P}(\bar{p}_L^0)$ – точки на кривых с нулевыми ординатами – на рис. 6 с увеличением их абсцисс последовательно обозначены буквами A_i, B_i, C_i и т.д., где индекс i соответствует номеру i -й кривой, которой принадлежит данная точка. Чтобы не загромождать рис. 6, а точки C_i, D_i ($i = 1, 2$) и т.д. на нем не изображены, так как они лежат слишком близко к точкам B_1 и B_2 на кривых 1 и 2 и далее не потребуются.

Расчеты показали, что точки A_i и B_i на i -х кривых на рис. 6 определяют два нетривиальных решения рассматриваемой задачи, удовлетворяющих физическим ограничениям (3.14). Точкам же C_i, D_i ($i = 1, 4$) и т.д. соответствуют нефизические решения, в которых $\vartheta(s_*) < -\pi / 2$ ($\theta > \pi$), т.е. нарушается левое неравенство в (3.14), поэтому далее такие решения не анализируются. (Качественно аналогичные результаты получаются и для зависимостей $\bar{P}(\bar{p}_L^0)$, рассчитанных для капель этилового спирта разных эталонных диаметров.)

На левых участках кривых на рис. 6 наблюдаются небольшие «биения», о которых говорилось в замечании 1 и которые пока не удалось полностью устранить.

Итак, точки A_i и B_i на i -х кривых на рис. 6 определяют два корня уравнения (2.20), которым соответствуют два нетривиальных решения рассматриваемой задачи, удовлетворяющих физическим ограничениям (3.14). При этом в первом решении, соответствующем точкам A_i на рис. 6, углы смачивания имеют значения $\theta < 90^\circ$ (напомним, что такой тип решения характеризует опорную плоскость как гидрофильную), а во втором решении, соответствующем точкам B_i ($i = 1, 3$) на рис. 6, углы смачивания $\theta > 90^\circ$ (т.е. этот тип решения характеризует опорную плоскость как гидрофобную).

Из анализа взаимного расположения точек A_i и B_i на рис. 6 видно, что с увеличением номера i -й кривой (с увеличением диаметра эталонной капли D_0) эти точки сближаются и при $D_0 = 3.894$ мм для водяной капли они совпадают (поэтому на рис. 6, б указано: $A_4 = B_4$) и задача в этом случае имеет только одно нетривиальное решение. При $D_0 > 3.894$ мм зависимость $\bar{P}(\bar{p}_L^0)$ не имеет нулей, соответствующих физическим решениям рассматриваемой задачи (за исключением тривиального реше-

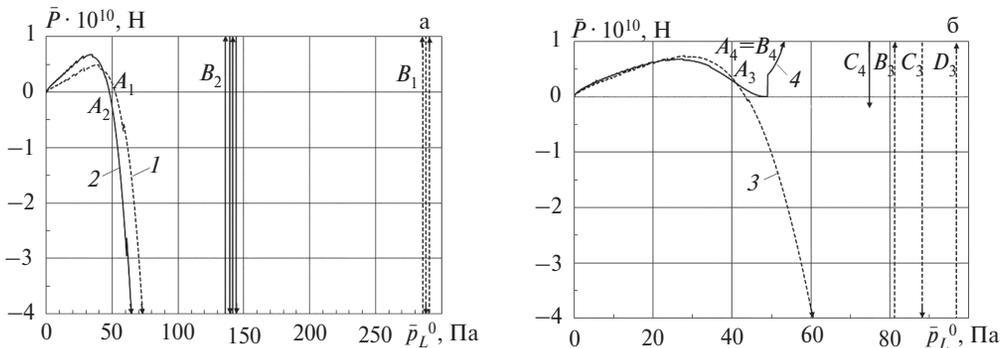


Рис. 6. Зависимость невязки в уравнении силового баланса (2.20) от величины избыточного давления в вершине водяной капли: а) – для капель с эталонным диаметром 1 и 2 мм; б) – для капель с эталонным диаметром 3 и 3.894 мм

ния), удовлетворяющих ограничениям (3.14). В этих случаях при $D_0 \approx 4$ мм (но $D_0 > 3.894$ мм) зависимость $\bar{P}(\bar{p}_L^0)$ качественно аналогична кривой 4 на рис. 6,б, однако в окрестности точки $A_4 = B_4$ она лежит выше оси абсцисс, т.е. не пересекает ее. (Качественно аналогичные особенности поведения зависимостей $\bar{P}(\bar{p}_L^0)$ наблюдаются и для капель этилового спирта.)

На рис. 7 изображены расчетные равновесные формы водяных капель разных эталонных диаметров, соответствующие разным типам решения: первому (рис. 7,а) и второму (рис. 7,б). (Не следует путать координату z на рис. 7 и последующих рисунках с координатой z на рис. 1, 3, 4 и 5,а.) Кривые на рис. 7 рассчитаны при тех же условиях (тех же эталонных диаметрах D_0), что и кривые с соответствующими номерами на рис. 6. На рис. 7,а кривой 1 соответствует значение угла смачивания $\theta = 24^\circ 34'$, кривой 2 — $\theta = 41^\circ 8'$, кривой 3 — $\theta = 57^\circ 17'$ и кривой 4 — $\theta = 89^\circ 14'$, а на рис. 7,б кривой 1 соответствует значение $\theta = 153^\circ 56'$, кривой 2 — $\theta = 137^\circ 59'$, кривой 3 — $\theta = 116^\circ 46'$ и кривой 4 — $\theta = 89^\circ 14'$.

Поведение кривых на рис. 7,а показывает, что с увеличением диаметра эталонной капли в первом типе решения угол смачивания θ также увеличивается, но остается

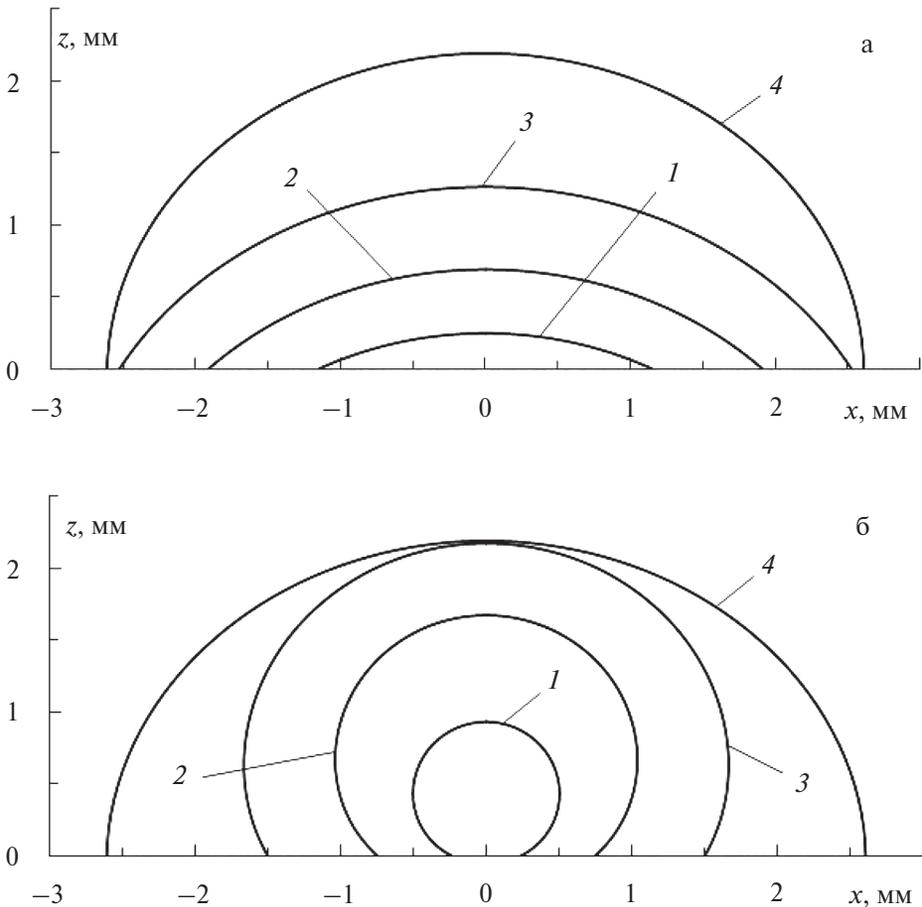


Рис. 7. Расчетные меридиональные сечения водяных капель разных эталонных диаметров: а) первый тип решения; б) второй тип решения

меньшим 90° (гидрофильность). Поведение же кривых на рис. 7,б, наоборот, указывает на то, что с увеличением диаметра эталонной капли во втором типе решения угол смачивания θ уменьшается, оставаясь, как правило, большим 90° (гидрофобность). Как показали расчеты, для водяной капли, покоящейся на горизонтальной плоскости, предельным является эталонный диаметр $D_0 = 3.894$ мм, при котором оба решения совпадают (см. точку $A_4 = B_4$ на рис. 6,б), а угол смачивания в этом предельном случае имеет значение $\theta = 89^\circ 14' \approx 90^\circ$ (см. кривые 4 на рис. 7), соответствующее условной границе раздела гидрофильных и гидрофобных свойств опорной поверхности. Такие предельные максимально допустимые диаметры эталонных капель D_0 далее будем называть критическими.

Если эталонный диаметр больше критического (т.е. для водяных капель $D_0 > 3.894$ мм), то согласно полученным результатам, нетривиальная осесимметричная форма равновесной капли не может быть реализована: такая капля должна либо растекаться по всей опорной плоскости бесконечно тонким слоем (см. замечание 2), либо распадаться на несколько меньших капель, имеющих нетривиальные равновесные формы, аналогичные изображенным на рис. 7. (Моделирование этого случая выходит за рамки настоящего исследования.)

Отметим, что в работе [12] были получены качественно схожие результаты: для капли диэлектрика при превышении некоторого максимально допустимого (критического) значения электростатической силы ее равновесная форма также не может существовать, поэтому она должна распадаться на несколько капель меньших размеров.

На рис. 8 изображены расчетные кривые, характеризующие нетривиальные равновесные формы капель этилового спирта. Обозначение кривых 1 и 2 на рис. 8 такое же,

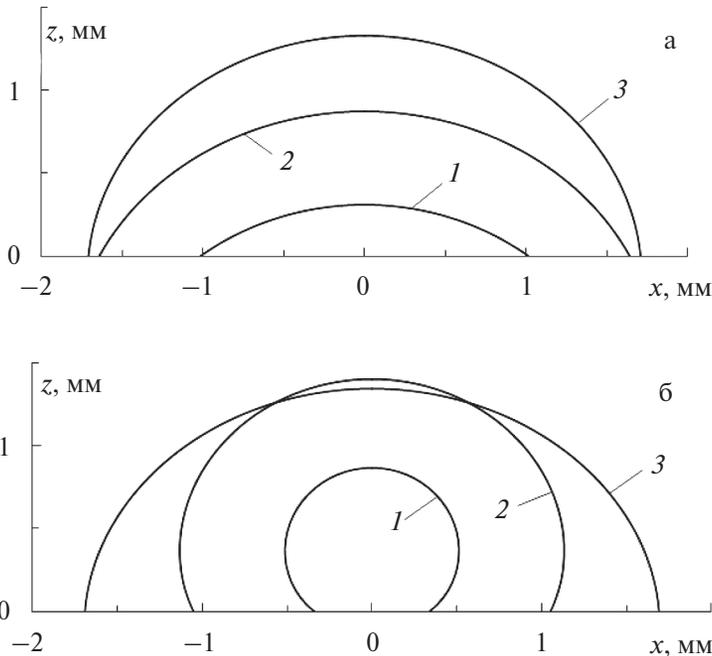


Рис. 8. Расчетные меридиональные сечения капель этилового спирта разных эталонных диаметров: а) первый тип решения; б) второй тип решения

как и на рис. 7. Кривые 3 на рис. 8 соответствуют почти предельному случаю для капли этилового спирта, когда первый и второй типы решения рассматриваемой задачи практически совпадают (в этом случае критический диаметр $D_0 \approx 2.46$ мм). На рис. 8,а кривой 1 ($D_0 = 1$ мм) соответствует значение угла смачивания $\theta = 34^\circ 50'$, кривой 2 ($D_0 = 2$ мм) — $\theta = 60^\circ 28'$ и кривой 3 ($D_0 = 2.46$ мм) — $\theta = 84^\circ 30'$, а на рис. 8,б кривой 1 соответствует значение $\theta = 141^\circ 38'$, кривой 2 — $\theta = 115^\circ 38'$ и кривой 3 — $\theta = 85^\circ 47'$.

Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 7,а и 8,а соответственно показывает, что в случае первого типа решения рассматриваемой задачи для капель одних и тех же эталонных диаметров угол смачивания капель этилового спирта больше, чем водяных капель; и, наоборот, в случае второго типа решения (см. кривые 1 и 2 на рис. 7,б и 8,б соответственно). Из рис. 8 видно, что для капель этилового спирта, покоящихся на горизонтальной плоскости, также существует критическое значение эталонного диаметра $D_0 \approx 2.46$ мм, которое существенно меньше, чем для водяных капель ($D_0 = 3.894$ мм). Однако угол смачивания у капель этилового спирта в критическом случае примерно тот же, что и у водяных капель, т.е. близок к 90° .

