

ISSN 0032-8235

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

---

# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 87, вып. 2



МОСКВА 2023

# Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 87. Iss. 2

---

## EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),  
**N.N. Bolotnik** (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**F.M. Borodich** (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),  
**A.B. Freidin** (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),  
**A.M. Gaifullin** (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),  
**M.L. Kachanov** (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),  
**Ju.D. Kaplunov** (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),  
**A.A. Korobkin** (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),  
**A.M. Kovalev** (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Russia),  
**V.V. Kozlov** (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),  
**A.M. Krivtsov** (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),  
**A.G. Kulikovskii** (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),  
**Yu.Yu. Makhovskaya** (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**N.F. Morozov** (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),  
**T.J. Pedley** (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),  
**F. Pfeiffer** (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),  
**V.V. Pukhnachev** (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, RAS, Novosibirsk, Russia),  
**G. Rega** (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),  
**S.A. Reshmin** (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**V.A. Sabelnikov** (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),  
**Ye.I. Shifrin** (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**F.E. Udwardia** (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),  
**S.E. Yakush** (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**V.F. Zhuravlev** (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**K. Zimmermann** (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, S.V. Nesterov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

---

March–April

*Учредитель:* РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

*Редакция:*

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

*Адрес редакции:* 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

*Телефон редакции:* 8 (495) 434-21-49

*E-mail:* pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

*URL:* <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

---

Founder: Russian Academy of Sciences

*The Editorial Staff:*

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

*The Editorial Board Address:* 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

*Phone:* 8 (495) 434-21-49

*E-mail:* pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

*URL:* <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Андрей Геннадьевич Куликовский (к 90-летию со дня рождения)	115
Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля и изохронных производных <i>Ю. Н. Челноков, Я. Г. Сапунков, М. Ю. Логинов, А. Ф. Щекутьев</i>	124
Асимптотики длинных стоячих волн в одномерных бассейнах с пологими берегами: теория и эксперимент <i>С. Ю. Доброхотов, В. А. Калиниченко, Д. С. Миненков, В. Е. Назайкинский</i>	157
Решения некоторых волновых моделей механики <i>О. В. Капцов, Д. О. Капцов</i>	176
Уединенные волны в двухслойной жидкости с кусочно-экспоненциальной стратификацией <i>Н. И. Макаренко, Ж. Л. Мальцева, А. А. Черевко</i>	186
Тепловая конвекция двух несмешивающихся жидкостей в трехмерном канале с полем скоростей специального вида <i>В. К. Андреев, Е. Н. Лемешкова</i>	200
Термодинамически согласованная гиперболическая модель двухфазного течения сжимаемых жидкостей с учетом поверхностного натяжения <i>Е. И. Роменский, И. М. Пешков</i>	211
Структура течения в трехмерной пристенной турбулентной струе <i>А. М. Гайфуллин, А. С. Щеглов</i>	226
Волны седиментации в двухфазной гранулированной жидкости <i>В. В. Шелухин, В. В. Неверов</i>	240
К теории ударных волн в изотропно упрочняющихся пластических средах <i>В. М. Садовский</i>	254
Упругие волны, захваченные полубесконечной полосой с защемленными боковыми сторонами и изломанным торцом <i>С. А. Назаров</i>	265
Моделирование динамического термоупруговязкопластического деформирования гибких пологих армированных оболочек <i>А. П. Янковский</i>	280
О контактной задаче с деформируемым штампом в четверти плоскости <i>В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко, М. В. Зарецкая, В. С. Евдокимов</i>	303
К теории метода “эхоскопии” призабойной зоны скважины в низкопроницаемом пласте, подверженном ГРП <i>Р. А. Башмаков, Э. В. Галиакбарова, З. Р. Хакимова, В. Ш. Шагапов</i>	314
Собственные частоты и формы продольных и крутильных колебаний стержней переменного поперечного сечения <i>И. С. Никитин, Н. Г. Бураго, А. Д. Никитин</i>	327
Правила для авторов	337

# CONTENTS

---

Kulikovskiy A.G. (on 90-th birthday)	115
Forecast and Correction of the Orbital Motion of the Space Vehicle Using Regular Quaternion Equations and Their Solutions in the Kustaanheimo–Stiefels Variables and Isochronic Derivatives <i>Yu. N. Chelnokov, Ya. G. Sapunkov, M. Yu. Loginov, A. F. Schekutev</i>	124
Asymptotics of Long Standing Waves in One-Dimensional Basins with Shallow Coasts: Theory and Experiment <i>S. Yu. Dobrokhotoy, V. A. Kalinichenko, D. S. Minenkov, V. E. Nazaikinskii</i>	157
Solutions of Some Wave Mechanics Models <i>O. V. Kaptsov, D. O. Kaptsov</i>	176
Solitary Waves in Two-Layer Fluid with Piecewise Exponential Stratification <i>N. I. Makarenko, J. L. Maltseva, A. A. Cherevko</i>	186
Thermal Convection of Two Immiscible Liquids in a 3D Channel with a Velocity Field of a Special Type <i>V. K. Andreev, E. N. Lemeshkova</i>	200
Thermodynamically Compatible Hyperbolic Model for Two-Phase Compressible Fluid Flow with Surface Tension <i>E. Romenski, I. Peshkov</i>	211
Flow Structure of a Three-Dimensional Turbulent Wall Jet <i>A. M. Gaifullin, A. S. Shcheglov</i>	226
Sedimentation Waves in a Two-Phase Granular Liquid <i>V. V. Shelukhin, V. V. Neverov</i>	240
On the Theory of Shock Waves in Isotropic Hardening Plastic Media <i>V. M. Sadovskii</i>	254
Elastic Waves Trapped by Semi-Infinite Strip with Clamped Lateral Sides and a Curved or Broken End <i>S. A. Nazarov</i>	265
Modeling of Dynamic Thermo-Elastic-Viscous-Plastic Deformation of Flexible Shallow Reinforced Shells <i>A. P. Yankovskii</i>	280
On the Contact Problem with Deformable Stamp in the Quarter Plain <i>V. A. Babeshko, O. V. Evdokimova, O. M. Babeshko, M. V. Zaretskaya, V. S. Evdokimov</i>	303
On the Theory of the Method of “Echoscopy” of the Bottomhole Zone of a Well in a Low-Permeability Formation Subject to Hydraulic Fracturing <i>R. A. Bashmakov, E. V. Galiakbarova, Z. R. Khakimova, V. Sh. Shagapov</i>	314
Natural Frequency and Modes of the Longitudinal and Torsional Vibrations in the Bars with Variable Cross Section <i>I. S. Nikitin, N. G. Burago, A. D. Nikitin</i>	327

---

---

**АНДРЕЙ ГЕННАДЬЕВИЧ КУЛИКОВСКИЙ**  
(к 90-летию со дня рождения)

DOI: 10.31857/S0032823523020169, EDN: UBLICE



18 марта 2023 года исполняется 90 лет Андрею Геннадьевичу Куликовскому – выдающемуся российскому ученому-механику, академику РАН.

Свою научную деятельность он начал под руководством академика Л.И. Седова, который еще в студенческие годы порекомендовал ему заняться магнитной гидродинамикой – новым тогда направлением механики сплошных сред. Стоя у истоков этого направления, А.Г. Куликовскому удалось решить целый ряд задач, ставших классическими, в том числе об опрокидывании волн Римана и формировании ударной волны, о фронтах ионизации и рекомбинации в присутствии магнитного поля, о внутренней структуре таких фронтов. Оказалось, что ударная адиабата в волнах ионизации и рекомбинации обладает удивительными свойствами: разные ее участки имеют разную размерность, в связи с чем требуется формулировка дополнительных соотношений, обеспечивающих эволюционность разрыва (как известно, эволюционность определяет число граничных условий, необходимое для корректной постановки задачи в окрестности разрыва). Было показано, что такие соотношения следуют из требования существования структуры разрыва. Тогда же сформировалась прошедшая через всю дальнейшую жизнь юбиляра научная и человеческая дружба с профессорами А.А. Барминым и Г.А. Любимовым, с которыми опубликовано большинство работ этого периода.

Многие результаты вошли в книгу “Магнитная гидродинамика” (совместно с Г.А. Любимовым, 1962 г.), давно ставшую классической.

Выдающейся работой А.Г. Куликовского стало обобщение результатов, полученных при исследовании фронтов ионизации и рекомбинации, на произвольные среды. А.Г. Куликовский доказал, что при весьма общих предположениях из требования существования структуры следует ровно такое количество дополнительных соотношений на разрыве, которое обеспечивает его эволюционность и которое необходимо при построении решения задач.

Совместно с Е.И. Свешниковой (впоследствии профессором МГУ) были изучены нелинейные волны малой амплитуды в упругой среде, обладающей малой анизотропией (анизотропия может быть присуща среде изначально или является следствием предварительной деформации). Взаимное влияние нелинейности и анизотропии приводит к сложным явлениям, которые были исследованы и нашли отражение в серии работ. В качестве итога авторами была опубликована монография “Нелинейные волны в упругих средах” (1998 г.). Еще одна серия работ, проведенных совместно с Е.Н. Свешниковой, относится к фронтам, на которых происходит образование упругой среды из среды без касательных напряжений, например, из потока частиц. Фронты слипания частиц оказались во многом подобны упомянутым выше фронтам ионизации и рекомбинации в магнитном поле. Число дополнительных соотношений, получаемых при исследовании их вязкой структуры, зависит от скорости их распространения, а ударная адиабата содержит трехмерную, двумерную и одномерную части.

Другая серия работ выполнена А.Г. Куликовским в основном совместно с А.П. Чугайновой (его ученицей, а затем сотрудницей МИАН РАН, ныне д.ф.-м.н.). В этих работах изучаются разрывы в решениях, описывающих поведение различных сплошных сред в случаях, когда в структуре разрывов проявляются дисперсионные эффекты, а число соотношений на разрывах, следующих из законов сохранения, равно порядку внешней гиперболической системы уравнений. Если дисперсионные эффекты существенны, то на кривой, представляющей ударную адиабату, чередуются отрезки, соответствующие ударным волнам со стационарной структурой, и отрезки, точки которых соответствуют разрывам без стационарной структуры. Кроме того, на ударной адиабате имеются точки, соответствующие особым разрывам с дополнительными соотношениями. Если считать, что такие разрывы могут существовать, то решения задач оказываются неединственными. Прямое численное моделирование нестационарного процесса, проведенное в простейшем случае, показало, что из особых разрывов реализуется только один. При этом в большинстве случаев структура содержит внутренние нестационарные колебания, а решения задач при этом оказываются единственными.

Другое направление научных интересов А.Г. Куликовского связано с задачами устойчивости. Еще в 1960-х годах он доказал, что устойчивость одномерной безграничной системы и устойчивость конечной, но сильно протяженной системы, в общем случае определяются разными критериями. Это вызвано тем, что в конечных системах происходит возвращение возмущений в виде отраженных волн, а собственные моды, удовлетворяющие граничным условиям на удаленных концах, состоят, как минимум, из двух волн, движущихся в противоположные стороны. Причем критерий устойчивости конечной достаточно протяженной системы в пределе оказался не зависящим от конкретных граничных условий, поставленных на концах. В этом смысле неустойчивость протяженных конечных систем была названа глобальной.

Интересно отметить, что ссылки на работу А.Г. Куликовского по глобальной неустойчивости во многих зарубежных публикациях идут не на оригинальную статью автора в ПММ (1966 г.), а на том 10 “Физическая кинетика” серии “Теоретическая физика” Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица (1979 г.), где работа А.Г. Куликовского изложена в параграфе 65.

Развитием идеи глобальных собственных функций, в которых доминируют две волны, отражающиеся от концов системы, стало рассмотрение неоднородных систем со свойствами, медленно меняющимися вдоль координаты. В таких системах могут возникать точки внутреннего отражения, описываемые ВКБ-приближением, от которых происходит отражение волн так же, как от границы системы. При наличии точек внутреннего отражения могут существовать как собственные функции, “зжатые” между двумя такими точками, так и собственные функции, состоящие из цепочек волн, испытывающих несколько отражений от различных точек. В последние годы А.Г. Куликовский использует метод комплексных уравнений Гамильтона для анализа развития возмущений на медленно изменяющемся в пространстве фоне.

А.Г. Куликовский получил ряд других важных результатов, лежащих вне “магистральных” направлений своих интересов. Так, им и С.В. Иорданским еще в 1965 г. был аналитически доказан конвективный характер неустойчивости целого класса течений жидкости при больших числах Рейнольдса. К таким течениям в том числе относится плоское течение Пуазейля и пограничный слой Блазиуса. Лишь спустя десятилетия конвективный характер неустойчивости при умеренных и малых числах Рейнольдса этих двух течений был обоснован путем численных расчетов.

А.Г. Куликовскому присуще чрезвычайно развитое физическое мышление, нетипичное для многих механиков. Помимо свободного владения тонкими вопросами как аэрогидродинамики, так и теории упругости, он прекрасно ориентируется в других разделах физики, включая электромагнетизм, теорию относительности, физику плазмы. Многие нетривиальные рассуждения он проводит в уме, пользуясь физической интуицией. Почти всегда выводы, полученные на интуитивном уровне, оказываются верными после строгой математической проверки. Красивым приемом, которым иногда пользуется Андрей Геннадьевич, являются аналогии: так, изучение нетривиального поведения корней дисперсионного уравнения, описывающего возмущение течения слоя жидкости по наклонной плоскости, он свел к задаче о течении идеальной несжимаемой жидкости: комплексный потенциал такого обтекания имеет ту же структуру, что и исследуемое дисперсионное уравнение. В другой задаче, связанной с анализом структуры разрывов в нелинейно-упругой среде, он заметил, что уравнение, описывающее структуру, аналогично уравнению движения материальной точки в заданном поле сил с трением. Анализ возможных движений материальной точки позволил изучить возможные структуры разрывов. В этих и ряде других случаев поведение исходной весьма сложной системы получалось автоматически из элементарного физического анализа систем-аналогий.

Многие десятилетия А.Г. Куликовский посвятил преподаванию, будучи профессором родной кафедры гидромеханики мехмата МГУ. Многие годы он руководил студенческими работами совместно с И.С. Шикиной и Е.И. Свешниковой, а также студенческим спецсеминаром кафедры. В самых разных задачах механики сплошных сред А.Г. Куликовский стремится получить наиболее простые доказательства, не содержащие сложных выкладок. На студенческих спецсеминарах он неоднократно приводил собственные простые и наглядные доказательства нетривиальных теорем, доказываемых в литературе с помощью громоздких вычислений (например, о поведении корабельных волн или о свойствах ударной адиабаты в детонационной волне). Помимо этого, Андрей Геннадьевич многие годы является бессменным председателем жюри конференции-конкурса молодых ученых-механиков, проводимой в НИИ механики МГУ. В этом же институте он руководит научным семинаром по механике сплошных сред совместно с чл.-корр. РАН О.Э. Мельником, профессором В.П. Карликовым и профессором А.Н. Осипцовым. Выступить на этом семинаре и получить одобрение Андрея Геннадьевича считается честью для любого ученого-механика. Под руководством ученого подготовлено 17 кандидатов и 9 докторов наук. А.Г. Куликовский имеет звание Заслуженного профессора МГУ им. М.В. Ломоносова.

А.Г. Куликовский – член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике (РНКТПМ); многие годы он является членом редколлегии журналов “Прикладная математика и механика”, “Механика жидкости и газа”, “Вычислительная математика и математическая физика”. За свои научные заслуги он был удостоен Государственной премии РФ (2003 г., в составе авторского коллектива), премии и медали им. Л.И. Седова РНКТПМ (2002 г.), премии РАН им. С.А. Чаплыгина (1967 г.).

Андрей Геннадьевич является активно работающим ученым, причем ряд интереснейших результатов получен им в последние годы. Пожелаем ему крепкого здоровья и творческого долголетия на многие годы.

### Список основных научных трудов А.Г. Куликовского

#### 1955

1. О вырождении однородной изотропной магнитогидродинамической турбулентности в несжимаемой жидкости // ПММ. Т. 19. Вып. 5. С. 551–556.

#### 1957

2. Об обтекании намагниченных тел проводящей жидкостью // Докл. АН СССР. Т. 117. № 2. С. 199–202.

#### 1958

3. О волнах Римана в магнитной гидродинамике // Докл. АН СССР. Т. 121. № 6. С. 987–990.

#### 1959

4. О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизирующих газ // Докл. АН СССР. Т. 129. № 1. С. 52–55. (совм. с Г.А. Любимовым)

#### 1962

5. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 248 с. (совм. с Г.А. Любимовым)  
6. О структуре ударных волн // ПММ. Т. 26. Вып. 4. С. 631–641.

#### 1964

7. Об общем условии устойчивости высших корреляционных функций в плазме // Докл. АН СССР. Т. 156. № 1. С. 35–37. (совм. с С.В. Иорданским)

#### 1965

8. Об абсолютной устойчивости некоторых плоскопараллельных течений при больших числах Рейнольдса // ЖЭТФ. Т. 49. Вып. 5. С. 1326–1331. (совм. с С.В. Иорданским)

#### 1966

9. Об устойчивости однородных состояний // ПММ. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.  
10. Об устойчивости течения Пуазейля и некоторых других плоскопараллельных течений в плоской трубе большой, но конечной длины при больших числах Рейнольдса // ПММ. Т. 30. № 5. С. 822–835.

#### 1967

11. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука // ПММ. Т. 31. Вып. 4. С. 593–602. (совм. с Ф.А. Слободкиной)

**1968**

12. Устойчивость течений слабо сжимаемой жидкости в плоской трубе большой, но конечной длины // ПММ. 1968. Т. 32. № 1. С. 112–114.

13. О медленных стационарных течениях проводящей жидкости при больших числах Гартмана // Изв. АН СССР. МЖГ. Т. 3. № 2. С. 3–10.

14. Об ударных волнах, ионизирующих газ, находящийся в электромагнитном поле // Докл. АН СССР. Т. 178. № 1. С. 55–58. (совм. с А.А. Барминым)

15. О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике // ПММ. Т. 32. Вып. 6. С. 1125–1131.

16. Об устойчивости и эволюционности распределения электрического тока в среде с нелинейной проводимостью // ПММ. Т. 32. Вып. 4. С. 761–762. (совм. с С.А. Регирером)

17. Изменение скорости газа в ионизирующих ударных волнах. Задача о проводящем поршне // ПММ. Т. 32. Вып. 3. С. 495–499. (совм. с А.А. Барминым)

**1970**

18. Модель взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой // Докл. АН СССР. Т. 194. № 1. С. 41–44. (совм. с В.Б. Барановым, К.В. Краснобаевым)

**1971**

19. Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле // Итоги науки. Гидромеханика. Т. 5. М.: ВИНТИ, С. 5–31. (совм. с А.А. Барминым)

**1973**

20. О течениях проводящей несжимаемой жидкости в произвольной области при наличии сильного магнитного поля // Изв. АН СССР. МЖГ. Т. 8. № 3. С. 144–150.

21. Двумерная задача о движении снежной лавины по склону с плавно меняющимися свойствами // ПММ. Т. 37. Вып. 5. С. 837–848. (совм. с М.Э. Эглит)

**1974**

22. О выборе автомодельного решения в теории пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. Т. 9. № 4. С. 42–46. (совм. с Ф.А. Слободкиной)

**1975**

23. Задача о поршне при наличии фронтов рекомбинации в магнитном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. Т. 10. № 4. С. 136–142. (совм. с А.А. Барминым)

24. Об устойчивости течений, возникающих при распадении произвольного разрыва // ПММ. Т. 39. Вып. 1. С. 95–102. (совм. с Г.Я. Галиным)

**1977**

25. О границах области роста неодномерных возмущений неустойчивых состояний // ПММ. Т. 41. Вып. 6. С. 1122–1123. (совм. с В.А. Кондрашевым)

**1979**

26. О свойствах ударных адиабат в окрестности точек Жуге // Изв. АН СССР. МЖГ. Т. 14. № 2. С. 184–186.

**1981**

27. Об устойчивости одномерных течений газа в расширяющихся областях // Изв. АН СССР. МЖГ. Т. 16. № 2. С. 112–119. (совм. с Г.Я. Галиным)

**1982**

28. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. Т. 46. Вып. 5. С. 831–840. (совм. с Е.И. Свешниковой)

**1984**

29. Об устойчивости одномерных стационарных решений гиперболических систем дифференциальных уравнений при наличии точек обращения в нуль одной из характеристических скоростей // ПММ. Т. 48. Вып. 3. С. 414–419. (совм. с Ф.А. Слободкиной)

30. О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // Докл. АН СССР. Т. 275. № 6. С. 1349–1352.

31. О некоторых свойствах ударной адиабаты квазипоперечных упругих волн // ПММ. Т. 48. Вып. 5. С. 793–798. (совм. с Е.И. Свешниковой)

**1985**

32. Об условиях устойчивости стационарных состояний или течений в областях, протяженных в одном направлении // ПММ. Т. 49. Вып. 3. С. 411–418.

33. Об асимптотическом поведении локализованных возмущений при неустойчивости Кельвина–Гельмгольца // Изв. АН СССР. МЖГ. Т. 20. № 2. С. 23–30. (совм. с И.С. Шикиной)

34. Возникновение периодических режимов в стационарных сверхзвуковых МГД-течениях вследствие выключения электропроводности среды // Изв. АН СССР. МЖГ. Т. 20. № 4. С. 138–149. (совм. с А.А. Барминым, А.П. Глиновым)

35. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. Т. 49. Вып. 2. С. 284–291. (совм. с Е.И. Свешниковой)

**1986**

36. Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабоанизотропном упругом теле // ПММ. Т. 50. Вып. 4. С. 597–604.

**1987**

37. О структуре квазипоперечных упругих ударных волн // ПММ. Т. 51. Вып. 6. С. 926–932. (совм. с Е.И. Свешниковой)

**1988**

38. О распаде произвольного начального разрыва в упругой среде // ПММ. Т. 52. Вып. 6. С. 1007–1012. (совм. с Е.И. Свешниковой)

**1989**

39. Особенности поведения нелинейных квазипоперечных волн в упругой среде при малой анизотропии // В сб.: Совр. матем. пробл. мех. и их прил. К 80-летию со дня рождения академика Леонида Ивановича Седова. Тр. МИАН СССР. Т. 186. М.: Наука, 1989. С. 132–139.

40. О фронтах сильного и слабого разрыва в решениях уравнений разномодульной теории упругости // ПММ. Т. 53. Вып. 2. С. 294–300. (совм. с Л.А. Пекуровской)

**1990**

41. О продольных волнах в упругой среде с кусочно-линейной зависимостью напряжения от деформации // ПММ. Т. 54. Вып. 5. С. 807–813. (совм. с Л.А. Пекуровской)

**1992**

42. Об устойчивости решений некоторых краевых задач для гиперболических уравнений // ПММ. Т. 56. Вып. 1. С. 40–51. (совм. с С.А. Егорушкиным)

**1993**

43. Волны Римана в упругой среде при малой анизотропии // ПММ. Т. 57. Вып. 3. С. 90–101. (совм. с Е.И. Свешниковой)

44. О потере устойчивости слабо неоднородными течениями в протяженных областях. Возникновение поперечных колебаний трубы с текущей в ней жидкостью // ПММ. Т. 57. Вып. 5. С. 93–99.

**1996**

45. Механика сплошных сред в задачах, т. 1, 2 / Под ред. *Элит М.Э.* М.: Московский лицей, 1996. 396 с. (совм. с Г.Я. Галиным, А.Н. Голубятниковым, Я.А. Каменяржем, В.П. Карликовым, А.Г. Петровым, Е.И. Свешниковой, И.С. Шикиной, М.Э. Элит).

46. О существовании и единственности автомодельных решений при наличии точек Жуге на ударной адиабате // ПММ. Т. 60. Вып. 1. С. 66–71. (совм. с Е.И. Свешниковой)

47. Об описании длинных нелинейных волн в каналах // Изв. РАН. МЖГ. Т. 31. № 5. С. 136–145. (совм. с Ю.А. Дроздовой)

48. О переходе к неустойчивости в слабонеоднородных течениях без диссипации // ПММ. Т. 60. Вып. 3. С. 433–437. (совм. с И.С. Шикиной)

**1997**

49. Об электромагнитных волнах и их структуре в анизотропных ферромагнетиках // ПММ. Т. 61. Вып. 1. С. 139–148. (совм. с Н.И. Гвоздской)

**1998**

50. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с. (совм. с Е.И. Свешниковой)

51. Об условиях распада нелинейной волны в вязкоупругой среде // ЖВММФ. Т. 38. № 2. С. 315–323. (совм. с А.П. Чугайновой)

**2000**

52. Об устойчивости квазипоперечных ударных волн в анизотропных упругих средах // ПММ. Т. 64. Вып. 6. С. 1020–1026. (совм. с А.П. Чугайновой)

53. Об условиях неустойчивости фронта пламени в слабонеоднородном потоке // Изв. РАН. МЖГ. Т. 35. № 5. С. 12–19. (совм. с И.С. Шикиной)

**2001**

54. Признак несуществования и неединственности решений автомодельных задач механики сплошной среды // ПММ. Т. 65. Вып. 6. С. 971–982. (совм. с Е. И. Свешниковой)

**2002**

55. Об устойчивости к двумерным возмущениям метастабильной ударной волны в вязкоупругой среде // ПММ. Т. 66. Вып. 1. С. 109–117. (совм. с А.П. Чугайновой)

**2004**

56. О фазовых переходах при фильтрации в теплопроводном скелете // Изв. РАН. МЖГ. № 3. С. 85–90.

**2005**

57. Режимы распространения самоподдерживающихся светодетонационных волн // Изв. РАН. МЖГ. № 5. С. 170–181. (совм. с Н.Т. Пашенко)

**2006**

58. О глобальной неустойчивости однородных течений в неоднородных областях // ПММ. Т. 70. Вып. 2. С. 257–263.

**2007**

59. Классические и неклассические разрывы и их структуры в нелинейно-упругих средах с дисперсией и диссипацией // Совр. пробл. матем. МИАН. Вып. 7. С. 3–148. (совм. с А.П. Чугайновой)

60. О развитии возмущений на слабонеоднородном фоне // ПММ. Т. 71. Вып. 5. С. 761–774. (совм. с А.В. Лозовским, Н.Т. Пашенко)

**2008**

61. Классические и неклассические разрывы в решениях уравнений нелинейной теории упругости // УМН. Т. 63. № 2. Вып. 380. С. 85–152. (совм. с А.П. Чугайновой)

**2010**

62. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений // Лекц. курсы НОЦ. Вып. 16. С. 3–120. (совм. с Е.И. Свешниковой, А.П. Чугайновой)

63. Автомодельные асимптотики, описывающие нелинейные волны в упругих средах с дисперсией и диссипацией // ЖВММФ. Т. 50. № 12. С. 2261–2274. (совм. с А.П. Чугайновой)

64. О стационарной структуре ударных волн в упругих средах и диэлектриках // ЖЭТФ. Т. 137. Вып. 5. С. 973–985. (совм. с А.П. Чугайновой)

65. Влияние малой неоднородности фона на асимптотические свойства линейных возмущений // ПММ. Т. 74. Вып. 2. С. 179–190. (совм. с Н.Т. Пашенко)

**2011**

66. Околорезонансные поперечные колебания в упругом слое. Стационарные решения // ПММ. Т. 75. Вып. 1. С. 27–38. (совм. с Е.И. Свешниковой)

67. О многопараметрических фронтах сильных разрывов в механике сплошных сред // ПММ. Т. 75. Вып. 4. С. 531–550.

**2012**

68. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Физматлит, 2012. 656 с. (совм. с Н.В. Погореловым, А.Ю. Семеновым)

**2013**

69. Устойчивость фронта пламени в расходящемся потоке // В сб.: Совр. пробл. мех. К 80-летию со дня рождения академика Андрея Геннадьевича Куликовского. Тр. МИАН. Т. 281. М.: МАИК, 2013. С. 55–67. (совм. с Н.Т. Пашенко)

70. Об опрокидывании волн Римана в упругопластических средах с упрочнением // ПММ. Т. 77. Вып. 4. С. 486–500. (совм. с А.П. Чугайновой)

**2015**

71. Образование анизотропной упругой среды на фронте уплотнения потока частиц // ПММ. Т. 79. Вып. 6. С. 739–755. (совм. с Е.И. Свешниковой)

72. Ударные волны в упругопластических средах со структурой, определяемой процессом релаксации напряжений // В сб.: Избр. вопр. матем. и мех. К 150-летию со дня рождения академика Владимира Андреевича Стеклова. Тр. МИАН. Т. 289. М.: МАИК, 2015. С. 178–194. (совм. с А.П. Чугайновой)

**2016**

73. Автомодельная задача о волнах в упругопластической среде Прандтля–Рейсса // В сб.: Совр. пробл. мех. Тр. МИАН. Т. 295. М.: МАИК, 2016. С. 195–205. (совм. с А.П. Чугайновой)

74. Единственность автомодельных решений задачи о распаде произвольного разрыва уравнения Хопфа со сложной нелинейностью // ЖВММФ. Т. 56. Вып. 7. С. 1363–1370. (совм. с А.П. Чугайновой, В.А. Шаргатовым)

75. Исследование разрывов в решениях уравнений упругопластической среды Прандтля–Рейсса // ЖВММФ. Т. 56. Вып. 4. С. 650–663. (совм. с А.П. Чугайновой)

#### 2017

76. Длинные нелинейные волны в анизотропных цилиндрах // ЖВММФ. Т. 57. Вып. 7. С. 1198–1204. (совм. с А.П. Чугайновой)

77. О развитии возмущений на стационарном слабонеоднородном фоне. Комплексные уравнения Гамильтона // ПММ. Т. 81. Вып. 1. С. 3–17.

78. Problem of arbitrary discontinuity disintegration for the generalized Hopf equation: selection conditions for a unique solution // IMA J. Appl. Math. V. 82. № 3. P. 496–525. (совм. с А.П. Chugainova, А.Т. P'ichev, V.A. Shargatov)

79. Фронты образования нелинейной упругой среды из среды без касательных напряжений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. № 3. С. 48–54. (совм. с Е.И. Свешниковой)

#### 2018

80. Замечание о природе спонтанно излучающих ударных волн // Докл. РАН. Т. 481. № 5. С. 494–497.