Таким образом, капли разных жидкостей, покоящиеся на горизонтальной плоскости, при одинаковых малых эталонных диаметрах имеют разные углы смачивания, что и наблюдается в натуральных экспериментах. При этом возможна реализация двух равновесных форм жидкой капли: при реализации первого типа форм углы смачивания являются малыми (меньше 90°), а при реализации второго типа форм — большими (как правило, больше 90°). Существуют критические значения эталонных диаметров капель, при которых могут существовать их нетривиальные равновесные формы на горизонтальной плоскости. Для жидкостей разных химических составов критические значения эталонных диаметров разные, но углы смачивания в этих предельных случаях примерно одинаковы и близки по значению к 90° . Если диаметр эталонной капли больше критического диаметра для соответствующей жидкости, то существует только тривиальная форма равновесной капли, когда капля растекается по всей опорной плоскости бесконечно тонким слоем (см. замечание 2). Так, например, для водяной капли расчетное критическое значение эталонного диаметра $D_0 = 3.894$ мм (см. кривые 4 на рис. 7). Однако следует подчеркнуть, что эти расчетные результаты справедливы только для идеально гладкой горизонтальной опорной поверхности, не обладающей поверхностно активными свойствами и не имеющей шероховатости [2]. В натуральных же экспериментах на реальных шероховатых поверхностях или на подложках, обладающих поверхностно активными свойствами, удается получить равновесные формы водяных капель больших эталонных диаметров (порядка 10...20 мм), имеющих при этом достаточно большие углы смачивания (более 100°) [4–6].

В действительности реализация той или иной равновесной формы капли (докритического размера) на горизонтальной поверхности определяется, по-видимому, конкретными условиями ее перехода из динамического состояния в стационарное. С целью проверки этого предположения были проведены натурные эксперименты: водяные капли эталонного диаметра $D_0 \approx 3.5$ мм сбрасывались с разной высоты на подложку из поликарбоната. Результаты этих экспериментов представлены на рис. 9. Левая капля на рис. 9 была сброшена с высоты примерно 80 мм (ее равновесная форма соответствует первому типу решения рассматриваемой задачи), а правая капля — с высоты примерно 5 мм (ее форма соответствует второму типу решения). Таким образом, существенное различие форм капель, представленных на рис. 9, позволяет утверждать, что натурные эксперименты подтвердили возможность существования двух равновесных форм капли, покоящейся на горизонтальной плоскости. (Каче-



Рис. 9. Две равновесные формы водяных капель одного и того же эталонного диаметра $D_0 \approx 3.5$ мм, покоящихся на подложке из поликарбоната

ственно аналогичные результаты были получены и при сбрасывании водяных капель на стеклянную подложку.)

Традиционно в натуральных экспериментах каплю на подложку выдавливают из шприца, уперев кончик его иглы в опорную поверхность [1, 3]. При таком способе «посадки» капли на поверхность подложки ее форма, очевидно, должна соответствовать второму типу решения рассматриваемой задачи. Возможно, именно указанная специфика формирования капли на горизонтальной поверхности, не позволила ранее исследователям обнаружить в экспериментах возможность существования двух равновесных форм капли докритического размера.

4.2. Капли больших эталонных диаметров. Выше обсуждались результаты расчетов, полученные для случаев, когда на каплю жидкости действуют только ее собственный вес G_0 , давление газа p_G и реакция опоры p_{SL} с равнодействующей P_{SL} (см. рис. 5,а). Никакое дополнительное взаимодействие между опорной плоскостью и жидкостью капли не учитывалось, поэтому приведенные в разд. 4.1 численные решения не чувствительны к химическому составу материала подложки. Однако, согласно краткому обзору, проведенному в разд. 1, из натуральных экспериментов известно, что материал подложки может обладать поверхностно активными свойствами, способными оказывать существенное влияние на равновесную форму капли и угол смачивания [2]. Это влияние может быть вызвано дополнительным взаимодействием между жидкостью и опорной плоскостью – силами слабого взаимодействия, например ионного взаимодействия, т.е. силами электрохимического происхождения, или силами типа сил Ван-дер-Ваальса.

Следует подчеркнуть, что в работе [12] также рассматривалось дополнительное взаимодействие за счет силы, порожденной электростатическим полем, наведенным между двумя плоскими электродами. При этом один из электродов служил в качестве подложки для капли диэлектрика, а второй электрод размещался над каплей, параллельно первому. Как и сила всемирного тяготения, рассматриваемая в [12] дополнительная электростатическая сила относится к разряду сил дальнего действия. В настоящем же подразделе речь идет о дополнительном взаимодействии жидкости капли с опорной поверхностью, характеризующемся силами ближнего действия, т.е. подложка оказывает дополнительное влияние только на ближайшие точки капли, расположенные на границе контакта жидкость–твердое тело.

В рамках рассматриваемой математической модели указанное дополнительное взаимодействие можно охарактеризовать равномерно распределенной активной силой p_V , направленной вдоль вертикальной оси Oz , изображенной на рис. 1, 4 и 5,а. При этом на данных рисунках силу p_{SL} следует заменить на $p_{SL} - p_V$, тогда уравнение силового баланса (2.20) при учете выражения (2.9) примет вид (ср. с равенством (2.21))

$$\pi r_*^2 (\bar{p}_f^0 - p_V + g\rho z_*) - 2\pi\sigma_{LG} r_* \cos\vartheta_* - G_0 = 0 \quad (4.2)$$

Согласно формуле (4.2), при $p_V > 0$ капля дополнительно притягивается к подложке, а при $p_V < 0$ – дополнительно отталкивается от нее.

На рис. 10 изображены расчетные формы равновесной водяной капли эталонного диаметра $D_0 = 3$ мм при разных значениях дополнительной силы p_V . Кривая 1 получена при $p_V = 0$, ей соответствует значение угла смачивания $\theta = 116^\circ 46'$; кривая 2 – при $p_V = 3 \cdot 10^{-7}$ Па, для которой $\theta = 99^\circ 22'$; кривая 3 – при $p_V = -1.652 \cdot 10^{-5}$ Па, ей соответствует значение $\theta = 162^\circ 26'$.

Кривая 1 на рис. 10 полностью совпадает с кривой 3 на рис. 7,б (т.е. рассматривается нетривиальное решение второго типа). Кривая 2 на рис. 10 соответствует предельному (критическому) значению, когда при $p_V = 3 \cdot 10^{-7}$ Па оба типа решения совпадают; при $p_V > 3 \cdot 10^{-7}$ Па нетривиальная равновесная форма водяной капли эталонного диаметра $D_0 = 3$ мм не существует. Кривая 3 на рис. 10 в определенном смысле также является предельной, так как при $p_V < -1.652 \cdot 10^{-5}$ Па никакого нетривиального решения численно получить не удалось.

Из сравнения кривых 1 и 2 на рис. 10 видно, что в случае второго типа решения исследуемой задачи при дополнительном притяжении капли подложкой ($p_V > 0$) угол смачивания уменьшается по сравнению со случаем $p_V = 0$. Сопоставление же кривых 1 и 3 на рис. 10 свидетельствует о том, что при дополнительном отталкивании

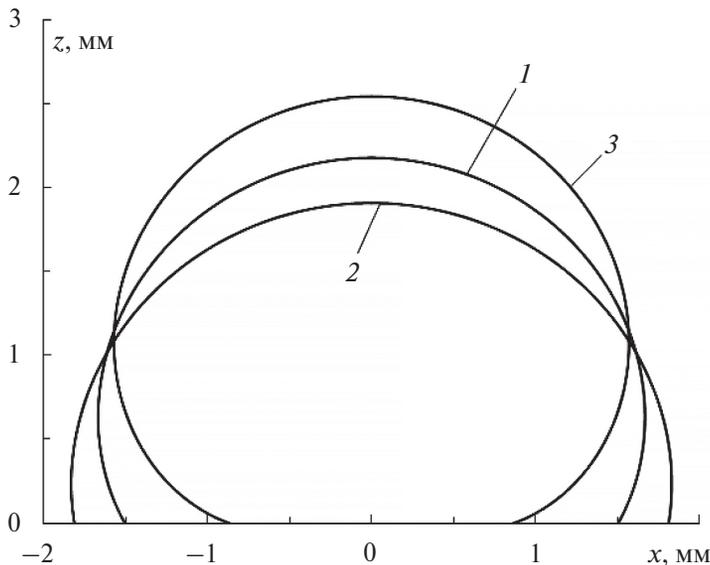


Рис. 10. Расчетные меридиональные сечения водяных капель с эталонным диаметром $D_0 = 3$ мм при наличии дополнительного взаимодействия p_V между жидкостью и подложкой

($p_V < 0$) угол смачивания увеличивается и может превосходить значение $\theta = 160^\circ$, т.е. подложка при этом может проявлять супергидрофобные свойства.

Как видно из представленных результатов, дополнительное взаимодействие действительно является малым ($|p_V| = 10^{-7} \dots 10^{-5}$ Па) по сравнению с избыточным давлением в вершине капли $\bar{p}_L^0 = 10 \dots 10^2$ Па (см. значения абсцисс точек A_3 и B_3 на рис. 6,б) и величиной $grz_* \approx 20$ Па (см. выражение в скобках в равенстве (4.2) и рис. 10).

Таким образом, учитывая дополнительное слабое взаимодействие между материалом подложки и жидкостью капли, можно моделировать изменение равновесной формы капли и угла смачивания при варьировании химического состава материала горизонтальной опорной плоскости, т.е. при варьировании ее поверхностно активных свойств.

Как уже отмечалось в разд. 4.1, при $p_V = 0$ для водяных капель с эталонными диаметрами $D_0 > 3.894$ мм нетривиальные решения рассматриваемой задачи не существуют. Однако при наличии дополнительного отталкивающего взаимодействия между жидкостью и подложкой ($p_V < 0$) нетривиальные равновесные расчетные формы водяных капель диаметров $D_0 > 3.894$ мм могут существовать. Расчеты показали, что при этом существует только одно нетривиальное решение рассматриваемой задачи, а угол смачивания капель больших диаметров зависит от величины $|p_V|$ и может изменяться от значений порядка 1° до 160° и более. Так, на рис. 11 кривые 1 и 2 соответствуют водяной капле эталонного диаметра $D_0 = 5$ мм: кривая 1 получена при $p_V = -4 \cdot 10^{-9}$ Па и ей соответствует угол смачивания $\theta = 11^\circ 37'$, а кривая 2 – при $p_V = -2.8 \cdot 10^{-6}$ Па, для которой $\theta = 160^\circ 4'$. Аналогично, кривые 3 и 4 на рис. 11 рассчитаны для водяной капли эталонного диаметра $D_0 = 20$ мм, причем кривая 3, для которой $\theta = 90^\circ 3'$, соответствует случаю $p_V = -3 \cdot 10^{-8}$ Па, а кривая 4 – случаю $p_V = -2 \cdot 10^{-7}$ Па и для нее $\theta = 161^\circ 31'$.

Таким образом, при наличии дополнительного слабого отталкивающего взаимодействия между жидкостью капли и материалом опорной горизонтальной плоскости действительно могут существовать нетривиальные равновесные формы капель больших эталонных диаметров, причем при относительно малых по модулю значениях дополнительной отталкивающей силы p_V опорная плоскость может проявлять гидрофильные свойства (см. кривую 1 на рис. 11), а при других (больших по модулю) значениях p_V – гидрофобные (см. кривую 3) и даже супергидрофобные свойства (см. кривые 2 и 4 на рис. 11).

Для экспериментального определения силы дополнительного взаимодействия p_V можно использовать метод ADSA [3, 13, 14], о котором уже упоминалось в разд. 1. Суть этого метода заключается в оцифровке фотографии равновесной капли сбоку с последующей обработкой полученного изображения – выделением границы профиля капли. В [3] рекомендуется использовать метод ADSA для определения коэффициента поверхностного натяжения σ_{LG} в уравнении Лапласа (1.1). Если же этот

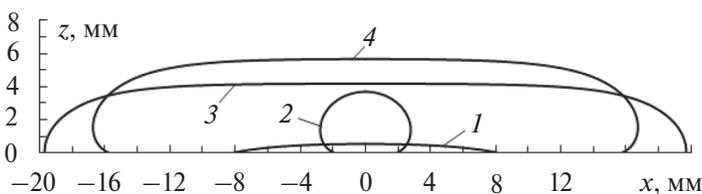


Рис. 11. Расчетные меридиональные сечения водяных капель больших эталонных диаметров

коэффициент уже известен из независимых экспериментов, проведенных на подложках из других материалов, то данный метод можно применить для вычисления силы p_V .

Действительно, как было показано выше, при известной силе поверхностного натяжения σ_{LG} и заданном объеме капли V_0 ее равновесная форма однозначно определяется величиной избыточного давления в полюсной точке \bar{p}_L^0 (см. уравнения (2.1), (2.4) и (2.6) при учете выражений (2.5)). Если из эксперимента, проведенного на исследуемой подложке, с применением метода ADSA определена, например, высота равновесной капли z_{exp} или радиус ее основания r_{exp} , или площадь ее осевого сечения F_{exp} , то следует провести расчет формы капли с пристрелкой по свободному параметру \bar{p}_L^0 , но в качестве разрешающих уравнений при этом необходимо использовать не соотношения (2.20) или (2.21), или (4.2), а одно из равенств (в зависимости от того, какой из геометрических параметров капли был измерен в эксперименте):

$$z_* = z_{\text{exp}} \quad (4.3)$$

$$r_* = r_{\text{exp}} \quad (4.4)$$

$$F = F_{\text{exp}}, \quad (4.5)$$

где F – расчетное значение площади осевого сечения капли, которое вычисляется по формуле [2, 3]

$$F = 2 \int_0^{z_*} r dz = 2 \int_0^{s_*} r(s) \cos \vartheta(s) ds \quad (4.6)$$

Величины z_* и r_* в соотношениях (4.3) и (4.4) определены равенствами (2.8).

После окончания пристрелки по параметру \bar{p}_L^0 с использованием одного из уравнений (4.3)–(4.5) искомая сила дополнительного взаимодействия исследуемой подложки с каплей p_V определяется из уравнения силового баланса (4.2). Если пристрелка велась при учете равенства (4.3), то в уравнении (4.2) величины r_* , \bar{p}_L^0 и ϑ_* известны из расчета, а величина z_* – из эксперимента. Если же для пристрелки использовалось равенство (4.4), то в уравнении (4.2) значения z_* , \bar{p}_L^0 и ϑ_* берутся из расчета формы капли, а значение r_* – из эксперимента. Если же пристрелка велась с использованием равенства (4.5) при учете выражения (4.6), то в уравнении (4.2) все четыре величины r_* , z_* , \bar{p}_L^0 и ϑ_* считаются известными из проведенного расчета.

В случаях, когда пристрелка ведется с использованием равенства (4.5) для повышения точности численного интегрирования целесообразно перейти от выражения (4.6) к дифференциальному уравнению

$$\frac{dF(s)}{ds} = 2r(s) \cos \vartheta(s); \quad s \geq 0 \quad (4.7)$$

и соответствующим ему краевым условиям

$$F(0) = 0, \quad F(s_*) = F_{\text{exp}} \quad (4.8)$$

Если по каким-то причинам в эксперименте не удастся достаточно точно измерить величину объема капли V_0 , то вместо соотношений (3.6)–(3.8) можно использовать равенства (4.7) и (4.8), тогда при расчетах в неравенствах (3.12) и (3.13) следует сделать замены: $V \rightarrow F$, $\Delta V_* \rightarrow \Delta F_*$ и $V_0 \rightarrow F_{\text{exp}}$, где смысл всех замен вполне очевиден.

Вместо равенств (4.3)–(4.5) для пристрелки можно использовать условие равенства расчетного θ_* и экспериментально определенного θ_{exp} значений угла смачивания: $\theta_* = \theta_{\text{exp}}$. В этом случае в уравнении (4.2) величина $\vartheta_* = \pi / 2 - \theta_*$ (см. выражение (2.9)) известна из эксперимента, а величины r_* , z_* и \bar{p}_L^0 берутся из расчета. Как подчеркивается в [3], измерения размеров капли с точностью порядка 10 мкм позволяют определить величину угла θ_{exp} с точностью до 1%, что, по-видимому, вполне достаточно для практических приложений.

В разд. 1 уже отмечалось, что на форму капли могут оказывать влияние не только поверхностно активные свойства вещества подложки, но и шероховатость ее поверхности [6]. На настоящем этапе исследований влияние шероховатости можно моделировать с помощью формального введения фиктивной силы p_V дополнительного взаимодействия между каплей и подложкой, расчет которой (силы) проводится по описанной выше схеме с использованием результатов экспериментов и последующей их обработкой по методу ADSA [3]. В пользу такого формального подхода говорит и тот факт, что на равновесную форму капли могут оказывать совместное влияние как природные гидрофобные (гидрофильные) свойства материала подложки, так и шероховатость ее поверхности [4,5]. Одновременно оба эти фактора можно учесть введением одной фиктивной силы p_V .

К сожалению, автор не располагает возможностью обработки экспериментальных данных по методу ADSA, поэтому не в состоянии продемонстрировать результаты соответствующих расчетов равновесных форм капель, покоящихся на реальных шероховатых поверхностях.

Заключение. Сформулирована задача расчета равновесной осесимметричной формы жидкой капли, покоящейся на недеформируемой горизонтальной плоскости. Впервые получено уравнение баланса сил, действующих на каплю в вертикальном направлении, которое замыкает постановку задачи и позволяет рассчитать краевой угол смачивания при известном коэффициенте поверхностного натяжения на границе жидкость – газ и заданном объеме капли. Разработан численный метод решения поставленной задачи, использующий пристрелку по свободному параметру – избыточному давлению в вершине капли. Для численного интегрирования системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений использован один из неявных методов Рунге–Кутты четвертого порядка точности, а именно трехстадийный диагональный метод Барриджа.

Показано, что капли разного химического состава при одних и тех же условиях имеют разную равновесную форму и углы смачивания. Изменение равномерного давления газа не влияет на равновесную форму несжимаемой капли. Для капель малых диаметров получены два решения задачи. При этом в первом типе решения углы смачивания имеют значения меньше 90° , а во втором решении – больше 90° . Существует предельное максимально допустимое (критическое) значение объема капли, при котором оба решения совпадают, а угол смачивания близок к 90° . Это критическое значение объема капли зависит от химического состава жидкости в ней. Так, для водяных капель этот критический расчетный объем равен объему капли шаровой формы с диаметром $D_0 \approx 3.89$ мм, а для капель этилового спирта $D_0 \approx 2.46$ мм. Равновесные осесимметричные формы капель большего, чем критический, объема могут существовать на горизонтальной плоскости только при наличии дополнительного слабого отталкивающего взаимодействия между жидкостью капли и материалом подложки. Это могут быть силы электрохимического происхождения (ионное взаимодействие). Интенсивность указанных дополнительных сил по модулю имеет порядок $10^{-7} \dots 10^{-5}$ Па. При наличии таких отталкивающих сил существует единственное решение задачи для капель больших объемов. Равновесная форма таких капель существенно зависит от величины отталкивающей силы. При относительно малых значе-

ниях этой силы капли имеют малые значения углов смачивания (материал соответствующей подложки можно характеризовать как гидрофильный). При относительно больших значениях отталкивающей силы углы смачивания капель больших диаметров могут достигать значений 160° и более (материал соответствующей подложки можно характеризовать как гидрофобный и даже как супергидрофобный).

Возможность существования неединственной равновесной формы капли малого диаметра подтверждена натурными экспериментами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Войтик О.Л., Делендик К.И., Коляго Н.В., Роцин Л.Ю.* Факторы, влияющие на характеристики смачивания частей паровой камеры // Инж.-физ. ж. 2020. Т. 93. № 5. С. 1126–1133.
2. *Матюхин С.И., Фроленков К.Ю.* Форма капель жидкости, помещенных на твердую горизонтальную поверхность // Конденс. среды и межфазные границы. 2013. Т. 15. № 3. С. 292–304.
3. *Марчук И.В., Чеверда В.В., Стрижак П.А., Кабов О.А.* Определение поверхностного натяжения и контактного угла смачивания по форме поверхности осесимметричных пузырей и капель // Теплофиз. и аэромех. 2015. Т. 22. № 3. С. 311–317.
4. *Vai M., Kazi H., Zhang X., Liu J., Hussain T.* Robust hydrophobic surfaces from suspension HVOF thermal sprayed rare-earth oxide ceramics coatings // Article in Sci. Rep. 2018. V. 8. № 1. P. 6973-1–6973-8.
5. *Xu P., Coyle T.W., Pershin L., Mostaghimi J.* Fabrication of superhydrophobic ceramic coatings via solution precursor plasma spray under atmospheric and low-pressure conditions // J. Therm. Spray Tech. 2019. V. 28. P. 242–254.
6. *Гуляев И.П., Кузьмин В.И., Ковалев О.Б.* Высокогидрофобные керамические покрытия, получаемые методом плазменного напыления порошковых материалов // Теплофиз. и аэромех. 2020. Т. 27. № 4. С. 615–625.
7. Contact Angle, Wettability, and Adhesion / ed. by *Gould R.F.* Washington: Amer. Chem. Soc. Advances in Chem. Ser, 1964.
8. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 312 с.
9. *Русаков А.И., Прохоров В.А.* Межфазная тензометрия. СПб.: Химия, 1994. 398 с.
10. *Саранин В.А.* Равновесие жидкостей и его устойчивость. Простая теория и доступные опыты. М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. С. 73–76.
11. *De Gennes P.G., Brochard-Wyart F., Quere D.* Capillarity and Wetting Phenomena. Berlin: Springer, 2004.
12. *Kupershtokh A.L., Lazebryi D.B.* Contact angles in the presence of an electrical field // J. of Phys.: Conf. Ser. 2020. 1675. 012106. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1675/1/012106>
13. *Del Rio O.I., Neumann A.W.* Axisymmetric drop shape analysis: computational methods for the measurement of interfacial properties from the shape and dimensions of pendant and sessile drops // J. of Colloid&Interface Sci. 1997. V. 196. № 2. P. 136–147.
14. *Zholob S.A., Makievski A.V., Miller R., Fainerman V.B.* Optimization of calculation methods for determination of surface tensions by drop profile analysis tensiometry // Advances in Colloid&Interface Sci. 2007. № 134. 135. P. 322–329.
15. *Кармо М.П.* Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. М.;Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2013. 608 с.
16. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2010. 380 с.
17. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
18. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
20. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.

Modeling of an Axisymmetric Shape of an Equilibrium Drop Resting On a Horizontal Plane

A. P. Yankovskii^{a, #}

^a*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the SB RAS, Novosibirsk, Russia*

[#]*e-mail: yankovsky_ap@itam.nsc.ru*

The problem of calculating the equilibrium axisymmetric shape of a liquid drop resting on a non-deformable horizontal plane is formulated. For the first time, an equation for the balance of forces acting on a drop in the vertical direction has been obtained, which completes the formulation of the problem under consideration. A high-precision numerical method for solving the formulated nonlinear problem has been developed. The dependence of the wetting angles of drops on variation of the input data of the problem: the chemical composition of the drop, gas pressure, and the strength of additional weak interaction (for example, van der Waals or electrochemical origin) is studied. For drops of small diameters, the possibility of the existence of two solutions is shown, which correspond to significantly different contact angles: in the first solution, the contact angles are less than 90°, and in the second, they are greater than 90°, reaching values of 160° and more. The existence of two equilibrium forms of a small-diameter drop is confirmed by full-scale experiments. Equilibrium forms of droplets of large diameters can exist only in the presence of an additional weak repulsive force between the liquid and the supporting surface, having an intensity of the order of $10^{-7} \dots 10^{-5}$ Pa. In this case, for drops of large diameters, there is only one solution.

Keywords: modeling the equilibrium shape of a drop, calculated contact angles, hydrophilicity, hydrophobicity, superhydrophobicity, non-uniqueness of solution

REFERENCES

1. *Voitik O.L., Delendik K.I., Kolyago N.V., Roshchin L.Yu.* Factors influencing the wetting characteristics of parts of the steam chamber // *J. of Engng. Phys.&Thermophys.*, 2020, vol. 93, no. 5, pp. 1126–1133. (in Russian)
2. *Matyukhin S.I., Frolenkov K.Yu.* Shape of liquid drops placed on a solid horizontal surface // *Condensed Matter&Interphase Boundaries*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 292–304. (in Russian)
3. *Marchuk I.V., Cheverda V.V., Strizhak P.A., Kabov O.A.* Determination of surface tension and contact angle by the axisymmetric bubble and droplet shape analysis // *Thermophys. & Aeromech.*, 2015, vol. 22, no. 3, pp. 297–303.
4. *Bai M., Kazi H., Zhang X., Liu J., Hussain T.* Robust hydrophobic surfaces from suspension HVOF thermal sprayed rare-earth oxide ceramics coatings // *Article in Sci. Rep.*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 6973-1–6973-8.
5. *Xu P., Coyle T.W., Pershin L., Mostaghimi J.* Fabrication of superhydrophobic ceramic coatings via solution precursor plasma spray under atmospheric and low-pressure conditions // *J. Therm. Spray Tech.*, 2019, vol. 28, pp. 242–254.
6. *Gulyaev I.P., Kuzmin V.I., Kovalev O.B.* Highly hydrophobic ceramic coatings produced by plasma spraying of powder materials // *Thermophys.&Aeromech.*, 2020, vol. 27, no. 4, pp. 585–594.
7. *Contact Angle, Wettability, and Adhesion / ed. by Gould R.F.* Washington: Amer. Chem. Soc. *Advances in Chem. Ser.*, 1964.
8. *Finn R.* *Equilibrium Capillary Surfaces.* N.Y.: Springer, 1986 p.
9. *Rusakov A.I., Prokhorov V.A.* *Interfacial Tensometry.* St. Petersburg: Chemistry, 1994. 398 p. (in Russian)
10. *Saranin V.A.* *Equilibrium of Liquids and Its Stability. Simple Theory and Accessible Experiments.* Moscow: Inst. for Comput. Res., 2002. pp. 73–76. (in Russian)
11. *De Gennes P.G., Brochard-Wyart F., Quere D.* *Capillarity and Wetting Phenomena.* Berlin: Springer, 2004.
12. *Kupershtokh A.L., Lazebryi D.B.* Contact angles in the presence of an electrical field // *J. of Phys.: Conf. Ser.*, 2020, 1675, 012106, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1675/1/012106>
13. *Del Rio O.I., Neumann A.W.* Axisymmetric drop shape analysis: computational methods for the measurement of interfacial properties from the shape and dimensions of pendant and sessile drops // *J. of Colloid&Interface Sci.*, 1997, vol. 196, no. 2, pp. 136–147.

14. *Zholob S.A., Makievski A.V., Miller R., Fainerman V.B.* Optimization of calculation methods for determination of surface tensions by drop profile analysis tensiometry // *Advances in Colloid&Interface Sci.*, 2007, no. 134, 135, pp. 322–329.
15. *Carmo M.P.* *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1976.
16. *Novozhilov V.V.* *Theory of Thin Shells.* St. Petersburg.: St. Petersburg Univ. Pyb., 2010. 380 p. (in Russian)
17. *Vlasov V.Z., Leontiev N.N.* *Beams, Slabs and Shells on an Elastic Base.* Moscow: Fizmatgiz, 1960. 491 p. (in Russian)
18. *Nowacki W.* *Teoria sprężystości.* Warszawa: PAN, 1970.
19. *Hall G., Watt J.M.* *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.* Oxford: Clarendon, 1976.
20. *Dekker K., Verwer J.G.* *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equation.* Amsterdam: North-Holland, 1984. 308 p.

УДК 533.6.011.8

КИНЕТИЧЕСКИЙ ВЯЗКИЙ УДАРНЫЙ СЛОЙ ОКОЛО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОСТРОГО КОНУСА

© 2024 А. Л. Анкудинов^{1,*}

¹ФГУП ЦАГИ, Жуковский, Россия

*email: ankudin2@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.11.2023 г.

После доработки 04.06.2024 г.

Принята к публикации 10.06.2024 г.