81. Ударные волны в анизотропных цилиндрах // В сб.: Совр. пробл. и методы мех. К 110-летию со дня рождения академика Леонида Ивановича Седова. Тр. МИАН. Т. 300. М.: Наука/Интерпериодика, 2018. С. 109–122. (совм. с А.П. Чугайновой)

82. Задача о движении упругой среды, образовавшейся на фронте затвердевания // В сб.: Совр. пробл. и методы мех. К 110-летию со дня рождения академика Леонида Ивановича Седова. Тр. МИАН. Т. 300. М.: Наука/Интерпериодика, 2018. С. 95–108. (совм. с Е.И. Свешниковой)

#### 2019

83. Развитие возмущений поверхности тангенциального разрыва между неоднородными потоками идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. Т. 60. № 2(354). С. 32–46. (совм. с Н.А. Куликовским, Н.Т. Пашенко)

84. О спонтанно излучающих ударных волнах // Докл. РАН. Т. 487. № 1. С. 28–31. (совм. с А.Т. Ильичевым, А.П. Чугайновой, В.А. Шаргатовым)

#### 2020

85. Об устойчивости структуры нейтрально устойчивой ударной волны в газе и о спонтанном излучении возмущений // ЖЭТФ. Т. 158. № 3. С. 544–560. (совм. с А.Т. Ильичевым, А.П. Чугайновой, В.А. Шаргатовым)

86. Простые одномерные волны в несжимаемой анизотропной упругопластической среде с упрочнением // В сб.: Избр. вопр. матем. и мех. К 70-летию со дня рождения академика Валерия Васильевича Козлова. Тр. МИАН. Т. 310. М.: МИАН, 2020. С. 189–198. (совм. с А.П. Чугайновой)

87. Longitudinal and torsional shock waves in anisotropic elastic cylinders // Z. Angew. Math. Phys. V. 71. № 1. Art. no. 17. 15 pp. (совм. с А.П. Chugainova)

#### 2021

88. Структуры разрывов в решениях уравнений, описывающих продольно-крутильные волны в упругих стержнях // Докл. РАН. Т. 497. № 1. С. 49–52. (совм. с А.П. Чугайновой)

89. Shock waves in an incompressible anisotropic elastoplastic medium with hardening and their structures // Appl. Math. Comput. V. 401. 126077. 11 pp. (совм. с А.П. Chugainova)

#### 2022

90. Asymptotic behavior of localized disturbance in a viscous fluid flow down an incline // Phys. Fluids. V. 34. № 3. 034119. (совм. с J.S. Zayko)

91. О структурах неклассических разрывов в решениях гиперболических систем уравнений // УМН. Т. 77. № 1(463). С. 55–90. (совм. с А.П. Чугайновой)

УДК 521.1, 629

**ПРОГНОЗ И КОРРЕКЦИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО  
АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕГУЛЯРНЫХ КВАТЕРНИОННЫХ  
УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЙ В ПЕРЕМЕННЫХ  
КУСТААНХЕЙМО–ШТИФЕЛЯ И ИЗОХРОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

© 2023 г. Ю. Н. Челноков<sup>1,\*</sup>, Я. Г. Сапунков<sup>1</sup>, М. Ю. Логинов<sup>1</sup>, А. Ф. Щекутьев<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

<sup>2</sup>*АО ЦНИИМаи, Королев, Россия*

*\*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

*\*\*e-mail: a.schekutiev@glonass-iac.ru*

Поступила в редакцию 19.10.2022 г.

После доработки 09.01.2023 г.

Принята к публикации 15.02.2023 г.

Рассмотрены предложенные нами ранее регулярные кватернионные уравнения орбитального движения космического аппарата (КА) в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменных), в которых в качестве новой независимой переменной используется переменная, связанная с реальным временем дифференциальным соотношением (преобразованием времени Зундмана), содержащим расстояние до центра притяжения, а также построены различные новые регулярные кватернионные уравнения в этих переменных и в регулярных кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся переменных), в которых в качестве новой независимой переменной используется половинная обобщенная эксцентрическая аномалия, широко используемая в небесной механике и механике космического полета. В качестве дополнительных переменных в этих уравнениях используются кеплеровская энергия и время.

С использованием этих уравнений построены кватернионные уравнения и соотношения в вариациях *KS*-переменных и их первых производных и в вариациях кеплеровской энергии и нового времени, а также найдены изохронные производные от *KS*-переменных и их первых производных и матрица изохронных производных для эллиптического кеплеровского движения КА, необходимые для решения задач прогноза и коррекции его орбитального движения.

Приведены результаты сравнительного исследования точности численного интегрирования ньютоновских уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и КА) в декартовых координатах и регулярных кватернионных уравнений этой задачи в *KS*-переменных, показывающие, что точность численного интегрирования этих уравнений значительно выше (на несколько порядков) точности численного интегрирования уравнений в декартовых координатах. Это обосновывает целесообразность использования для прогноза и коррекции орбитального движения КА регулярных кватернионных уравнений орбитального движения КА и построенных в статье на их основе кватернионных уравнений и соотношений в вариациях.

*Ключевые слова:* регулярные кватернионные уравнения, орбитальное движение, космический аппарат, переменные Кустаанхеймо–Штифеля, преобразование времени Зундмана, кватернионные оскулирующие элементы, эксцентрическая аномалия, кеплеровская энергия, вариации переменных, изохронные производные, матрица изохронных производных, прогноз и коррекция орбитального движения

**DOI:** 10.31857/S0032823523020054, **EDN:** TZCBXX

**1. Введение, анализ проблемы регуляризации и обоснование использования регулярных кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля (KS-переменных) для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения космического аппарата.** В настоящее время в механике космического полета активно разрабатываются проблемы прогноза и коррекции орбитального движения космических аппаратов с использованием уравнений и соотношений в вариациях. Изучение влияния изменений начальных условий движения (или их неточного выполнения) на орбитальное движение играет важную роль в механике космического полета. На это обращается внимание, в частности, еще в книге Эльясберга 1965 года [1], посвященной теории полета искусственных спутников Земли (предисловие, введение, глава X “Связь между вариациями текущих характеристик и начальных условий движения”). В этой главе говорится, что “Более трудной задачей является установление связи между вариациями  $\Delta p_i$  и  $\Delta q_j$  (между вариациями текущих характеристик (вариациями каких-либо координат и составляющих вектора скорости центра масс) и вариациями начальных условий движения)”. Приводятся не только общие соотношения, устанавливающие связи между вариациями  $\Delta p_i$  и  $\Delta q_j$  с использованием частных производных и их матриц (матриц изохронных производных), но и рассматриваются частные производные (изохронные производные) от модуля радиус-вектора, от продольной и радиальной составляющих вектора скорости, от времени полета и от других параметров орбитального движения для эллиптического кеплеровского движения. Приводится матрица частных производных от текущих характеристик по начальным условиям (матрица изохронных производных) для эллиптического кеплеровского движения.

Дополнительно отметим, что в работе Чарного (1963) [2] получена матрица изохронных производных на кеплеровой дуге (для отклонений вдоль радиус-вектора, вдоль трансверсали и бинормали, а также для отклонений радиальной, трансверсальной и боковой скоростей), получившая впоследствии широкое распространение в практических вычислениях. В работе Алферьева (2011) [3], посвященной изучению свойств матриц частных производных, выписан удобный для программирования вид матриц частных производных от радиус-вектора и вектора скорости центра масс космического объекта на кеплеровой дуге.

В основе небесной механики и механики космического полета лежит векторное ньютоновское дифференциальное уравнение возмущенной пространственной задачи двух тел и соответствующие им скалярные дифференциальные уравнения в прямоугольных декартовых координатах. Эти уравнения широко используются не только в теоретических исследованиях, но и для решения многих технических задач. Это связано с большой наглядностью декартовых координат, компактностью уравнений в декартовых координатах и их удобством при решении многих прикладных задач, в том числе задач, решаемых с помощью навигационных спутников. Так, в документе “Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ” говорится (П. 3.1.1. Алгоритм пересчета эфемерид НКА на текущий момент времени): “Пересчет эфемерид потребителем с момента  $t_s$  их задания ... проводится методом численного интегрирования дифференциальных уравнений движения КА, в правых частях которых учитываются ускорения, определяемые константой гравитационного поля Земли  $\mu$ , второй зональной гармоникой с индексом  $C_{20}$ , характеризующей полярное сжатие Земли, а также ускорения от лунно-солнечных гравитационных возмущений. Уравнения движения интегрируются в прямоугольной абсолютной геоцентрической системе координат  $Ox_0Y_0Z_0$ , связанной с текущими экватором и точкой весеннего равноденствия, методом Рунге–Кутты четвертого порядка и имеют вид...”. Приводятся дифференциальные уравнения движения КА в декартовых координатах (дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи

двух тел, в которой изучаемое (второе) тело малой массы – КА), в которых учитываются указанные возмущающие ускорения.

Уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в декартовых координатах вырождаются при соударении второго тела, например КА (тела с пренебрежимо малой массой), с центральным телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этого уравнения неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат (особенность типа деления на ноль, порождаемая действием ньютоновской гравитационной силой) создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности использования этих уравнений. В работе Бордовицыной [4] отмечается, что “В практических задачах небесной механики прямые соударения тел, как правило, не рассматриваются. Однако в рамках этих задач наличие особенностей в уравнениях движения оказывают заметное (негативное) влияние на процесс их численного решения”.

Проблема устранения указанной особенности, известная в небесной механике и механике космического полета (астродинамике) как проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной задачи двух тел, восходит к Эйлеру (1765) [5] и Леви-Чивита (Levi-Civita) (1920) [6–8], которые дали решения одномерной и двумерной задач о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Процедуру, позволяющую устранить указанную особенность дифференциальных уравнений движения, следуя [7], называют регуляризацией. Эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, так называемая спиновая или *KS*-регуляризация, была предложена Кустаанхеймо (Kustaanheimo) и Штифелем (Stiefel) (1964–1965) [9, 10]. Она наиболее полно изложена в широко цитируемой монографии Штифеля и Шейфеле (Scheifele) (1971, 1974) [11].

Отметим следующие основные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля [4, 11–19]:

- они, в отличие от ньютоновских, существенно нелинейных, уравнений, регулярны в центре притяжения (не имеют особенностей типа деления на ноль, порождаемых действующей ньютоновской гравитационной силой);
- линейны для невозмущенных кеплеровских движений в новом времени  $\tau$ , определяемым дифференциальным соотношением  $dt = r d\tau$  (преобразованием времени Зундмана), в котором  $r$  – расстояние до центра притяжения, и имеют в этом случае вид системы четырех независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно *KS*-переменных  $u_j$  с одинаковыми постоянными коэффициентами, равными половинной кеплеровской энергии  $h$ :

$$\frac{du_j}{d\tau} - \frac{1}{2} h u_j = 0; \quad h = \text{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

- для эллиптического кеплеровского движения, когда кеплеровская энергия  $h < 0$ , эти уравнения эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии, взятой со знаком минус (это свойство позволяет построить регулярные уравнения в оскулирующих элементах (медленно изменяющихся переменных), удобные для изучения возмущенного кеплеровского эллиптического движения);

- позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;
- близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;
- позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Эти свойства регулярных уравнений в  $KS$ -переменных позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами.

Штифелем, Шейфеле, Бордовицной, Шарковским и др. [4, 11, 13] показано, что использование регулярных уравнений в  $KS$ -переменных позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики, например, задачи о движении искусственного спутника Земли (ИСЗ) по орбитам с большими эксцентриситетами, от трех до пяти порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании классических ньютоновских уравнений. В книге Бордовицной и Авдюшева [13] говорится: “методы теории специальных возмущений весьма эффективны и могут быть рекомендованы к применению для численного моделирования спутниковых орбит. Впечатляющие результаты получаются при использовании  $KS$ -уравнений ( $\mathbf{u}$ ,  $\delta\mathbf{u}$ ) и уравнений Роя ( $\mathbf{ry}$ ). Так, при сохранении точности интегрирования с их помощью удается повысить быстродействие в 3–4 раза. Кроме того, метод Энке в  $KS$ -переменных ( $\delta\mathbf{u}$ ) за счет ослабления влияния ошибок округления позволяет повысить уровень наивысшей точности почти на 1–2 порядка”. Здесь речь идет о спутниковых орбитах с эксцентриситетом равным нулю или 0.01 (типа орбит спутниковой навигационной группировки ГЛОНАСС, близких к круговым орбитам). Отметим, что для этих круговых или слабоэллиптических орбит численное интегрирование уравнений движения КА в  $KS$ -переменных дает существенно меньший выигрыш в смысле точности в сравнении с интегрированием уравнений движения КА в декартовых координатах, чем для высокоэллиптических орбит (орбит с большими эксцентриситетами).

В работах Fukushima (2005, 2007) [18, 19] также показано, что  $KS$ -регуляризация приводит к очень эффективной схеме интегрирования уравнений орбитального движения, повышающей точность и скорость численного интегрирования. Это связано не только со структурой уравнений, но также с использованием нескольких методов, которые приносят важные преимущества численной схеме: “The  $KS$  regularization resulted in a very efficient integration scheme, improving the accuracy and speed of numerical integration. This comes not only from the structure of the equations, but also from the use of several techniques that bring important advantages to the numerical scheme”. В работе [19] приводится численное сравнение четырех схем регуляризации трехмерной задачи двух тел в условиях возмущения: регуляризации Шперлинга–Бурде (Sperling–Burdet) (SB), Кустаанхеймо–Штифеля (KS), Бурде–Феррандиса (Burdet–Ferrindiz) (BF) и трехмерное расширение регуляризации Леви–Чивита (LC). В аннотации статьи [19] сказано: “the  $KS$  and the extended  $LC$  regularizations with Kepler energy scaling provide the best cost performance in integrating almost all the perturbed two-body problems” (KS и расширенная LC регуляризация с масштабированием энергии Кеплера обеспечивают наилучшую экономическую эффективность при интеграции почти всех возмущенных задач двух тел). Подчеркнем, что и Fukushima сравнивает семь схем, описанных в § 1 его статьи, а также “нерегуляризованную обработку, а именно прямое интегрирование в декартовых координатах”. Для каждой из этих формулировок им проводится тестовая интеграция Икара, охватывающая около 1 миллиона лет, и измеряется время его выполнения: “We compare the seven schemes described in § 1, as well as the unregularized treatment, namely, direct integration in Cartesian coordinates. For each of these formulations, we conduct a test integration of Icarus covering about 1 million years and measure its execution time”.

В основе регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат. Оно состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат  $x_k$  к четырехмерному пространству новых координат  $u_i$ . Поэтому вскоре после открытия  $KS$ -преобразования было рассмотрено ис-

пользование кватернионов (четырёхмерных гиперкомплексных чисел) и четырёхмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел. Однако Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав в своей книге ([11], с. 288) (1971): “Любая попытка заменить теорию  $KS$ -матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму”. Позже (в конце 70-х и начале 80-х годов) Челноковым было показано [20, 21] (в работе [20] (1981) с использованием классических кватернионных матриц, а в работе [21] (1984) с использованием кватернионов Гамильтона), что в действительности кватернионный подход к регуляризации

- позволяет дать прямой и наглядный вывод регулярных уравнений в  $KS$ -переменных (что ставилось Штифелем и Шейфеле под сомнение ([11], с. 29) из-за неоднозначности  $KS$ -преобразования: “единственный путь избежать этой трудности (неоднозначности) состоит в постулировании матричных уравнений в  $KS$ -переменных и проверки того, что при этом удовлетворяются старые ньютоновские уравнения”);

- позволяет дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризирующему  $KS$ -преобразованию;

- раскрывает геометрический смысл его неоднозначности;

- позволяет получить более общие регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Кустанхеймо–Штифеля.

В работах [20, 21] было показано, что регуляризирующее нелинейное преобразование координат Кустанхеймо–Штифеля

$$x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad x_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad x_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2)$$

фактически означает переход от трёхмерных декартовых координат  $x_k$  центра масс второго тела в инерциальной системе координат к новым четырёхмерным переменным ( $KS$ -переменным)  $u_j$ , определяемым формулами

$$u_0 = \sqrt{r}\lambda_0, \quad u_k = -\sqrt{r}\lambda_k; \quad k = 1, 2, 3,$$

где  $\lambda_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) – параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), характеризующие ориентацию вращающейся в инерциальном пространстве системы координат  $\eta$ , ось  $\eta_1$  которой направлена вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс второго тела, а проекция  $\omega_1$  вектора  $\boldsymbol{\omega}$  абсолютной угловой скорости которой на направление радиус-вектора  $\mathbf{r}$  равна нулю:  $\omega_1 = 0$ . Такая система координат называется в механике неголономной или азимутально-свободной.

Следовательно, для получения регулярных уравнений Кустанхеймо–Штифеля необходимо записать векторное уравнение возмущенной пространственной задачи двух тел (в декартовых координатах) в этой вращающейся системе координат  $\eta$ , используя в качестве параметров ориентации этой системы координат четырёхмерные параметры Эйлера  $\lambda_j$ , являющиеся компонентами кватерниона поворота  $\boldsymbol{\lambda}$  этой системы координат. Дальнейшие преобразования этих уравнений связаны [20, 21] с нормировкой параметров Эйлера (кватерниона поворота) с помощью множителя  $\sqrt{r}$  и с переходом в полученных уравнениях к  $KS$ -переменным  $u_j$  по выше приведенным формулам, а также с введением в качестве дополнительных зависимых переменных кеплеровской энергии  $h$  и времени  $t$  и с переходом к новой независимой переменной  $\tau$  с помощью преобразования времени Зундмана  $dt = r d\tau$ .

Подчеркнем, что использование четырёхмерных параметров Эйлера естественным образом приводит к использованию в теории регуляризации четырёхмерных кватернионных матриц и четырёхмерных гиперкомплексных переменных – кватернионов Гамильтона.

В работах [20, 21] было также показано, что билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля

$$u_1 u'_0 - u_0 u'_1 + u_3 u'_2 - u_2 u'_3 = 0,$$

связывающее между собой  $KS$ -переменные  $u_j$  и их первые производные  $u'_j$  (верхний штрих “'” означает дифференцирование по новой независимой переменной  $\tau$ ) и играющее, по словам Штифеля и Шейфеле, основную роль в их построении регулярной небесной механики ([11], с. 29), имеет ясный геометрический и механический смысл и не является обязательным условием получения регулярных уравнений в  $KS$ -переменных. Более того, отказ от его выполнения позволил получить в работах [20, 21] более общие регулярные матричные (в четырехмерных кватернионных матрицах) и кватернионные (в кватернионах Гамильтона) уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в  $KS$ -переменных, которые, возможно, также найдут практическое приложение.

Объясняется это тем, что билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля эквивалентно равенству нулю проекции  $\omega_1$  вектора абсолютной угловой скорости негोलонномной системы координат  $\eta$  на направление радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Проекция  $\omega_1$  для такой системы координат является произвольно задаваемым параметром (может быть задана произвольно). В случае Кустаанхеймо–Штифеля она равна нулю:  $\omega_1 = 0$ . Отказ от выполнения этого условия и позволил Челнокову построить более общие регулярные кватернионные уравнения.

Позднее (в 1983–2008 годах) эффективность применения кватернионов для решения проблемы регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел была продемонстрирована также в работах ряда зарубежных авторов [22–26]. Так, Вальдфогель (Waldvogel) (2008) [26] утверждает, что “кватернионы для регуляризации небесной механики – верный путь”, и что кватернионы “являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике”. Вальдфогелем отмечается приоритет Челнокова в области кватернионной регуляризации со ссылкой на его статью [20] 1981 г. и другие его работы в этой области и в области практических приложений регулярных кватернионных уравнений в механике космического полета.

Отметим также вышедшую в 2011 г. книгу [16], обзорные работы [17, 27] по проблеме регуляризации уравнений небесной механики и астродинамики и недавний обширный обзор на английском языке Челнокова [28] работ по кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного центрального движения материальной точки с использованием четырехмерных  $KS$ -переменных и модифицированных четырехмерных переменных, параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), переменных Леви-Чивита. В этой работе также дается обзор приложений регулярных кватернионных уравнений к построению и исследованию регулярных уравнений орбитального движения космических аппаратов, уравнений движения спутника Земли в ее гравитационном поле с учетом зональных, тессеральных и секториальных гармоник, к решению задач оптимального управления орбитальным движением космического аппарата с использованием принципа максимума и к решению задач автономной инерциальной навигации в космосе.

Во всех работах по проблеме регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, известных авторам статьи, рассматривается регуляризация уравнений движения центра масс второго (изучаемого) тела, описывающих движение этого тела относительно системы координат, движущейся в инерциальной системе координат поступательно, т.е. рассматривается регуляризация уравнений абсолютного движения центра масс изучаемого тела. Дальнейшее развитие кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел дано Челноковым в работе (2018) [29], в которой в рам-

ках возмущенной пространственной задачи двух тел предложены регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения второго (изучаемого) тела относительно системы координат, вращающейся в инерциальной системе координат по произвольно заданному закону, а также относительно системы координат, связанной с Землей, принимаемой за первое (центральное) тело. Эти кватернионные уравнения относительного движения целесообразно использовать для решения задач прогноза и коррекции движения КА относительно Земли (т.е. не относительно инерциальной системе координат, а относительно системы координат, связанной с вращающейся Землей).

В настоящее время регулярные кватернионные уравнения в  $KS$ -переменных нашли широкое применение в задачах прикладной небесной механики и механики космического полета. Это объясняется не только указанными достоинствами этих уравнений, но и тем, что кватернионный аппарат является более мощным и гибким средством решения этих задач (в том числе и изучаемых в статье задач прогноза и коррекции орбитального движения КА) в сравнении с аппаратом специальных  $KS$ -матриц, введенных Штифелем и Шейфеле и широко используемых в их книге, а также в работах других исследователей. Поэтому многие отечественные и зарубежные исследователи используют регулярные кватернионные уравнения для решения задач прикладной небесной механики и механики космического полета.

Отметим, что в настоящее время в Центральном научно-исследовательском институте машиностроения (АО ЦНИИМАШ, г. Королев) ведутся исследования [30] (с участием авторов статьи) по использованию регулярных кватернионных уравнений орбитального движения космических аппаратов в  $KS$ -переменных совместно с использованием уравнений в декартовых координатах для решения задач оценивания параметров движения, прогноза и коррекции орбитального движения КА.

В нашей статье решение задач прогноза и коррекции орбитального движения КА предлагается решать с использованием предложенных нами ранее регулярных кватернионных уравнений орбитального движения, приведенных в разд. 2.1, и новых регулярных кватернионных орбитального движения КА, полученных в статье, а также с помощью кватернионных уравнений и соотношений в вариациях, полученных в статье из кватернионных уравнений орбитального движения КА. Перспективность такого подхода к решению задач прогноза и коррекции орбитального движения была обоснована нами выше.

В разд. 2.1 статьи рассмотрены известные, предложенные нами ранее, регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и регулярные кватернионные уравнения орбитального движения КА в четырехмерных  $KS$ -переменных, построенные на основе этих уравнений. Эти уравнения используются в статье для построения новых уравнений и соотношений, предлагаемых нами для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения.

В разд. 2.2 приведены результаты сравнительного исследования точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и КА) в декартовых координатах и предложенных Челноковым [31] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в  $KS$ -переменных, которые показывают, что точность численного интегрирования регулярных кватернионных уравнений значительно выше (на несколько порядков) точности численного интегрирования уравнений в декартовых координатах, и которые говорят в пользу использования регулярных кватернионных уравнений орбитального движения для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения КА. Эти результаты докладывались Логиновым и Челноковым [32] на XXVIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам в 2021 году. Здесь они дополнены графиками, иллюстрирующими погрешности численного интегрирования кватернионных

уравнений и уравнений в декартовых координатах, пояснениями графиков и более подробным описанием моделирования.

В разделах 2–6 статьи излагаются новые, полученные нами, результаты:

1) Формулы, устанавливающие связи вариаций декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА в инерциальной системе координат с вариациями  $KS$ -переменных и их первых производных по новой независимой переменной Зундмана (“фиктивному” времени  $\tau$ ).

2) Формулы для нахождения вариаций  $KS$ -переменных, их первых производных и реального времени  $t$  для фиксированного времени  $\tau$  по вариациям этих переменных, кеплеровской энергии и времени  $\tau$  для начального момента времени  $\tau(0) = 0$ , найденные прямым путем.

3) Матрицы изохронных производных от  $KS$ -переменных, их первых производных по времени  $\tau$  и кеплеровской энергии для эллиптического кеплеровского движения КА.

4) Линеаризованные регулярные дифференциальные кватернионные уравнения возмущенного орбитального движения КА в вариациях  $KS$ -переменных и их первых производных по времени  $\tau$ , а также дифференциальные уравнения в вариациях кеплеровской энергии и времени  $t$ , обусловленные вариациями начальных условий и вариацией действующего на КА возмущающего ускорения.

5) Различные формы новых дифференциальных регулярных кватернионных уравнений орбитального движения КА, в которых в качестве независимой переменной используется не время  $\tau$  (независимая переменная Зундмана), а безразмерное время  $\tau^*$ . Эта независимая переменная равна половинной обобщенной эксцентрической аномалии, широко используемой в небесной механике и механике космического полета. Эти уравнения, также как и наши известные уравнения, изложенные в разд. 2.1, могут быть эффективно использованы для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения.

6) Формулы для вариаций  $KS$ -переменных и их первых производных в безразмерном времени  $\tau^*$ .

7) Система дифференциальных кватернионных уравнений орбитального движения КА в регулярных кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся переменных) с использованием в качестве независимой переменной безразмерного времени  $\tau^*$ .

Полученные в статье кватернионные уравнения и соотношения в вариациях позволяют изучать и оценивать влияние изменений начальных условий движения КА и действующих возмущений на изменение текущих характеристик его движения для текущего момента времени, а также позволяют эффективно решать задачи прогноза и коррекции орбитального движения КА, используя описание движения центра масс КА в регулярных четырехмерных  $KS$ -переменных и в соответствующих им кватернионных переменных, а также в кватернионных оскулирующих элементах.

## **2. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного орбитального движения космического аппарата.**

*2.1. Регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и орбитального движения космического аппарата в  $KS$ -переменных.* В основе небесной механики и астродинамики лежит векторное ньютоновское дифференциальное уравнение возмущенной пространственной задачи двух тел

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 + f(m + M)r^{-3}\mathbf{r} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt) \quad (2.1)$$

В уравнении (2.1)  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор центра масс второго (изучаемого) тела, проведенный из центра масс первого (центрального) тела;  $r = |\mathbf{r}|$  – расстояние от центра масс второго тела до центра масс первого тела,  $m$  и  $M$  – массы второго и первого тел;  $f$  – гравитационная постоянная;  $\mathbf{p}$  – вектор возмущающего ускорения центра масс второго тела,  $t$  – время.

При  $m = 0$  уравнением (2.1) описывается возмущенное движение центра масс космического аппарата (второго тела пренебрежимо малой массы) в поле тяготения центрального тела (например, Земли).

Уравнение (2.1) вырождается при соударении второго тела с центральным телом (при равенстве нулю расстояния  $r$  между телами), что делает использование этого уравнения неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности использования уравнения (2.1). Эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, так называемая спинорная или  $KS$ -регуляризация, была предложена, как уже отмечалось, Кустанхеймо и Штифелем (1964–1965) [9, 10].

В основе регуляризации Кустанхеймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, так называемое  $KS$ -преобразование, обобщающее преобразование Леви-Чивита и имеющее вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u}_{KS}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – координаты центра масс изучаемого тела в инерциальной системе координат  $X$ , имеющей начало в центре масс центрального тела и координатные оси, направленные на удаленные звезды,  $u_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) – новые переменные ( $KS$ -переменные),  $L(\mathbf{u}_{KS})$  – обобщенная матрица Леви-Чивита, называемая  $KS$ -матрицей, содержащая в левом верхнем углу двухмерную квадратную матрицу Леви-Чивита.

В скалярной записи преобразование (2.2) имеет вид

$$x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad x_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad x_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2) \quad (2.3)$$

и с точностью до перестановки индексов совпадает с отображением Хопфа (1931) [33].

Регулярные дифференциальные уравнения Кустанхеймо–Штифеля возмущенной пространственной задачи двух тел имеют в скалярной записи следующий вид [11]:

$$u_j'' - \frac{1}{2}hu_j = \frac{1}{2}rq_j; \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

$$h' = 2 \left( q_0u_0' + q_1u_1' + q_2u_2' + q_3u_3' \right) \quad (2.5)$$

$$t' = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$q_0 = u_0p_1 - u_3p_2 + u_2p_3, \quad q_1 = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 \quad (2.6)$$

$$q_2 = -u_2p_1 + u_1p_2 + u_0p_3, \quad q_3 = -u_3p_1 - u_0p_2 + u_1p_3$$

Здесь верхний штрих, как уже отмечалось, символ дифференцирования по новой независимой переменной Зундмана  $\tau$ , называемой фиктивным временем и связанной со временем  $t$  дифференциальным уравнением (2.6):  $dt/d\tau = r$ ;  $h$  – кеплеровская энергия, рассматриваемая как дополнительная переменная и определяемая соотношением

$$h = \frac{1}{2}v^2 - f(m+M)\frac{1}{r}, \quad v = |\mathbf{v}|, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

$p_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – проекции вектора возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  центра масс второго тела на оси инерциальной системы координат. Время  $t$  также рассматривается как дополнительная (зависимая) переменная.

Уравнения (2.4)–(2.6) образуют систему десяти обыкновенных нелинейных и нестационарных (для возмущенного движения второго тела) дифференциальных уравнений относительно четырех  $KS$ -переменных  $u_j$ , кеплеровской энергии  $h$  и времени  $t$ .

Эти скалярные уравнения эквивалентны матричным уравнениям [11]

$$\mathbf{u}_{ks}'' - \frac{1}{2} h \mathbf{u}_{ks} = \frac{1}{2} r L(\mathbf{u}_{ks}) \mathbf{P}_{ks}, \quad h' = -2 \left( \mathbf{u}_{ks}', (L(\mathbf{u}_{ks}))^T \mathbf{P}_{ks} \right); \quad t' = (\mathbf{u}_{ks}, \mathbf{u}_{ks}) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u}_{ks} = (u_1, u_2, u_3, u_0), \quad \mathbf{P}_{ks} = (p_1, p_2, p_3, 0)$$

где  $\mathbf{u}_{ks}$  – четырехмерный вектор-столбец  $KS$ -переменных,  $L(\mathbf{u}_{ks})$  –  $KS$ -матрица, определяемая соотношением (2.2),  $\mathbf{P}_{ks}$  – четырехмерный вектор-столбец, сопоставляемый трехмерному вектору возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  – скалярное произведение четырехмерных вектор-столбцов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Основные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля (2.4)–(2.6) или (2.7) были указаны выше.

Билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля

$$u_1 u_0' - u_0 u_1' + u_3 u_2' - u_2 u_3' = 0 \quad (2.8)$$

связывает между собой  $KS$ -переменные и их первые производные и играет, по словам Штифеля и Шейфеле, основную роль в их построении регулярной небесной механики ([11], с. 29). Оно является первым частным интегралом дифференциальных уравнений (2.4)–(2.6) или (2.7).

Кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в  $KS$ -переменных в случае, когда выполняется выше приведенное билинейное соотношение (2.8), имеют следующий вид [21] (см. также [16, 17]):

$$\mathbf{u}'' - \frac{1}{2} h \mathbf{u} = \frac{1}{2} r \mathbf{q}, \quad h' = 2 \operatorname{scal}(\bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{q}); \quad t' = r \quad (2.9)$$

Здесь

$$r = \|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x, \quad \mathbf{p}_x = p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k},$$

$\mathbf{p}_x$  – отображение вектора  $\mathbf{p}$  возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на инерциальный базис  $X$ , символ “ $\circ$ ” означает кватернионное умножение; верхняя черта означает символ кватернионного сопряжения;  $\operatorname{scal}(\cdot)$  – скалярная часть кватерниона, стоящего в круглых скобках;  $\mathbf{u}$  – кватернионная регулярная переменная, определяемая соотношениями

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} = r^{1/2} (\lambda_0 - \lambda_1 \mathbf{i} - \lambda_2 \mathbf{j} - \lambda_3 \mathbf{k}) = r^{1/2} \bar{\lambda},$$

где  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}$  – кватернион ориентации выше описанной системы координат  $\eta$ , вращающейся в инерциальной системе координат  $X$ ,  $\bar{\lambda}$  – сопряженный кватернион:  $\bar{\lambda} = \lambda_0 - \lambda_1 \mathbf{i} - \lambda_2 \mathbf{j} - \lambda_3 \mathbf{k}$ ;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – векторные мнимые единицы Гамильтона.

В подвижной системе координат  $\eta$  Челноковым записывается [20, 21] исходное векторное ньютоновское дифференциальное уравнение возмущенной пространственной задачи двух тел (2.1) с целью дальнейшей его регуляризации и получения кватернионных уравнений (2.9).

Отметим, что в наших работах [20, 21] получены более общие матричные и кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в  $KS$ -переменных в общем случае, когда билинейное соотношение (2.8) не выполняется.

В кватернионных уравнениях (2.9) в качестве переменных выступают кватернион  $\mathbf{u}$ , компонентами которого являются регулярные  $KS$ -переменные  $u_j$ , кеплеровская энер-

гия  $h$  и время  $t$ . Эти уравнения имеют все ранее указанные достоинства матричных регулярных уравнений (2.7), предложенных Кустаанхеймо и Штифелем. Однако, как уже отмечалось, в отличие от них, они позволяют использовать кватернионный аппарат, который является более мощным и гибким средством решения изучаемых в статье задач по сравнению с аппаратом специальных  $KS$ -матриц  $L(\mathbf{u}_{ks})$ , введенных Штифелем и Шейфеле и широко используемых в их книге, а также в работах других исследователей. Поэтому регулярные кватернионные уравнения в  $KS$ -переменных в настоящее время также широко используются для решения задач прикладной небесной механики и астродинамики.

Дополнительно отметим, что линейность кватернионных уравнений (2.9) для кеплеровских движений позволяет эффективно построить новые регулярные кватернионные уравнения орбитального движения в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся переменных), удобные для исследования и прогноза возмущенного движения космических тел и аппаратов.

Для нахождения декартовых координат  $x_k$  изучаемого тела в инерциальной системе координат  $X$  и проекций  $v_k = dx_k/dt$  вектора его скорости  $\mathbf{v}$  на оси этой системы координат служат кватернионные соотношения

$$\mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = d\mathbf{r}_x/dt = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{u}/dt) = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{u}/d\tau) \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{r}_x$  и  $\mathbf{v}_x$  — отображения векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  на инерциальный базис,  $v_k$  — проекции вектора скорости  $\mathbf{v}$  оси инерциальной системы координат  $X$ .

В скалярной записи выражения для проекций  $v_k$  вектора скорости  $\mathbf{v}$  имеют вид соотношений

$$\begin{aligned} v_1 = \dot{x}_1 &= 2r^{-1} \left( u_0 u'_0 + u_1 u'_1 - u_2 u'_2 - u_3 u'_3 \right) \\ v_2 = \dot{x}_2 &= 2r^{-1} \left( -u_3 u'_0 + u_2 u'_1 + u_1 u'_2 - u_0 u'_3 \right) \\ v_3 = \dot{x}_3 &= 2r^{-1} \left( u_2 u'_0 + u_3 u'_1 + u_0 u'_2 + u_1 u'_3 \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где верхняя точка — символ производной по времени  $t$ .

*2.2. Исследование точности численного интегрирования регулярных кватернионных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел (уравнений орбитального движения космического аппарата) в переменных Кустаанхеймо—Штифеля.* Логиновым и Челноковым проведено [32] сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных нами [31] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в четырехмерных  $KS$ -переменных, принимающих вид регулярных кватернионных уравнений (2.9) возмущенной пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны.

Исследована точность определения траектории орбитального движения космического аппарата в поле тяготения Земли и Луны для четырех орбит: круговой (влияние поля тяготения Луны не учитывается), двух возмущенных эллиптических с малым эксцентриситетом 0.05 и одной возмущенной эллиптической с большим эксцентриситетом 0.85 (учитываются возмущения от силы гравитации Луны). Траектория КА определялась численным интегрированием классических ньютоновских дифференциальных уравнений в декартовых координатах и предложенных нами регулярных кватернионных дифференциальных уравнений в  $KS$ -переменных методом Рунге—

Кутты 4-го порядка. Уравнения в  $KS$ -переменных интегрировались в “фиктивном” времени  $\tau$ . Оно является новой независимой переменной в регулярных уравнениях и связано с реальным временем  $t$  дифференциальным соотношением (2.6), содержащим расстояние от КА до центра масс Земли. В реальном времени шаги интегрирования регулярных кватернионных и классических ньютоновских дифференциальных уравнений совпадали.

На интервале времени в 50 оборотов КА выполнялось прямое, а затем обратное интегрирование уравнений движения. При прямом интегрировании реальное время  $t$  нарастает от нуля до конечного значения  $t_{\text{end}}$ , а фиктивное время  $\tau$  – от нуля до конечного значения  $\tau_{\text{end}}$ , соответствующего конечному реальному времени  $t_{\text{end}}$ . При этом КА движется по траектории, которую будем называть *прямой траекторией*.

При обратном интегрировании реальное время  $t$  и фиктивное время  $\tau$  убывает от своих соответствующих значений  $t_{\text{end}}$  и  $\tau_{\text{end}}$  до нуля, в качестве начальных условий интегрирования выступают параметры движения КА в конечной точке прямой траектории (т.е. параметры, полученные при прямом интегрировании для моментов времени  $t_{\text{end}}$  и  $\tau_{\text{end}}$ ), а КА из этой точки движется в обратную сторону по траектории, которую будем называть *обратной траекторией*.

Эти прямую и обратную траектории, полученные путем численного интегрирования уравнений движения, будем называть *численными траекториями*.

В результате прямого интегрирования классических ньютоновских уравнений для каждого момента реального времени  $t \in [0, t_{\text{end}}]$  вычисляется радиус-вектор КА  $r_{\text{frw}}^{\text{clas}}$ . Каждому моменту реального времени  $t \in [0, t_{\text{end}}]$  соответствует момент фиктивного времени  $\tau \in [0, \tau_{\text{end}}]$ , для которого в результате прямого интегрирования кватернионных уравнений вычисляется радиус-вектор КА  $r_{\text{frw}}^{\text{KS}}$ .

В результате обратного интегрирования классических ньютоновских уравнений для каждого момента реального времени  $t \in [t_{\text{end}}, 0]$  вычисляется радиус-вектор КА  $r_{\text{rev}}^{\text{clas}}$ . Каждому моменту реального времени  $t \in [t_{\text{end}}, 0]$  соответствует момент фиктивного времени  $\tau \in [\tau_{\text{end}}, 0]$ , для которого в результате обратного интегрирования кватернионных уравнений вычисляется радиус-вектор КА  $r_{\text{rev}}^{\text{KS}}$ .

В силу погрешностей методов численного интегрирования прямая и обратная траектории (т.е. радиус-векторы КА, вычисленные для каждого момента времени в результате прямого и обратного интегрирования) не совпадают между собой.

Первая орбита представляет особый случай, так как является круговой, а влияние поля тяготения Луны для нее не учитывается, поэтому для этой орбиты известен аналитический закон движения КА. С помощью этого аналитического закона вычислялась траектория, которую будем называть *истинной траекторией*. Каждому моменту времени  $t$  при движении по истинной траектории соответствует радиус-вектор КА  $r_{\text{true}}$ , не зависящий от направления движения (прямого или обратного) вдоль этой траектории.

Радиус-векторы  $r_{\text{frw}}^{\text{clas}}$ ,  $r_{\text{frw}}^{\text{KS}}$ ,  $r_{\text{rev}}^{\text{clas}}$ ,  $r_{\text{rev}}^{\text{KS}}$ ,  $r_{\text{true}}$  проведены из центра масс Земли.

Приведем описания орбит, методы сравнения точности интегрирования, а также условия и результаты моделирования для каждой из них. Первая орбита – круговая. По этой орбите объект движется вокруг Земли на расстоянии 10000 км от ее центра. Период обращения объекта вокруг Земли составил 2.8 часа, интервал интегрирования – 50 оборотов (около 139 часов), шаг интегрирования в реальном времени – 30 с.

Для первой орбиты точность численного решения дифференциальных уравнений движения определялась с помощью отклонения  $\Delta r^*$  прямой и обратной численных траекторий от истинной траектории. Отклонение  $\Delta r^*$  в каждый момент времени опре-

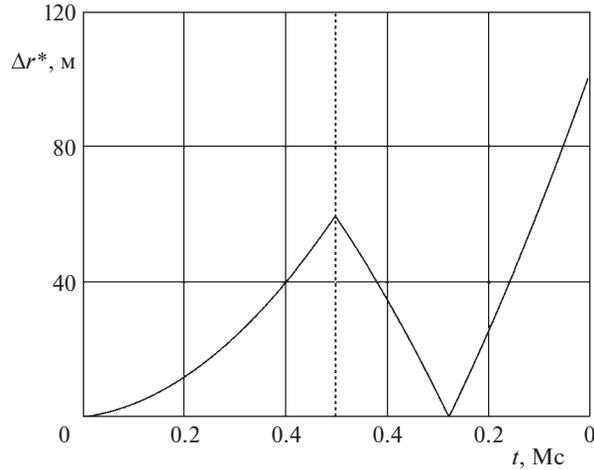


Рис. 1. Отклонение  $\Delta r^*$ : орбита 1 (круговая), классические ньютоновские уравнения.

деляется для классических ньютоновских уравнений соотношением  $\Delta r^* = |r_{\text{frw}}^{\text{clas}} - r_{\text{true}}|$  при прямом интегрировании и соотношением  $\Delta r^* = |r_{\text{rev}}^{\text{clas}} - r_{\text{true}}|$  при обратном интегрировании, а для кватернионных уравнений – соотношением  $\Delta r^* = |r_{\text{frw}}^{\text{KS}} - r_{\text{true}}|$  при прямом интегрировании и соотношением  $\Delta r^* = |r_{\text{rev}}^{\text{KS}} - r_{\text{true}}|$  при обратном интегрировании.

Результаты исследования точности численного решения для первой орбиты представлены на рис. 1 и 2 графиками, показывающими зависимость отклонения  $\Delta r^*$  от времени при прямом и обратном интегрировании классических ньютоновских уравнений (рис. 1) и кватернионных уравнений (рис. 2). Здесь и далее на всех графиках для кватернионных уравнений вместо значений фиктивного времени  $\tau$  представлены соответствующие значения реального времени  $t$ .

Область слева от вертикальной пунктирной линии соответствует прямому интегрированию, в этой области при движении слева направо по оси абсцисс время  $t$  нарастает. Для оценки точности интегрирования использовано значение  $\Delta r^*$  на вертикальной пунктирной линии, то есть в конечный момент времени прямого интегрирования.

Область справа от пунктирной линии соответствует обратному интегрированию, в ней при движении слева направо по оси абсцисс время  $t$ , напротив, убывает. Эта область приведена для демонстрации существенного различия поведения отклонения  $\Delta r^*$  для классических ньютоновских и регулярных кватернионных уравнений.

Видно, что для классических уравнений отклонение  $\Delta r^*$  достигает максимума в конечный момент времени обратного интегрирования. Для кватернионных уравнений отклонение  $\Delta r^*$  достигает максимума в конечный момент времени прямого интегрирования, а при обратном интегрировании убывает, достигая в конечный момент времени обратного интегрирования значения, близкого к нулю. Причина такого различия в том, что регулярные кватернионные уравнения в  $KS$ -переменных для невозмущенной круговой орбиты линейны, а классические ньютоновские уравнения – нелинейны.

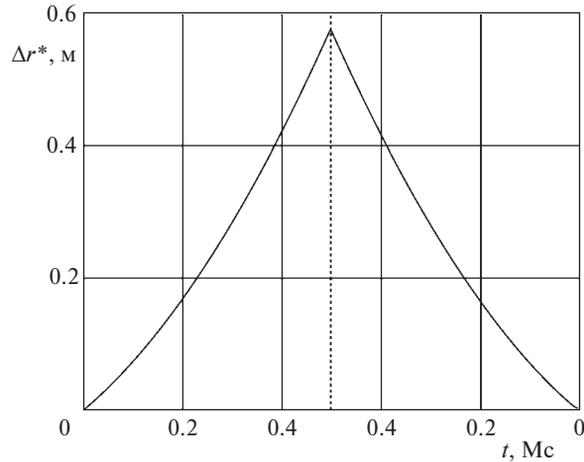


Рис. 2. Отклонение  $\Delta r^*$ : орбита 1 (круговая), уравнения в  $KS$ -переменных.

Параметры второй, третьей и четвертой невозмущенных орбит взяты из книги Бордовицыной [4] (с. 95, табл. 2 для начальных значений декартовых координат КА и проекций его вектора начальной скорости). Эксцентриситет второй невозмущенной орбиты – 0.05, период оборота – 2 часа, интервал интегрирования уравнений возмущенного движения – 100 часов, шаг интегрирования в реальном времени – 30 секунд. Эксцентриситет третьей невозмущенной орбиты – 0.05, период оборота – 20 часов, интервал интегрирования уравнений возмущенного движения – 1000 часов, шаг интегрирования в реальном времени – 360 секунд. Эксцентриситет четвертой невозмущенной орбиты – 0.85, период оборота – 20 часов, интервал интегрирования уравнений возмущенного движения – 1000 часов, шаг интегрирования в реальном времени – 60 секунд.

Для этих трех орбит аналитический закон движения неизвестен, поэтому точность численного решения дифференциальных уравнений движения определялась с помощью отклонения  $\Delta r$  обратной численной траектории КА от его прямой численной траектории. Подобный метод использован в книге Бордовицыной [4]. Отклонение  $\Delta r$  в каждый момент времени определяется для классических ньютоновских уравнений соотношением  $\Delta r = \left| r_{\text{rev}}^{\text{clas}} - r_{\text{fww}}^{\text{clas}} \right|$ , а для кватернионных уравнений – соотношением  $\Delta r = \left| r_{\text{rev}}^{\text{KS}} - r_{\text{fww}}^{\text{KS}} \right|$ .

Результаты исследования точности интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений и кватернионных уравнений в  $KS$ -переменных для второй орбиты представлены графиками на рис. 3 и 4, для третьей орбиты – на рис. 5 и 6, для четвертой орбиты – на рис. 7 и 8. На этих графиках представлена зависимость отклонения  $\Delta r$  от времени. В отличие от графиков для первой (круговой) орбиты, здесь представлено только обратное интегрирование, поэтому при движении слева направо по оси абсцисс время  $t$  убывает. Для оценки точности численного решения использовано максимальное на интервале интегрирования значение  $\Delta r$ .

Из графиков на рис. 3 и 4 видно, что в случае второй орбиты отклонение  $\Delta r$  для классических ньютоновских уравнений нарастает по закону, близкому к экспоненциальному, а для уравнений в  $KS$ -переменных – по закону, близкому к линейному.

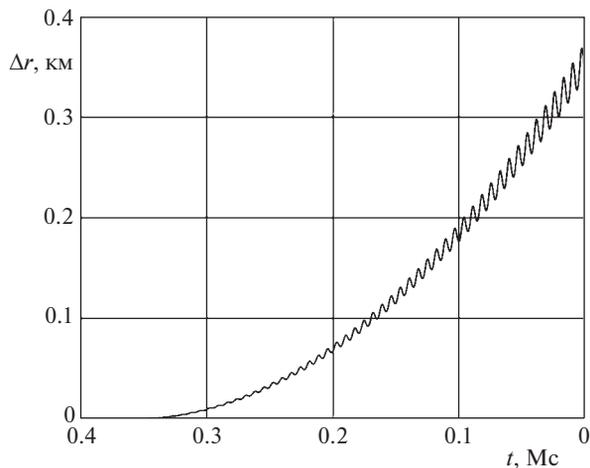


Рис. 3. Отклонение  $\Delta r$ : орбита 2, классические ньютоновские уравнения.

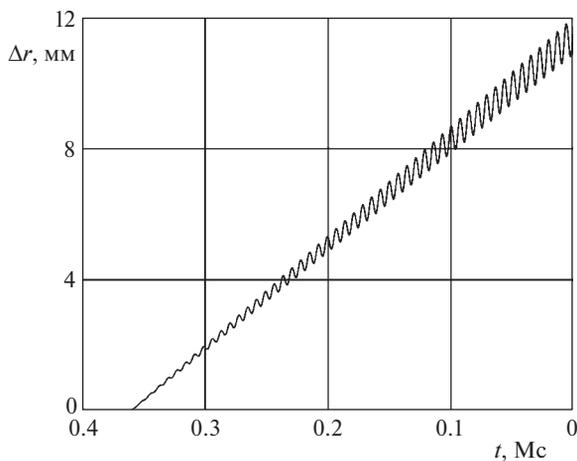


Рис. 4. Отклонение  $\Delta r$ : орбита 2, уравнения в  $KS$ -переменных.

Графики на рис. 5 и 6 показывают, что в случае третьей орбиты отклонение  $\Delta r$  для классических ньютоновских уравнений нарастает по закону, близкому к экспоненциальному, а для уравнений в  $KS$ -переменных — по закону, близкому к линейному.

Графики на рис. 7 и 8 для четвертой орбиты демонстрируют колебательные составляющие с гораздо большей, чем для остальных орбит, амплитудой, что связано с большим эксцентриситетом орбиты. На рис. 8 видно, что для кватернионных уравнений абсолютные значения амплитуды колебаний  $\Delta r$  на интервале интегрирования являются минимальными из всех рассмотренных случаев и не превышают  $2.7 \times 10^{-6}$  м, однако нарастание амплитуды не является монотонным. Отсутствие монотонности нарастания амплитуды, по всей видимости, объясняется ограниченностью разрядной сетки вычислителя, реализующего алгоритм численного интегрирования.

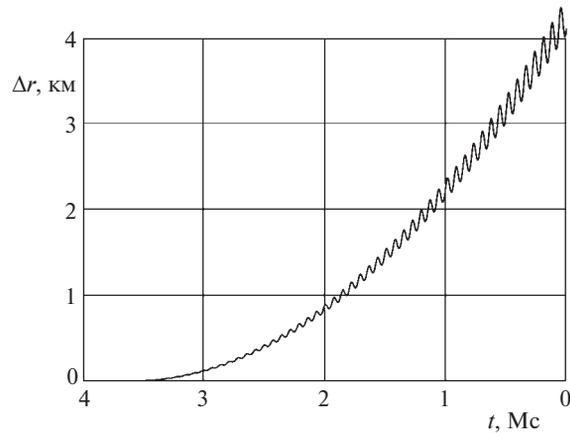


Рис. 5. Отклонение  $\Delta r$ : орбита 3, классические ньютоновские уравнения.

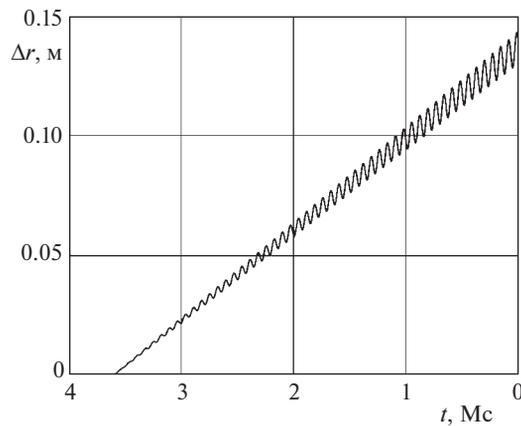


Рис. 6. Отклонение  $\Delta r$ : орбита 3, уравнения в  $KS$ -переменных.

По результатам моделирования регулярные кватернионные уравнения в  $KS$ -переменных показали значительно более высокую точность, чем уравнения в декартовых координатах. Графики на рис. 1–8 показывают, что для круговой орбиты точность оказалась выше на два порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом – на четыре порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом – на семь порядков. Отметим, что в книге Бордовицкой [4] приведены результаты численных исследований решений уравнений невозмущенной и возмущенной пространственной задачи двух тел (решений уравнений невозмущенного и возмущенного движения ИСЗ) ряда авторов с использованием других известных (канонических) уравнений в  $KS$ -переменных, построенных с использованием соответствующего гамильтониана, и уравнений в декартовых координатах, демонстрирующие преимущество уравнений в  $KS$ -переменных перед уравнениями в декартовых координатах (в смысле точности их численного интегрирования). Сравнение этих результатов с нашими результатами показало, что они в целом согласуются между собой.

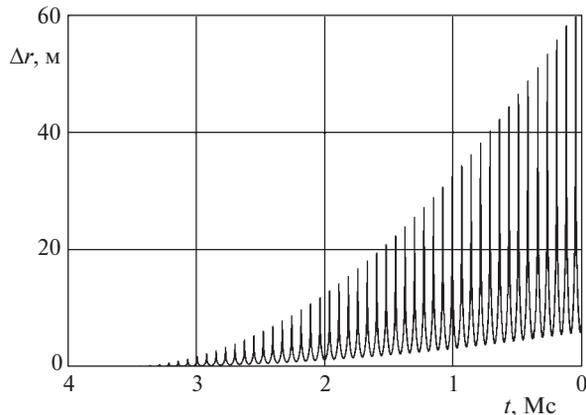


Рис. 7. Отклонение  $\Delta r$ : орбита 4, классические ньютоновские уравнения.

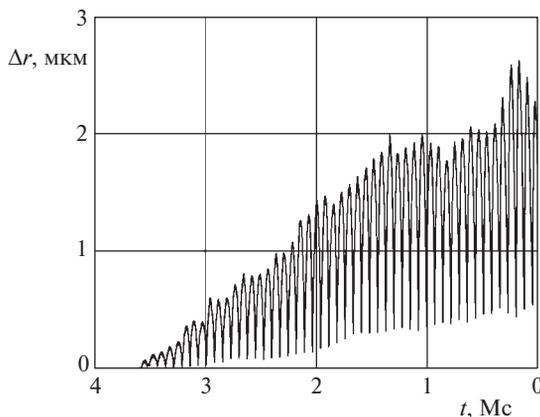


Рис. 8. Отклонение  $\Delta r$ : орбита 4, уравнения в  $KS$ -переменных.

Полученные нами результаты численного исследования подтверждают значительные преимущества регулярных кватернионных уравнений в  $KS$ -переменных в задачах прогноза движения небесных и космических тел, а также в задачах коррекции параметров орбитального движения КА и инерциальной навигации в космосе перед уравнениями в декартовых координатах. Они обосновывают перспективность использования регулярных кватернионных уравнений для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения КА.

**3. Связи вариаций декартовых координат и проекций вектора скорости космического аппарата с вариациями  $KS$ -переменных и их первых производных.** Вариации  $\delta x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) декартовых координат  $x_k$  КА могут быть найдены через вариации  $\delta u_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ )  $KS$ -переменных  $u_j$  по формулам

$$\delta x_k = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial x_k}{\partial u_j} \delta u_j; \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

Используя формулы (3.1) и (2.3), получаем следующие скалярные выражения для нахождения вариаций  $\delta x_k$  через вариации  $\delta u_j$ :

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= 2(u_0\delta u_0 + u_1\delta u_1 - u_2\delta u_2 - u_3\delta u_3) \\ \delta x_2 &= 2(-u_3\delta u_0 + u_2\delta u_1 + u_1\delta u_2 - u_0\delta u_3) \\ \delta x_3 &= 2(u_2\delta u_0 + u_3\delta u_1 + u_0\delta u_2 + u_1\delta u_3)\end{aligned}\quad (3.2)$$

В кватернионной записи соотношения (3.2) примут вид (3.3):

$$\delta \mathbf{r}_x = \delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{u} = 2 \text{vect}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{u}), \quad (3.3)$$

где вариация  $\delta \mathbf{r}_x$  отображения  $\mathbf{r}_x$  радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА на инерциальный базис  $X$  и вариация  $\delta \mathbf{u}$  кватернионной регулярной переменной  $\mathbf{u}$  определяются соотношениями

$$\delta \mathbf{r}_x = \delta x_1 \mathbf{i} + \delta x_2 \mathbf{j} + \delta x_3 \mathbf{k}, \quad \delta \mathbf{u} = \delta u_0 + \delta u_1 \mathbf{i} + \delta u_2 \mathbf{j} + \delta u_3 \mathbf{k}, \quad (3.4)$$

а  $\text{vect}(\mathbf{a})$  означает векторную часть кватерниона  $\mathbf{a}$ , заключенного в круглые скобки.

Вариации  $\delta v_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) проекций  $v_k$  вектора скорости  $\mathbf{v}$  центра масс КА на оси инерциальной системы координат  $X$  могут быть найдены через вариации  $\delta u_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ )  $KS$ -переменных  $u_j$  и вариации  $\delta u'_j = \delta s_j$  их первых производных  $u'_j = s_j$  по формулам

$$\delta v_k = \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial v_k}{\partial u_j} \delta u_j + \frac{\partial v_k}{\partial u'_j} \delta u'_j \right) = \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial v_k}{\partial u_j} \delta u_j + \frac{\partial v_k}{\partial s_j} \delta s_j \right); \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Используя формулы (3.5) и (2.12), получаем выражения (3.6) или (3.7) для нахождения вариаций  $\delta v_k$  через вариации  $\delta u_j$  и  $u'_j = s_j$ :

$$\begin{aligned}\delta v_1 &= -4r^{-2}(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \left( u_0 u'_0 + u_1 u'_1 - u_2 u'_2 - u_3 u'_3 \right) + \\ &+ 2r^{-1} \left( u_0 \delta u'_0 + u_1 \delta u'_1 - u_2 \delta u'_2 - u_3 \delta u'_3 + u'_0 \delta u_0 + u'_1 \delta u_1 - u'_2 \delta u_2 - u'_3 \delta u_3 \right) \\ \delta v_2 &= -4r^{-2}(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \left( -u_3 u'_0 + u_2 u'_1 + u_1 u'_2 - u_0 u'_3 \right) + \\ &+ 2r^{-1} \left( -u_3 \delta u'_0 + u_2 \delta u'_1 + u_1 \delta u'_2 - u_0 \delta u'_3 - u'_0 \delta u_3 + u'_1 \delta u_2 + u'_2 \delta u_1 - u'_3 \delta u_0 \right)\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\delta v_3 &= -4r^{-2}(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \left( u_2 u'_0 + u_3 u'_1 + u_0 u'_2 + u_1 u'_3 \right) + \\ &+ 2r^{-1} \left( u_2 \delta u'_0 + u_3 \delta u'_1 + u_0 \delta u'_2 + u_1 \delta u'_3 + u'_0 \delta u_2 + u'_1 \delta u_3 + u'_2 \delta u_0 + u'_3 \delta u_1 \right) \\ \delta v_1 &= -4r^{-2}(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) (u_0 s_0 + u_1 s_1 - u_2 s_2 - u_3 s_3) + \\ &+ 2r^{-1} (u_0 \delta s_0 + u_1 \delta s_1 - u_2 \delta s_2 - u_3 \delta s_3 + s_0 \delta u_0 + s_1 \delta u_1 - s_2 \delta u_2 - s_3 \delta u_3) \\ \delta v_2 &= -4r^{-2}(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) (-u_3 s_0 + u_2 s_1 + u_1 s_2 - u_0 s_3) + \\ &+ 2r^{-1} (-u_3 \delta s_0 + u_2 \delta s_1 + u_1 \delta s_2 - u_0 \delta s_3 - s_0 \delta u_3 + s_1 \delta u_2 + s_2 \delta u_1 - s_3 \delta u_0) \\ \delta v_3 &= -4r^{-2}(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) (u_2 s_0 + u_3 s_1 + u_0 s_2 + u_1 s_3) + \\ &+ 2r^{-1} (u_2 \delta s_0 + u_3 \delta s_1 + u_0 \delta s_2 + u_1 \delta s_3 + s_0 \delta u_2 + s_1 \delta u_3 + s_2 \delta u_0 + s_3 \delta u_1),\end{aligned}\quad (3.7)$$

где

$$2(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) = 2(u_0 \delta u_0 + u_1 \delta u_1 + u_2 \delta u_2 + u_3 \delta u_3) = \delta r \quad (3.8)$$

В кватернионной записи соотношения (3.6) и (3.7) принимают вид соотношений (2.9) и (2.10) соответственно:

$$\delta \mathbf{v}_x = -4r^{-2} (\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}' + 2r^{-1} (\delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}' + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{u}') \quad (3.9)$$

$$\delta \mathbf{v}_x = -4r^{-2} (\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} + 2r^{-1} (\delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{s}), \quad (3.10)$$

где  $\delta \mathbf{v}_x = \delta v_1 \mathbf{i} + \delta v_2 \mathbf{j} + \delta v_3 \mathbf{k}$  – отображение вариации вектора скорости  $\mathbf{v}$  на инерциальный базис  $X$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{u}'$ ,  $\delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{u}'$ .

Отметим, что скалярная часть суммы кватернионных произведений в соотношениях (3.9) и (3.10) равна нулю:

$$\begin{aligned} \text{scal}(\delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}' + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{u}') &= \text{scal}(\delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{s}) = \\ &= u'_0 \delta u_1 - u'_1 \delta u_0 + u'_2 \delta u_3 - u'_3 \delta u_2 + u_1 \delta u'_0 - u_0 \delta u'_1 + u_3 \delta u'_2 - u_2 \delta u'_3 = 0 \end{aligned}$$

в силу билинейного соотношения (2.8).