Рассмотрено неравновесное (по внутренним и поступательным степеням свободы) течение многоатомного газа в макрокинетическом тонком вязком ударном слое (кинетическом ТВУС) около кругового острого конуса, вращающегося вокруг собственной оси. Предложено регуляризирующее задачу преобразование переменных.

Указана возможность построения решения рассмотренной задачи для кинетического ТВУС на основе модели Навье–Стокса решения этой проблемы. Сформулирована замкнутая локальная регуляризованная задача, описывающая нерегулярное течение в кинетическом ТВУС вблизи заостренного носка вращающегося конуса.

Приведена сопоставительная оценка основных характеристик ТВУС кинетического и Навье–Стокса.

Ключевые слова: кинетический тонкий вязкий ударный слой (кинетический ТВУС), многоатомный газ, неравновесность, острый конус с вращением, корреляция ТВУС-течений.

DOI: 10.31857/S0032823524040089, EDN: WVUUFW

1. Введение

Предлагаемый анализ имеет дело с категорией высокоскоростных течений разреженного вязкого газа. Череда публикаций по теме вязкого гиперзвука только за последний период [1–6] определенным образом свидетельствует о важности и одновременно неисчерпаемости непростых проблем данного раздела высотной аэродинамики больших скоростей.

Течение вязкого газа вблизи вращающихся тел является одной из актуальных проблем такого рода [7, 8].

Исследования по теме преимущественно фокусировались, как в [7, 8], на обтекании гладких затупленных тел, при этом в анализе преобладал континуальный навье-стоксовский подход к проблеме.

Ниже предлагается анализ течения занавье-стоксовского диапазона режимов по указанной проблеме (высокоскоростного обтекания вращающихся тел), целиком базирующийся на кинетической теории газов (приближение кинетического тонкого вязкого ударного слоя – кинетический ТВУС) и рассматривающий объект обтекания из разряда заостренных тел (острый круговой конус).

Кинетическая модель ТВУС, построенная на основе полных 13-моментных уравнений кинетической теории газов, была сформулирована в [9] (см. также [10, 11]) для многоатомных (молекулярных) газов (неравновесность по внутренним и поступательным степеням свободы); позднее, для случая одноатомного газа (поступательная неравновесность), — на основе кинетических, так называемых, 13-моментных уравнений Грэда — в [12, 13].

Побудительным мотивом к использованию моментной модели в качестве газокинетической основы анализа гиперзвуковых течений разреженного газа в ТВУС можно полагать наличие у данной модели такого рода привлекательных качеств, как: модель допускает высокую степень неравновесности течения; имеет навье-стоксовский тип допустимых краевых условий на стенке; потенциально опирается на развитое макроскопическое матобеспечение. Оправдательным соображением применения кинетической моментной модели для описания изучаемого типа течений в ТВУС является позитивный итог сопоставления моментных данных с результатами эксперимента и данными прямого статистического моделирования (DSMC), как в тестовых так и в практических исследованиях ТВУС [13–15].

Уравнения гиперзвукового кинетического ТВУС около нетонких осесимметричных тел, вращающихся вокруг оси, для случая многоатомного газа, согласно [3], имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r\rho u}{\partial x} + \frac{\partial r\rho v}{\partial y} &= 0, \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \rho w^2 \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} = 0 \\ -p_{12} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial P_{22}}{\partial y} - \frac{\rho u^2}{R_1} - \frac{\rho w^2}{R_2} = 0 \\ \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho u w \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} &= 0 \\ -p_{32} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (q_2 + up_{12} + wp_{32}) = 0 \\ -q_2 &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial h}{\partial y} \\ p &= 2\varepsilon\rho h, \mu = \mu(h), H = h + \frac{u^2 + w^2}{2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{p}{P_{22}} = 1 + \frac{2}{3\alpha} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu}{p} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3\alpha} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu}{p} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

Условия на внешней границе ударного слоя y_e (т.е. при $y = y_e(x)$, где y_e — неизвестная, подлежащая определению):

$$\begin{aligned} \rho v &= \rho_\infty v_\infty, \rho_\infty v_\infty (u - u_\infty) + p_{12} = 0 \\ P_{22} &= \rho_\infty v_\infty^2, \rho_\infty v_\infty w + p_{32} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\rho_\infty v_\infty (H - H_\infty) + q_2 + up_{12} + wp_{32} = 0$$

Условия на поверхности тела (т.е. при $y = 0$):

$$u = 0, w = \omega r, H = H_w \quad (1.3)$$

Обезразмеривание переменных задачи:

$$u = \frac{u^*}{U_\infty^*}, v = \frac{v^*}{U_\infty^*}, w = \frac{w^*}{U_\infty^*}, H = \frac{H^*}{U_\infty^{*2}}, p = \frac{p^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}, h = \frac{h^*}{U_\infty^{*2}}, T = \frac{T^*}{(U_\infty^{*2} / c_p^*)}, x = \frac{x^*}{L^*},$$

$$y = \frac{y^*}{L^*}, \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*}, \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0^*}, r = \frac{r^*}{L^*}, P_{22} = \frac{P_{22}^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}, R_1 = \frac{R_1^*}{L^*}, R_2 = \frac{R_2^*}{L^*}.$$

Для представления задачи ТВУС в (1.1) – (1.3) используется связанная с обтекаемой поверхностью ортогональная система координат, обычно применяемая в теории пограничного слоя, т.е. продольная координата x здесь отсчитывается вдоль прямой линейной образующей поверхности (конуса) от острого носка, поперечная координата y отсчитывается вдоль нормали к поверхности тела.

Список основных обозначений:

u, v, w – компоненты скорости течения в продольном – x , поперечном – y и азимутальном направлениях соответственно;

ω – угловая скорость вращения конуса;

h, H – статическая и полная энтальпии соответственно;

$Re = U_\infty^* L^* \rho_\infty^* / \mu_0^*$ – число Рейнольдса; $Pr = \mu^* c_p^* / \lambda^*$ – число Прандтля;

L^* – характерный линейный размер; $U_\infty^*, \rho_\infty^*$ – скорость и плотность в набегающем невозмущенном потоке; M_∞ – число Маха набегающего потока;

p – давление; ρ – плотность; T – температура; T_0^* – температура торможения; γ – отношение удельных теплоемкостей, т.е. $\gamma = c_p^* / c_v^*$, где c_p^* и c_v^* – удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и при постоянном объеме соответственно; $\varepsilon = (\gamma - 1) / 2\gamma$;

μ^* – коэффициента вязкости; μ_0^* – значение коэффициента вязкости μ^* при температуре торможения T_0^* ; λ^* – коэффициент теплопроводности;

α – отношение времен релаксации при упругих (τ_{el}) и неупругих (τ_{in}) столкновениях молекул газа, $\alpha = \tau_{el} / \tau_{in} = \alpha(T)$;

R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхности конуса в продольном и азимутальном направлениях соответственно ($R_1^{-1} = 0$);

rL^* – расстояние от оси симметрии конуса до его поверхности;

$P_{22} = {}_2p + p_{22}$, где $p_{22}\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ – компонента девиаторной части тензора напряжений $p_{ij}\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) при индексах 1, 2 и 3, ассоциируемых с продольным, поперечным и азимутальным направлениями соответственно; $q_i\rho_\infty^* U_\infty^{*3}$ – вектор теплового потока.

Индексы описывают: «e» – внешнюю границу ТВУС, «w» – стенку, «∞» – набегающий (невозмущенный) поток; верхний индекс * относится к размерным величинам.

Анализ течения в задаче кинетического ТВУС около вращающегося конуса строится на использовании переменных Мизеса (x, ψ), где ψ – функция тока ($\psi = \psi^* / L^* \rho_\infty^* U_\infty^*$), которая вводится соотношениями:

$$r\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, r\rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.4)$$

2. Регуляризирующее преобразование

Течение в ТВУС около заостренных тел имеет существенную особенность (в окрестности острого носка) и является в высокой степени нерегулярным (причина: головной скачок непосредственно присоединен к носку). Вследствие чего применяемый на практике аппарат исследования ТВУС-течений, ориентированный на

изучение обтекания затупленных тел, (прежде всего из-за свойств используемых там переменных) непригоден в случае тел с головным заострением.

Для преодоления указанной существенной особенности предлагается регуляризирующее преобразование переменных следующего вида:

$$\xi = x^{1/2}, \eta = \psi^{1/2}$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{r^{1/2}}, \tilde{H} = \frac{H - H_{w_0}}{r^{1/2}}, \tilde{w} = \frac{w - w_{w_0}}{r^{1/2}}, \quad (2.1)$$

где (см. (1.4). о величине ψ):

$$\tilde{\psi} = \psi / (r^2/2),$$

H_{w_0} – значение величины H при $x = 0$ на стенке $\eta = 0$, w_{w_0} – значение w при $x = 0$ на стенке $\eta = 0$;

ξ, η – новые независимые переменные задачи (соответственно продольная переменная ξ и поперечная η); область изменения (ξ, η) является: $\xi \geq 0, 0 \leq \eta \leq 1$.

Задача ТВУС около острого конуса, представленная в переменных (2.1), является регулярной.

3. Корреляция

(x, η) -интерпретация кинетического ТВУС позволяет в рамках структуры последнего сформулировать следующего вида замкнутую краевую задачу для вычисления величин $(\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{H}, P_{22})_k, (p_{12})_k, (p_{32})_k, (q_2)_k$:

уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{u} w^2 \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial p_{12}}{\partial \eta} &= 0 \\ -p_{12} &= \frac{1}{\text{Re}} P_{22} \mu \frac{\rho}{p} u \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{2}{r^3} \\ 2^{-1} \frac{u^2}{R_1} + 2^{-1} \frac{w^2}{R_2} &= \frac{u}{r} \frac{\partial P_{22}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} + w \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial p_{32}}{\partial \eta} &= 0 \\ -p_{32} &= \frac{1}{\text{Re}} P_{22} \mu \frac{\rho}{p} u \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{2}{r^3} \\ r \frac{\partial H}{\partial x} - 2 \frac{dr}{dx} \eta \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} (q_2 + up_{12} + wp_{32}) &= 0 \\ -q_2 &= \frac{1}{\text{RePr}} P_{22} \mu \frac{\rho}{p} u \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{2}{r^3} \\ p &= 2\varepsilon \rho h; \mu = \mu(h); H = h + \frac{u^2 + w^2}{2} \\ u &= \tilde{u} r^{1/2}; w = \tilde{w} r^{1/2} + w_{w_0}; H = \tilde{H} r^{1/2} + H_{w_0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

условия при $\eta = 0$:

$$u = 0, w = \omega r, H = H_w \quad (3.2)$$

условия при $\eta = 1$:

$$\rho_\infty v_\infty (u - u_\infty) + p_{12} = 0$$

$$P_{22} = \rho_\infty v_\infty^2 \quad (3.3)$$

$$\rho_\infty v_\infty w + p_{32} = 0$$

$$\rho_\infty v_\infty (H - H_\infty) + q_2 + up_{12} + wp_{32} = 0$$

Точно такой же вид, в таких же (x, η) -независимых переменных, имеет краевая задача, описывающая величины $(\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{H}, \tilde{p})_n, (p_{12})_n, (p_{32})_n, (q_2)_n$ ТВУС в рамках модели Навье–Стокса.

Выше, в разд. 3, и далее индекс k относится к кинетическому ТВУС, индекс n относится к ТВУС Навье–Стокса.

Комплексы функций $(\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{H}, P_{22})_k, (p_{12})_k, (p_{32})_k, (q_2)_k$ и $(\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{H}, p)_n, (p_{12})_n, (p_{32})_n, (q_2)_n$ являются решением одной и той же замкнутой краевой задачи в независимых переменных (x, η) , связанных с потоком.

Отсюда следует (в условной записи):

$$(u, w, H, P_{22})_k = (u, w, H, p)_n \quad (3.4)$$

$$(P_{22})_k = (p)_n \quad (3.5)$$

$$(p_{12})_k = (p_{12})_n, (p_{32})_k = (p_{32})_n, (q_2)_k = (q_2)_n \quad (3.6)$$

Равенства (3.6) позволяют заключить, что локальные величины напряжения трения на поверхности и нормальный тепловой поток к стенке в обоих (кинетическом и Навье–Стокса) ТВУС-течениях повсеместно совпадают, т.е. и трение и теплообмен на стенке соответственно одинаковы в том и другом случае.

Эта корреляция (подобие, соотнесение) ТВУС-решений очевидным образом (см. (3.4)–(3.6)) позволяет выстраивать решение кинетической задачи ТВУС на базе решения ТВУС-решения Навье–Стокса. Для установления связи кинетического ТВУС-решения, полученного в переменных Мизеса $(x, \tilde{\psi})$, с физическими координатами (x, y) следует привлечь обращенное уравнение, вводящие поперечную переменную Мизеса (см. (1.4)), т.е. уравнение вида:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = (2\rho_k \tilde{u})^{-1}, y(\eta = 0) = 0$$

4. Острый носок

Использование преобразования (2.1) кинетической задачи ТВУС дает возможность получить ее предельную ($\xi \rightarrow 0$) форму, описывающую течение вблизи острого носка конуса.

Это будут:

система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\text{Re}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial P_{22}}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\text{Re}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\text{RePr}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \tilde{u} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta} &= 0 \\ 1 &= 2\varepsilon \left[\frac{\rho}{p} \right] h; \mu = \mu(h); h = H_{w0} \end{aligned}$$

условия на внешней границе ТВУС, т.е. при $\eta = 1$:

$$\begin{aligned} \rho_{\infty} v_{\infty} u_{\infty} &= \frac{1}{\text{Re}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \\ P_{22} &= \rho_{\infty} v_{\infty}^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\infty} v_{\infty} w_{w0} &= \frac{1}{\text{Re}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} \\ \rho_{\infty} v_{\infty} (H_{w0} - H_{\infty}) &= \frac{1}{\text{RePr}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \tilde{u} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

условия на стенке, т.е. при $\eta = 0$:

$$\tilde{u} = 0, \tilde{w} = 0, \tilde{H} = 0 \quad (4.3)$$

Предельная форма рассмотренного кинетического ТВУС (4.1) – (4.3) представляет собой интегрируемую замкнутую краевую задачу на конечном отрезке (поперечной переменной η) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений; для полноты картины система должна быть доукомплектована записанным в переменных (2.1) последним уравнением из (1.1).

Заключение

Рассмотрено неравновесное (по внутренним и поступательным степеням свободы) течение однородного многоатомного газа в кинетическом ТВУС около острого вращающегося конуса.

Регуляризована задача кинетического ТВУС, описывающего нерегулярное неравновесное течение многоатомного газа около острого вращающегося конуса.

Сформулирован принцип подобия нерегулярного неравновесного течения молекулярного газа в кинетическом ТВУС около острого вращающегося конуса с аналогом Навье–Стокса ТВУС-течения.

Показано: локальные трение и теплообмен на стенке в обоих течениях (кинетическом и нерегулярном ТВУС Навье–Стокса около вращающегося острого конуса) на всей обтекаемой поверхности соответственно совпадают.

Показано, что решение кинетической задачи нерегулярного ТВУС около острого вращающегося конуса может быть полностью построено на базе решения соответствующей ТВУС-задачи.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект 20-08-00790А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брыкина И.Г.* Асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии затупленных тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком разреженного газа // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 3. С. 120–131.
2. *Брыкина И.Г., Rogov Б.В., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Влияние кривизны поверхности на граничные условия в модели вязкого ударного слоя при гиперзвуковом обтекании разреженным газом // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 938–953.
3. *Брыкина И.Г., Rogov Б.В., Тирский Г.А., Титарев В.А., Утюжников С.В.* Сравнительный анализ подходов к исследованию гиперзвукового обтекания затупленных тел в переходном режиме // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 1. С. 15–26.
4. *Брыкина И.Г.* Асимптотическое исследование теплопередачи и трения в трехмерных гиперзвуковых течениях разреженного газа // ПММ. 2016. Т. 80. № 3. С. 344–365.
5. *Noori S., Ghasemloo S., Mani M.* Viscous shock layer around slender bodies with nonequilibrium air chemistry // Iran. J. Sci. & Technol. Trans. Mech. Engng. 2017. V. 41. P. 251–264.
6. *Брыкина И.Г.* Приближенные аналитические решения для тепловых потоков при трехмерном гиперзвуковом обтекании затупленных тел // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 4. С. 125–139.
7. *Марков А.А.* О влиянии вращения тела и внешней завихренности на теплообмен около критической точки затупленного тела в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 179–182.
8. *Журавлева Г.С., Пилюгин Н.Н.* Гиперзвуковое обтекание вращающихся осесимметричных тел // Тр. 4-й РНКТ. 2006. Т. 2. С. 112–115.
9. *Кузнецов М.М., Никольский В.С.* Кинетический анализ гиперзвуковых вязких течений многоатомного газа в тонком трехмерном ударном слое // Уч. Зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 3. С. 38–49.
10. *Никольский В.С.* Кинетическая модель гиперзвуковых течений разреженного газа // Матем. моделир. 1996. Т. 8. № 12. С. 29–46.
11. *Кузнецов М.М., Липатов И.И., Никольский В.С.* Реология течения разреженного газа в гиперзвуковом ударном и пограничном слоях // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 189–196.
12. *Cheng H.K., Lee C.J., Wong E.Y., Yang H.T.* Hypersonic slip flows and issues on extending continuum model beyond the Navier–Stokes level // AIAA Paper. 1989. № 89-1663.
13. *Cheng H.K., Wong E.Y., Dogra V.K.* A shock-layer theory based on thirteen-moment equations and DSMC calculations of rarefied hypersonic flows // AIAA Paper. 1991. № 91-0783.
14. *Cheng H.K., Emanuel G.* Perspective on hypersonic nonequilibrium flow // AIAA J. 1995. V. 33. № 3. P. 385–399.
15. *Анкудинов А.Л.* Кинетический вязкий ударный слой в плоскости растекания аппарата типа несущий корпус // ПММ. 2021. Т. 85. № 5. С. 615–625.

Kinetic Viscous Shock Layer Near A Rotating Sharp Cone

A. L. Ankudinov^{a, #}

^aTsAGI, Zhukovsky, Russia
#email: ankudin2@yandex.ru

The paper considers a nonequilibrium (in terms of internal and translational degrees of freedom) flow of a polyatomic gas in a macrokinetic thin viscous shock layer (kinetic TVSL) near a circular sharp cone rotating around its own axis. A transformation of variables that regularizes the problem is proposed.

The possibility of constructing a solution to the considered problem for a kinetic TVSL based on the Navier–Stokes model for solving this problem is indicated.

A closed local regularized problem is formulated that describes an irregular flow in a kinetic TVSL near the pointed tip of a rotating cone.

Keywords: kinetic thin viscous shock layer (kinetic TVSL), polyatomic gas, nonequilibrium, sharp cone with rotation, correlation of TVSL flows.

REFERENCES

1. *Brykina I.G.* Asymptotic solutions of the thin viscous shock layer equations near the symmetry plane of blunt bodies in hypersonic rarefied gas flow // *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 3, pp. 444–455.
2. *Brykina I.G., Rogov B.V., Tirsky G.A., Utyuzhnikov S.V.* The effect of surface curvature on the boundary conditions in the viscous shock layer model for hypersonic rarefied gas flow // *JAMM*, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 677–687.
3. *Brykina I.G., Rogov B.V., Tirsky G.A., Titarev V.A., Utyuzhnikov S.V.* A comparative analysis of approaches for investigating hypersonic flow over blunt bodies in a transitional regime // *JAMM*, 2013, vol. 77, iss. 1, pp. 9–16.
4. *Brykina I.G.* Asymptotic investigation of heat transfer and skin friction in three-dimensional hypersonic rarefied gas flows // *JAMM*, 2016, vol. 80, no. 3, pp. 244–256.
5. *Noori S., Ghasemloo S., Mani M.* Viscous shock layer around slender bodies with nonequilibrium air chemistry // *Iran. J. Sci.&Technol. Trans. Mech. Engng.*, 2017, vol. 41, pp. 251–264.
6. *Brykina I.G.* Approximate analytical solutions for heat fluxes in three-dimensional hypersonic flow over blunt bodies // *Fluid Dyn.*, 2017, vol. 52, no. 4, pp. 572–586.
7. *Markov A.A.* Influence of rotation of the body and exterior vorticity on the heat transfer near the stagnation point of a blunt body in a supersonic stream // *Fluid Dyn.*, 1984, vol. 19, pp. 499–502.
<https://doi.org/10.1007/BF01093921>
8. *Zhuravleva G.S., Pilyugin N.N.* Hypersonic flow around rotating axisymmetric bodies // *Proc. 4th RNKT*, 2006, vol. 2, pp. 112–115.
9. *Kuznetsov M.M., Nikolsky V.S.* Kinetic analysis of hypersonic viscous flows of a polyatomic gas in a thin three-dimensional shock layer // *Sci. Notes TsAGI*, 1985, vol. 16, no. 3, pp. 38–49.
10. *Nikolsky V.S.* Kinetic model of hypersonic flows of a rarefied gas // *Math. Model.*, 1996, vol. 8, no. 12, pp. 29 – 46.
11. *Kuznetsov M.M., Lipatov I.I., Nikolsky V.S.* Rheology of rarefied gas flow in hypersonic shock and boundary layers // *Fluid Dyn.*, 2007, vol. 42, no. 5, pp. 851 – 857.
12. *Cheng H.K., Lee C.J., Wong E.Y., Yang H.T.* Hypersonic slip flows and issues on extending continuum model beyond the Navier–Stokes level // *AIAA Paper*, 1989, no. 89-1663.
13. *Cheng H.K., Wong E.Y., Dogra V.K.* A shock-layer theory based on thirteen-moment equations and DSMC calculations of rarefied hypersonic flows // *AIAA Paper*, 1991, no. 91-0783.
14. *Cheng H.K., Emanuel G.* Perspective on hypersonic nonequilibrium flow // *AIAA J.*, 1995, vol. 33, no. 3, pp. 385–399.
15. *Ankudinov A.L.* Kinetic shock layer in the spreading plane of a lifting body apparatus // *JAMM*, 2021, vol. 85, no. 5, pp. 615–625.

УДК 539.3

**ЗАДАЧА ОДНОСТОРОННЕГО ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА
ДЛЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ**© 2024 г. А. А. Бобылев^{1,2,*}¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия²Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Москва, Россия

*e-mail: abobylov@gmail.com

Поступила в редакцию 02.05.2024 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 20.07.2024 г.

Рассмотрена задача о вдавливании жесткого штампа конечных размеров с поверхностным микрорельефом в стратифицированную упругую полосу. Приведены граничные вариационные формулировки задачи с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего нормальные напряжения в нормальные перемещения. При аппроксимации этого оператора применялось дискретное преобразование Фурье, численная реализация которого производилась с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Для вычисления передаточной функции использовалась вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений. В результате аппроксимации исходной контактной задачи получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств, для численного решения которой применялся алгоритм на основе метода сопряженных градиентов. Установлен ряд закономерностей контактного взаимодействия.

Ключевые слова: односторонний дискретный контакт, стратифицированная упругая полоса, граничное вариационное неравенство, оператор Пуанкаре–Стеклова, преобразование Фурье, метод сопряженных градиентов

DOI: 10.31857/S0032823524040099, EDN: WVRLNQ

1. Введение. Одним из направлений повышения триботехнических характеристик контактирующих деталей машин и механизмов является использование функциональных покрытий. Среди существующих принципов создания покрытий перспективной является концепция многослойной архитектуры покрытий, так как подобные покрытия способны удовлетворять набору зачастую противоречивых требований. Разработан ряд технологий, позволяющих создавать композиции из чередующихся слоев функционально-градиентных материалов, представляющих собой гетерогенные структуры (композиты) с непрерывным изменением по глубине фазового состава и, как следствие, физико-механических свойств [1].

При исследовании локального контактного взаимодействия тел с покрытиями в качестве расчетной схемы, как правило, выбирается упругая полоса или слой, сцепленные с основанием. Учет поверхностного микрорельефа контактирующих тел в виде волнистости или шероховатости приводит к постановке задач дискрет-

ного (множественного) контакта [2–6]. Подробный обзор современного состояния исследований в области механики дискретного контакта, включая основные подходы к постановке задач, методы аналитического и численного решения, конкретные результаты и области их практического использования, приведен в статье [7].

Задача дискретного контакта однородной упругой полосы с жестким штампом конечных размеров, имеющим поверхностный микрорельеф, рассмотрена в [8]. На поверхности возможного контакта полосы со штампом задавались условия одностороннего гладкого контакта. Отметим, что априори задавалась лишь предельно допустимая (номинальная) область контакта, которая включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и размеры которых заранее неизвестны и подлежат определению. Вследствие этого задачи одностороннего контакта являются нелинейными. Наиболее распространенный подход к решению такого класса задач состоит в применении вариационных методов [9–11].

В [8] с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова (ОПС) получены граничные вариационные формулировки и на их основе разработан вычислительный алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для однородной упругой полосы. В настоящей работе этот алгоритм обобщен на случай стратифицированной упругой полосы. Предлагаемое обобщение состоит в использовании для построения ОПС численного алгоритма, разработанного в [12].

2. Постановка задачи. Пусть невесомая стратифицированная упругая полоса в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 занимает область $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \infty, 0 \leq x_2 \leq h\}$ и состоит из произвольного числа N изотропных упругих слоев Ω_n , границы раздела которых параллельны оси Ox_1 . Слои пронумерованы как $1, \dots, N$ в порядке возрастания координаты x_2 . Границу полосы $x_2 \equiv 0$ обозначим Γ_0 , границу раздела слоев Ω_n и Ω_{n+1} – через Γ_n , а границу полосы $x_2 \equiv h$ – через Γ_N . Параметры Ламе материала полосы являются произвольными ограниченными функциями координаты x_2 : $\lambda = \lambda(x_2)$ и $\mu = \mu(x_2)$, имеющими разрывы первого рода на границах Γ_n раздела слоев. Из физических соображений следует, что существуют постоянные $\lambda_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$, такие, что

$$\lambda(x_2) \geq \lambda_0, \mu(x_2) \geq \mu_0, 0 \leq x_2 \leq h \quad (2.1)$$

Далее под $\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{x})$ будем понимать соответственно вектор перемещений и тензоры деформаций и напряжений в точке $\mathbf{x} \in \Omega_n$.

Для упрощения обозначений всюду, где это возможно, говоря о параметрах, относящихся к конкретному слою, будем опускать индекс, указывающий номер слоя.

Предполагается, что упругая полоса находится в условиях плоской деформации, деформации малы, а массовые силы и напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние слоев Ω_n , $n = 1, N$, описывается системой уравнений:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}, \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ в } \Omega_n, \quad (2.2)$$

где $\text{def} \equiv 1/2(\text{grad} + \text{grad}^T)$, \mathbf{S} – тензор модулей упругости.

По границе Γ_0 полоса соединена с недеформируемым основанием. В случае полного сцепления граничные условия имеют вид

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ на } \Gamma_0 \quad (2.3)$$

На границах раздела слоев также задаются условия полного сцепления:

$$u_1^{(n)} = u_1^{(n+1)}, u_2^{(n)} = u_2^{(n+1)}, \sigma_{12}^{(n)} = \sigma_{12}^{(n+1)}, \sigma_{22}^{(n)} = \sigma_{22}^{(n+1)} \text{ на } \Gamma_n \quad (2.4)$$

В упругую полосу вдавливаются гладкий жесткий штамп, основание которого имеет поверхностный микрорельеф. Часть границы Γ_N , по которой возможен контакт полосы со штампом, обозначается Γ_p . Положение и предельные размеры Γ_p , т.е. номинальная область контакта, задаются априори, исходя из геометрических соображений. Предполагается, что часть границы Γ_p является односвязной и конечной. При вдавливании штампа с поверхностным микрорельефом номинальная область контакта Γ_p включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и размеры которых заранее неизвестны.