Поэтому

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}' + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{u}' &= \text{vect}(\delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}' + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{u}') \\ \delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{s} &= \text{vect}(\delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{s}) \end{aligned}$$

Для круговой орбиты, когда модуль радиус-вектора КА  $r = \text{const}$ , вариация  $\delta r = 0$ . Соотношения (3.9) и (3.10) упрощаются и принимают вид

$$\delta \mathbf{v}_x = 2r^{-1} (\delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}' + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{u}') = 2r^{-1} (\delta \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} + \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \delta \mathbf{s})$$

**4. Решения регулярных кватернионных уравнений орбитального движения КА в вариациях для эллиптического кеплеровского движения в  $KS$ -переменных и изохронные производные.** Получим соотношения, позволяющие изучать и оценивать влияние изменений начальных условий движения КА на изменения текущих характеристик его движения для текущего момента времени, используя описание движения центра масс КА в  $KS$ -переменных. Другими словами, найдем вариации  $\delta u_j(\tau)$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ )  $KS$ -переменных  $u_j$  и вариации  $\delta u'_j(\tau) = \delta s_j(\tau)$  их первых производных  $u'_j = s_j$  для фиксированного времени  $\tau$  по вариациям  $\delta u_j(\tau_0)$  и  $\delta u'_j(\tau_0) = \delta s_j(\tau_0)$  этих переменных для начального момента времени  $\tau_0$  в случае эллиптического кеплеровского движения КА.

Для решения этой задачи воспользуемся прямым путем – варьированием кватернионных конечных соотношений, описывающих общее решение кватернионных регулярных дифференциальных уравнений движения центра масс КА в  $KS$ -переменных для его невозмущенного кеплеровского движения

$$\mathbf{u}'' - \frac{1}{2} h \mathbf{u} = 0, \quad h' = 0, \quad t' = r, \quad (4.1)$$

получающихся из уравнений (1.9) в случае невозмущенного кеплеровского движения КА (при отсутствии возмущающего ускорения центра масс КА, когда кватернион  $\mathbf{q} = 0$ ).

В скалярной записи эти уравнения имеют следующий вид:

$$u_j'' - \frac{1}{2} h u_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad h' = 0, \quad t' = r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (4.2)$$

(получаются из уравнений (2.4) и (2.5) при  $q_j = 0$ ).

В случае движения КА по эллиптической орбите, когда кеплеровская энергия  $h < 0$ , кватернионное уравнение системы уравнений (4.1) принимает вид уравнений движения одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора. Общее решение системы (4.1) или (4.2) имеет вид

$$\mathbf{u}(\tau) = k^{-1} \mathbf{u}'(0) \sin(k\tau) + \mathbf{u}(0) \cos(k\tau), \quad \mathbf{u}'(\tau) = \mathbf{u}'(0) \cos(k\tau) - k \mathbf{u}(0) \sin(k\tau) \quad (4.3)$$

$$t = \int_0^\tau \|\mathbf{u}(\tau)\| d\tau = -\frac{fM}{2h} \tau + \frac{1}{2k} \left[ \|\mathbf{u}(0)\|^2 + \frac{fM}{2h} \right] \sin(2k\tau) - \frac{1}{h} [\text{scal}(\bar{\mathbf{u}}'(0) \circ \mathbf{u}(0))] (1 - \cos(2k\tau)) \quad (4.4)$$

$$k = (-h/2)^{1/2}, \quad h = h(0) = \text{const} < 0 \quad (4.5)$$

Переменные  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s} = \mathbf{u}'$  в этом случае – гармонические функции переменной  $\tau$ ,  $k$  – частота осциллятора.

Отметим, что в случае круговой орбиты время  $t$  и фиктивное время  $\tau$  связаны прямо пропорциональной зависимостью:  $t = r\tau$ .

Соотношения (4.3) запишем также в виде

$$\mathbf{u}(\tau) = k^{-1} \mathbf{s}(0) \sin(k\tau) + \mathbf{u}(0) \cos(k\tau), \quad \mathbf{s}(\tau) = \mathbf{s}(0) \cos(k\tau) - k\mathbf{u}(0) \sin(k\tau) \quad (4.6)$$

Запишем кватернионные соотношения (4.6) (общее решение системы (4.1)) в скалярном виде

$$\begin{aligned} u_j(\tau) &= k^{-1} s_j(0) \sin(k\tau) + u_j(0) \cos(k\tau) \\ s_j(\tau) &= s_j(0) \cos(k\tau) - k u_j(0) \sin(k\tau); \quad j = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Вариации  $\delta u_j(\tau)$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ )  $KS$ -переменных  $u_j$  и вариации  $\delta u'_j(\tau) = \delta s_j(\tau)$  их первых производных  $u'_j = s_j$  для фиксированного времени  $\tau$  могут быть найдены по вариациям  $\delta u_j(\tau_0)$  и  $\delta u'_j(\tau_0) = \delta s_j(\tau_0)$  этих переменных, а также по вариации  $\delta h_0$  кеплеровской энергии  $h$  для начального момента фиктивного времени  $\tau_0 = 0$  в случае эллиптического кеплеровского движения КА, описываемого соотношениями (4.7), по формулам

$$\begin{aligned} \delta u_j(\tau) &= \left( \frac{\partial u_j}{\partial u_{00}} \right)_\tau \delta u_{00} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial u_{10}} \right)_\tau \delta u_{10} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial u_{20}} \right)_\tau \delta u_{20} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial u_{30}} \right)_\tau \delta u_{30} + \\ &+ \left( \frac{\partial u_j}{\partial s_{00}} \right)_\tau \delta s_{00} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial s_{10}} \right)_\tau \delta s_{10} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial s_{20}} \right)_\tau \delta s_{20} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial s_{30}} \right)_\tau \delta s_{30} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial h_0} \right)_\tau \delta h_0; \quad j = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \delta s_j(\tau) &= \left( \frac{\partial s_j}{\partial u_{00}} \right)_\tau \delta u_{00} + \left( \frac{\partial s_j}{\partial u_{10}} \right)_\tau \delta u_{10} + \left( \frac{\partial s_j}{\partial u_{20}} \right)_\tau \delta u_{20} + \left( \frac{\partial s_j}{\partial u_{30}} \right)_\tau \delta u_{30} + \left( \frac{\partial s_j}{\partial s_{00}} \right)_\tau \delta s_{00} + \\ &+ \left( \frac{\partial s_j}{\partial s_{10}} \right)_\tau \delta s_{10} + \left( \frac{\partial s_j}{\partial s_{20}} \right)_\tau \delta s_{20} + \left( \frac{\partial s_j}{\partial s_{30}} \right)_\tau \delta s_{30} + \left( \frac{\partial s_j}{\partial h_0} \right)_\tau \delta h_0; \quad j = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $u_{j0} = u_j(\tau_0) = u_j(0)$ ,  $s_{j0} = s_j(\tau_0) = s_j(0)$ ,  $h_0 = h(\tau_0) = h(0)$ .

Подставляя соотношения (4.7) в формулы (4.8) и (4.9), получаем следующие соотношения для нахождения вариаций  $KS$ -переменных и их первых производных для фиксированного времени  $\tau$  по вариациям этих переменных для начального момента времени  $\tau_0 = 0$  в случае эллиптического кеплеровского движения КА:

$$\begin{aligned} \delta u_j(\tau) &= \cos(k\tau) \delta u_{j0} + k^{-1} \sin(k\tau) \delta s_{j0} + \\ &+ (1/4 \{ k^{-1} \tau \sin(k\tau) u_{j0} + k^{-2} [k^{-1} \sin(k\tau) - \tau \cos(k\tau)] s_{j0} \}) \delta h_0; \quad j = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \delta s_j(\tau) &= -k \sin(k\tau) \delta u_{j0} + \cos(k\tau) \delta s_{j0} + \\ &+ (1/4 \{ [k^{-1} \sin(k\tau) + \tau \cos(k\tau)] u_{j0} + k^{-1} \tau \sin(k\tau) s_{j0} \}) \delta h_0; \quad j = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.11)$$

В кватернионной записи формулы (4.10) и (4.11) принимают вид

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}(\tau) &= \cos(k\tau)\delta \mathbf{u}_0 + k^{-1} \sin(k\tau)\delta \mathbf{s}_0 + \\ &+ (1/4 \left\{ k^{-1}\tau \sin(k\tau)\mathbf{u}_0 + k^{-2} \left[ k^{-1} \sin(k\tau) - \tau \cos(k\tau) \right] \mathbf{s}_0 \right\} \delta h_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{s}(\tau) &= -k \sin(k\tau)\delta \mathbf{u}_0 + \cos(k\tau)\delta \mathbf{s}_0 + \\ &+ (1/4 \left\{ \left[ k^{-1} \sin(k\tau) + \tau \cos(k\tau) \right] \mathbf{u}_0 + k^{-1}\tau \sin(k\tau)\mathbf{s}_0 \right\} \delta h_0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\tau_0) = \mathbf{u}(0)$ ,  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}(\tau_0) = \mathbf{s}(0)$ , частота  $k$  определяется формулой (4.5).

Соотношения (4.10), (4.11) или (4.12), (4.13) – решение уравнений орбитального движения КА в вариациях  $KS$ -переменных и их первых производных для эллиптического кеплеровского движения КА. В этом решении постоянные интегрирования определены для начального момента времени  $\tau_0 = 0$ .

В матричной записи это решение принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}(\tau) \\ \delta \mathbf{s}(\tau) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(k\tau)E & k^{-1} \sin(k\tau)E \\ -k \sin(k\tau)E & \cos(k\tau)E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}_0 \\ \delta \mathbf{s}_0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{4} \delta h_0 \begin{pmatrix} \left[ k^{-1}\tau \sin(k\tau) \right] E & k^{-2} \left[ k^{-1} \sin(k\tau) - \tau \cos(k\tau) \right] E \\ \left[ k^{-1} \sin(k\tau) + \tau \cos(k\tau) \right] E & \left[ k^{-1}\tau \sin(k\tau) \right] E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{s}_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $E$  – единичная матрица размерами  $4 \times 4$ , а  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{s}$ ;  $\delta \mathbf{u}_0$ ,  $\delta \mathbf{s}_0$  и  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{s}_0$  – четырехмерные вектор-столбцы с элементами  $\delta u_j$ ,  $\delta s_j$ ;  $\delta u_{j_0}$ ,  $\delta s_{j_0}$  и  $u_{j_0}$ ,  $s_{j_0}$ , соответственно.

Отметим, что слагаемые в соотношениях (4.12) и (4.13) или в (4.14), содержащие в качестве множителей величины  $\tau \sin(k\tau)$  и  $\tau \cos(k\tau)$  перед вариацией  $\delta h$  кеплеровской энергии  $h$ , показывают, что при неточном задании кеплеровской энергии  $h$  (при наличии ее вариации  $\delta h$ ) вариации  $\delta \mathbf{u}$  и  $\delta \mathbf{s}$   $KS$ -переменных и их первых производных для эллиптического кеплеровского движения КА растут во времени  $\tau$  и, следовательно, вариации  $\delta \mathbf{u}$  и  $\delta \mathbf{s}$  неустойчивы в смысле Ляпунова во времени  $\tau$ . При отсутствии вариации  $\delta h$  (при точном задании кеплеровской энергии  $h$ ) эта неустойчивость исчезает (в этом случае вариации  $\delta \mathbf{u}$  и  $\delta \mathbf{s}$  ведут себя как гармонические функции времени  $\tau$ ). Известно, что движение материальной точки в ньютоновском гравитационном поле по эллиптической траектории неустойчиво по отношению к декартовым координатам (показано еще Ляпуновым) в смысле Ляпунова. Также известно, что неустойчивость по декартовым координатам развивается быстрее, чем неустойчивость по  $KS$ -переменным.

Решение (4.14) можно также записать в другой матричной форме

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}(\tau) \\ \delta \mathbf{s}(\tau) \\ \delta h(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k\tau)E & k^{-1} \sin(k\tau)E & a(\tau)\mathbf{u}_0 + b(\tau)\mathbf{s}_0 \\ -k \sin(k\tau)E & \cos(k\tau)E & c(\tau)\mathbf{u}_0 + a(\tau)\mathbf{s}_0 \\ 0_4 & 0_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}_0 \\ \delta \mathbf{s}_0 \\ \delta h_0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где матричный элемент  $0_4 = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \frac{1}{4k} \tau \sin(k\tau), & b(\tau) &= \frac{1}{4k^2} \left[ \frac{1}{k} \sin(k\tau) - \tau \cos(k\tau) \right] \\ c(\tau) &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{k} \sin(k\tau) + \tau \cos(k\tau) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

В соответствии с формулами (4.15) и (4.16) матрица изохронных производных в  $KS$ -переменных и их первых производных для эллиптического кеплеровского движения КА имеет следующий вид (при отсутствии вариации времени  $\tau$ ):

$$\begin{pmatrix} \cos(k\tau)E & \frac{1}{k}\sin(k\tau)E & \frac{1}{4k}\tau\sin(k\tau)\mathbf{u}_0 + \frac{1}{4k^2}\left[\frac{1}{k}\sin(k\tau) - \tau\cos(k\tau)\right]\mathbf{s}_0 \\ -k\sin(k\tau)E & \cos(k\tau)E & \left[\frac{1}{4k}\sin(k\tau) + \tau\cos(k\tau)\right]\mathbf{u}_0 + \frac{1}{4k}\tau\sin(k\tau)\mathbf{s}_0 \\ 0_4 & 0_4 & 1 \end{pmatrix}$$

С использованием формул (3.3), (3.4) и (3.9) (или (3.8), (3.10)) находятся вариации декартовых координат КА и проекций его орбитальной скорости через вариации  $KS$ -переменных их первых производных для эллиптического кеплеровского движения.

**5. Изохронные производные в  $KS$ -переменных и их первых производных для эллиптического кеплеровского движения: учет вариации фиктивного времени.** Общее решение (4.6) системы дифференциальных уравнений (4.1) орбитального движения КА по эллиптической орбите в  $KS$ -переменных запишем с учетом начальных условий при  $\tau_0 = 0$  ( $t = 0$ ) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\tau, \mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0), h(0)) &= k^{-1}\mathbf{s}(0)\sin(k\tau) + \mathbf{u}(0)\cos(k\tau) \\ \mathbf{s}(\tau, \mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0), h(0)) &= \mathbf{s}(0)\cos(k\tau) - k\mathbf{u}(0)\sin(k\tau) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь

$$k = \left(-\frac{h}{2}\right)^{1/2}, \quad h = \frac{v^2}{2} - \frac{fM}{r} = \frac{1}{u^2}(2s^2 - fM) \quad (5.2)$$

$$u^2 = r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad s^2 = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

$$h(\tau) = h(0) = \frac{1}{u^2(0)}(2s^2(0) - fM) < 0 \quad (5.3)$$

Физическое время  $t$  выражается через фиктивное время  $\tau$  и начальные значения  $KS$ -переменных  $u_j$  и их первых производных  $u_j' = s_j$  по фиктивному времени по формуле (4.4), которую запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} t = \int_0^\tau u^2 d\tau &= \frac{1}{2}\left[\frac{s^2(0)}{k^2} + u^2(0)\right]\tau - \frac{1}{4k}\left[\frac{s^2(0)}{k^2} - u^2(0)\right]\sin(2k\tau) + \\ &+ \frac{1}{2k^2}(\mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0))(1 - \cos(2k\tau)), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $(\mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0)) = \text{scal}(\mathbf{u}(0) \circ \bar{\mathbf{s}}(0))$  – скалярное произведение четырехмерных векторов  $\mathbf{u}(0)$  и  $\mathbf{s}(0)$ .

Согласно (5.4) физическое время  $t = t(\tau, \mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0), h(0))$ . Следовательно, фиктивное время  $\tau = \tau(t, \mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0), h(0))$ .

Между переменными  $u_j$  и  $s_j$  во все время движения имеет место следующая связь (билинейное соотношение):

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = u_0s_1 - u_1s_0 + u_2s_3 - u_3s_2 = 0 \quad (5.5)$$

Таким образом, между переменными  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}$  и  $h$  во все время движения имеют место соотношения (5.2) и (5.5).

Уравнение (5.4) легко решается численно относительно  $\tau$  по заданным  $t$ ,  $\mathbf{u}(0)$ ,  $\mathbf{s}(0)$ , так как зависимость от времени  $t$  монотонная. Тогда в любой момент  $t$  определяются переменные  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}$  по формулам (5.1), а по их значениям – положение в декартовых координатах и скорость КА в этот момент времени по формулам (1.11) и (2.10).

5.1. Вариации для  $KS$ -переменных, их первых производных и времени  $t$  по всем вариациям переменных  $u(0)$ ,  $s(0)$ ,  $h(0)$  и времени  $\tau$ . Вариации  $\delta\mathbf{u}$ ,  $\delta\mathbf{s}$  и  $\delta t$  для  $KS$ -переменных, их первых производных и времени  $t$  находятся по всем вариациям  $\delta\mathbf{u}(0)$ ,  $\delta\mathbf{s}(0)$ ,  $\delta h(0)$  и  $\delta\tau$  переменных  $\mathbf{u}(0)$ ,  $\mathbf{s}(0)$ ,  $h(0)$  и “времени”  $\tau$  из соотношений (5.1) и (5.4) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} = & \cos(k\tau)\delta\mathbf{u}(0) + \frac{1}{k}\sin(k\tau)\delta\mathbf{s}(0) + \\ & + \frac{1}{4k}\left\{\tau\sin(k\tau)\mathbf{u}(0) + \left[\frac{1}{k^2}\sin(k\tau) - \frac{1}{k}\tau\cos(k\tau)\right]\mathbf{s}(0)\right\}\delta h(0) + \\ & + [\cos(k\tau)\mathbf{s}(0) - k\sin(k\tau)\mathbf{u}(0)]\delta\tau \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{s} = & -k\sin(k\tau)\delta\mathbf{u}(0) + \cos(k\tau)\delta\mathbf{s}(0) + \\ & + \left(\frac{1}{4k}\right)\{[\sin(k\tau) + k\tau\cos(k\tau)]\mathbf{u}(0) + \tau\sin(k\tau)\mathbf{s}(0)\}\delta h(0) - \\ & - k[\sin(k\tau)\mathbf{s}(0) + k\cos(k\tau)\mathbf{u}(0)]\delta\tau \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \delta t = & \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{s^2(0)}{k^2} + u^2(0)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{s^2(0)}{k^2} - u^2(0)\right]\cos(2k\tau) + \frac{1}{k}(\mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0))\sin(2k\tau)\right\}\delta\tau + \\ & + \left[(\mathbf{u}(0), \delta\mathbf{u}(0)) + \frac{1}{k^2}(\mathbf{s}(0), \delta\mathbf{s}(0))\right]\tau + \frac{1}{2k}\left[(\mathbf{u}(0), \delta\mathbf{u}(0)) - \frac{1}{k^2}(\mathbf{s}(0), \delta\mathbf{s}(0))\right]\sin(2k\tau) + \\ & + \frac{1}{2k^2}[(\mathbf{u}(0), \delta\mathbf{s}(0)) + (\mathbf{s}(0), \delta\mathbf{u}(0))](1 - \cos(2k\tau)) - \\ & - \frac{1}{4k}\left\{-\frac{s^2(0)}{k^2}\tau + \frac{1}{4k^2}\left[\frac{3}{k^2}s^2(0) - u^2(0)\right]\sin(2k\tau) + \frac{1}{2k}\left[u^2(0) - \frac{s^2(0)}{k^2}\right]\tau\cos(2k\tau) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k^2}(\mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0))\left[\frac{1}{k}(\cos(2k\tau) - 1) + \tau\sin(2k\tau)\right]\right\}\delta h(0) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Введем обозначения  $A(\tau)$  и  $D(\tau)$  для двух скалярных и обозначения  $\mathbf{B}(\tau)$ ,  $\mathbf{C}(\tau)$ ,  $\mathbf{E}_u(\tau)$ ,  $\mathbf{E}_s(\tau)$  для четырех кватернионных функций:

$$A(\tau) = \frac{s^2(0)}{k^2}\sin^2(k\tau) + u^2(0)\cos^2(k\tau) + \frac{1}{k}(\mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0))\sin(2k\tau) \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B}(\tau) = \frac{1}{2k^2}\left\{\left[2\tau - \frac{1}{k}\sin(2k\tau)\right]\mathbf{s}(0) + [1 - \cos(2k\tau)]\mathbf{u}(0)\right\} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{C}(\tau) = \frac{1}{2}\left\{\left[2\tau + \frac{1}{k}\sin(2k\tau)\right]\mathbf{u}(0) + \frac{1}{k^2}[1 - \cos(2k\tau)]\mathbf{s}(0)\right\} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} D(\tau) = & \frac{1}{4k^3}\left\{\frac{s^2(0)}{k}\left[\tau - \frac{3}{4k}\sin(2k\tau) + \frac{1}{2}\tau\cos(2k\tau)\right] + \frac{u^2(0)}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2k\tau) - k\tau\cos(2k\tau)\right] - \right. \\ & \left. - (\mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0))\left[\frac{1}{k}(\cos(2k\tau) - 1) + \tau\sin(2k\tau)\right]\right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{E}_u(\tau) = \mathbf{s}(0)\cos(k\tau) - k\mathbf{u}(0)\sin(k\tau) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{E}_s(\tau) = \mathbf{s}(0)\sin(k\tau) + k\mathbf{u}(0)\cos(k\tau) \quad (5.14)$$

С учетом обозначений (5.9)–(5.14) соотношения (5.6)–(5.8) для вариаций  $\delta\mathbf{u}$ ,  $\delta\mathbf{s}$  и  $\delta t$  *KS*-переменных, их первых производных и времени  $t$  записываются в следующем виде:

$$\delta\mathbf{u} = \cos(k\tau)\delta\mathbf{u}(0) + \frac{1}{k}\sin(k\tau)\delta\mathbf{s}(0) + \frac{1}{4k^2}\left[\frac{1}{k}\sin(k\tau)\mathbf{s}(0) - \tau\mathbf{E}_u(\tau)\right]\delta h(0) + \mathbf{E}_u(\tau)\delta\tau \quad (5.15)$$

$$\delta\mathbf{s} = -k\sin(k\tau)\delta\mathbf{u}(0) + \cos(k\tau)\delta\mathbf{s}(0) + \left(\frac{1}{4k}\right)[\tau\mathbf{E}_s(\tau) + \sin(k\tau)\mathbf{u}(0)]\delta\tau \quad (5.16)$$

$$\delta t = A(\tau)\delta\tau + (\mathbf{B}(\tau), \delta\mathbf{s}(0)) + (\mathbf{C}(\tau), \delta\mathbf{u}(0)) + D(\tau)\delta h(0) \quad (5.17)$$

5.2. *Вычисление изохронных производных от KS-переменных.* Для вычисления изохронных производных в соотношении (5.17) положим  $\delta t = 0$ . Из полученного соотношения определяется  $\delta\tau$ :

$$\delta\tau = -\frac{1}{A(\tau)}[(\mathbf{B}(\tau), \delta\mathbf{s}(0)) + (\mathbf{C}(\tau), \delta\mathbf{u}(0)) + D(\tau)\delta h(0)] \quad (5.18)$$

Вариация фиктивного времени  $\delta\tau$ , которая определяется по формуле (5.18), показывает изменение фиктивного времени за счет изменения начальных условий  $\mathbf{u}(0)$ ,  $\mathbf{s}(0)$  и  $h(0)$  на величины  $\delta\mathbf{u}(0)$ ,  $\delta\mathbf{s}(0)$  и  $\delta h(0)$ , при котором физическое время, определяемое формулой (5.4), в первом приближении не изменяется, т.е.

$$t(\tau + \delta\tau, \mathbf{u}(0) + \delta\mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0) + \delta\mathbf{s}(0), h(0) + \delta h(0)) = t(\tau, \mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0), h(0)) + \\ + \text{малые второго порядка}$$

Если выражение (5.18) для вариации  $\delta\tau$  фиктивного времени подставить в соотношения (5.15) и (5.16), записывая скалярные произведения кватернионов, заключенные в круглые скобки, через суммы произведений соответствующих компонент кватернионов, и выделить в них коэффициенты при компонентах вариаций  $\delta\mathbf{u}(0)$ ,  $\delta\mathbf{s}(0)$  и при вариации  $\delta h(0)$ , то эти коэффициенты будут определять изохронные производные от *KS*-переменных и их первых производных по компонентам кватернионов  $\mathbf{u}(0)$ ,  $\mathbf{s}(0)$  и по энергии  $h(0)$ , имеющие вид

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial u_j(0)}\right|_{t=c} = \sigma_{ij}\cos(k\tau) - \frac{1}{A(\tau)}C_j(\tau)E_{ui}(\tau), \quad \left.\frac{\partial u_i}{\partial s_j(0)}\right|_{t=c} = \sigma_{ij}\frac{1}{k}\sin(k\tau) - \frac{1}{A(\tau)}B_j(\tau)E_{ui}(\tau) \quad (5.19)$$

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial h(0)}\right|_{t=c} = \frac{1}{4k^2}\left[s_i(0)\frac{1}{k}\sin(k\tau) - \tau E_{ui}(\tau)\right] - \frac{1}{A(\tau)}D(\tau)E_{ui}(\tau) \quad (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3)$$

$$\left.\frac{\partial s_i}{\partial u_j(0)}\right|_{t=c} = -\sigma_{ij}k\sin(k\tau) + \frac{k}{A(\tau)}C_j(\tau)E_{si}(\tau), \quad \left.\frac{\partial s_i}{\partial s_j(0)}\right|_{t=c} = \sigma_{ij}\cos(k\tau) + \frac{k}{A(\tau)}C_j(\tau)E_{si}(\tau) \quad (5.20)$$

$$\left.\frac{\partial s_i}{\partial h(0)}\right|_{t=c} = \frac{1}{4k}[u_i(0)\sin(k\tau) + \tau E_{si}(\tau)] + \frac{k}{A(\tau)}D(\tau)E_{si}(\tau) \quad (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3)$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial u_j(0)}\right|_{t=c} = 0, \quad \left.\frac{\partial h}{\partial s_j(0)}\right|_{t=c} = 0, \quad \left.\frac{\partial h}{\partial h(0)}\right|_{t=c} = 1 \quad (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3) \quad (5.21)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – символ Кронекера:  $\sigma_{ij} = 1$ , если  $i = j$  и  $\sigma_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ .

Отметим, что между вариациями  $\delta h(0)$  и  $\delta\mathbf{u}(0)$ ,  $\delta\mathbf{s}(0)$  имеется связь, которая в соответствии с соотношением (5.3), имеет вид

$$\delta h(0) = -\frac{2(\mathbf{u}(0), \delta\mathbf{u}(0))}{(u^2(0))^2}\left[2s^2(0) - fM\right] + \frac{4}{u^2(0)}(\mathbf{s}(0), \delta\mathbf{s}(0)) \quad (5.22)$$

Кроме того, между вариациями  $\delta\mathbf{u}(0)$  и  $\delta\mathbf{s}(0)$  имеется связь, получаемая из соотношения (5.5) и имеющая вид

$$l(\delta\mathbf{u}(0), \mathbf{s}(0)) + l(\mathbf{u}(0), \delta\mathbf{s}(0)) = 0$$

5.3. *Вычисление приращений KS-переменных.* Вычисление приращений  $\delta u_j$ ,  $\delta s_j$  KS-переменных в момент времени  $t$  за счет их приращений  $\delta u_j(0)$ ,  $\delta s_j(0)$  в начальный момент времени через изохронные производные, определяемые соотношениями (5.19)–(5.21), будет производиться по формулам

$$\begin{aligned} \delta u_i &= \sum_{j=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial u_j(0)} \Big|_{t=c} \delta u_j(0) + \sum_{j=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial s_j(0)} \Big|_{t=c} \delta s_j(0) + \frac{\partial u_i}{\partial h(0)} \Big|_{t=c} \delta h(0); \quad i = 0, 1, 2, 3 \\ \delta s_i &= \sum_{j=0}^3 \frac{\partial s_i}{\partial u_j(0)} \Big|_{t=c} \delta u_j(0) + \sum_{j=0}^3 \frac{\partial s_i}{\partial s_j(0)} \Big|_{t=c} \delta s_j(0) + \frac{\partial s_i}{\partial h(0)} \Big|_{t=c} \delta h(0); \quad i = 0, 1, 2, 3 \\ dh &= dh(0) \end{aligned}$$

Гораздо проще после того, как вычислено  $\delta\tau$  по формуле (5.18), вычислить приращения KS-переменных по формулам (5.6) и (5.7) или (5.15) и (5.16) без вычисления изохронных производных. После того, как вычислено  $\delta\tau$  по формуле (5.18), можно вычислить значения KS-переменных при измененных начальных условиях по формулам (5.1)–(5.3), заменив в них  $\mathbf{u}(0)$  на  $\mathbf{u}(0) + \delta\mathbf{u}(0)$ ,  $\mathbf{s}(0)$  на  $\mathbf{s}(0) + \delta\mathbf{s}(0)$ ,  $h(0)$  на  $h(0) + \delta h(0)$ ,  $\tau$  на  $\tau + \delta\tau$ .

Несмотря на то, что  $\delta h(0)$  выражается через  $\delta\mathbf{u}(0)$  и  $\delta\mathbf{s}(0)$  по формуле (5.22), нет необходимости исключать  $h(0)$  из числа аргументов кватернионных переменных  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}$ . Первый дифференциал функции многих переменных обладает свойством инвариантности относительно зависимости между аргументами функции. Исключение  $h(0)$  усложнит выражения для изохронных производных, так как в этом случае в производные

$$\frac{\partial u_i}{\partial u_j(0)}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial s_j(0)}, \quad \frac{\partial s_i}{\partial u_j(0)}, \quad \frac{\partial s_i}{\partial s_j(0)}$$

войдут в качестве основных частей выражения для  $\delta h(0)$ .