Форма основания штампа и его поверхностный микрорельеф описываются функцией $\Phi(x_1)$, значение которой в точке $x \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали к границе Γ_p . Расстояние $\Phi(x_1)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию полосы. Для определенности будем полагать $\min_{x \in \Gamma_p} \Phi(x_1) = 0$. Для штампа с поверхностным микрорельефом функция $\Phi(x_1)$ является мультимодальной (многоэкстремальной). Положение штампа определяется вектором перемещений $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ и углом поворота φ_3 штампа как жесткого целого. Перемещения и углы поворота штампа предполагаются малыми. Главный вектор $F = (F_1, F_2)$ и главный момент M_3 внешних сил, приложенных к штампу, считаются заданными. В качестве центра приведения выбирается точка $x^c = (x_1^c, x_2^c)$. Далее рассматривается задача нормального контакта упругой полосы со штампом, поэтому будем полагать

$$\delta_1 = 0, F_1 = 0, \infty < F_2 < 0, |M_3| < \infty$$

Контактное взаимодействие упругой полосы со штампом описывается линейризованными условиями одностороннего гладкого контакта:

$$\begin{aligned} u_2 &\leq \Phi + \delta_2 + (x_1 - x_1^c)\varphi_3, \sigma_{22} \leq 0, \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{22}[u_2 - \Phi - \delta_2 - (x_1 - x_1^c)\varphi_3] &= 0 \text{ на } \Gamma_p \end{aligned} \quad (2.5)$$

Остальная часть границы Γ_N полосы свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = 0 \text{ на } \Gamma_N \setminus \Gamma_p \quad (2.6)$$

Уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид:

$$\int_{\Gamma_p} \sigma_{22} d\Gamma_p = F_2, \int_{\Gamma_p} (x_1 - x_1^c) \sigma_{22} d\Gamma_p = M_3 \quad (2.7)$$

Отметим, что соотношения (2.7), по существу, представляют собой нелокальные граничные условия.

Для существования решения рассматриваемой контактной задачи далее будем предполагать, что внешние силы и моменты, приложенные к жесткому штампу, согласованы между собой таким образом, что существует распределение нормальных напряжений $\sigma_{22} \leq 0$ на Γ_p , удовлетворяющее уравнениям равновесия штампа (2.7).

Для выделения класса единственности решения в рассматриваемой контактной задаче используется условие конечности потенциальной энергии деформации упругой полосы [13]:

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon d\Omega < \infty \quad (2.8)$$

Задача (в дифференциальной постановке) состоит в определении полей перемещений $\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{x})$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{x})$, $n = 1, N$, удовлетворяющих уравнениям (2.2), граничным условиям (2.3)–(2.6), уравнениям равновесия штампа (2.7) и условию (2.8). Также необходимо найти смещение δ_2 и поворот φ_3 штампа. Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче одностороннего дискретного контакта априори задается лишь номинальная область контакта Γ_p , положение и размеры пятен фактического контакта заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи.

3. Интегральное представление решения. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для стратифицированной упругой полосы Ω : найти поля перемещений $\mathbf{u}^{(n)}$, $n = 1, N$, удовлетворяющие уравнениям (2.2), граничным условиям (2.3), (2.4) и (2.6), условию (2.8), а также граничным условиям

$$\sigma_{21} = 0, \sigma_{22} = q \text{ на } \Gamma_p$$

Из результатов [13–16] следует, что если выполняются условия (2.1), то для любого $q \in L_2(\Gamma_p)$ данная задача имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_p} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1; \mathbf{x} \in \Omega_n, n = \overline{1, N}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \xi_1)$ – ядро интегрального представления, которое может быть интерпретировано как поле перемещений – решение краевой задачи о действии нормальной сосредоточенной единичной силы, приложенной в точке $\mathbf{x} = (\xi_1, h)$ границы Γ_p стратифицированной упругой полосы Ω .

Решение (3.2) вспомогательной краевой задачи удовлетворяет всем условиям сформулированной в разд. 2 задачи одностороннего дискретного контакта, кроме условий одностороннего гладкого контакта (2.5) и условий равновесия штампа (2.7). Поэтому использование интегрального представления (3.1) позволяет свести решение рассматриваемой контактной задачи к нахождению на Γ_p нормальных напряжений $q = \sigma_{22} \in L_2(\Gamma_p)$, удовлетворяющих следующей системе уравнений и неравенств:

$$q \leq 0 \text{ на } \Gamma_p \quad (3.2)$$

$$u_2(q) \leq \Phi + \delta_2 + (x_1 - x_1^c)\varphi_3 \text{ на } \Gamma_p \quad (3.3)$$

$$q[u_2(q) - \Phi - \delta_2 - (x_1 - x_1^c)\varphi_3] = 0 \text{ на } \Gamma_p \quad (3.4)$$

$$\int_{\Gamma_p} q d\Gamma_p = F_2, \int_{\Gamma_p} (x_1 - x_1^c) q d\Gamma_p = M_3, \quad (3.5)$$

где $u_2(q)$ – нормальные перемещения на Γ_p , соответствующие нормальным напряжениям q .

4. Оператор Пуанкаре–Стеклова. Для решения системы (3.2)–(3.5) построим ОПС $S_{ps} : q \mapsto w$, отображающий посредством решения (3.1) нормальные напряжения $q(x_1) \equiv \sigma_{22}(x_1, h)$ на части Γ_p границы упругой полосы в нормальные перемещения $w(x_1) \equiv u_2(x_1, h)$ на Γ_p .

Соответствующее решению (3.1) представление ОПС $S_{ps} : q \mapsto w$ для $q \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид:

$$w(x_1) = \int_{\Gamma_p} g_{ps}(x_1 - \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1 \quad (4.1)$$

Выражение в явном виде ядра $g_{ps}(\cdot)$ интегрального представления (4.1) для произвольной стратифицированной упругой полосы неизвестно. Правая часть (4.1) является интегральным оператором типа свертки, поэтому с помощью интегрального преобразования Фурье по координате x_1 можно получить алгебраическое соотношение, связывающее трансформанты нормальных перемещений $\tilde{w}(\alpha)$ и нормальных напряжений $\tilde{q}(\alpha)$

$$\tilde{w}(\alpha) = \tilde{g}_{ps}(\alpha)\tilde{q}(\alpha), \quad (4.2)$$

где α – параметр преобразования Фурье, $\tilde{g}_{ps}(\alpha)$ – трансформанта ядра интегрального представления (4.1). Таким образом действие ОПС S_{ps} сводится к выполнению прямого и обратного преобразований Фурье и перемножению трансформант.

5. Передаточная функция оператора Пуанкаре–Стеклова. Функцию $\tilde{g}_{ps}(\alpha)$, следуя [17], будем называть передаточной функцией. В случае однородной полосы выражение для передаточной функции может быть получено аналитически [13]. Для функционально-градиентной полосы эту функцию удастся построить с помощью численно-аналитической методики при специальной зависимости ее упругих свойств по толщине, в частности степенной или экспоненциальной зависимости [4]. В случае произвольного закона изменения упругих свойств по толщине используются приближенные подходы, основанные как на прямом численном интегрировании краевых задач для систем дифференциальных уравнений по поперечной координате [15, 17], так и на замене неоднородной полосы многослойной с кусочно-постоянной зависимостью упругих модулей от координаты и сведении задачи к решению систем функциональных уравнений [16].

Вычислительные проблемы, возникающие при реализации таких подходов, обусловлены наличием экспоненциальных составляющих у фундаментальных решений соответствующих систем дифференциальных уравнений. Это приводит к плохой обусловленности систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при удовлетворении граничных условий, и к неустойчивости численных процедур решения задач Коши и их дискретных аналогов. Распространенным способом преодоления указанных трудностей является выделение в явном виде экспоненциальных составляющих, в результате чего проблема сводится к отысканию функций ограниченной вариации. Такой способ лежит в основе метода модулирующих функций [18].

В настоящей работе для построения передаточной функции применялся альтернативный подход [12], опирающийся на использование вариационной формулировки краевой задачи для трансформант перемещений. Аппроксимация вариационных уравнений производилась методом конечных элементов. Для численного решения задачи использован нестационарный итерационный метод, на каждом шаге которого методом прогонки решались две системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Разработан алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимости для любых значений параметра преобразования Фурье α .

В [12] проведена верификация разработанного вычислительного алгоритма для непрерывно-неоднородных полос, параметры Ламе материала которой являлись экспоненциальными функциями, и кусочно-однородных полос с полностью сцепленными слоями. Также в [12] даны рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток.

При решении задач дискретного контакта требуется вычислять значения передаточной функции ОПС в достаточно широком диапазоне изменения параметра преобразования Фурье α [8]. С целью уменьшения вычислительных затрат в настоящей работе для больших значений параметра α применялся алгоритм, использующий

полученное в [19] трехчленное асимптотическое разложение передаточной функции и построенные на его основе аппроксимации Паде.

6. Вариационная формулировка задачи. Для решения системы (3.2)–(3.5), содержащей уравнения и неравенства, используется вариационный подход [9]. Введем необходимые для построения вариационных формулировок задачи функциональные пространства – гильбертов триплет $H^{1/2}(\Gamma_p) \subset L_2(\Gamma_p) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ [8]. Учитывая плотность вложения $L_2(\Gamma_p) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, ОПС S_{ps} , определенный формулой (4.1), можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и аналогично [8] рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ отношение двойственности ${}_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_p)}$, порожденное продолжением скалярного произведения в $L_2(\Gamma_p)$. Введем на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ непрерывные билинейную и линейную формы

$$a(p, q) = \langle p, G_{ps} q \rangle, b(p) = \langle p, \Phi \rangle,$$

предполагая, что $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p)$. Аналогично [8] можно показать, что если выполняются условия (2.1), то билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является симметричной и коэрцитивной на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$.

Образует множество статически допустимых нормальных напряжений на Γ_p

$$V = \left\{ p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) : p \leq 0; \langle p, 1 \rangle = F_2; \langle p, x_1 - x_1^c \rangle = M_3 \right\} \quad (6.1)$$

Нетрудно видеть, что множество V является замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$. Кроме того, в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями это множество является непустым.

Аналогично [8] можно показать, что решение $q \in L_2(\Gamma_p)$ системы (3.2)–(3.5) удовлетворяет граничному вариационному неравенству: найти $q \in V$ такой, что

$$a(p - q, q) - b(p - q) \geq 0 \quad \forall p \in V \quad (6.2)$$

Отметим, что неравенство (6.2) не содержит неизвестных смещения δ_2 и угла поворота φ_3 жесткого штампа. Как показано в [8], это является следствием того, что элементы множества статически допустимых нормальных напряжений V удовлетворяют уравнениям равновесия штампа (3.5).

Используя известные приемы [9,20,21], можно доказать обратное утверждение: решение q вариационного неравенства (6.2) удовлетворяет системе уравнений и неравенств (3.2)–(3.5) по крайней мере в обобщенном смысле, т.е. условия (3.2) и (3.4) выполняются в смысле пространства $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, условие (3.3) выполняется в смысле пространства $H^{1/2}(\Gamma_p)$, а условия (3.5) – после продолжения по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$:

$$\langle q, 1 \rangle = F_2, \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = M_3$$

Учитывая, что билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является положительно определенной, а множество V – непустым замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, вариационное неравенство (6.2) эквивалентно задаче минимизации граничного функционала: найти $q \in V$ такой, что

$$J(q) = \inf_{p \in V} \{ J(p) = a(p, p) / 2 - b(p) \} \quad (6.3)$$

Кроме того, решение вариационного неравенства (6.2) и задачи минимизации (6.3) существует и единственно [9,21].

7. Конечномерная аппроксимация задачи. Выбор метода аппроксимации задачи (6.3) определяется, в первую очередь, возможностью построения эффективной с вычислительной точки зрения аппроксимации ОПС (4.1). Из (4.2) следует, что действие ОПС сводится к выполнению пары (прямого и обратного) преобразований Фурье и перемножению трансформант. Использование преобразования Фурье наиболее эффективно в случае периодических функций благодаря дискретности их спектра и, как следствие, переходе от непрерывного преобразования к дискретному. Учитывая, что для стратифицированной полосы передаточная функция ОПС строится численно, основная идея используемого подхода состоит в аппроксимации искомых нормальных напряжений периодическими сеточными функциями и применении алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Для уменьшения возникающей при этом ошибки периодичности [22, 23] вводится расширенная вычислительная область $\Gamma_c \subset \Gamma_N$ такая, что

$$\Gamma_p \Subset \Gamma_c, \quad D = \text{diam } \Gamma_c = k_c \text{ diam } \Gamma_p; \quad k_c \in \mathbb{N}, \quad k_c > 1, \quad (7.1)$$

где k_c – коэффициент расширения вычислительной области.

Построим на Γ_c регулярную (равномерную) сетку T_c , состоящую из M одноузловых граничных элементов нулевого порядка размером $\delta_c = D / M$. Узлы T_c обозначим $t_m, m = 1, M$. Часть T_c , расположенную на Γ_p и содержащую L элементов, обозначим T_p . Из (7.1) следует, что $L = M / k_c$.

Далее векторы и матрицы будем обозначать большими латинскими буквами, а их элементы – соответствующими малыми латинскими буквами.