**6. Кватернионные дифференциальные уравнения орбитального движения в вариациях KS-переменных, их первых производных, а также в вариациях кеплеровской энергии и времени.** Линеаризованные дифференциальные регулярные кватернионные уравнения возмущенного орбитального движения КА в вариациях  $\delta\mathbf{u}$  и  $\delta\mathbf{s}$  KS-переменных и их первых производных по времени  $\tau$ , а также уравнения в вариациях  $\delta h$  и  $\delta t$  кеплеровской энергии и времени  $t$ , обусловленные вариациями начальных условий и действующего возмущающего ускорения, получаются из уравнений (2.9) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\delta\mathbf{u})}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\delta\mathbf{u} - \frac{1}{2}\delta h\mathbf{u} &= -\frac{1}{2}\delta\mathbf{r}\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x - \frac{1}{2}\mathbf{r}\mathbf{i} \circ \delta\mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x - \frac{1}{2}\mathbf{r}\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \delta\mathbf{p}_x \\ \frac{d(\delta h)}{d\tau} &= -2\text{scal} \left( \left( \delta\bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{i} \circ \delta\mathbf{u} \right) \circ \mathbf{p}_x + \left( \bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \right) \circ \delta\mathbf{p}_x \right) = \\ &= -2\text{scal} \left( \left( \delta\bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} + \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \delta\mathbf{u} \right) \circ \mathbf{p}_x + \left( \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} + \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \right) \circ \delta\mathbf{p}_x \right) \\ \frac{d(\delta t)}{d\tau} &= \delta r = 2(u_0\delta u_0 + u_1\delta u_1 + u_2\delta u_2 + u_3\delta u_3) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad \delta\mathbf{u} = \delta u_0 + \delta u_1\mathbf{i} + \delta u_2\mathbf{j} + \delta u_3\mathbf{k} \\ \mathbf{s} &= s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k} = d\mathbf{u}/d\tau, \quad \delta\mathbf{s} = \delta s_0 + \delta s_1\mathbf{i} + \delta s_2\mathbf{j} + \delta s_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\delta \bar{\mathbf{u}}' = \delta u_0' - \delta u_1' \mathbf{i} - \delta u_2' \mathbf{j} - \delta u_3' \mathbf{k} = \delta s_0 - \delta s_1 \mathbf{i} - \delta s_2 \mathbf{j} - \delta s_3 \mathbf{k}$$

$$h = \frac{1}{u^2} (2s^2 - fM)$$

$$\mathbf{p}_x(t, \mathbf{r}_x, d\mathbf{r}_x/dt) = \mathbf{p}_x(t, \mathbf{u}, d\mathbf{u}/dt) = \mathbf{p}_x(t, \mathbf{u}, \mathbf{s}) = p_1(t, \mathbf{u}, \mathbf{s}) \mathbf{i} + p_2(t, \mathbf{u}, \mathbf{s}) \mathbf{j} + p_3(t, \mathbf{u}, \mathbf{s}) \mathbf{k},$$

$\delta \mathbf{p}_x$  – вариация возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$ , которая обусловлена вариациями переменных  $t, \mathbf{u}, \mathbf{s}$  и зависит от конкретного вида действующих возмущений.

При отсутствии возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  уравнения возмущенного орбитального движения КА в вариациях (6.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\delta \mathbf{u})}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \delta \mathbf{u} - \frac{1}{2} \delta h \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{d(\delta h)}{d\tau} = 0, \quad \frac{d(\delta t)}{d\tau} = \delta r &= 2(u_0 \delta u_0 + u_1 \delta u_1 + u_2 \delta u_2 + u_3 \delta u_3) \end{aligned}$$

Формулы (4.12) и (4.13) для вариаций  $KS$ -переменных их первых производных для фиксированного времени  $\tau$  по вариациям этих переменных для начального момента времени  $\tau_0 = 0$  в случае эллиптического кеплеровского движения КА получаются интегрированием первого кватернионного дифференциального уравнения из этих уравнений при  $h = \text{const}$ ,  $\delta h = \delta h_0$ .

**7. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного орбитального движения космического аппарата с использованием в качестве независимой переменной половинной обобщенной эксцентрической аномалии.** Для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения космического аппарата целесообразно также использовать регулярные кватернионные уравнения орбитального движения, в которых в качестве независимой переменной используется переменная  $\tau^*$ . Эта переменная равна половинной обобщенной эксцентрической аномалии и определяется дифференциальными соотношениями

$$d\tau^* = (k/r) dt = k d\tau, \quad k = (-h/2)^{1/2}, \quad h < 0$$

Получены следующие различные дифференциальные регулярные кватернионные уравнения орбитального движения КА с использованием независимой переменной  $\tau^*$ .

Первая форма уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^{*2}} + \mathbf{u} &= -\frac{1}{k} \frac{dk}{d\tau^*} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} + \frac{1}{2k^2} r \mathbf{q} = \frac{1}{k} \left( -\frac{dk}{d\tau^*} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} + \frac{1}{2k} r \mathbf{q} \right) \\ \frac{dk}{d\tau^*} &= -\frac{1}{2k} \text{sgal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau^*} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau^*} = \frac{r}{k}, \quad k = \left( -\frac{1}{2} h \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Вторая форма уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^{*2}} + \mathbf{u} &= \frac{1}{2k^2} \left( -\frac{dk^2}{d\tau^*} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} + r \mathbf{q} \right) = \frac{1}{2k^2} \left[ \text{sgal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau^*} \circ \mathbf{q} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} + r \mathbf{q} \right] \\ \frac{dk^2}{d\tau^*} &= -\text{sgal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau^*} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau^*} = \frac{r}{k}, \quad k^2 = -\frac{1}{2} h \end{aligned}$$

Третья форма уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^{*2}} + \mathbf{u} &= -\frac{1}{h} \left( \frac{1}{2} \frac{dh}{d\tau^*} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} + r\mathbf{q} \right) = -\frac{1}{h} \left[ \text{sgal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau^*} \circ \mathbf{q} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} + r\mathbf{q} \right] \\ \frac{dh}{d\tau^*} &= 2\text{sgal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau^*} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau^*} = \frac{r}{k} = \left( -\frac{2}{h} \right)^{1/2} r \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь, по-прежнему, возмущение  $\mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x$ .

Для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения КА кватернион возмущения  $\mathbf{q} = 0$  и основное дифференциальное кватернионное уравнение орбитального движения центра масс КА принимает во времени  $\tau^*$  вид уравнения движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^{*2}} + \mathbf{u} = 0,$$

частота колебаний которого в безразмерном времени  $\tau^*$  равна 1.

Для движения по круговой орбите расстояние  $r$  и кеплеровская энергия  $h$  – постоянные величины. Поэтому время  $t$  и новое время  $\tau^*$  связаны прямо пропорциональной зависимостью

$$t = (r/k) \tau^* = \left[ r/(-h/2)^{1/2} \right] \tau^*$$

С другой стороны для круговой орбиты

$$t = \left[ (r/2)/(-h/2)^{1/2} \right] E,$$

где  $E$  – эксцентрисическая аномалия.

Поэтому для круговой орбиты  $\tau^* = E/2$ , то есть, новое время  $\tau^*$  для круговой орбиты равно половинной эксцентрисической аномалии  $E$ .

В новом времени  $\tau^*$  эллиптическое кеплеровское движение центра масс КА описывается кватернионными соотношениями

$$\mathbf{u}(\tau^*) = \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} \right)_0 \sin \tau^* + \mathbf{u}(0) \cos \tau^*, \quad \frac{d\mathbf{u}(\tau^*)}{d\tau^*} = \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} \right)_0 \cos \tau^* - \mathbf{u}(0) \sin(\tau^*),$$

где  $\mathbf{u}(0)$  и  $\left( \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} \right)_0$  – значение кватернионов  $\mathbf{u}$  и  $\frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*}$  при  $\tau^* = 0$ .

Вариации  $\delta\mathbf{u}$  и  $\delta\mathbf{s}$  для  $KS$ -переменных и их первых производных в безразмерном времени  $\tau^*$  (с учетом вариации  $\delta\tau^*$  этого времени) имеют вид

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}(\tau^*) &= \cos \tau^* \delta\mathbf{u}(0) + \sin \tau^* \delta\mathbf{s}^*(0) + [-\sin \tau^* \mathbf{u}(0) + \cos \tau^* \delta\mathbf{s}^*(0)] \delta\tau^* \\ \delta\mathbf{s}^*(\tau^*) &= -\sin \tau^* \delta\mathbf{u}(0) + \cos \tau^* \delta\mathbf{s}^*(0) - [\cos \tau^* \mathbf{u}(0) + \sin \tau^* \delta\mathbf{s}^*(0)] \delta\tau^*, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{s}^*(\tau^*) = \frac{d\mathbf{u}(\tau^*)}{d\tau^*}$ .

Эти вариации формально имеют более простой вид в сравнении с вариациями  $\delta\mathbf{u}$  и  $\delta\mathbf{s}$  во “времени”  $\tau$  (5.6) и (5.7), однако следует иметь в виду, что выражение для вариации  $\delta\tau^*$  гораздо сложнее выражения для вариации  $\delta\tau$ , присутствующей в вариациях  $\delta\mathbf{u}$  и  $\delta\mathbf{s}$  во времени  $\tau$ .

Вместо переменных  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}^*$  для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения космического аппарата можно также использовать кватернионные диффе-

ренциальные уравнения в кватернионных оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных  $\alpha$  и  $\beta$ .

Для их вывода используем метод вариации постоянных. Запишем решение первого кватернионного дифференциального уравнения орбитального движения КА из системы уравнений (7.1) в следующем виде:

$$\mathbf{u}(\tau^*) = \cos \tau^* \alpha(\tau^*) + \sin \tau^* \beta(\tau^*),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – новые кватернионные переменные.

Продифференцируем это соотношение по времени  $\tau^*$ :

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} = -\sin \tau^* \alpha + \cos \tau^* \beta + \left( \cos \tau^* \frac{d\alpha}{d\tau^*} + \sin \tau^* \frac{d\beta}{d\tau^*} \right)$$

Потребуем, чтобы выражение в скобках было равно нулю:

$$\cos \tau^* \frac{d\alpha}{d\tau^*} + \sin \tau^* \frac{d\beta}{d\tau^*} = 0$$

Тогда предпоследнее выражение приводит к тому же результату, что и в случае постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ .

Используя соотношения

$$\mathbf{u}(\tau^*) = \cos \tau^* \alpha(\tau^*) + \sin \tau^* \beta(\tau^*), \quad \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} = \mathbf{s}^* = -\sin \tau^* \alpha + \cos \tau^* \beta, \quad (7.2)$$

как формулы замены кватернионных переменных  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}^*$  на новые кватернионные переменные  $\alpha$  и  $\beta$ , получим из первого кватернионного дифференциального уравнения системы уравнений (7.1) следующую систему кватернионных дифференциальных уравнений в регулярных кватернионных элементах  $\alpha$  и  $\beta$  и в безразмерном времени  $\tau^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\tau^*} &= \frac{1}{h} \left[ \text{scal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau^*} \circ \mathbf{q} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} + r\mathbf{q} \right] \sin \tau^*, \\ \frac{d\beta}{d\tau^*} &= -\frac{1}{h} \left[ \text{scal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau^*} \circ \mathbf{q} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\tau^*} + r\mathbf{q} \right] \cos \tau^*, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где возмущение  $\mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x$ , кватернионы  $\mathbf{u}$  и  $d\mathbf{u}/d\tau^*$  определены в новых переменных соотношениями (7.2).

Кватернионные оскулирующие переменные  $\alpha$  и  $\beta$  находятся через переменные  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}^* = d\mathbf{u}/d\tau^*$  по формулам

$$\alpha = \cos \tau^* \mathbf{u} - \sin \tau^* \mathbf{s}^*, \quad \beta = \sin \tau^* \mathbf{u} + \cos \tau^* \mathbf{s}^*$$

Отметим, что дифференциальные уравнения (7.3) в регулярных кватернионных оскулирующих элементах  $\alpha$  и  $\beta$  справедливы для возмущенного эллиптического кеплеровского движения центра масс КА.

**Заключение.** В статье получены основные уравнения и соотношения, необходимые для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения КА с использованием регулярных кватернионных уравнений орбитального движения КА в  $KS$ -переменных и соответствующих им уравнений в вариациях. Была обоснована перспективность такого подхода к решению задач прогноза и коррекции орбитального движения.

Рассмотрены известные, предложенные нами ранее, регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и регулярные кватернионные уравнения орбитального движения КА в четырехмерных  $KS$ -переменных, построенные на основе этих уравнений. Уравнения орбитального движения КА включают дифференциальные уравнения второго порядка относительно четырехмерных  $KS$ -пе-

ременных  $u_j$  осцилляторного типа, имеющие в случае возмущенного эллиптического кеплеровского движения вид дифференциальных уравнений движения возмущенного четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии  $h$ , взятой со знаком минус, а также включают дифференциальные уравнения первого порядка относительно кеплеровской энергии и реального времени  $t$ .

Приведены результаты нашего сравнительного исследования точности численного интегрирования классических ньютоновских уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и предложенных нами регулярных кватернионных уравнений этой задачи в  $KS$ -переменных. Точность численного интегрирования регулярных кватернионных уравнений в  $KS$ -переменных оказалась значительно выше точности численного интегрирования уравнений в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на два порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом — на четыре порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом — на семь порядков. Эти результаты согласуются с результатами, приведенными в книге Бордовицкой [4], где приводится другая (каноническая) форма регулярных уравнений в  $KS$ -переменных, выведенных с использованием соответствующего гамильтониана, и результаты точности их численного интегрирования. Наши результаты численного исследования говорят о перспективности использования регулярных кватернионных уравнений орбитального движения в  $KS$ -переменных для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения КА.

Получены формулы, устанавливающие связи вариаций  $\delta x_k$  и  $\delta v_k$  декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА в инерциальной системе координат с вариациями  $\delta u_j$  и  $\delta s_j$   $KS$ -переменных  $u_j$  и их первых производных  $s_j = du_j/dt$  по новому (“фиктивному”) времени  $\tau$ .

Найдены прямым путем вариации  $\delta u_j$ ,  $\delta s_j$  и  $\delta t$   $KS$ -переменных  $u_j$ , их первых производных  $s_j$  и времени  $t$  для фиксированного времени  $\tau$  по вариациям  $\delta u_j(0)$ ,  $\delta s_j(0)$ ,  $\delta h(0)$  и  $\delta t$  переменных  $u_j(0)$ ,  $s_j(0)$ , кеплеровской энергии  $h(0)$  и времени  $t$  для начального момента времени  $t(0) = 0$  (как без учета, так и с учетом вариации времени  $\tau$ ). Найдены также матрицы изохронных производных от  $KS$ -переменных  $u_j$ , их первых производных  $s_j$  и кеплеровской энергии  $h$  по компонентам  $u_j(0)$  и  $s_j(0)$  регулярных кватернионных переменных  $\mathbf{u}(0)$ ,  $\mathbf{s}(0)$  и по энергии  $h(0)$  для эллиптического кеплеровского движения КА.

Получены линеаризованные дифференциальные регулярные кватернионные уравнения возмущенного орбитального движения КА в вариациях  $\delta \mathbf{u}$  и  $\delta \mathbf{s}$   $KS$ -переменных и их первых производных по времени  $\tau$ , а также дифференциальные уравнения в вариациях  $\delta h$  и  $\delta t$  кеплеровской энергии и реального времени, обусловленные вариациями начальных условий и вариацией действующего возмущающего ускорения. Формулы (4.12) и (4.13) для вариаций  $KS$ -переменных, их первых производных для фиксированного времени  $\tau$  по вариациям этих переменных для начального момента времени  $\tau_0 = 0$  в случае эллиптического кеплеровского движения КА получаются интегрированием первого кватернионного уравнения из этих полученных уравнений в случае, когда  $h = \text{const}$ ,  $\delta h = \delta h_0$ .

Получены также для решения задач прогноза и коррекции орбитального движения КА другие различные регулярные кватернионные дифференциальные уравнения орбитального движения, в которых в качестве независимой переменной используется безразмерное время  $\tau^*$ . Эта переменная равна половинной обобщенной эксцентрисической аномалии  $E$ . Для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения основное дифференциальное кватернионное уравнение орбитального движения центра

масс КА принимает во времени  $\tau^*$  вид уравнения движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, частота колебаний которого в этом безразмерном времени  $\tau^*$  равна 1.

Получены вариации  $\delta u$  и  $\delta s$  для  $KS$ -переменных и их первых производных в безразмерном времени  $\tau^*$  (с учетом вариации  $\delta\tau^*$  этого времени). Построена система кватернионных дифференциальных уравнений орбитального движения КА в регулярных кватернионных оскулирующих элементах  $\alpha$  и  $\beta$  с использованием в качестве независимой переменной безразмерного времени  $\tau^*$ . Эти уравнения справедливы для возмущенного эллиптического кеплеровского движения центра масс КА.

Полученные уравнения и соотношения позволяют изучать и оценивать влияние изменений начальных условий движения КА и действующих возмущений на изменение текущих характеристик его движения для текущего момента времени, а также позволяют эффективно решать задачи прогноза и коррекции орбитального движения КА, используя описание движения центра масс КА в регулярных  $KS$ -переменных и в соответствующих им кватернионных переменных, а также в кватернионных оскулирующих элементах.

Этому способствуют следующие достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля и предложенных нами регулярных кватернионных уравнений орбитального движения КА:

- регулярность в центре притяжения (в отличие от нерегулярных ньютоновских уравнений);
- линейность для невозмущенных кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных ньютоновских уравнений) (в этом случае кватернионные уравнения имеют вид системы четырех независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковыми постоянными коэффициентами, равными отрицательной половинной кеплеровской энергии  $h$  при использовании безразмерной независимой переменной  $\tau$  или равными 1, при использовании безразмерной независимой переменной  $\tau^*$  (половинной обобщенной эксцентрической аномалии);
- возможность выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;
- близость к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;
- возможность представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Линейность кватернионных уравнений (2.9) для кеплеровских движений позволила нам эффективно построить новые регулярные кватернионные уравнения орбитального движения в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся переменных), удобные для исследования и прогноза возмущенного движения космических тел и аппаратов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эльясберг П.Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.
2. *Чарный В.И.* Об изохронных производных // АН СССР. ИСЗ. 1963. Вып. 16. С. 226–237.
3. *Алферьев В.Л.* Свойства матриц частных производных // Двойные технологии. 2011. № 4 (57). С. 14–21.
4. *Бордовицyna Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
5. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
6. *Levi-Civita T.* Traetorie singolaried urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. Di mat. Pura ed appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
7. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du problem des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144.

8. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du problem pestraint des trois corps // *Opere Mathemat.* 1956. № 2. P. 411–417.
9. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // *Ann. Univ. Turku. Ser. A1.* 1964. V. 73. P. 3–7.
10. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // *J. Reine Angew. Math.* 1965. V. 218. P. 204–219.
11. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 303 с.
12. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 208 с.
13. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2007. 175 с.
14. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в механике космического полета // *Гироскопия и навигация.* 1999. № 4 (27). С. 47–66.
15. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2007. № 5. С. 18–44.
16. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 556 с.
17. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // *Космич. исслед.* 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401. <https://doi.org/10.7868/S0023420613050026>
18. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // *Astron. J.* 2005. V. 129. № 5. P. 2496.
19. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // *Astron. J.* 2007. V. 133. № 6. P. 2815.
20. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1981. № 6. С. 12–21.
21. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 1. С. 151–158.
22. *Vivarelli M.D.* The KS-transformation in hypercomplex form // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1983. V. 29. P. 45–50.
23. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // *Can. J. Phys.* 1994. V. 72. P. 141–146.
24. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // *J. Phys.* 1995. V. 28. P. 193–198.
25. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2006. V. 95. P. 201–212.
26. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2008. V. 102. № 1. P. 149–162.
27. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // *Космич. исслед.* 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. <https://doi.org/10.7868/S0023420614030029>
28. *Chelnokov Y.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // *Appl. Math. & Mech. (Engl. Ed.).* 2022. V. 43. № 1. P. 21–80. <https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
29. *Челноков Ю.Н.* Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // *ПММ.* 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 721–733. <https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9>
30. *Челноков Ю.Н., Щекутьев А.Ф.* Методы прогнозирования движения ИСЗ и определения параметров их траекторий с использованием кватернионной регуляризации уравнений орбитального движения в применении к эфемеридно-временному обеспечению КА ГЛОНАСС на основе межспутниковой линии // В кн.: Системный анализ, управление и навигация. XXV международная научная конференция: тезисы докладов. М.: МАИ (НИУ), АНО ДПО “Космос – образование”, 2021. С. 146–149.
31. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 6. С. 24–54.
32. *Chelnokov Y.N., Loginov M.Y.* New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space // 28th St. Petersburg. Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2021, 9470806.
33. *Hopf H.* Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphere auf die Kugelfläche // *Math. Ann.* 1931. V. 104. P. 637–665. (Repr. in *Selecta Heinz Hopf.* B.: Springer, 1964. P. 38–63.)

## Forecast and Correction of the Orbital Motion of the Space Vehicle Using Regular Quaternion Equations and Their Solutions in the Kustaanheimo–Stiefels Variables and Isochronic Derivatives

Yu. N. Chelnokov<sup>a,#</sup>, Ya. G. Sapunkov<sup>a</sup>, M. Yu. Loginov<sup>a</sup>, and A. F. Schekutiev<sup>b,##</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Problems of Precision Mechanics and Control RAS, Saratov, Russia*

<sup>b</sup>*AO TsNIIMash, Korolev, Moscow region, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

<sup>##</sup>*e-mail: a.schekutiev@glonass-iac.ru*

The regular quaternion equations of the orbital motion of a spacecraft (SC) proposed by us earlier in four-dimensional Kustaanheimo–Stiefel variables (KS-variables) are considered. These equations use as a new independent variable a variable related to real time by a differential relation (Sundman time transformation) containing the distance to the center of gravity. Various new regular quaternion equations in these variables and equations in regular quaternion osculating elements (slowly varying variables) are also constructed, in which the half generalized eccentric anomaly, widely used in celestial mechanics and space flight mechanics, is used as a new independent variable. Keplerian energy and time are used as additional variables in these equations. These equations are used to construct quaternion equations and relations in variations of KS-variables and their first derivatives and in variations of Keplerian energy and real time; the isochronous derivatives of the KS-variables and of their first derivatives and the matrix of isochronous derivatives for the elliptical Keplerian motion of the spacecraft are found, which are necessary for solving the problems of predicting and correcting its orbital motion. The results of a comparative study of the accuracy of the numerical integration of the Newtonian equations of the spatial restricted three-body problem (Earth, Moon, and spacecraft) in Cartesian coordinates and the regular quaternion equations of this problem in KS-variables are presented, which show that the accuracy of the numerical integration of regular quaternion equations is much higher (by several orders) of the accuracy of numerical integration of equations in Cartesian coordinates. This substantiates the expediency of using regular quaternion equations of the spacecraft orbital motion and the quaternion equations and relations in variations constructed in the article on their basis for the prediction and correction of the orbital motion of a spacecraft.

*Keywords:* regular quaternion equations, orbital motion, spacecraft, Kustaanheimo–Stiefel variables, Sundmann time transformation, quaternion osculating elements, eccentric anomaly, Keplerian energy, variations of variables, isochronous derivatives, matrix of isochronous derivatives, prediction and correction of orbital motion

### REFERENCES

1. *Elyasberg P.E.* Introduction to the Theory of Flight of Artificial Satellites of the Earth. Moscow: Nauka, 1965. 540 p. (in Russian)
2. *Charny V.I.* On isochronous derivatives // USSR AS. Satellite, 1963, iss. 16, pp. 226–237.
3. *Alferyev V.L.* Properties of matrices of partial derivatives // Double Techn., 2011, vol. 57, no. 4, pp. 14–21.
4. *Bordovitsyna T.V.* Modern Numerical Methods in Problems of Celestial Mechanics. Moscow: Nauka, 1984. 136 p. (in Russian)
5. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop., 1765, vol. 11, pp. 144–151.
6. *Levi-Civita T.* Traettorie singolaried urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. Di mat. Pura ed appl., 1904, vol. 9, pp. 1–32.
7. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du problem des trois corps // Acta Math., 1920, vol. 42, pp. 99–144.
8. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du problem pestrainst des trois corps // Opere Mathem., 1956, no. 2, pp. 411–417.

9. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // *Ann. Univ. Turku. Ser. A1.*, 1964, vol. 73, pp. 3–7.
10. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // *J. Reine Angew. Math.*, 1965, vol. 218, pp. 204–219.
11. *Stiefel E.L., Scheifele G.* *Linear and Regular Celestial Mechanics.* Berlin: Springer, 1971. 301 p.
12. *Brumberg V.A.* *Analytical Algorithms of Celestial Mechanics.* Moscow: Nauka, 1980. 208 p. (in Russian)
13. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* *Theory of Motion of Artificial Satellites of the Earth. Analytical and Numerical Methods.* Tomsk: Tomsk Univ. Pub., 2007. 175 p. (in Russian)
14. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the mechanics of space flight // *Gyroscopy&Navigation*, 1999, vol. 27, no. 4, pp. 47–66.
15. *Chelnokov Yu.N.* Analysis of optimal motion control for a material points in a central field with application of quaternions // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 688–713.
16. *Chelnokov Yu.N.* *Quaternion Models and Methods of Dynamics, Navigation and Motion Control.* Moscow: Fizmatlit, 2011. 556 p. (in Russian)
17. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // *Cosmic Res.*, 2013, vol. 51, no. 5, pp. 350–361.
18. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // *Astron. J.*, 2005, vol. 129, no. 5, pp. 2496.
19. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // *Astron. J.*, 2007, vol. 133, no. 6, pp. 2815.
20. *Chelnokov Yu.N.* On regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // *Mech. Solids*, 1981, vol. 16, no. 6, pp. 1–10.
21. *Chelnokov Yu.N.* Regular equations of the three-dimensional two body problem // *Mech. Solids*, 1984, vol. 19, no. 1, pp. 1–7.
22. *Vivarelli M.D.* The KS-transformation in hypercomplex form // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 1983, vol. 29, pp. 45–50.
23. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // *Can. J. Phys.*, 1994, vol. 72, pp. 141–146.
24. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // *J. Phys.*, 1995, vol. 28, pp. 193–198.
25. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2006, vol. 95, pp. 201–212.
26. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2008, vol. 102, no. 1, pp. 149–162.
27. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and trajectory motion control in celestial mechanics and astrodynamics: II // *Cosmic Res.*, 2014, vol. 52, no. 4, pp. 304–317.
28. *Chelnokov Y.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // *Appl. Math.&Mech. (Engl. Ed.)*, 2022, vol. 43, no. 1, pp. 21–80.
29. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial two-body problem: regular quaternion equations of relative motion // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, iss. 2, pp. 169–178.
30. *Chelnokov Yu.N., Shchekutiev A.F.* Methods for predicting the movement of artificial satellites and determining the parameters of their trajectories using quaternion regularization of the equations of orbital motion as applied to the ephemeris-time support of GLONASS spacecraft based on an inter-satellite link // In: *System Analysis, Control and Navigation. XXV Int. Sci. Conf.: Abstracts.* Moscow: Aviation Inst. (Nat. Res. Univ.), ANO DPO “Space– Education”, 2021. pp. 146–149.
31. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 613–639.
32. *Chelnokov Y.N., Loginov M.Y.* New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space // *28th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2021*, 9470806.
33. *Hopf H.* *Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche* // *Math. Ann.*, 1931, vol. 104, pp. 637–665. (Repr. in *Selecta Heinz Hopf.* Berlin: Springer, 1964. pp. 38–63.)

УДК 532.59:550.349.2

**АСИМПТОТИКИ ДЛИННЫХ СТОЯЧИХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ БАССЕЙНАХ С ПОЛОГИМИ БЕРЕГАМИ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ**

© 2023 г. С. Ю. Доброхотов<sup>1,\*</sup>, В. А. Калинин<sup>1,\*\*</sup>,  
Д. С. Миненков<sup>1,\*\*\*</sup>, В. Е. Назайкинский<sup>1,\*\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: s.dobrokhотов@gmail.com

\*\*e-mail: vakalin@mail.ru

\*\*\*e-mail: minenkov.ds@gmail.com

\*\*\*\*e-mail: nazaikinskii@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.11.2022 г.

После доработки 03.02.2023 г.

Принята к публикации 03.02.2023 г.

В статье построены периодические по времени асимптотические решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды в бассейне переменной глубины  $D(x)$  с двумя пологими берегами (что означает обращение в нуль функции  $D(x)$  в точках, задающих берег) или с одним пологим берегом и вертикальной стенкой. Такие решения описывают стоячие волны, аналогичные известным волнам Фарадея в бассейнах с вертикальными стенками. В частности, они приближенно описывают сейши в протяженных бассейнах. Конструкция таких решений состоит из двух этапов. Сначала определяются гармонические по времени точные и асимптотические решения линеаризованной системы, порожденные собственными функциями оператора  $d/dx D(x) d/dx$ , а затем с помощью недавно развитого подхода, основанного на упрощении и модификации преобразования Кэрриера–Гринспена, по ним в параметрической форме восстанавливаются решения нелинейных уравнений. Полученные асимптотические решения сравниваются с результатами эксперимента, основанного на возбуждении волн в бассейне с помощью параметрического резонанса.

*Ключевые слова:* нелинейные уравнения мелкой воды, преобразование типа Кэрриера–Гринспена, асимптотические решения, стоячие волны, стендовый эксперимент

DOI: 10.31857/S0032823523020066, EDN: TZCFHT

**1. Введение.** Нелинейная система уравнений мелкой воды [1–4] описывает длинные необрушающиеся волны различной природы, включая волны в бассейнах ограниченных размеров. В случае протяженных бассейнов можно ограничиться одномерной по пространственной переменной  $x$  системой, которая в простейшем случае имеет вид

$$\eta_t + ((D(x) + \eta)u)_x = 0, \quad u_t + g\eta_x + uu_x = 0 \quad (1.1)$$

Здесь неизвестными функциями являются возвышение свободной поверхности  $\eta$  и горизонтальная компонента  $u$  скорости потока,  $g$  – ускорение свободного падения, а функция  $D(x)$  описывает глубину дна. Будем считать, что  $D(x)$  – гладкая функция. При наличии наклонных берегов функция  $D(x)$  обращается в нуль в некоторых точках  $x = a$  и  $x = b$ , определяющих границу бассейна в отсутствие возмущений; в точках, где  $D(x) > 0$ , решения описывают волны внутри бассейна, а при  $D(x) < 0$  – набегание

на берег. Система (1.1) рассматривается на переменном интервале  $\Omega_t = (a(t), b(t))$ , границы которого  $a(t)$  и  $b(t)$  определяются соотношениями

$$\eta(a(t), t) + D(a(t)) = 0, \quad \eta(b(t), t) + D(b(t)) = 0 \quad (1.2)$$

Система мелкой воды хорошо моделирует такие явления как цунами (см. [1, 4, 5]) и сейши (см. [2, 6–8], недавний обзор [9] и анализ натуральных данных, напр., [10–12]), причем одномерную систему можно рассматривать для волн в вытянутых водоемах, как например озеро Байкал. Исследованию подобных волн и посвящена данная статья.

Для постановки корректной задачи к уравнениям (1.1) и условиям (1.2) следует добавить, например, начальные условия для функций  $\eta$  и  $u$  или условия периодичности по времени  $t$ . В последнем случае построенные решения являются нелинейными аналогами гармонических колебаний линеаризованной системы мелкой воды

$$\eta_t + (D(x)u)_x = 0, \quad u_t + g\eta_x = 0, \quad (1.3)$$

эквивалентной волновому уравнению

$$\eta_{tt} - (gD(x)\eta_x)_x = 0 \quad (1.4)$$

Линеаризованные уравнения задаются на фиксированном интервале  $[a, b]$ , на концах которого волновая скорость  $c(x)^2 = gD(x)$  вырождается. Для таких уравнений не требуются обычные граничные условия типа Дирихле или Неймана [13], вместо которых налагается естественное условие ограниченности интеграла энергии [14–16]

$$E_{sw}^2 = \|g\eta\|^2 + \|c(x)u\|^2 < \infty, \quad \text{или} \quad E_{wave}^2 = \|\eta_t\|^2 + \|c(x)\eta_x\|^2 < \infty \quad (1.5)$$

для (1.3) и (1.4) соответственно. Здесь и далее норма и скалярное произведение рассматриваются в пространстве  $L_2[a, b]$  по пространственной переменной  $x$ .

Гармонические по времени  $t$  решения уравнения (1.3) имеют вид

$$\eta(x, t) = v(x) \cos(\omega t), \quad u(x, t) = -\frac{g}{\omega} v'(x) \sin(\omega t), \quad (1.6)$$

где  $v(x)$  – отвечающая собственному значению  $\omega^2$  собственная функция положительно определенного самосопряженного оператора

$$\hat{L} = -\frac{d}{dx} gD(x) \frac{d}{dx} \quad (1.7)$$

Вопрос об асимптотических собственных функциях оператора  $\hat{L}$  детально обсуждался в статье [17], где для них также построены явные формулы, которые будут использованы ниже.

Подчеркнем, что поскольку далее рассматриваются необрушающиеся волновые решения нелинейных уравнений, их амплитуда предполагается малой. Формально эту малость будем характеризовать безразмерным малым параметром  $\epsilon$  и считать, что  $\eta = O(\epsilon)$ ,  $u = O(\epsilon)$ . Такое предположение естественно, поскольку, например, большая часть цунами не обрушается [5] и тем более отсутствие обрушения характерно для сейшей [10–12]. Возникает идея, что изучаемые задачи можно решать с помощью теории возмущений, стартуя с линейного приближения. Применение теории возмущений оказывается нетривиальным, поскольку исходная задача – это задача с подвижной границей. Отметим также, что просто ограничиться решением линеаризованного уравнения в рассматриваемой ситуации нельзя, поскольку наиболее интересные эффекты в поведении волн в окрестности берега линейная задача не описывает. Также нужно отметить, что, как правило, амплитуда решения в окрестности береговой линии оказывается существенно больше, чем внутри бассейна, поскольку береговая линия представляет собой “нестандартную” каустику (в одномерном случае – фокаль-

ную точку). В работе [18] с помощью замены переменных, основанной на использовании параметрически заданных функций и мотивированной известным в одномерном случае преобразованием Кэрриера–Гринспена [19], эта задача (как в одномерном, так и в двумерном случае) сведена к задаче с неподвижной границей (в одномерном случае – на отрезке  $[a, b]$ ), в которой уже можно применять идеи стандартной теории возмущений. При этом алгоритм нахождения наиболее интересной с точки зрения приложений главной части решения становится очень эффективным и состоит из двух шагов:

1) построение решения (возможно, приближенного) линеаризованной задачи, которое достаточно хорошо работает во внутренних точках бассейна;

2) восстановление приближенного решения нелинейной задачи по решению линеаризованной задачи в окрестности береговой линии с помощью соответствующей обратной замены.

Под “приближенным решением” нелинейной задачи понимается пара, состоящая из вектор-функции  $(\eta, v)$  и переменной области ее определения, такая, что на границе области выполнены условия (1.2), а внутри области подстановка функции в уравнения (1.1) дает малую невязку (строгое определение такого формального асимптотического решения дано в [18]).

Построение решений линеаризованной системы нетривиально, из-за вырождения на границе скорости  $c = \sqrt{gD}$ . Ее точные решения удается найти в исключительных случаях, например, для линейной и квадратичной функции  $D(x)$ . Следовательно, для линеаризованной системы речь может идти о приближенных (асимптотических), как правило, быстроменяющихся решениях. Поэтому возникает вопрос о применимости теории возмущений по нелинейности в том случае, если в качестве нулевого приближения выступает асимптотическое решение линеаризованной системы. Фактически речь идет о построении асимптотических решений, зависящих от двух параметров, один из которых,  $\epsilon$ , характеризует амплитуду решения, а второй,  $\mu$ , – скорость изменения решения (причем числа  $a, b$  от этих параметров не зависят). Применимость развитого в [18] подхода и основанного на нем практического алгоритма зависит от соотношения между указанными параметрами. Этот вопрос обсудим на примере периодических по времени и быстроосциллирующих по пространственной переменной решений, которые не только, как уже говорилось выше, моделируют сейши в протяженных бассейнах, но и удобны для сравнения с экспериментом, поскольку в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН имеется экспериментальная установка [20, 21], которая благодаря параметрическому резонансу воспроизводит стоячие волны на свободной поверхности жидкости в сосуде – волны Фарадея (см. [22–25]).

Наряду с задачей о волнах в бассейне с двумя наклонными берегами, рассмотрим задачу, когда с одной стороны бассейн вместо наклонного берега ограничен вертикальной стенкой. В этом случае вместо условий (1.2) ставятся условия

$$\eta(a(t), t) + D(a(t)) = 0, \quad u|_{x=b} = 0 \quad (1.8)$$

Основная цель данной работы – применение (и иллюстрация) развитого в [18] подхода к сформулированным выше задачам в одномерном случае и сравнение полученных решений с результатами эксперимента.

Статья организована следующим образом. Сначала в разд. 2 для случая плоского наклонного дна кратко напомним преобразование Кэрриера–Гринспена, представленное в форме [26], и представим его приближенную модификацию, а также сравним точное решение нелинейной задачи с асимптотиками. В разд. 3 рассмотрены примеры, когда линеаризованная задача в ограниченном бассейне решается точно (разд. 3.1 и 3.2), и случай произвольной функции дна (разд. 3.3), когда в линейном случае требу-

ется построение асимптотик. В разд. 4 обсуждается эксперимент, сравниваются экспериментальные и аналитические результаты.

## 2. Конструктивная приближенная линеаризация одномерных нелинейных уравнений мелкой воды.

*2.1. Преобразование Кэрриера–Гринспена.* Для полноты изложения напомним в удобной для нас форме [26] (см. также [27, 28]) простые формулы, определяющие преобразование Кэрриера–Гринспена [19], сводящее одномерные нелинейные уравнения мелкой воды над наклонным дном  $D(x) = \gamma x$  к линейному волновому уравнению. Всюду далее в линейной системе возвышение свободной поверхности и скорость обозначаются через  $N$  и  $U$ , а координата и время – через  $y$  и  $t$ .

*Утверждение 1.* Пусть  $N(y, \tau)$ ,  $U(y, \tau)$  – некоторое решение линеаризованной системы (1.3) с  $D(x) = \gamma x$ , и предположим, что замена переменных  $(y, \tau) \rightarrow (x, t)$ :

$$t = T(y, \tau) \equiv \tau + \frac{1}{\gamma g} U, \quad x = X(y, \tau) \equiv y - \frac{1}{\gamma} N + \frac{1}{2\gamma g} U^2 \quad (2.1)$$

невырождена, т.е. не обращается в нуль якобиан

$$J \equiv \frac{\partial(x, t)}{\partial(y, \tau)} = 1 - \frac{1}{\gamma} N_y + \frac{1}{\gamma g} (U_\tau + N_\tau U_y - N_y U_\tau + U U_y) \quad (2.2)$$

Тогда параметрически заданные функции

$$\eta = N(y, \tau) - U^2(y, \tau)/2g, \quad u = U(y, \tau), \quad t = T(y, \tau), \quad x = X(y, \tau) \quad (2.3)$$

будут решением системы (1.1) при  $D(x) = \gamma x$ . При этом последняя связана с системой (1.3) равенством

$$\begin{aligned} \eta_t + ((\gamma x + \eta)u)_x &= J^{-1}(y, \tau)(N_\tau + (\gamma U)_y)_y = 0 \\ u_t + g\eta_x + uu_x &= J^{-1}(y, \tau)(U_\tau + gN_y) = 0 \end{aligned}$$

Отметим, что обратная к (2.3) замена имеет вид

$$\tau = t - \frac{1}{\gamma g} u, \quad y = x + \frac{1}{\gamma} \eta, \quad N = \eta + \frac{1}{2g} u^2, \quad U = u \quad (2.4)$$

Формулы (2.3), (2.4) связывают точным точечным преобразованием одномерные линейную и нелинейную системы с наклонным дном  $D = \gamma x$ . В работах [29–31] этот результат обобщен на случай волн в каналах с “U” или “V”-образным сечением и равномерным изменением глубины, в недавней работе [32] представлены результаты для каналов произвольного сечения. Замена Кэрриера–Гринспена также послужила отправной точкой ряда работ, где исследуются приближенные решения в случае неровного дна. В одномерном случае в работе [33] рассмотрен численный алгоритм, когда вблизи берега осуществляется переход к римановым инвариантам, в [34] построены нелинейные асимптотики в предположении небольших изменений дна с использованием приближенной замены, в [35] авторы рассмотрели случай произвольного дна и построили приближенное решение с помощью упрощенной замены  $y = x - a(t)$ , где в главном члене  $a(t) = N(0, t)/D'(0)$ . В [36] для двумерного случая с функцией дна  $D(x_1, x_2) = x_1$  для получения асимптотик использованы непосредственно формулы Кэрриера–Гринспена вдоль координаты, нормальной к береговой линии. Наконец, в [18] рассмотрен двумерный бассейн с функцией дна  $D(x)$  общего вида, градиент которой не вырождается на границе области ( $\nabla D(x) \neq 0$ , когда  $D(x) = 0$ ), и доказаны строгие утверждения касательно нелинейных асимптотик. На последние результаты мы и будем опираться в данной работе.

*2.2. Модифицированное преобразование.* Некоторая сложность реализации формул (2.3) состоит в их зависимости от скорости  $U$ , особенно при пересчете времени  $\tau$  в  $t$ .

С другой стороны, поскольку рассматриваются достаточно малые решения (для которых, в частности, невырождена замена (2.1)), естественно попытаться упростить формулы (2.1), (2.3), отбрасывая в их правых частях слагаемые наиболее высокого порядка малости, — а это слагаемые, содержащие  $U$ . Итак, упрощенные формулы имеют вид

$$\eta = N(y, \tau), \quad u = U(y, \tau), \quad t = \tau, \quad x = y - N(y, \tau)/\gamma \Rightarrow \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow \quad \eta(x, t) = N(Y(x, t), t) = \gamma(Y(x, t) - x) \quad (2.6)$$

Выясним, какова эффективность такого подхода на примере точных решений двух типов.

1) Построенные в [26] решения вида набегающих на берег уединенных волн основаны на решениях линейного волнового уравнения (1.4) с  $D(x) = \gamma x$  специального вида

$$N(y, \tau) = \varepsilon \gamma \mu \operatorname{Re} e^{i\theta} \left( c_0 \frac{\tau - \tau_0}{\mu} - i \right) \left[ \frac{4y}{\mu} - \left( c_0 \frac{\tau - \tau_0}{\mu} - i \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (2.7)$$

$$U(y, \tau) = 2\varepsilon c_0 \operatorname{Re} e^{i\theta} \left[ \frac{4y}{\mu} - \left( c_0 \frac{\tau - \tau_0}{\mu} - i \right)^2 \right]^{-3/2}$$

Здесь  $\mu$  — длина волны,  $\varepsilon > 0$  — безразмерный малый параметр, отвечающий за амплитуду волны,  $c_0 = \sqrt{\gamma \mu g}$  — волновая скорость на расстоянии  $\mu$  от берега, параметр  $\theta$  влияет на форму профиля, а  $t = \tau_0$  — время прихода волны на берег.

2) Решения вида стоячих волн [6, 7, 19] получаются из решений

$$N(y, \tau) = \varepsilon \gamma \mu \cos(\omega \tau) \mathbf{J}_0 \left( 2\omega \sqrt{\frac{y}{\gamma g}} \right), \quad U(y, \tau) = \varepsilon c_0 \sin(\omega \tau) \sqrt{\frac{\mu}{y}} \mathbf{J}_1 \left( 2\omega \sqrt{\frac{y}{\gamma g}} \right) \quad (2.8)$$

линейной системы (1.3) с  $D(x) = \gamma x$ , где  $\mathbf{J}_k$  — функция Бесселя порядка  $k$ , безразмерный малый параметр  $\varepsilon > 0$  характеризует амплитуду волны, а характерный размер  $\mu = \mu_{0,1}^2 \gamma g / 4\omega^2$  — расстояние до первого узла при частоте  $\omega$  ( $\mu_{0,1} \approx 3\pi/4$  — первый нуль функции Бесселя  $\mathbf{J}_0$ ).

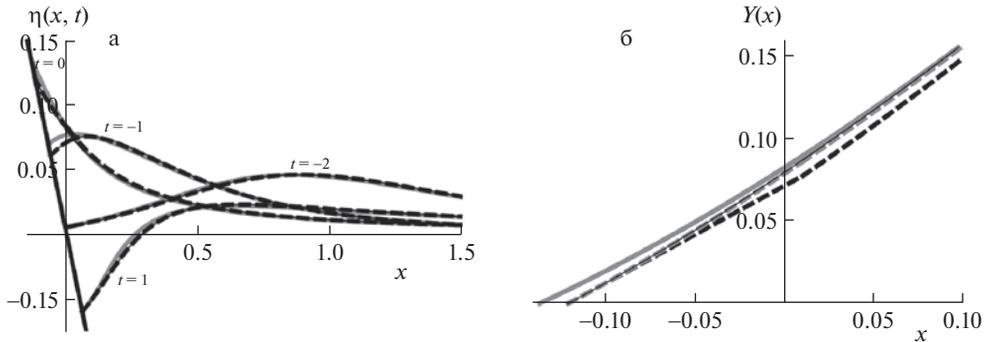
Сравнение точных решений нелинейной задачи, полученных из (2.7) и (2.8) преобразованием Кэрриера—Гринспена, с приближенными решениями, полученными параметрически заданным упрощенным преобразованием (2.5) или с помощью явного итерационного преобразования (2.10), показывает, что указанные преобразования дают в этих примерах достаточно хорошее приближение к точному решению (см. рис. 1, 2).

Замена (2.5) хороша тем, что она легко обобщается на случай нелинейной функции  $D(x)$  и на двумерный случай (в предположении, что на береговой линии  $\nabla D \neq 0$ ). Именно, в этой замене следует заменить  $x$  и  $y$  соответственно на  $D(x)$  и  $D(y)$ . При этом нужно учесть, что такую замену следует делать лишь в окрестности точек берега  $a, b$ , во внутренних точках она может не работать. Аккуратная реализация этого соображения состоит во введении гладкой срезающей функции  $\rho(x)$ , равной единице в окрестности берега и нулю вдали от берега, например,  $\rho(x) = 1$  при  $x - a < \delta$  или  $b - x < \delta$ ,  $\rho(x) = 0$  при  $x - a > 2\delta$  и  $b - x > 2\delta$ , где  $\delta$  — некоторое достаточно малое расстояние. В результате получается замена

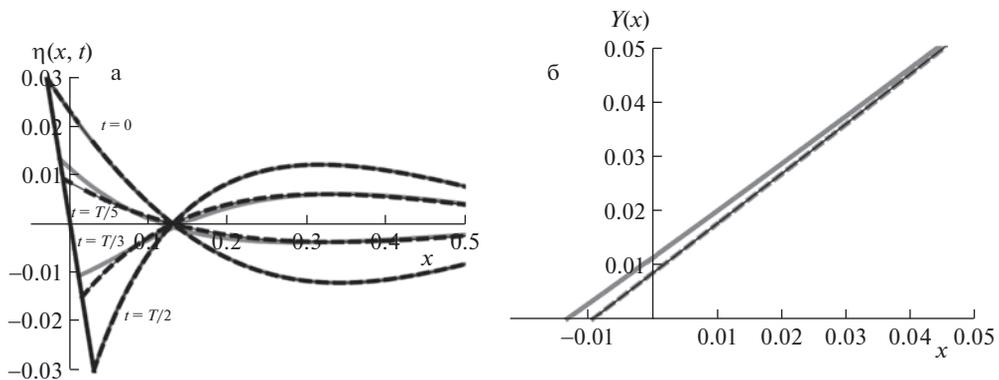
$$\eta = N(y, \tau), \quad u = U(y, \tau), \quad t = \tau, \quad D(x) = D(y) - N(y, \tau)\rho(y), \quad (2.9)$$

которая задает функции  $\eta(x, t)$ ,  $u(x, t)$  параметрически.

Далее предлагается использовать замену вычислительно даже более простую, чем (2.9) — определяемую явно с помощью итерационных формул. Именно, в одномерном



**Рис. 1.** Сравнение точного решения нелинейной задачи с асимптотическим для бегущей волны (а) и сравнение графиков замены переменных (б). Используется решение (2.7) линейной задачи в безразмерных переменных ( $\gamma = 1, g = 1, \mu = 1, c_0 = 1$ ), значения параметров:  $\tau_0 = 0, \theta = -\pi/4, \varepsilon = 0.17$ , а графики построены для моментов времени  $t = -2, -1, 0, 1$ . Нелинейные решения отвечают замене Кэрриера–Гринспена (2.4) (серые кривые), а асимптотики – параметрической замене (2.5) (черные сплошные) и явной замены (2.10) с одной итерацией (черный пунктир). Соответствующие кривые для замены  $y = Y(x, t)$  изображены в момент времени  $t = 0$ . График замены (2.10) с двумя итерациями (серый пунктир на (б)) неотличим от параметрической замены.



**Рис. 2.** а: Сравнение точного решения нелинейной задачи с асимптотиками для стоячей волны и б: сравнение графиков замены переменных. Используется решение линейной задачи (2.8) в безразмерных переменных ( $\gamma = 1, g = 1, \mu = 1, c_0 = 1$ ) при значениях параметров:  $\varepsilon = 0.03, \omega = 3.3, T = 2\pi\omega^{-1}$ , в моменты времени  $t = 0, T/5, T/3$  и  $T/2$ . Нелинейные решения отвечают замене Кэрриера–Гринспена (2.4) (серые кривые), а асимптотики – параметрической замене (2.5) (черные сплошные) и явной замены (2.10) с одной итерацией (черный пунктир). Соответствующие кривые для замены  $y = Y(x, t)$  изображены в момент времени  $t = T/5$ . График замены (2.10) для одной итерации уже неотличим от параметрической замены.

случае решение  $y = Y(x, t)$  уравнения (2.9) можно искать следующим образом (в окрестности левого берега  $y = a$ ):

$$Y_0 = \max\{a + \delta_0, x\}, \quad Y_n - a = (Y_{n-1} - a) \frac{D(x) + N(a, t)}{D(Y_{n-1}) - \rho(Y_{n-1})N(Y_{n-1}, t) + N(a, t)} \quad (2.10)$$

$$Y(x, t) = Y_n(x, t) + O(|Y_n - x|^{n+1}),$$

где  $\delta_0 > 0$  – произвольная малая постоянная. Как легко видеть, указанная замена переводит подвижную границу  $a(t)$  в точку  $y = 0$  и, значит, входит в класс замен, рас-

смотренных в [18], для которых справедливо утверждение 2. Также заметим, что при  $Y_0 = \delta_0 \rightarrow 0$  для первой итерации получаем в пределе  $Y_1 - a \sim (D(x) + N(a, t))/(D'(a) - N_y(a, t))$ . Для рассматриваемых примеров уже первая итерация  $y = Y_1(x, t)$  дает хорошее приближение, а вторая итерация этой процедуры  $y = Y_2(x, t)$  практически неотличима от параметрически заданной функции (2.9) (см. рис. 1). Формулы (2.6) принимают вид

$$\eta(x, t) \approx N(Y(x, t), t) = D(Y(x, t)) - D(x), \quad u(x, t) \approx U(Y(x, t), t)$$

Предложенная формула входит в рассмотренный в [18] класс замен, и из результатов [18] вытекает следующее утверждение. Пусть параметр  $\varepsilon \rightarrow 0$  характеризует амплитуду решения линеаризованной системы:  $N(y, t) = O(\varepsilon)$ ,  $U(y, t) = O(\varepsilon)$ .

*Утверждение 2.* При достаточно малом  $\varepsilon$  функции  $\eta(x, t)$ ,  $u(x, t)$ , полученные из точного решения линеаризованной задачи (например, (2.7) или (2.8)) посредством обратной параметрической замены (2.9) (или явной (2.10)), определяют главный член формального асимптотического решения системы (1.1), (1.2).

На рис. 1 рассматривается случай полубесконечной области и плоского наклонного дна, для которого нелинейные асимптотики сравниваются с точными решениями нелинейной задачи, полученными с помощью замены Кэрриера–Гринспена (2.4). Как видно из графика, асимптотики, полученные с помощью параметрической и явной замены практически не отличаются уже для первой итерации  $Y_1(x)$ . Также можно видеть, что асимптотики довольно хорошо совпадают с точным решением, а отклонения связаны в первую очередь с тем, что не учитываются поправки по времени, т.е. профиль точного решения практически точно повторяется асимптотикой, но в слегка измененный момент времени.

*Замечание 1.* Замена Кэрриера–Гринспена (2.3) корректно определена, когда якобиан (2.2) не обращается в нуль. Это же условие гарантирует отсутствие обрушения решения нелинейной системы. “Упрощенная” замена (2.5) существует, когда не обращается в нуль якобиан  $J_1 = \partial x / \partial y = 1 - \gamma N_y$ , что не совпадает с условием необрушения  $J \neq 0$ . Тем не менее, вырождение  $J_1$  и  $J$  происходит при одном и том же порядке отношения амплитуды  $\varepsilon$  линейной волны к длине волны  $\mu$ . В частности, для стоячих волн (2.8) над плоским наклонным дном  $J_1$  не вырождается при

$$\kappa = \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{g} < 1 \quad (2.11)$$

Для бегущей волны (2.7) условие необрушения можно получить аналогично [37].

В случае неровного дна  $D(x)$  для точного условия необрушения эффективные формулы нам не известны, но естественно ожидать, что обрушение происходит при примерно тех же соотношениях амплитуды и длины волны, при которых вырождается замена (2.9)  $J_2 := \partial x / \partial y = 0$ , что вблизи берега равносильно условию  $D'(y) - N_y(y, t) = 0$ .

**3. Асимптотические решения типа стоячих волн в ограниченном бассейне.** В предыдущем пункте были построены некоторые точные решения системы уравнений мелкой воды над плоским наклонным дном в неограниченном бассейне. Выше оговаривалось, что для построения решений этой нелинейной системы в ограниченном бассейне следует задать либо начальные условия, либо потребовать выполнения каких-то других условий, например, условие периодичности решения по времени. В линейном случае многие такие решения выражаются через собственные функции  $v(y)$  и значения  $\omega^2$  заданного на отрезке  $[a, b]$  оператора  $\hat{L}$  (1.7) по формулам (1.6), аналогичным (2.8).

Такие решения могут служить базой для построения  $t$ -периодических решений с малой амплитудой (мы, напомним, характеризуем ее малым параметром  $\varepsilon$ ) нелинейных уравнений, точнее их асимптотик в предположении об их малости, с помощью методов теории возмущений, например бесконечномерных аналогов метода осреднения Крылова–Боголюбова [38] или метода КАМ [39, 40]. Если иметь в виду эти методы, соответствующие частоты  $\omega$  следует считать зависящими от  $\varepsilon$ , предполагая что  $\omega = \omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$ . В рассматриваемых здесь задачах нелинейные эффекты сильно сказываются только в окрестности берега и согласно [18] слабо влияют на значения  $\omega$ , поэтому при определении главного члена асимптотики достаточно взять  $\omega_0$ , что будет сделано в дальнейшем, при этом для упрощения обозначений вместо  $\omega_0$  пишем  $\omega$ .

*3.1. Стоячие волны в бассейне с плоским наклонным дном и вертикальной стенкой.* Рассмотрим уравнение (1.1) с плоским наклонным дном  $D(x) = x$  и с граничными условиями (1.8) (вертикальная стенка при  $x = b$ ). Замена Кэрриера–Гринспена (2.3) переводит нелинейное уравнение в линейное уравнение (1.3), когда соответствующий якобиан  $J$  не обращается в нуль. При этой замене переменная левая граница  $x = a(t)$ , определяемая соотношением (1.2), переходит в фиксированную:  $y \in [0, \infty)$ , но правая граница  $x = b$  переходит в подвижную  $y = y_b(\tau)$

$$U|_{y=y_b(\tau)} = 0, \quad y_b(\tau) = b + N(y_b(\tau), \tau)$$

Таким образом, при наличии стенки замена Кэрриера–Гринспена не обеспечивает точную линеаризацию задачи даже в случае плоского наклонного дна, хотя и линеаризует системы уравнений. С другой стороны, замена (2.9) или (2.10), где срезающая функция  $\rho(y) = 0$  в окрестности стенки, приводит к нелинейной задаче в фиксированной области  $y \in [0, b]$ , при этом условие на стенке  $y = b$  остается без изменений, а вместо условия на подвижной границе  $a(t)$  нужно потребовать конечность энергии решения (1.5) (при  $c^2(x) = x$ ). Методы решения второй задачи представляются нам более развитыми и эффективными. Более того, если считать решение малым и ввести характеризующий амплитуду решения малый параметр  $\varepsilon$ , то как уже отмечалось, согласно Утверждению 2, главный член формального асимптотического (по параметру  $\varepsilon$ ) решения полностью определяется решением линейной задачи, задаваемой уравнением (1.3), условием (1.5) и краевым условием  $U|_{y=b} = 0$ .

Очевидно, линейная задача (1.3), (1.5),  $u|_{y=b} = 0$  допускает семейство точных стационарных решений (в виде стоячей волны), задаваемых формулами (2.8) [6, 7, 9], где частоты принимают дискретные значения  $\omega = \omega_n$ , которые определяются равенствами

$$\omega_n = \frac{1}{2} \alpha_n \sqrt{\frac{yg}{b}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

Здесь  $\alpha_n$  – нули функции Бесселя  $J_1$ , (при больших  $n$ :  $\alpha_n \approx \pi(n + 1/4)$ ).

Аналогично ([18], теор. 2), можно доказать следующее утверждение.

*Утверждение 3.* Функции  $\eta_n(x, t)$ ,  $u_n(x, t)$ , полученные из (2.8), (3.1) с помощью замены (2.10), определяют формальное асимптотическое решение нелинейной задачи.

*Замечание 2.* Главный член асимптотики применим (дает малую невязку при подстановке в уравнение) на временах порядка  $t = O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . На больших временах начинает играть роль зависимость частоты нелинейных колебаний от амплитуды, т.е. нелинейное дисперсионное соотношение (см. [38]), и частоту нужно соответствующим образом подправлять.

*3.2. Стоячие волны в бассейне с параболическим дном.* Еще один пример точных решений линеаризованных уравнений дает случай дна  $D(x)$ , имеющего форму параболы,

которую без уменьшения общности можно представить в виде  $D(x) = \mathcal{D} - \mathcal{H}^{-1}x^2 = \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{A}^2 - x^2)$ , где  $\mathcal{D}$  – максимальная глубина и  $2\mathcal{A}$  – ширина невозмущенной поверхности. В этом случае соответствующая задача о собственных функциях – сводится к уравнению, определяющему полиномы Лежандра  $P_n(y)$  (по-видимому, впервые этот факт отмечен Лэмбом в 1895 г., см. ([6], sec. 182)):

$$\hat{L}P_n \equiv -\frac{d}{d\tilde{y}}\left((1-\tilde{y}^2)\frac{dP_n}{d\tilde{y}}(\tilde{y})\right) = \tilde{\omega}_n^2 P_n(\tilde{y}); \quad \tilde{\omega}_n^2 = n(n+1), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

Перейти от физического волнового уравнения (1.3) к безразмерному (3.2) можно с помощью подстановки:  $x = \mathcal{A}\tilde{x}$ ,  $t = \mathcal{T}\tilde{t}$ ,  $\eta = \tilde{\eta}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}^2$ ,  $u = \tilde{u}\sqrt{g\mathcal{H}^{-1}\mathcal{A}^2}$ , где характерный масштаб времени  $\mathcal{T} = \sqrt{\mathcal{H}/g}$ , так что частота меняется как  $\omega = \tilde{\omega}\sqrt{g\mathcal{H}^{-1}}$ . Таким образом гармонические по времени решения линейной задачи (1.3) с двумя берегами при условии конечности энергии (1.5) определяются формулой

$$N^n(y, \tau) = \frac{\varepsilon\mathcal{A}^2}{\mathcal{H}} \cos(\omega_n\tau) P_n\left(\frac{y}{\mathcal{A}}\right), \quad U^n(y, \tau) = -\frac{\varepsilon\mathcal{A}g}{\omega_n\mathcal{H}} \sin(\omega_n\tau) P_n\left(\frac{y}{\mathcal{A}}\right) \quad (3.3)$$

$$\omega_n = \sqrt{n(n+1)g\mathcal{H}^{-1}}$$

*Утверждение 4.* Согласно ([18], теор. 2), при достаточно малой амплитуде  $\varepsilon$  применение замены (2.9) к точному решению (3.3) даст асимптотику  $\text{mod } O(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  исходной нелинейной задачи (1.1) с двумя подвижными границами (1.2).

В случае, когда область ограничена двумя берегами  $\Omega = (a, b)$ , итерационная процедура (2.10) заменяется на следующую (срезающая функция  $\rho(y)$  равна нулю в точке  $c \in (a, b)$ ):

$$Y_0 = \begin{cases} \max\{a + \delta, x\}, & x \leq c \\ \min\{b - \delta, x\}, & x \geq c \end{cases}$$

$$Y_1 = \begin{cases} a + (Y_0 - a) \frac{D(x) + N(a, t)}{D(Y_0) - \rho(Y_0)N(Y_0, t) + N(a, t)}, & x \leq c \\ b + (Y_0 - b) \frac{D(x) + N(b, t)}{D(Y_0) - \rho(Y_0)N(Y_0, t) + N(b, t)}, & x \geq c \end{cases} \quad (3.4)$$

*3.3. Стоячие волны в бассейне с произвольным неровным дном. Формулы для решения линейной задачи.* Рассмотрим задачу о построении периодических по времени решений типа стоячих волн в случае, когда функция  $D(x)$  достаточно произвольно зависит от  $x$ . Ограничимся случаем бассейна с двумя пологими берегами и будем предполагать, что  $D(x)$  – гладкая функция, заданная на интервале  $[a - \delta, b + \delta]$ ,  $D(a) = D(b) = 0$ ,  $D'(a) < 0$ ,  $D'(b) > 0$ ,  $D(x) > 0$  при  $x \in (a, b)$ ,  $D(x) < 0$  вне отрезка  $[a, b]$ . Здесь  $a < b$  – числа, определяющие берега бассейна,  $\delta$  – положительное число. Как отмечалось, описанный выше подход позволяет, по крайней мере, задачу о старшей части асимптотики решения по параметру  $\varepsilon$  свести к линейной задаче (1.3) и, более точно, к задаче о собственных функциях оператора  $\hat{L}$  вида (1.7).