Введем на T_c сеточные функции нормальных напряжений и перемещений

$$\mathbf{Q}_c = (q(t_1), q(t_2), \dots, q(t_M)), \quad \mathbf{W}_c = (w(t_1), w(t_2), \dots, w(t_M)),$$

а также редукции этих функций на T_p

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{R}\mathbf{Q}_c, \quad \mathbf{W}_p = \mathbf{R}\mathbf{W}_c,$$

где \mathbf{R} – прямоугольная матрица размеров $L \times M$, в каждой строке которой имеется равно один ненулевой элемент, равный единице.

Обратные операции тривиального продолжения (дополнения нулевыми элементами) \mathbf{Q}_p и \mathbf{W}_p на T_c могут быть выполнены с помощью транспонированной матрицы \mathbf{R}^T

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_p, \quad \mathbf{W}_c = \mathbf{R}^T \mathbf{W}_p$$

Введем матрицу Фурье порядка M

$$\mathbf{F} = [f_{mk}], \quad f_{mk} = \omega^{(m-1)(k-1)}, \quad \omega = \exp(-2\pi i / M)$$

Матрица Фурье обратима и при этом обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^* / M,$$

где \mathbf{F}^* – эрмитово сопряженная матрица.

Используя матрицу \mathbf{F} , вычислим образы Фурье $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ соответственно сеточных функций нормальных напряжений и перемещений

$$\tilde{\mathbf{Q}}_c = (\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{M-1}) = \mathbf{F}\mathbf{Q}_c = \mathbf{F}\mathbf{R}^T \mathbf{Q}_p \quad (7.2)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_c = (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{M-1}) = \mathbf{F}\mathbf{W}_c = \mathbf{F}\mathbf{R}^T \mathbf{W}_p \quad (7.3)$$

Сеточные функции \mathbf{Q}_c и \mathbf{W}_c являются вещественными, поэтому из свойств ДПФ следует, что компоненты $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ удовлетворяют условиям

$$\tilde{q}_{M-m} = \tilde{q}_m^*, \quad \tilde{w}_{M-m} = \tilde{w}_m^*; \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (7.4)$$

Для сеточных функций соотношение (4.2) примет вид

$$\tilde{\mathbf{W}}_c = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{Q}}_c; \quad \tilde{\mathbf{G}} = \text{diag}(\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{M-1}), \quad (7.5)$$

где с учетом (7.4) для четных M

$$\tilde{g}_0 = \tilde{g}_{ps}(0) = \int_0^h \frac{dx_2}{\lambda(x_2) + 2\mu(x_2)}, \quad \tilde{g}_m = \tilde{g}_{M-m} = \tilde{g}_{ps}(2\pi m / D); \quad m = 1, 2, \dots, M/2$$

Несложно показать, что \tilde{g}_0 представляет собой коэффициент податливости рассматриваемой стратифицированной упругой полосы для случая приложения равномерной нормальной нагрузки по всей границе Γ_N .

Из (7.2), (7.3) и (7.5) следует, что сеточная аппроксимация интегрального представления (4.1), определяющего ОПС S_{ps} , имеет вид

$$\mathbf{W}_p = \mathbf{S}\mathbf{Q}_p, \quad (7.6)$$

где

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{F}^* \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{F}\mathbf{R}^T / M \quad (7.7)$$

Матрица \mathbf{S} является квадратной матрицей порядка L . Для вычисления произведения этой матрицы на вектор формировать ее в явном виде не требуется, достаточно программно реализовать вычисление произведений каждой из матриц в правой части (7.7) на векторы. Учитывая, что матрицы \mathbf{R} и \mathbf{R}^T содержат только L ненулевых элементов равных 1, вычисление произведений этих матриц на векторы сводится к выполнению L операций присваивания. Умножение диагональной матрицы $\tilde{\mathbf{G}}$ на вектор требует выполнения M операций умножения. Для вычисления произведений матриц \mathbf{F} и \mathbf{F}^* на векторы целесообразно использовать алгоритмы БПФ. Поэтому далее будем полагать $M = 2^m, m \in \mathbb{N}$. В этом случае число операций для выполнения одного преобразования имеет порядок $O(Mm) = O(M \log_2 M)$.

Аппроксимация задачи минимизации (6.3) производится с помощью гранично-элементного подхода. Для вычисления билинейной $a(\cdot, \cdot)$ и линейной $b(\cdot)$ форм используется квадратурная формула прямоугольников, узлы которой совпадают с узлами сетки T_p . Тем самым определяются аппроксимирующие билинейная $a_1(\cdot, \cdot)$ и линейная $b_1(\cdot)$ формы в пространстве \mathbb{R}^L

$$a_1(\mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{P}_p^T \mathbf{S} \mathbf{Q}_p \delta_e, \quad b_1(\mathbf{P}_p) = \Phi^T \mathbf{P}_p \delta_e,$$

где $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_L)^T$ – сеточная аппроксимация на T_p функции $\Phi(x_1)$, описывающей форму основания штампа.

При аппроксимации множества статически допустимых нормальных напряжений V , определенного формулой (6.1), применяется комбинированный подход. Для аппроксимации ограничений в виде неравенств используется коллокационный метод, а при аппроксимации ограничений в виде равенств – квадратурная формула прямоугольников, узлы которой совпадают с узлами сетки T_p . В результате получается замкнутое выпуклое множество статически допустимых узловых нормальных напряжений

$$V_1 = \left\{ \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^L : q_i \leq 0, i = \overline{1, L}; \sum_{i=1}^L \theta_i q_i = F_2; \sum_{i=1}^L \vartheta_i q_i = M_3 \right\}$$

Коэффициенты λ_i и ϑ_i вычисляются по формулам

$$\theta_i = \delta_e, \quad \vartheta_i = \delta_e(x_1^i - x_1^c); \quad i = \overline{1, L},$$

где x_1^i — координата узла t_i сетки T_p .

В результате для задачи минимизации (6.3) получим сеточную аппроксимацию — задачу квадратичного программирования: найти сеточную функцию нормальных напряжений $\mathbf{Q}_p \in \mathbb{R}^L$ такую, что

$$J_1(\mathbf{Q}_p) = \min_{\mathbf{Q} \in V} \{ J_1(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{S} \mathbf{Q} \delta_e / 2 - \Phi^T \mathbf{Q} \delta_e \} \quad (7.8)$$

Отметим, что размерность задачи (7.8) равна L — количеству узлов сетки на Γ_p и не зависит от размера вычислительной области Γ_c , т.е. от выбора коэффициента расширения вычислительной области k_c .

Для численного решения задачи квадратичного программирования (7.8) в настоящей работе использовался алгоритм на основе метода сопряженных градиентов, предложенный в [24] при решении задач одностороннего дискретного контакта для упругой полуплоскости. В [8] этот алгоритм применялся при решении задач одностороннего дискретного контакта для однородной упругой полосы. Следует отметить, что алгоритм [24] позволяет вычислять не только сеточную функцию нормальных напряжений $\mathbf{Q}_p \in \mathbb{R}^L$, но и смещение δ_2 и угол поворота φ_3 жесткого штампа.

8. Апостериорный анализ численных решений. Для оценки погрешности выполнения сеточных аппроксимаций условий (3.2)–(3.5) использовался следующий набор параметров:

$$\varepsilon_q = \max_{1 \leq i \leq L} q_i / q_{nom}, \quad \varepsilon_f = \left| \sum_{i=1}^L \theta_i q_i - F_2 \right| / |F_2|, \quad \varepsilon_m = \left| \sum_{i=1}^L \vartheta_i q_i - M_3 \right| / |M_3| \text{ для } M_3 \neq 0$$

$$\varepsilon_{z_p} = \min_{1 \leq i \leq L} z_i [q_i \geq 0]_a / |\delta_2|, \quad \varepsilon_{z_m} = \max_{1 \leq i \leq L} z_i [q_i < 0]_a / |\delta_2|,$$

где $q_{nom} = F_2 / \text{diam } \Gamma_p$ — средние (номинальные) контактные напряжения; $z_i = \phi_i + \delta_2 + (x_1^i - x_1^c) \varphi_3 - w_i$ — конечный зазор (проникание) между упругой полосой и штампом в узле t_i сетки T_p ; w_i — нормальное перемещение узла t_i сетки T_p ; $[\cdot]_a$ — скобка Айверсона (функция, равная 1 для истинного аргумента и равная 0 в противном случае). Сеточная функция нормальных перемещений $\mathbf{W}_p = (w_1, w_2, \dots, w_L)$, соответствующих решению \mathbf{Q}_p задачи квадратичного программирования (7.8), вычислялась с помощью (7.6).

9. Численные результаты. Разработанный вычислительный алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для стратифицированной упругой полосы реализован на языке FORTRAN с применением NVIDIA HPC SDK. Для выполнения БПФ использовалась библиотека cuFFT, позволяющая с помощью технологии CUDA производить вычисления на графических процессорах.

При верификации алгоритма и разработанного программного обеспечения использовалась рассмотренная в [8] тестовая задача о вдавливании в упругую полосу штампа, форма основания которого описывается квадратичной функцией. Проведено сравнение решений для случаев наличия и отсутствия момента внешних сил, приложенных к штампу, относительно точки начального контакта. Полученные численные результаты соответствуют аналитическим выводам, приведенным в [8].

Также проведено сравнение численных решений рассмотренных ниже задач дискретного контакта для штампов с регулярным поверхностным микрорельефом с решениями, полученными с помощью известного алгоритма [25]. Учитывая возможности последнего, при постановке контактных задач использовалось лишь первое из

уравнений равновесия штампа (2.7) и полагалось $\varphi_3 = 0$. Выполненные расчеты показали, что при проведении вычислений с двойной точностью среднеквадратичные относительные расхождения решений (сеточных функций нормальных напряжений) не превышают 10^{-7} .

Получены численные решения ряда задач одностороннего дискретного контакта для стратифицированных упругих полос, в частности, для четырех полос, состоящих из $N = 10$ одинаковых слоев, модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν которых изменялись по одному из следующих законов:

$$E(\xi_2) = E_1 + (E_2 - E_1)\xi_2^2, \nu(\xi_2) = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)\xi_2$$

$$E(\xi_2) = E_1 + (E_2 - E_1)\xi_2^4, \nu(\xi_2) = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)\xi_2^2$$

$$E(\xi_2) = E_2 + (E_1 - E_2)\xi_2^2, \nu(\xi_2) = \nu_2 + (\nu_1 - \nu_2)\xi_2$$

$$E(\xi_2) = E_2 + (E_1 - E_2)\xi_2^4, \nu(\xi_2) = \nu_2 + (\nu_1 - \nu_2)\xi_2^2,$$

где $\xi_2 = \{Nx_2 / h\}$ – «быстрая» координата, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа; $E_1 = E^*$; $E_2 = 4E^*$; $\nu_1 = 0.4$; $\nu_2 = 0.1$; E^* – масштабный множитель (размерная величина, МПа). Графики приведенных выше функций $E(\xi_2)$ и $\nu(\xi_2)$ изображены соответственно на рис. 1, а, б. Номера кривых 1–4 соответствуют номерам стратифицированных полос.

Далее приведен анализ результатов решения задач дискретного контакта для гладких штампов с регулярным поверхностным микрорельефом, состоящим из K микровыступов. Номинальная область контакта полагалась равной $\Gamma_p = \{0 \leq x_1 \leq d, x_2 = h\}$. Форма основания штампов задавалась функцией [8]

$$\Phi(x_1) = \Phi_1(x_1) + \Phi_2(\xi_1) / K, \tag{9.1}$$

где $\Phi_1(x_1)$ – выпуклая функция, определяющая макроформу штампа; $\Phi_2(\xi_1)$ – строго выпуклая функция, характеризующая форму микровыступов; $\xi_1 = \{Kx_1 / d\}$ – «быстрая» координата. Для заданной пары функций $\Phi_1(x_1)$ и $\Phi_2(\xi_1)$ формула (9.1) определяет однопараметрическое семейство штампов $\Xi(K)$, в качестве параметра которого выступает число микровыступов K . Штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу, а их микровыступы являются подобными.

Расчеты выполнялись для семейства жестких штампов, макроформа и поверхностный микрорельеф которых описывались соответственно функциями:

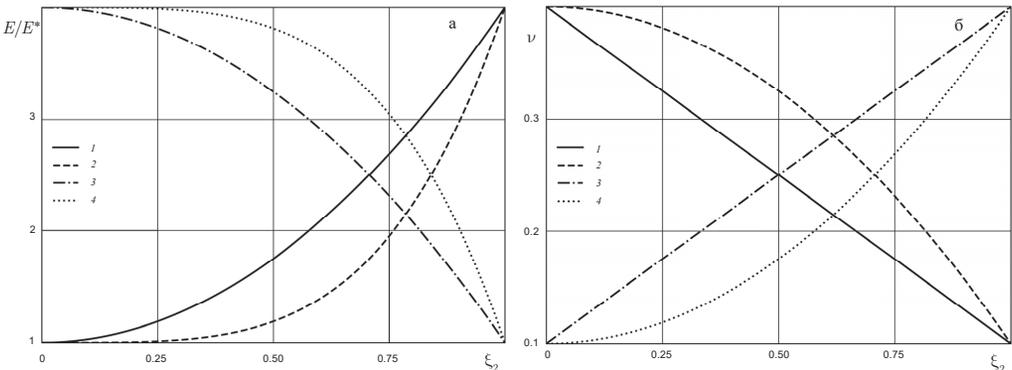


Рис. 1

$$\Phi_1(x_1) = \beta_1 d(2x_1 / d - 1)^{m_1}, \Phi_2(\xi_1) = \beta_2 d(2\xi_1 - 1)^{m_2},$$

где $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 > 0$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ – безразмерные параметры.

Нормальная компонента главного вектора (погонная сила) и главный момент внешних сил, приложенных к штампу, задавались в виде:

$$F_2 = -fE^*d, M_3 = eF_2d,$$

где f – безразмерный параметр внешней нагрузки; e – безразмерный параметр, характеризующий эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки относительно центра приведения $x^c = (0.5d, h)$.