Будем строить асимптотические решения задачи (1.7). Большим параметром здесь является номер  $n$  соответствующей собственной функции  $\psi_n$ , который связан с малой характерной длиной волны  $\mu = (b - a)/n$  функции  $\psi_n$ . Такие асимптотики были построены в [17] с помощью модифицированного канонического оператора Маслова и последующей его реализации в виде функций Бесселя (историю вопроса и библиогра-

фию можно найти в этой статье). Приведем соответствующие формулы. Определим функцию, имеющую размерность времени

$$S(x, y) = \int_x^y \frac{dy}{\sqrt{gD(y)}}; \quad a \leq x \leq y \leq b \quad (3.5)$$

Решение в виде стоячей волны существует при выполнении условия квантования

$$\omega_n = \frac{\pi}{S(a, b)} \left( \frac{m}{4} + n \right) \left( 1 + O(n^{-1}) \right); \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

где  $m = 2$  в случае двух берегов и  $m = 1$  в случае берега и вертикальной стенки – приращение индекса Маслова–Морса. Главный член асимптотики определяется формулами:

$$N^n = \varepsilon \cos(\omega_n \tau + \tau_0) \hat{N}^n(y), \quad U^n = -\frac{\varepsilon g}{\omega_n} \sin(\omega_n \tau + \tau_0) \frac{\partial \hat{N}^n(y)}{\partial y}, \quad (3.7)$$

где  $\hat{N}^n$  определяется с точностью до умножения на  $(1 + O(n^{-3/2}))$  следующим образом ( $\delta > 0$ ):

$$\hat{N}^n = \frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{H}} \begin{cases} \mathbf{J}_0(\omega_n S(a, y)) \left( \frac{\mathcal{A} \sqrt{gS(a, y)}}{\mathcal{H} \sqrt{D(y)}} \right)^{1/2}, & y \in [a, b - \delta] \\ (-1)^n \mathbf{J}_0(\omega_n S(y, b)) \left( \frac{\mathcal{A} \sqrt{gS(y, b)}}{\mathcal{H} \sqrt{D(y)}} \right)^{1/2}, & y \in [a + \delta, b] \end{cases} \quad (3.8)$$

В случае одного берега и вертикальной стенки асимптотика определяется на всем интервале  $y \in [a, b]$  с помощью функции  $S(a, y)$  по (3.8).

*Условия существования приближенного решения и согласование малых параметров.* Следуя предложенному алгоритму, возьмем асимптотику (3.6)–(3.8) линейной задачи (1.3) и применим к ней замену (2.10); получатся приближенные формулы для волны с соответствующей переменной областью.

Строгое доказательство того утверждения, что в результате получится асимптотическое решение нелинейной задачи, существенно сложнее проведенного в [18]. Дело в том, что при использовании асимптотики линейной задачи, помимо амплитуды  $\varepsilon$ , возникает дополнительный малый параметр – относительная длина волны  $\mu \mathcal{A}^{-1}$ , и применимость линейной асимптотики доказывается в пределе при малых  $\mu \rightarrow 0_+$  (в случае стоячих волн удобнее рассматривать большой параметр – номер гармоники  $n \sim \mathcal{A}/\mu$ ). Чтобы провести строгое доказательство, что для нелинейной задачи построенные формулы дают малую невязку, необходимо рассмотреть пределы сразу по двум параметрам  $\mu \rightarrow 0_+$  (характеризующим длину волны) и  $\varepsilon \rightarrow 0_+$  (характеризующим амплитуду), причем эти параметры должны быть согласованы.

Для точных решений (2.8) и (3.3) можно вычислить критическую амплитуду  $\varepsilon_0$ , когда происходит “обрушение” замены (2.9), а именно вырождается якобиан  $J_2(y) = \partial x / \partial y$ . В первую очередь якобиан обнуляется в точке берега  $y = a$ , причем происходит это в момент  $t = T/2 = \pi/\omega$  максимального откатывания волны (наименьшего уровня уреза воды):

$$\begin{aligned} J_2|_{y=a, t=T/2} &= D'(a(T/2))^{-1} (D'(a) - N_y(a, T/2)) = \\ &= D'(a(T/2))^{-1} \left[ \gamma - \varepsilon \gamma \mu \frac{\omega}{\sqrt{\gamma g y}} \mathbf{J}_1 \left( 2\omega \sqrt{\frac{y}{\gamma g}} \right) \right]_{y=0} = D'(a(T/2))^{-1} \left( \gamma - \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{g} \right) \end{aligned}$$

для решения (2.8) и

$$\begin{aligned} J_2|_{y=a, t=T/2} &= D'(a(T/2))^{-1}(D'(a) - N_y(a, T/2)) = \\ &= D'(a(T/2))^{-1} \left( \frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{H}} - \frac{\varepsilon\mathcal{A}}{\mathcal{H}} P_n(1) \right) = D'(a(T/2))^{-1} \left( \frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{H}} - \frac{\varepsilon\mathcal{A}}{\mathcal{H}} \frac{n(n+1)}{2} \right) \end{aligned}$$

для решения (3.3). Таким образом, коэффициенты  $\kappa_{1,2}$ , определяющие условие невырождения якобиана замены (2.9) для решений (2.8) и (3.3), равны соответственно:

$$\kappa_1 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{\gamma g} < 1, \quad \kappa_2 = \frac{\varepsilon n(n+1)}{4} \quad (3.9)$$

(аналогичное соотношение получено в [37] для условия обрушения в случае бегущей волны (2.7)).

Наша гипотеза заключается в том, что условия существования замены (2.9) по порядку величин совпадают с условиями необрушения, а также, что если амплитуда  $\varepsilon$  много меньше критической, то и невязка будет мала.

Поскольку при моделировании конкретных волн “малые параметры” всегда принимают некоторые конечные значения, то предлагаемый алгоритм заключается в том, чтобы проверить корректность замены (2.10), и если соответствующие нелинейные формулы не обрушаются, то использовать их как приближенные для моделируемых волн.

Проиллюстрируем сказанное на следующем примере. Выберем функцию дна в виде

$$D(x) = 0.3(1 - x^2)(x^2 + 0.179x + 0.597)$$

(здесь все выкладки приведены в безразмерных переменных). Асимптотики линейной задачи для такой функции глубины можно найти в [17]. Обозначим невязку, возникающую при подстановке линейной асимптотики в первое и второе уравнение из (1.3), через  $\delta_1(y, \tau)$ ,  $\delta_2(y, \tau)$  соответственно и положим

$$\xi_\tau \equiv \sqrt{N_\tau^2 + D(y)U_\tau^2}, \quad \delta \equiv \sqrt{\delta_1^2 + D(y)\delta_2^2}$$

Численные расчеты показывают, что при амплитуде  $\varepsilon = 0.3$ , в ситуации, близкой к обрушению, когда якобиан  $J_2$  очень близок к нулю, невязка становится сравнимой с самой асимптотикой. При уменьшении амплитуды невязка уменьшается:

$$\|\delta\|_{L_2[a,b]} / \|\xi_\tau\|_{L_2[a,b]} = O(\varepsilon\omega^2).$$

**4. Экспериментальные методы и результаты.** В лабораторных условиях исследованы длинные поверхностные волны в жидкости в прямоугольных сосудах с переменной глубиной. Эксперименты проводились на стенде “Динамики и структуры осциллирующих течений” (ДСО) [20], который входит в уникальный исследовательский комплекс “ГФК ИПМех РАН”. Цель – верификация результатов теоретической модели на экспериментальных данных.

Экспериментально изучались стоячие волны в сосудах с линейным и вогнутым параболическим профилем дна с пологими берегами. Наличие пологого берега позволяет наблюдать набегание волн и его влияние на колебания жидкости. В этом состоит отличие представленного эксперимента от исследований стоячих волн в сосуде с параболическим [22] или линейным [24, 25] дном и вертикальными стенками.

*4.1. Описание эксперимента.* При создании волнового движения жидкости использовался параметрический резонанс, при котором образуются стоячие волны (волны Фарадея) из-за дестабилизации горизонтальной свободной поверхности жидкости в сосуде, колеблющемся вертикально. Поскольку волны Фарадея возбуждаются без использования каких-либо волнопродукторов, их наблюдение и измерение оказываются

более простыми и точными, чем при использовании других методов. Более того, профили волн аналогичны профилям свободных стоячих волн, что позволяет сравнить результаты измерений с выводами теории.

Сосуд с жидкостью помещался на платформу электромеханического вибростенда (см. [20]), обеспечивающего его гармонические вертикальные колебания. Двумерные волновые движения исследовались в режиме основного резонанса Фарадея [23], когда частота колебаний сосуда  $\Omega$  в два раза превышает частоту  $\omega$  возбужденных волн ( $\Omega \sim 2\omega$ ). Точность измерения периода колебаний резервуара составляла 2 мс. При фиксированной амплитуде колебаний сосуда  $S = 0.75$  см изменение частоты  $\Omega$  обеспечивало возбуждение соответствующей волновой моды с номером  $n$  и высотой волны  $\mathcal{H}$ . Сейши моделировались третьей и четвертой модами ( $n = 3, 4$ ) двумерных стоячих гравитационных волн на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде размером  $60 \times 14 \times 40$  или  $50 \times 4 \times 50$  см, колеблющемся в вертикальном направлении [23–25]. Сосуд изготовлен из прозрачного оргстекла. Волновая картина регистрировалась цифровой камерой DIMAGE Z2 и Canon PowerShot SX50HS (частота кадров составляла 30 и 120 к/с) в движущейся системе отсчета, жестко связанной с сосудом. Разрешение видеоизображений составляло 0.15 мм/пиксель. Последующая обработка видеок кадров осуществлялась с использованием программы ImageJ. Все эксперименты проводились при комнатной температуре 21–22°C.

В качестве рабочей жидкости использовалась вода и рассматривались две различные конфигурации дна сосуда: плоское наклонное и параболическое.

*Конфигурация I: плоское наклонное дно.* Используя монолитную трапециевидную вставку из оргстекла на дне сосуда размером  $60 \times 14 \times 40$  см, создана емкость с плоским дном  $D(x) = \gamma x$  с уклоном  $\gamma = 4.8 : 60$  или с углом наклона 0.08 радиана – рис. 3,а. При максимальной глубине воды  $\mathcal{D} = 4.5$  см длина невозмущенной свободной поверхности составляла  $\mathcal{L} = 56$  см. Экспериментальные исследования ограничивались двумерными стационарными колебаниями жидкости (рис. 3,б), создаваемыми четвертой волновой модой ( $n = 4$ ). Параметрическое возбуждение этих волн осуществлялось при частоте колебаний сосуда  $\Omega \sim 19.64\text{--}22.67 \text{ с}^{-1}$ .

*Конфигурация II: вогнутое параболическое дно.* В этом случае вогнутое параболическое дно в сосуде размером  $50 \times 4 \times 50$  см изготовлено из технического пластилина – рис. 3,в. Для формирования дна, описываемого функцией  $D(x) = \mathcal{D} - \mathcal{H}^{-1}x^2 = \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{A}^2 - x^2)$ , использовался соответствующий пластиковый шаблон. В результате при максимальной глубине воды  $\mathcal{D} = 3.2$  см длина поверхности неподвижной воды составляла  $\mathcal{L} = 2\mathcal{A} = 2\sqrt{\mathcal{H}\mathcal{D}} = 35.6$  см ( $\mathcal{H} = 100$  см). В диапазоне частот  $\Omega \sim 18.85\text{--}26.39 \text{ с}^{-1}$  возбуждалась третья мода двумерных стоячих волн – рис. 3,г.

На рис. 4 показаны профили четвертой волновой моды, возбуждаемой на свободной поверхности воды в сосуде с линейным берегом. Видеок кадры, представленные на рисунках, полностью отражают динамику волны в течение ее периода, причем производилась высокоскоростная видеозапись (120 к/с) с фронтальной стенки сосуда (а) и обычная запись (30 к/с) с направления под углом к сосуду (б). Разница в скорости съемки определяет неизбежную незначительную временную десинхронизацию, наблюдаемую при сравнении кадров (а) и (б) на этих рисунках. Несмотря на очень низкую амплитуду колебаний (едва заметную глазом) вблизи берега происходит обрушение волны (см. [41]).

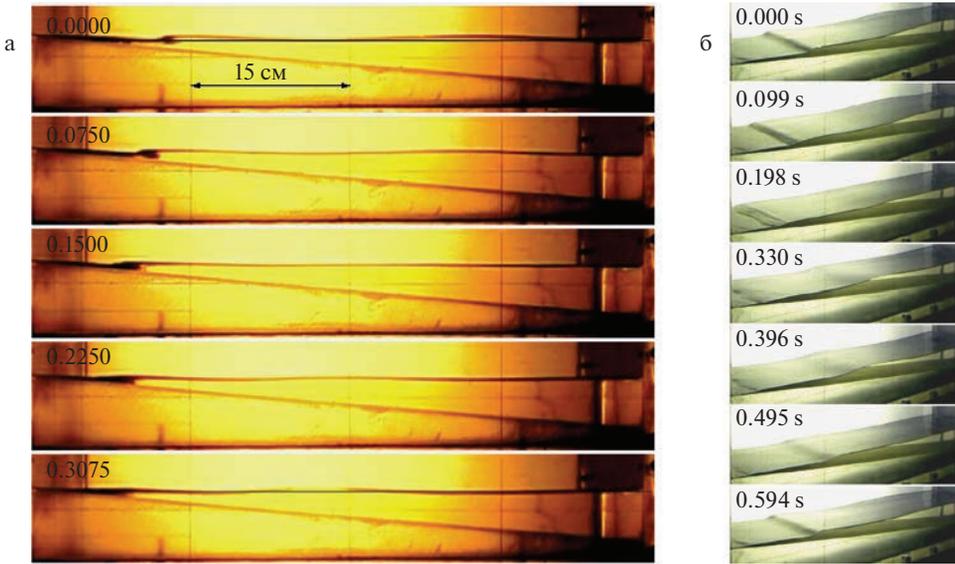
На рис. 5 показаны типичные профили третьей волновой моды, возбуждаемой на свободной поверхности воды в сосудах с параболическим дном в случае двух частот  $\Omega$  и разные по амплитуде. Сравнение профилей волн (а) и (б) позволяет сделать вывод о



**Рис. 3.** Конфигурация I. а: Сосуд с плоским наклонным дном, фронтальная камера, и б: четвертая мода двумерных стоячих волн, угловая камера. Конфигурация II. в: Сосуд с вогнутым параболическим дном, фронтальная камера, и г: третья мода двумерных стоячих волн, угловая камера, показаны волны максимального развития.

наличии безбуршающих волн в одном случае и существенно нелинейных колебаний – в другом.

Эксперимент с линейным дном оказался неудобен для сравнения, поскольку необрушающиеся волны настолько малы, что их тяжело наблюдать: для волн, изображен-



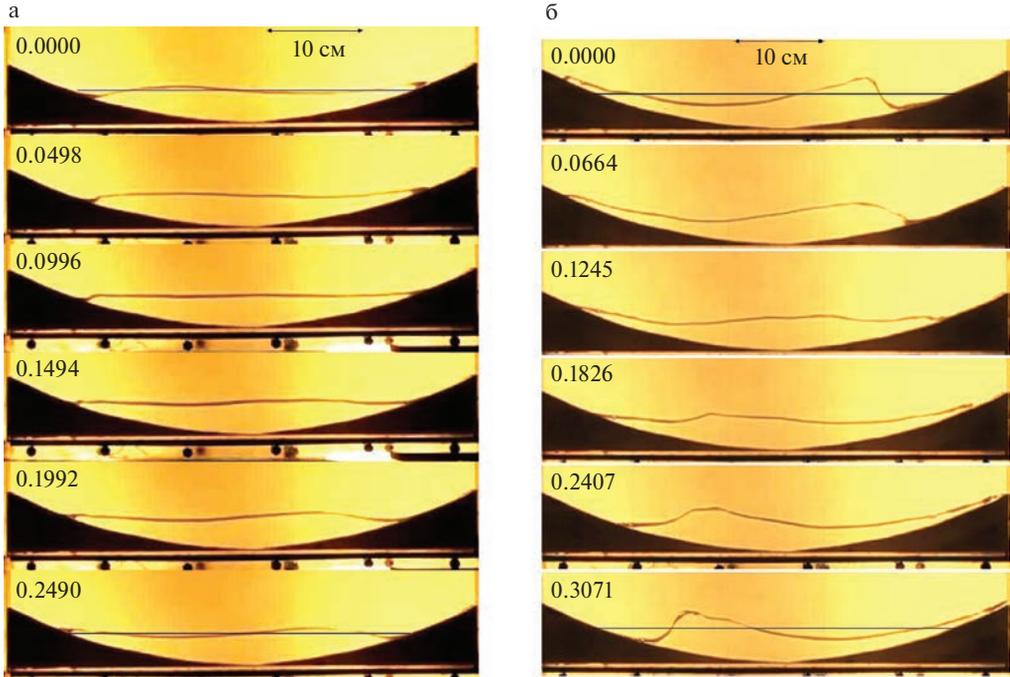
**Рис. 4.** Профиль стоячих колебаний над плоским наклонным дном с частотой колебаний сосуда  $\Omega = 20.47 \text{ с}^{-1}$ , соответствующий четвертой волновой моде во фронтальной (а) и изометрической (б) проекциях. Время в секундах отмечено в левом верхнем углу кадра.

ных на рис. 4, безразмерное отношение, определяющее условие обрушения равно (3.9)  $\kappa_1 \approx 18 > 1$ , так что якобиан обнуляется около берега. Эта проблема преодолевается в эксперименте с дном параболического профиля, когда при той же глубине можно получить больший наклон дна у границы жидкости и соответственно существенно меньшее требование на амплитуду необрушающихся волн. Учитывая указанную разницу в экспериментах, сравнение с теорией проводилось для случая вогнутого параболического дна, см. рис. 5,б.

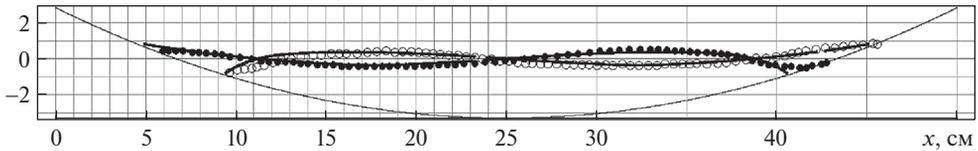
**4.2. Сравнение с экспериментом: случай вогнутого параболического дна.** Рассмотрим систему мелкой воды в размерных величинах (1.1). В соответствии с параметрами эксперимента в конфигурации II, зададим характерный масштаб  $\mathcal{A} = 17.8 \text{ см}$ , так что длина невозмущенной поверхности воды  $\mathcal{H} = 2\mathcal{A} = 35.6 \text{ см}$  и функция дна  $D(x) = \mathcal{D} - \mathcal{H}_0^{-1}x^2 = \mathcal{H}_0^{-1}(\mathcal{A}^2 - x^2)$ , где максимальная глубина  $\mathcal{D} = 3.2 \text{ см}$  и  $\mathcal{H}_0^{-1} = 0.01 \text{ см}^{-1}$ . Чтобы перейти от системы мелкой воды (1.1) к безразмерной системе с  $\tilde{g} = 1$  и функцией дна  $\tilde{D}(\tilde{x}) = 1 - \tilde{x}^2$ , характерный масштаб времени выберем равным  $\mathcal{T} = \sqrt{\mathcal{H}_0/g}$  и сделаем подстановку  $x = \mathcal{A}\tilde{x}$ ,  $t = \mathcal{T}\tilde{t}$ ,  $\eta = \tilde{\eta}\mathcal{H}_0^{-1}\mathcal{A}^2$ ,  $u = \tilde{u}\sqrt{g\mathcal{H}_0^{-1}\mathcal{A}^2}$ , что приведет к

$$\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + ((\tilde{D}(\tilde{x}) + \tilde{\eta})\tilde{u})_{\tilde{x}} = 0, \quad \tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} = 0, \quad \tilde{D}(\tilde{x}) = 1 - \tilde{x}^2 \quad (4.1)$$

Для трехузловой моды  $n = 3$ , наблюдаемой в эксперименте (рис. 5,а), период колебаний, предсказываемый теорией, равен  $T^{(3)} = 2\pi\omega_3^{-1} \approx 0.58 \text{ с}$  (см., напр, [2]). Период волн в эксперименте  $T_{\text{exper}}^{(3)} = 0.50 \text{ с}$  отличался от теоретического (это связано с особенностями параметрического возбуждения волн), но при этом профили волны довольно хорошо совпали с теорией.



**Рис. 5.** Третья мода стоячих волн над вогнутым параболическим дном с малой (а) и большой (б) амплитудой, частота колебаний сосуда соответственно  $\Omega = 25.23$  и  $24.26 \text{ с}^{-1}$ ; съемка на фронтальную камеру с частотой 120 к/с, время (с) указано в левом верхнем углу кадра.



**Рис. 6.** Сравнение асимптотических формул (сплошные кривые) с волной в эксперименте (прозрачные и сплошные кружочки) в моменты времени, соответствующие максимальному и минимальному отклонению уреза воды:  $t = T$  и  $t = T/2$ , где  $T$  – период колебаний.

На рис. 6 сравнивается асимптотика возвышения свободной поверхности с экспериментом в моменты максимального и минимального отклонения уреза воды. Амплитуда волны в максимальной точке  $\mathcal{H} \approx 1$  см, и критерий необрушения (3.9) выполняется:  $\kappa_2 = 0.9 < 1$ .

**Заключение.** Предложен метод моделирования одномерных периодических (стоячих) волн в бассейнах с двумя берегами и берегом и стенкой. При построении приближенного решения нелинейной задачи используются асимптотики решения линейной задачи и замена вроде замены Кэрриера–Гринспена. Проведено сравнение с модельными примерами плоского наклонного дна и параболического дна, а также сравнение с экспериментом, в котором стоячие волны возбуждаются при основном параметрическом резонансе. Сравнение показало хорошее соответствие. Полученные аналити-

ческие формулы легко реализуются на компьютере и позволяют проводить расчеты в режиме реального времени.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 21-1100341.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stoker J.J.* Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. New York: Wiley, 1958. 609 p.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
3. *Mei C.C.* The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. Singapore: World Sci., 1989. 768 p.
4. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
5. *Pelinovsky E.N., Mazova R.Kh.* Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles // Natural Hazards, 1992. V. 6. P. 227–249.
6. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932. 738 p.
7. *Chrystal G.* XXV. On the hydrodynamical theory of seiches // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1906. V. 41. P. 599–649.
8. *Оболенский В.Н.* Сейши и их теория // Записки по гидрографии. 1919. Т. 42. № 2. С. 13–76.
9. *Rabinovich A.B.* Seiches and harbor oscillations // Handbook of Coastal & Ocean Engng. 2009. P. 193–236.
10. *Арсеньева Н.М., Давыдов Л.К., Дубровина Л.Н., Конкина Н.Г.* Сейши на озерах СССР. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963. 184 с.
11. *Зырянов В.Н.* Сейши подо льдом // Водные ресурсы. 2011. Т. 38. № 3. С. 259–271.
12. *Смирнов С.В., Кучер К.М., Гранин Н.Г., Стурова И.В.* Сейшевые колебания Байкала // Изв. РАН. ФАО. 2014. Т. 50. № 1. С. 105–116.
13. *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // в: Итоги науки. Сер. Матем. Матем. анализ. 1969. М.: ВИНТИ, 1971. 252 с.
14. *Vukasinac T., Zhevandrov P.* Geometric asymptotics for a degenerate hyperbolic equation // Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9. № 3. P. 371–381.
15. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
16. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. СПб.: Лань, 2010. 457 с.
17. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Нестандартные Лагранжевы особенности и асимптотические собственные функции вырождающегося оператора  $d/dx D(x) d/dx$  // Тр. МИАН. 2019. Т. 306. С. 83–99.
18. *Dobrokhотов S.Yu., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E.* Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the nonlinear shallow water equations in a basin with a gently sloping beach // Russ. J. Math. Phys. 2022. V. 29. P. 28–36.
19. *Carrier G.F., Greenspan H.P.* Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 97–109.
20. <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#aboutDSO>
21. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 122–129.
22. *White P., Watson W.* Some experimental results in connection with the hydrodynamical theory of seiches // Proc. R. Soc. Edinb. 1906. V. 26. № 01. P. 142–156.
23. *Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 120–126.
24. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н.* Волны Фарадея в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 4. С. 83–91.
25. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н.* Стоячие поверхностные волны в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями стенок и дна // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 65–74.
26. *Доброхотов С.Ю., Тироцци Б.* Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью  $c = \sqrt{x}$  // УМН. 2010. Т. 65. № 1 (391). С. 185–186.

27. Доброхотов С.Ю., Медведев С.Б., Миненков Д.С. О заменах, приводящих одномерные системы уравнений мелкой воды к волновому уравнению со скоростью звука  $c^2 = x$  // Матем. зам. 2013. Т. 93. № 5. С. 725–736.
28. Чиркунов Ю.А., Доброхотов С.Ю., Медведев С.Б., Миненков Д.С. Точные решения одномерных уравнений мелкой воды над ровным и наклонным дном // ТМФ. 2014. Т. 178. № 3. С. 322–345.
29. Didenkulova I., Pelinovsky E. Non-dispersive traveling waves in inclined shallow water channels // Phys. Lett. A. 2009. V. 373. № 42. P. 3883–3887.
30. Rybkin A., Pelinovsky E., Didenkulova I. Non-linear wave run-up in bays of arbitrary cross-section: generalization of the Carrier–Greenspan approach // J. Fluid Mech. 2014. V. 748. P. 416–432.
31. Anderson D., Harris M., Hartle H. et al. Run-up of long waves in piecewise sloping U-shaped bays // Pure Appl. Geophys. 2017. V. 174. P. 3185–3207.
32. Rybkin A., Nicolosky D., Pelinovsky E., Buckel M. The generalized Carrier–Greenspan transform for the shallow water system with arbitrary initial and boundary conditions // Water Waves. 2021. V. 3. № 1. P. 267–296.
33. Antuono M., Brocchini M. The boundary value problem for the nonlinear shallow water equations // Studies in Appl. Math. 2007. V. 119. № 1. P. 73–93.
34. Миненков Д.С. Асимптотики решений одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды с вырождающейся скоростью // Матем. зам. 2012. Т. 92. № 5. С. 721–730.
35. Chugunov V.A., Fomin S.A., Noland W., Sagdiev B.R. Tsunami runup on a sloping beach // Comp.&Math. Meth. 2020. № 2. P. e1081.
36. Minenkov D.S. Asymptotics near the shore for 2D shallow water over sloping planar bottom // Days on Diffraction (DD). 2017. P. 240–243.
37. Аксенов А.В., Доброхотов С.Ю., Дружков К.П. Точные решения типа “ступеньки” одномерных уравнений мелкой воды над наклонным дном // Матем. зам. 2018. Т. 104. № 6. С. 930–936.
38. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
39. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Ленанд, 2017. 416 с.
40. Арнольд В.И., Козлов В.В., Неёштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.
41. Galvin C.J. Breaker type classification on three laboratory beaches // J. Geophys. Res. 1968. V. 73. P. 12. P. 3651–3659.

### Asymptotics of Long Standing Waves in One-Dimensional Basins with Shallow Coasts: Theory and Experiment

S. Yu. Dobrokhotov<sup>a,#</sup>, V. A. Kalinichenko<sup>a,##</sup>, D. S. Minenkov<sup>a,###</sup>, and V. E. Nazaikinskii<sup>a,####</sup>

<sup>a</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: s.dobrokhotov@gmail.com*

<sup>##</sup> *e-mail: vakalin@mail.ru*

<sup>###</sup> *e-mail: minenkov.ds@gmail.com*

<sup>####</sup> *e-mail: nazaikinskii@yandex.ru*

We construct time-periodic asymptotic solutions of the one-dimensional system of nonlinear shallow water equations in a basin of variable depth  $D(x)$  with two shallow coasts (which means that the function  $D(x)$  vanishes at the points defining the coast) or with one shallow coast and a vertical wall. Such solutions describe standing waves similar to the well-known Faraday waves in basins with vertical walls. In particular, they approximately describe seiches in elongated basins. The construction of such solutions consists of two stages. First, time-harmonic exact and asymptotic solutions of the linearized system generated by the eigenfunctions of the operator  $d/dx D(x) d/dx$  are determined, and then, using a recently developed approach based on the simplification and modification of the Carrier–Greenspan transformation, solutions of nonlinear equations are reconstructed in parametric form. The

resulting asymptotic solutions are compared with experimental results based on the parametric resonance excitation of waves in a bench experiment.