Необходимое количество L граничных элементов на Γ_p определялось путем сравнения решений, полученных на вложенных сетках при их двукратном последовательном измельчении. При решении задач для семейства штампов $\Xi(K)$ каждый микровыступ аппроксимировался на сетке из 256 граничных элементов. Наибольшее общее количество элементов сетки для штампа с $K = 4096$ микровыступами составило $L = 2^{20} = 1048576$ элементов.

Установлен ряд закономерностей процесса вдавливания штампов семейства $\Xi(K)$ в упругую полосу. Рассмотрим процесс вдавливания в полосу штампа, имеющего K микровыступов, при изменении параметра внешней нагрузки f в интервале $[0, f^*]$ и проведем численный анализ зависимости от этого параметра следующих характеристик контактного взаимодействия: относительной фактической площади контакта

$$s \equiv \int_{\Gamma_p} [\sigma_{22} > 0]_a d\xi_1 / d = B_K^1(f)$$

осадки штампа $\delta_2 = B_K^2(f)$; угла поворота штампа $\varphi_3 = B_K^3(f)$.

Введем на $[0, f^*]$ равномерную сетку $T_f = \{f_m = m\Delta f, \Delta f = f^* / M_f\}$ и сеточные функции $B_K^i = R_f B_K^i, i = 1, 2, 3$, где R_f – оператор ограничения на сетку T_f . Для вычисления сеточных функций производилось пошаговое нагружение штампа. При проведении расчетов полагалось, что $M_f = 128$.

В ходе вычислительных экспериментов наблюдалась сходимость последовательностей сеточных функций $B_K^i; i = 1, 2, 3$, при увеличении количества микровыступов K . В качестве примера для семейства штампов $\Xi(K)$, определяемого набором параметров ($\beta_1 = 3 \cdot 10^{-5}$, $\beta_2 = 10^{-4}$, $m_1 = m_2 = 4$), в табл. 1 приведены относительные среднеквадратичные расхождения

Таблица 1. Относительные среднеквадратичные расхождения $\tilde{\varepsilon}_i = 10^5 \varepsilon_i$

$\tilde{\varepsilon}_i$	Номер полосы	Количество микровыступов K							
		16	32	64	128	256	512	1024	2048
$\tilde{\varepsilon}_1$	1	5218	2790	1477	788	414	206	94	33
	2	8049	4020	2074	1078	543	266	122	42
	3	5209	3008	1635	827	397	183	79	28
	4	8116	5649	3481	1942	997	478	211	71
$\tilde{\varepsilon}_2$	1	1781	825	399	193	93	43	18	6
	2	1659	756	354	169	81	37	16	5
	3	3945	2202	1170	599	296	139	60	20
	4	3844	2211	1212	637	320	152	66	22
$\tilde{\varepsilon}_3$	1	3936	1790	848	409	196	91	39	12
	2	3687	1688	769	365	174	80	34	11
	3	7125	3959	2092	1070	528	249	107	35
	4	6973	3969	2145	1123	563	268	116	38

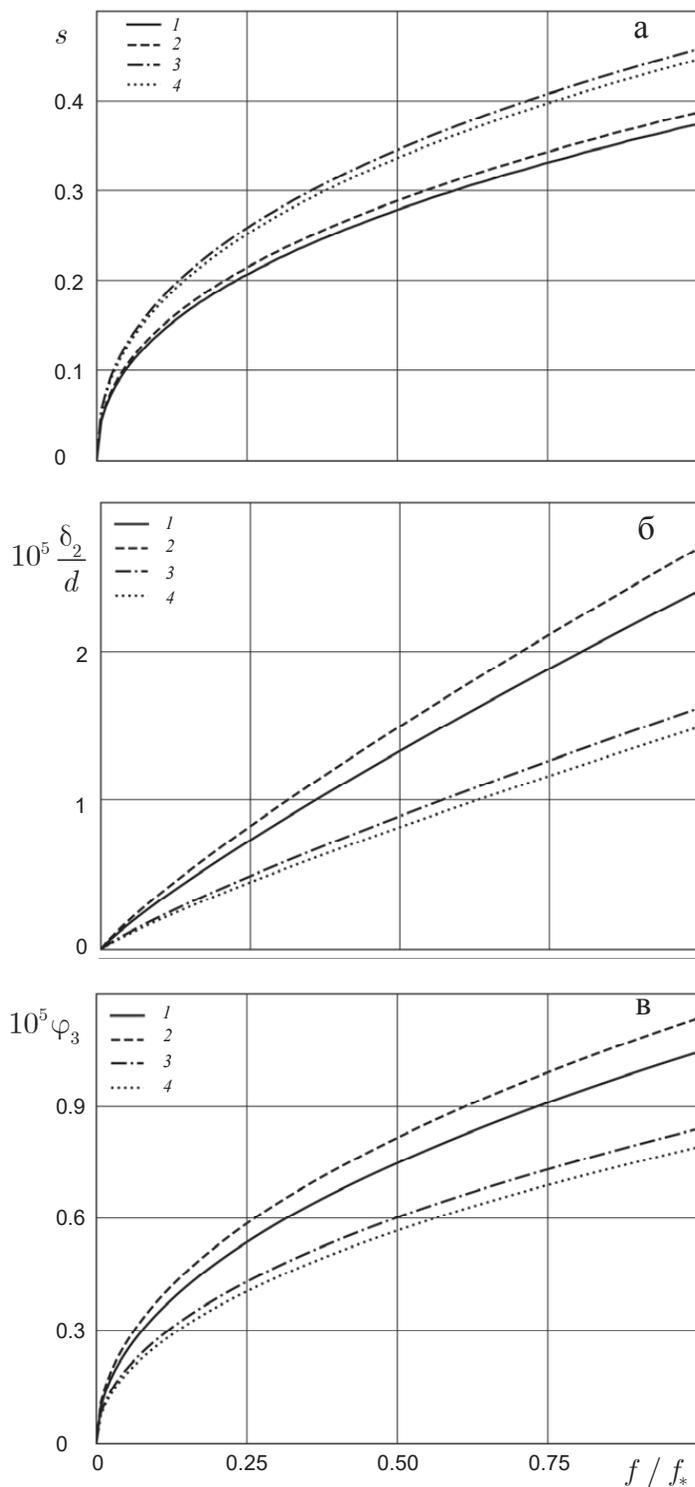


Рис. 2

$$\varepsilon_i = \left\| \mathbf{B}_K^i - \mathbf{B}_Q^i \right\|_2 / \left\| \mathbf{B}_Q^i \right\|_2; i = 1, 2, 3,$$

где $Q = 4096$ – максимальное количество микровыступов в серии расчетов. Значения параметров внешней нагрузки задавались следующими: $f = 5 \cdot 10^{-5}$, $e = 0.05$. Толщина полосы полагалась равной $h = d$. Коэффициент расширения вычислительной области принимался равным $k_c = 16$.

Графики зависимостей $s = B_Q^1(f)$, $\delta_2 = B_Q^2(f)$ и $\varphi_3 = B_Q^3(f)$ для $Q = 4096$ приведены соответственно на рис. 2, а–в. Номера кривых 1–4 соответствуют номерам стратифицированных упругих полос, параметры которых были указаны выше.

На основании результатов вычислительных экспериментов можно предположить существование для рассмотренного семейства штампов $\Xi(K)$ предельных кривых $s = B^1(f)$, $\delta_2 = B^2(f)$ и $\varphi_3 = B^3(f)$.

Заключение. Разработанный подход к решению задач одностороннего дискретного контакта для стратифицированной упругой полосы может быть обобщен на случай пространственной задачи для стратифицированного упругого слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погребняк А.Д., Лозован А.А., Кирик Г.В. и др. Структура и свойства нанокompозитных, гибридных и полимерных покрытий. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 344 с.
2. Горячева И.Г. Механика трения взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
3. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб: Политехника, 2003. 233 с.
4. Barber J.R. Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. Торская Е.В. Модели трения взаимодействия тел с покрытиями. М.;Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2020. 296 с.
6. Goryacheva I., Makhovskaya Yu. Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology. Amsterdam: Elsevier, 2022. 209 p.
7. Горячева И.Г., Цуканов И.Ю. Развитие механики дискретного контакта с приложениями к исследованию трения взаимодействия деформируемых тел // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 6. С. 757–789.
8. Бобылев А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 3. С. 404–423.
9. Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J. Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.
10. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. 518 p.
11. Yastrebov V.A. Numerical Methods in Contact Mechanics. New York: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
12. Бобылев А.А. Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой полосы // Диффер. ур-я. 2023. Т. 59. № 1. С. 115–129.
13. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
14. Айзикович С.М. Статические контактные задачи для неоднородного по глубине основания // в кн.: Механика контактных взаимодействий. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 199–213.
15. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В. и др. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 236 с.
16. Никишин В.С. Статические контактные задачи для многослойных тел // в кн.: Механика контактных взаимодействий. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 214–233.
17. Ватульян А.О., Плотников Д.К. К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 3. С. 283–293.
18. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства // ЖВММФ. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.

19. *Бобылев А.А.* О вычислении передаточной функции оператора Пуанкаре–Стеклова для функционально-градиентной упругой полосы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 5. С. 52–60.
20. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 252 с.
21. *Eck C., Jarušek J., Krbeč M.* Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. Boca Raton: CRC Press, 2005. 398 p.
22. *Wang Q.J., Zhu D.* Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication. Boca Raton: CRC Press, 2019. 636 p.
23. *Wang Q.J., Sun L., Zhang X. et al.* FFT-based methods for computational contact mechanics // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. № 61. P. 92–113.
24. *Бобылев А.А.* Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 135–153.
25. *Polonsky I.A., Keer L.M.* A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // Wear. 1999. V. 231. № 2. P. 206–219.

A Unilateral Discrete Contact Problem for a Stratified Elastic Strip

A. A. Bobylev^{a,b,#}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b*Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: abobylov@gmail.com*

The problem is considered for the indentation of a stratified elastic strip by a rigid punch of finite dimension with a surface microrelief. Boundary variational formulations of the problem are given using the Poincaré–Steklov operator that maps normal stresses to normal displacements. To approximate this operator the discrete Fourier transform is used. The fast Fourier transform algorithms are applied for numerical realization. A variational formulation of a boundary value problem for transforms of displacements is used to calculate a transfer function. A quadratic programming problem with equality and inequality restrictions is obtained by approximating the original contact problem. To solve this problem numerically an algorithm based on the conjugate gradient method is used. Some regularities of contact interaction have been established.

Keywords: unilateral discrete contact, stratified elastic strip, boundary variational inequality, Poincaré–Steklov operator, Fourier transform, conjugate gradient method

REFERENCES

1. *Pogrebnyak A.D., Lozovan A.A., Kirik G.V. et al.* Structure and Properties of Nanocomposite, Hybrid and Polymer Coatings. Moscow: LIBROKOM, 2011. 344 p. (in Russian)
2. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Springer, 1998. 346 p.
3. *Argatov I.I., Dmitriev N.N.* Fundamentals of the Theory of Elastic Discrete Contact. St. Petersburg: Polytechnics, 2003. 233 p. (in Russian)
4. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. *Torskaya E.V.* Models of Friction Interaction of Bodies with Coatings. Moscow; Izhevsk: Inst. Komp'yut. Issled., 2020. 296 p.
6. *Goryacheva I., Makhovskaya Yu.* Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology. Amsterdam: Elsevier, 2022. 209 p.
7. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 1441–1462.
8. *Bobylev A.A.* Algorithm for solving discrete contact problems for an elastic strip // Mech. Solids, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1766–1780.
9. *Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J.* Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.

10. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. 518 p.
11. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. N.Y.: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
12. *Bobylev A.A.* Numerical construction of the transform of the kernel of the integral representation of the Poincaré–Steklov operator for an elastic strip // *Differ. Eqns.*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 119–134.
13. *Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A.* Nonclassical Mixed Problems of the Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1974. 456 p. (in Russian)
14. *Aizikovich S.M.* Statical contact problems for a depth-inhomogeneous base // in: *Mechanics of Contact Interaction*. Moscow: FIZMATLIT, 2001. pp. 199–213. (in Russian)
15. *Aizikovich S.M., Aleksandrov V.M., Belokon' A.V. et al.* Contact Problems of the Elasticity Theory for Inhomogeneous Media. Moscow: FIZMATLIT, 2006. 236 p. (in Russian)
16. *Nikishin V.S.* Statical contact problems for multilayer elastic bodies // in: *Mechanics of Contact Interaction*. Moscow: FIZMATLIT, 2001. pp. 214–233. (in Russian)
17. *Vatulyan A.O., Plotnikov D.K.* On a Study of the Contact Problem for an Inhomogeneous Elastic Strip // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1379–1387.
18. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V.* Methods of Constructing Green's Matrix of a Stratified Elastic Half-Space // *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1987, vol. 27, no. 1, pp. 60–65.
19. *Bobylev A.A.* Computing a transfer function of the Poincaré–Steklov Operator for a functionally graded elastic strip // *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2023, vol. 78, no. 5, pp. 134–142.
20. *Khludnev A.M.* Elasticity Problems in Non-Smooth Domains. Moscow: FIZMATLIT, 2010. 252 p. (in Russian)
21. *Eck C., Jarušek J., Krbeč M.* Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. Boca Raton: CRC Press, 2005. 398 p.
22. *Wang Q.J., Zhu D.* Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication. Boca Raton: CRC Press, 2019. 636 p.
23. *Wang Q.J., Sun L., Zhang X. et al.* FFT-based methods for computational contact mechanics // *Front. Mech. Eng.*, 2020, vol. 6, no. 61, pp. 92–113.
24. *Bobylev A.A.* Application of the conjugate gradient method to solving discrete contact problems for an elastic half-plane // *Mech. of Solids*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 317–332.
25. *Polonsky I.A., Keer L.M.* A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // *Wear*, 1999, vol. 231, no. 2, pp. 206–219.