*Keywords:* nonlinear shallow water equations, Carrier–Greenspan type transformation, asymptotic solutions, standing waves, bench experiment

## REFERENCES

1. *Stoker J.J.* Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. N.Y.: Wiley, 1958. 609 p.
2. *Sretenskii L.N.* Theory of Fluid Wave Motions. Moscow: Nauka, 1977. (in Russian)
3. *Mei C.C.* The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. Singapore: World Sci., 1989. 768 p.
4. *Pelinovsky E.N.* Hydrodynamics of Tsunami Waves. N. Novgorod: IAP RAS, 1996. 276 p. (in Russian)
5. *Pelinovsky E.N., Mazova R.Kh.* Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles // Natural Hazards, 1992, vol. 6, no. 3, pp. 227–249.
6. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932. 738 p.
7. *Chrystal G.* XXV. On the hydrodynamical theory of seiches // Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1906, vol. 41, pp. 599–649.
8. *Obolenskii V.N.* Seiches and their theory // Zapiski po Gidrografii, 1919, vol. 43, no. 2, pp. 13–76. (in Russian)
9. *Rabinovich A.B.* Seiches and harbor oscillations // Handbook of Coastal & Ocean Engng., 2009, pp. 193–236.
10. *Arsenneva N.M., Davydov L.K., Dubrovina L.N., Konkina N.G.* Seiches on the USSR Lakes. Leningrad: Univ. Press, 1963. 184 p. (in Russian)
11. *Zyryanov V.N.* Under-ice seiches // Water Res., 2011, vol. 38, no. 3, pp. 261–273.
12. *Smirnov S.V., Kucher K.M., Granin N.G., Sturova I.V.* Seiche oscillations in Lake Baikal // Izv. Atmos. & Oceanic Phys., 2014, vol. 50, no. 1, pp. 92–102.
13. *Oleinik O.A., Radkevich E.V.* Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form. Providence, Rhode Island: Plenum Press, 1973. vii + 259 p.
14. *Vukašinac T., Zhevandrov P.* Geometric asymptotics for a degenerate hyperbolic equation // Russ. J. Math. Phys., 2002, vol. 9, no. 3, pp. 371–381.
15. *Vladimirov V.S.* Equations of Mathematical Physics. Moscow: Dekker, 1971. 418 p.
16. *Birman M., Solomjak M.* Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht, Holland: D. Reidel Pub. Co., 1987. xvi + 302 p.
17. *Dobrokhoto S.Yu., Nazaikinskii V.E.* Nonstandard Lagrangian singularities and asymptotic eigenfunctions of the degenerating operator  $d/dx D(x) d/dx$  // Proc. Steklov Inst. Math., 2019, vol. 306, pp. 74–89.
18. *Dobrokhoto S.Yu., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E.* Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the nonlinear shallow water equations in a basin with a gently sloping beach // Russ. J. Math. Phys., 2022, vol. 29, pp. 28–36.
19. *Carrier G.F., Greenspan H.P.* Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, pp. 97–109.
20. <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#aboutDSO>
21. *Kalinichenko V.A., Nesterov S.V., Sekerzh-Zennkovich S.Ya., Chaykovskii A.V.* Experimental study of surface waves with Faraday resonance excitation // Fluid Dyn., 1995, vol. 30, no. 1, pp. 101–106.
22. *White P., Watson W.* Some experimental results in connection with the hydrodynamical theory of seiches. // Proc. R. Soc. Edinb., 1906, vol. 26, no. 01, pp. 142–156.
23. *Kalinichenko V.A., Sekerzh-Zennkovich S.Y.* Experimental investigation of Faraday waves of maximum height // Fluid Dyn., 2007, vol. 42, no. 6, pp. 959–965.
24. *Kalinichenko V.A., Nesterov S.V., Soe A.N.* Faraday waves in a rectangular reservoir with local bottom irregularities // Fluid Dyn., 2015, vol. 50, no. 4, pp. 535–542.
25. *Kalinichenko V.A., Nesterov S.V., Soe A.N.* Standing surface waves in a rectangular tank with local wall and bottom irregularities // Fluid Dyn., 2017, vol. 52, no. 2, pp. 230–238.
26. *Dobrokhoto S.Yu., Tirozzi B.* Localized solutions of one-dimensional non-linear shallow-water equations with velocity  $c = \sqrt{x}$  // Rus. Math. Surveys, 2010, vol. 65, no. 1, pp. 177–179.

27. *Dobrokhotov S.Yu., Medvedev S.B., Minenkov D.S.* On replacements reducing one-dimensional systems of shallow-water equations to the wave equation with sound speed  $c^2 = x$  // *Math. Notes*, 2013, vol. 93, no. 5, pp. 704–714.
28. *Chirkunov Yu.A., Dobrokhotov S.Yu., Medvedev S.B., Minenkov D.S.* Exact solutions of one-dimensional nonlinear shallow water equations over even and sloping bottoms // *Theor.&Math. Phys.*, 2014, vol. 178, pp. 278–298.
29. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Non-dispersive traveling waves in inclined shallow water channels // *Phys. Lett. A*, 2009, vol. 373, no. 42, pp. 3883–3887.
30. *Rybkin A., Pelinovsky E., Didenkulova I.* Non-linear wave run-up in bays of arbitrary cross-section: generalization of the Carrier–Greenspan approach // *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 748, pp. 416–432.
31. *Anderson D., Harris M., Hartle H. et al.* Run-up of long waves in piecewise sloping u-shaped bays // *Pure Appl. Geophys.*, 2017, vol. 174, pp. 3185–3207.
32. *Rybkin A., Nicolsky D., Pelinovsky E., Buckel M.* The generalized Carrier–Greenspan transform for the shallow water system with arbitrary initial and boundary conditions // *Water Waves*, 2021, vol. 3, no. 1, pp. 267–296.
33. *Antuono M., Brocchini M.* The boundary value problem for the nonlinear shallow water equations // *Studies in Appl. Math.*, 2007, vol. 119, no. 1, pp. 73–93.
34. *Minenkov D.S.* Asymptotics of the solutions of the one-dimensional nonlinear system of equations of shallow water with degenerate velocity // *Math. Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 664–672.
35. *Chugunov V.A., Fomin S.A., Noland W., Sagdiev B.R.* Tsunami runup on a sloping beach // *Comp.&Math. Meth.*, 2020, vol. 2, pp. e1081.
36. *Minenkov D.S.* Asymptotics near the shore for 2D shallow water over sloping planar bottom // *Days on Diffraction (DD)*, St. Petersburg, 2017, pp. 240–243.
37. *Aksenov A.V., Dobrokhotov S.Yu., Druzhkov K.P.* Exact step-like solutions of one-dimensional shallow-water equations over a sloping bottom // *Math. Notes*, 2018, vol. 104, no. 6, pp. 915–921.
38. *Bogolubov N.N., Mitropolski Yu.A.* *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*. N.Y.: Gordon&Breach, 1962. 537 p.
39. *Arnold V.I.* *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1989. 536 p.
40. *Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Berlin: Springer, 2006. xiii+505 p.
41. *Galvin C.J.* Breaker type classification on three laboratory beaches // *J. Geophys. Res.*, 1968, vol. 73, no. 12, pp. 3651–3659.

УДК 534+517.95

## РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ

© 2023 г. О. В. Капцов<sup>1,\*</sup>, Д. О. Капцов<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

\*e-mail: kaptsov@icm.krasn.ru

\*\*e-mail: hot.dok@gmail.com

Поступила в редакцию 24.10.2022 г.

После доработки 13.02.2023 г.

Принята к публикации 15.02.2023 г.

В работе рассматриваются одномерные нестационарные уравнения с частными производными второго порядка, описывающие волны в неоднородных и нелинейных средах. Для построения решений используются контактные преобразования и дифференциальные подстановки Эйлера. Найдены общие и частные решения некоторых нестационарных моделей механики сплошной среды.

*Ключевые слова:* нелинейные волновые уравнения, подстановки Эйлера, общие решения

DOI: 10.31857/S003282352302008X, EDN: TZNDZR

**1. Введение.** Волновые движения представляют большой интерес в различных разделах механики сплошной среды [1–4]. Значительные трудности для исследования представляют нелинейные модели и линейные модели неоднородных сред. Наиболее изученными являются одномерные нестационарные уравнения, для которых получен ряд точных решений, составляющих “золотой фонд” теории [3]. Основными методами построения точных решений является групповой анализ дифференциальных уравнений [5, 6], теория солитонов [7, 8] и метод дифференциальных связей [9]. Однако имеются классические методы, восходящие к Эйлеру, Амперу, Дарбу, позволяющие иногда находить общие решения уравнений с частными производными [10–12]. Напомним, что метод Монжа заключается в том, для заданного уравнения с частными производными второго порядка

$$F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}) = 0$$

нужно найти уравнение первого порядка

$$f(t, x, u, u_t, u_x) = c$$

такое, что каждое решение последнего уравнения, для любого  $c \in \mathbb{R}$ , является решением исходного уравнения. Ампер и Дарбу обобщили метод Монжа, предложив дополнять исходное уравнение другими уравнениями произвольного порядка так, чтобы полученная система была совместной. При этом левые части дополнительных уравнений должны быть постоянными на характеристиках исходного уравнения. Подробное описание этих методов с примерами можно найти в [11, 12].

В данной работе рассматриваются гиперболические уравнения второго порядка с частными производными

$$u_{tt} = (f(u)u_x)_x \quad (1.1)$$

$$u_{tt} = s(x)u_{xx} \quad (1.2)$$

$$u_{tt} = u_{xx} + g(x)u_x, \quad (1.3)$$

где  $f, s, g$  — гладкие функции своих аргументов. Уравнение (1.1) служит для описания одномерных неустановившихся движений идеального газа [3, 13] и упругопластических волн [4, 14]. Уравнение (1.2) используется в теоретической акустике [1, 15], кроме того, подобное уравнение известно, как уравнение Чаплыгина [3, 13]. Уравнение (1.3) возникает в результате применения преобразований годографа к уравнениям газовой динамики [3, 13]. В работах [16–18] найдены группы точечных и нелокальных преобразований, допускаемые этими уравнениями; проведена групповая классификация уравнений и построены инвариантные решения. С другой стороны, в работах [12, 19], методом Эйлера–Дарбу, были найдены общие решения линейных уравнений (1.2), (1.3) для особых функций  $s(x)$ ,  $g(x)$ .

В работе сначала приводятся преобразования, связывающие уравнения (1.1)–(1.3). В разд. 2 изучается вопрос о том, когда решения уравнения (1.3) переводятся в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} + Ag(x)v_x; \quad A \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

с помощью дифференциальной подстановки Эйлера

$$v = s(x)u_x + r(x)u$$

Кроме классического случая  $g(x) = c/x$  ( $c \in \mathbb{R}$ ), найдены еще две функции  $g = c/\sin x$  и  $g = c/\operatorname{sh} x$ , для которых существуют такие подстановки. Дополнительно получена функция  $g(x)$ , не выражающаяся в элементарных функциях, но для которой соответствующее уравнение (1.3) допускает подстановку Эйлера. Отмечается, что дифференциальная подстановка

$$v = s(x)u_x$$

переводит решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{s'}{s}u_x$$

в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} - \frac{s'}{s}v_x$$

для любой гладкой функции  $s$ . В разд. 3 показано как построить параметрические решения, зависящие от двух произвольных функций, для уравнения

$$u_{tt} = \left( \frac{4n}{u^{1-2n}} u_x \right)_x$$

при любых целых  $n$ . Кроме того, найдены общие решения уравнений

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2n}{\operatorname{sh}(x)} u_x, \quad u_{tt} = u_{xx} + \frac{2n}{\sin(x)} u_x; \quad n \in \mathbb{Z}$$

**2. Контактные преобразования и подстановки.** Рассмотрим уравнение (1.1) и введем новую функцию  $v$  с помощью дифференциальной замены  $v_x = u$ . В результате получим уравнение третьего порядка, затем, интегрируя его по  $x$ , приходим к уравнению второго порядка

$$v_{tt} = f(v_x)v_{xx} \quad (2.1)$$

Последнее уравнение сводится к линейному уравнению Чаплыгина

$$w_{\tau\tau} = \frac{1}{f(y)} w_{yy} \quad (2.2)$$

преобразованием Лежандра

$$\tau = v_t, \quad y = v_x, \quad w = tv_t + xv_x - v, \quad w_\tau = t, \quad w_y = x,$$

при условии, что гессиан  $v_{tt}v_{xx} - v_{tx}^2$  не равен нулю.

Введем новую независимую переменную  $z = \int \sqrt{f(y)} dy$ . Тогда уравнение (2.2) приводится к уравнению Дарбу

$$w_{\tau\tau} = w_{zz} + g(z)w_z, \quad (2.3)$$

где функция  $g$  сложной формулой выражается через функцию  $f$ . Обратный переход от уравнения (2.3) к уравнению (2.2) выполняется проще.

Для того чтобы найти решения уравнения (2.3), полезно решить следующую задачу: найти дифференциальные подстановки Эйлера первого порядка

$$v = s(x)u_x + r(x)u, \quad (2.4)$$

которые переводят решения уравнения (2.3) в решения уравнения (1.4). В результате подстановки функции  $v$  вида (2.4) в (1.4) получаем уравнение третьего порядка

$$\begin{aligned} & (u_{tx} - u_{xxx})s + ru_{tt} - u_{xx}(Asg + r + 2s^2) - \\ & - u_x(Ag(r + s') + s'' + 2r') - u(Ar'g + r'') = 0 \end{aligned}$$

Последнее уравнение должно быть следствием уравнения (1.3). Следовательно, если подставить производные  $u_{tt}$ ,  $u_{tx}$ , полученные из (1.3), то левая часть уравнения третьего порядка должна обратиться в ноль. Подставляя эти производные и собирая подобные члены при  $u_{xx}$ ,  $u_x$ ,  $u$ , имеем следующую систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2s' = (1 - A)sg, \quad s'' = sg' - 2r' + g(r - Ar - s'), \quad r'' = -Agr' \quad (2.5)$$

Предположим сначала, что функция  $r$  постоянна. Тогда третье уравнение системы удовлетворяется тождественно. Не ограничивая общности, можно считать, что  $r = 0$  или  $r = 1$ . Пусть сначала  $r = 1$  и  $A \neq \pm 1$ . Тогда из первого уравнения системы выражаем  $g$  и подставляем во второе уравнение. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на функцию  $s$ . Вводим новую функцию  $y = 1/s(x)$  и приходим к уравнению

$$y'' = \frac{2(A-1)}{A+1} yy'$$

Интегрируя один раз последнее уравнение, имеем уравнение первого порядка

$$y' = \frac{A-1}{A+1} y^2 + c; \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

Если  $c = 0$ , то функция  $y$  равна

$$y = \frac{1+A}{(1-A)x + c_1}; \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Значит, в этом случае функции  $s$  и  $g$  имеют вид

$$s = \frac{(1-A)x + c_1}{A+1}, \quad g = \frac{2}{(1-A)x + c_1}$$

Полагая  $c_1 = 0$  и используя обозначение  $\alpha = \frac{2}{1-A}$ , можно утверждать что преобразование

$$v = \frac{x}{\alpha - 1} u_x + u$$

переводит решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha}{x} u_x \quad (2.7)$$

в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} + \frac{\alpha - 2}{x} v_x$$

Данное утверждение хорошо известно [10, 11]. Уравнение (2.5) является частным случаем уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Полагая  $\alpha = 0$  и применяя последовательно указанное преобразование, легко найти решение уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2n}{x} u_x; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.8)$$

зависящее от двух произвольных функций и их производных. Более общие дифференциальные подстановки для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу изучались в работе [20].

Следует отметить, что при  $r = A = 1$  решениями системы (2.5) являются постоянные функции. Пусть теперь  $r = 1$  и  $A = -1$ . Тогда второе уравнение в системе (2.5) следует из первого. Это приводит к следующему полезному утверждению.

Дифференциальная подстановка

$$v = s(x) u_x \quad (2.9)$$

переводит решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{s'}{s} u_x$$

в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} - \frac{s'}{s} v_x$$

Пусть теперь постоянная  $c$  в уравнении (2.6) не равна нулю. Обозначим величину  $(A - 1)/(A + 1)$  через  $b$  и предположим, что  $cb > 0$ . Тогда решение уравнения (10) имеет вид

$$y = \sqrt{\frac{c}{b}} \operatorname{tg}(x\sqrt{cb} + c_1); \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Если же  $cb < 0$ , то решение уравнения (2.6) есть

$$y = \sqrt{\frac{-c}{b}} \operatorname{th}(x\sqrt{-cb} + c_1); \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Отсюда находятся функции  $s$  и  $g$ . Вводя обозначения подобные описанным выше, можно сформулировать следующую лемму.

*Лемма 1.* Решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha}{\operatorname{sh} x} u_x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

переводятся в решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha - 2}{\operatorname{sh} x} u_x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

с помощью дифференциальной подстановки

$$v = \frac{2u_x}{\alpha - 1} \operatorname{th} \frac{x}{2} + u$$

Справедлив также тригонометрический аналог предыдущей леммы.

*Лемма 2.* Решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha}{\sin x} u_x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

переводятся в решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{\alpha - 2}{\sin x} u_x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

с помощью дифференциальной подстановки

$$v = \frac{2u_x}{\alpha - 1} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + u$$

Теперь предположим, что функция  $r$  не является постоянной и  $s \neq 0$ . Рассмотрим сначала случай  $A = 1$ . В этом случае из первого уравнения системы (2.5) следует, что функция  $s$  – постоянна. При этом система редуцируется к двум уравнениям

$$2r' = ag', \quad r'g + r'' = 0$$

где  $a = s \in \mathbb{R}$ . Интегрируя первое уравнение, имеем  $r = ag/2 + c_1$  ( $c_1 \in \mathbb{R}$ ). Тогда из второго уравнения получаем

$$g' + \frac{g^2}{2} + c = 0; \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

В зависимости от знака константы  $c$  имеются три типа решений уравнения (2.10):

$$g = -2 \operatorname{tg}(x + b) \quad \text{при } c = 2$$

$$g = 2 \operatorname{th}(x + b) \quad \text{при } c = -2$$

$$g = \frac{2}{x + b} \quad \text{при } c = 0$$

Здесь  $b \in \mathbb{R}$ , а значения константы  $c$  выбраны из соображений удобства. Соответствующие дифференциальные подстановки Эйлера имеют вид

$$v = au_x + agu; \quad a \in \mathbb{R}$$

Эти подстановки порождены симметриями соответствующих уравнений (1.3).

Теперь предположим, что функции  $r$  и  $s$  не постоянные. Тогда из первого и третьего уравнений системы (2.5) выражаем функцию  $g$  и получаем соотношения

$$g = \frac{2s'}{(A-1)s} = \frac{r''}{Ar'} \quad (2.11)$$

Интегрируя последнее соотношение, имеем

$$s = k(r')^m, \quad m = \frac{A-1}{2A},$$

где  $k$  – произвольная константа. Подставляя  $g$  и  $s$  во второе уравнение системы (2.5), приходим (при  $m \neq 1/3$ ) к уравнению третьего порядка

$$r''' + \frac{(m-1)^2 (r'')^2}{3m-1} \frac{1}{r'} + \frac{2mrr''}{k(3m-1)(r')^m} + \frac{2(r')^{2-m}}{(3m-1)k} = 0$$

В общем случае решить это уравнение не удастся. Однако при  $m = -1$  можно свести его к уравнению первого порядка. Действительно, при  $m = -1$ , оно обладает первым интегралом

$$\frac{rr'' - (r')^2}{r'} \exp(r^2/4k) = c_2$$

Последнее выражение также имеет первый интеграл

$$\frac{r'}{r} - c_2 \pi \operatorname{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{k}}\right) - \frac{2\sqrt{k}c_2}{r \exp(-r^2/4k)} = c_1,$$

где  $\operatorname{erf}(z)$  – функция ошибок. Таким образом, для нахождения функции  $r$  необходимо обращать интеграл, который не выражается через элементарные функции. В свою очередь, функции  $g$ ,  $s$  выражаются через функцию  $r$ .

**3. Построение решений.** Рассмотрим сначала уравнение (1.3). Мы хотим перейти от этого уравнения к уравнениям (1.1) и (1.2). Для этого введем новую независимую переменную  $y = \alpha(x)$  в уравнении (1.3), т.е. положим  $u(t, x) = v(t, \alpha(x))$ . В результате замены новое уравнение будет иметь вид

$$v_{tt} = (\alpha')^2 v_{xx} + (\alpha'' + \alpha'g) v_x$$

Приравнявая к нулю второе слагаемое в правой части последнего уравнения, получаем уравнение на функцию  $\alpha(x)$

$$\alpha'' + \alpha'g = 0$$

Его решение имеет вид

$$\alpha = c_1 \int \exp(-\int g dx) dx + c_2; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Если взять уравнение Эйлера–Пуассона

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2n}{x} u_x,$$

то функция замены переменной  $y = \alpha(x)$  задается формулой  $c_1 x^{1-2n} + c_2$ . Для простоты полагаем  $c_2 = 0$ ,  $c_1 = 1$ , обращая функцию  $\alpha$  и подставляя в  $\alpha'$ , получаем уравнение

$$v_{tt} = y^{\frac{4n}{2n-1}} v_{yy} \quad (3.1)$$

Заметим, что общее решение этого уравнения, для целых  $n$ , получены Эйлером ([10], задача 55). Приведем решения для некоторых  $n$ .

Если  $n = 1$ , то

$$v = y \left( Y\left(\frac{1}{y} + t\right) + T\left(\frac{1}{y} - t\right) \right)$$

Если  $n = 2$ , то

$$v = y(Y(z_1) + T(z_2)) - \frac{1}{2} y^{\frac{2}{3}} (Y'(z_1) + T'(z_2)),$$

где  $z_1 = 3y^{\frac{1}{3}} - t$ ,  $z_2 = 3y^{\frac{1}{3}} + t$ . Если  $n = -1$ , то

$$v = Y(z_1) + T(z_2) - \frac{1}{2}y^{\frac{1}{3}}(Y'(z_1) + T'(z_2)),$$

где  $z_1 = 3y^{\frac{1}{3}} - t$ ,  $z_2 = 3y^{\frac{1}{3}} + t$ . Если  $n = -2$ , то

$$v = Y(z_1) + T(z_2) - \frac{1}{2}y^{\frac{1}{3}}(Y'(z_1) + T'(z_2)) + \frac{1}{12}y^{\frac{2}{3}}(Y''(z_1) + T''(z_2)),$$

где  $z_1 = 5y^{\frac{1}{5}} - t$ ,  $z_2 = 5y^{\frac{1}{5}} + t$ .

С помощью преобразования Лежандра

$$x = v_y, \quad \tau = v_t, \quad \omega = tv_t + yv_y - v, \quad (3.2)$$

уравнение (3.1) преобразуется в уравнение

$$\omega_{\tau\tau} = (\omega_x)^{\frac{4n}{1-2n}} \omega_{xx} \quad (3.3)$$

Вводя новую функцию  $z = \omega_x$ , получаем уравнение

$$z_{\tau\tau} = \left( z^{1-2n} z_x \right)_x$$

Преобразование Лежандра (3.2) позволяет найти параметрические решения последнего уравнения для всех  $n \in \mathbb{Z}$ . В качестве примера рассмотрим уравнение

$$v_{tt} = y^4 v_{yy},$$

имеющее решение

$$v = y \left( f \left( t + \frac{1}{y} \right) + g \left( t - \frac{1}{y} \right) \right),$$

где  $f, g$  – произвольные гладкие функции. Используя преобразование Лежандра (3.2), находим параметрическое решение уравнения (3.3) при  $n = 1$

$$x = X = f + g - \frac{f'}{y} + \frac{g'}{y}, \quad \tau = T = y(f' + g'), \quad \omega = tT - f' + g'$$

Тогда параметрическое решение уравнения

$$z_{\tau\tau} = (z^{-4} z_x)_x$$

задается формулой

$$x = X, \quad \tau = T, \quad z = \frac{J(\omega, X)}{J(T, X)},$$

здесь  $J(h, k)$  – определитель матрицы  $\begin{pmatrix} D_t h & D_y h \\ D_t k & D_y k \end{pmatrix}$ , а  $D_t h$ ,  $D_y h$  – полные производные от функции  $h$  по  $t$  и  $y$  соответственно. Совершенно аналогично находятся параметрические решения для других уравнений вида (3.3) при целых значениях параметра  $n$ .

Используя Лемму 1 можно построить решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{2n}{\operatorname{sh} x} u_x; \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

Действительно, пусть  $n = 0$ . Тогда  $u = T(t + x) + X(t - x)$  — общее решение этого уравнения, где  $T, X$  — произвольные гладкие функции. Значит, функция

$$u_1 = u - 2u_x \operatorname{th} \frac{x}{2}$$

удовлетворяет уравнению

$$(u_1)_{tt} = (u_1)_{xx} - \frac{2}{\operatorname{sh} x} (u_1)_x$$

Последовательно применяя дифференциальную подстановку, указанную в лемме, получаем формулу для решения

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{2}{1+2k} \operatorname{th} \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) u$$

уравнения

$$(u_n)_{tt} = (u_n)_{xx} - \frac{2(n+1)}{\operatorname{sh} x} (u_n)_x; \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

Если взять функцию

$$g = \frac{2n}{\operatorname{sh} x}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

то в этом случае функция замены переменной имеет вид

$$\alpha = x - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\operatorname{cth}(x/2)}{2i-1}$$

Обратная функция для  $\alpha$  не является элементарной, поэтому функция  $s$  в соответствующем уравнении (1.2) не элементарная. Переход от уравнения (1.2) к уравнению (1.1) тоже осуществляется с использованием преобразования Лежандра. Однако само уравнение (1.1) и его параметрические решения не выражаются с помощью элементарных функций.

Следует отметить, что уравнение (2.1) обладает двумя промежуточными интегралами (инвариантами характеристик первого порядка) вида

$$v_t \pm \int \sqrt{f(v_x)} dv_x = \operatorname{const}$$

В частности, уравнение

$$v_{tt} = v_x^{2n} v_{xx}; \quad n \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

имеет два промежуточных интеграла

$$v_t \pm \frac{1}{n+1} v_x^{n+1} = \operatorname{const}$$

Таким образом, после выбора знака плюс или минус, мы приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$v_t \pm \frac{1}{n+1} v_x^{n+1} + c = 0; \quad c \in \mathbb{R},$$

любое решение которого удовлетворяет уравнению (3.6). Интегральными поверхностями данного уравнения первого порядка являются специальные разветвляющиеся

поверхности, образованные из прямых. Подробности построения этих поверхностей можно найти в [21].

**Заключение.** Применяемые в работе методы можно распространить на другие типы математических моделей. Прежде всего, следует рассмотреть эллиптические и параболические уравнения. Особенно интересно развить эти методы для многомерных уравнений. Некоторые примеры представлены в [12].

В последние годы появился новый способ построения решений уравнений с частными производными – метод инвариантных подпространств. Подробное описание этого метода можно найти в [22].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2022-873).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998.
3. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
7. *Захаров В.Е., Манакон С.В., Новиков С.П., Потаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
8. *Абловиц М., Сегур Х.* Солитоны и метод обратной задачи М.: Мир, 1987.
9. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
10. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. Т. 3. М.: ГИФМЛ, 1958.
11. *Дарбу Ж.Г.* Лекции по общей теории поверхностей и геометрические приложения анализа бесконечно малых. В 4 тт. Том 2. Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2013.
12. *Капцов О.В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
13. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
14. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
15. *Medwin H., Clay C.* Fundamentals of Acoustical Oceanography. Acad. Press, 1997.
16. *Ames W.F., Lohner R.J., Adams E.* Group properties of  $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$  // Int. J. Nonlin. Mech. 1981. V. 16. P. 439–447.
17. *Bluman G.W., Kumei S.* On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 307–318.
18. *Bluman G.W., Cheviakov A.F.* Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 333. P. 93–111.
19. *Pelinovsky E., Kaptsov O.* Traveling waves in shallow seas of variable depths // Symmetry. 2022. V. 14(7). P. 1448.
20. *Аксенов А.В.* Симметрии и соотношения между решениями класса уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 2. С. 176–179.
21. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
22. *Galaktionov V., Svirshchevskii S.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear PDEs in Mechanics and Physics. Chapman&Hall/CRC Appl. Math.&Nonlin. Sci., 2006.

## Solutions of Some Wave Mechanics Models

O. V. Kaptsov<sup>a,#</sup> and D. O. Kaptsov<sup>a,##</sup><sup>a</sup>*Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia*<sup>#</sup>*e-mail: kaptsov@icm.krasn.ru*<sup>##</sup>*e-mail: hot.dok@gmail.com*

We consider one-dimensional second order partial differential equations describing waves in inhomogeneous and nonlinear media. Contact transformations and Euler differential substitution are used to construct general solutions. General and partial solutions of some nonstationary continuum mechanics models are found.

## REFERENCES

1. *Brekhovskikh L.M.* Waves in Layered Media. Moscow: Nauka, 1973. (in Russian)
2. *Kulikovskii A.G., Sveshnikova Elena I.* Nonlinear Waves in Elastic Media. Boca Raton. CRC Press, 1995.
3. *Ovsyannikov L.V.* Lectures on Basic Gas Dynamics., Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Sci., 2003. (in Russian)
4. *Rabotnov Yu.N.* Elements of Hereditary Mechanics of Solids. Moscow: Nauka, 1977. (in Russian)
5. *Ovsyannikov L.V.* Group analysis of differential equations. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
6. *Ibragimov N.* Transformation Groups in Mathematical Physics. Dordrecht: Reidel, 1985.
7. *Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskii L.P.* Soliton Theory: Inverse Scattering Method. Moscow: Nauka, 1980.
8. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: Soc. Industr.&Appl. Math., 1981.
9. *Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N.* Method of Differential Relations and Its Applications in Gas Dynamics. Novosibirsk: Nauka, 1984.
10. *Euler L.* Integral Calculus. Vol. 3. Moscow: GIFML, 1958.
11. *Darboux J.G.* Lectures on the General Theory of Surfaces and Geometrical Applications of the Analysis of Infinitesimals. Vol. 2. Izhevsk: Inst. Comput. Sci., 2013.
12. *Kaptsov O.V.* Methods for Integrating Partial Differential Equations. Moscow: Fizmatlit, 2009. (in Russian)
13. *Cherny G.G.* Gas Dynamics. Moscow: Nauka, 1988. (in Russian)
14. *Novatsky V.K.* Wave Problems of the Theory of Plasticity. Moscow, Mir, 1978.
15. *Medwin H., Clay C.* Fundamentals of Acoustical Oceanography. Acad. Press, 1997.
16. *Ames W.F., Lohner R.J., Adams E.* Group properties of  $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$  // Int. J. Nonlin. Mech., 1981, vol. 16, pp. 439–447.
17. *Bluman G.W., Kumei S.* On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys., 1987, vol. 28, pp. 307–318.
18. *Bluman G.W., Cheviakov A.F.* Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation// J. Math. Anal. Appl., 2007, vol. 333, pp. 93–111.
19. *Pelinovsky E., Kaptsov O.* Traveling waves in shallow seas of variable depths // Symmetry, 2022, vol. 14 (7), pp. 1448.
20. *Aksenov A.V.* Symmetries and relations between solutions of the class Euler–Poisson–Darboux equations // Dokl. Math., 2001, vol. 64, no. 3, pp. 421–424.
21. *Kamke E.* Handbook on First Order Partial Differential Equations. Moscow: Nauka, 1966.
22. *Galaktionov V., Svirshchevskii S.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear PDEs in Mechanics and Physics. Chapman&Hall/CRC Appl. Math.&Nonlin. Sci., 2006.

УДК 532.592

**УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ  
С КУСОЧНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ**© 2023 г. Н. И. Макаренко<sup>1,\*</sup>, Ж. Л. Мальцева<sup>1,\*\*</sup>, А. А. Черевко<sup>1,\*\*\*</sup><sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

\*e-mail: makarenko@hydro.nsc.ru

\*\*e-mail: maltseva@hydro.nsc.ru

\*\*\*e-mail: cherevko@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

После доработки 01.03.2023 г.

Принята к публикации 01.03.2023 г.

Рассматривается задача о внутренних стационарных волнах в двухслойной жидкости с плотностью, экспоненциально зависящей от глубины внутри слоев и имеющей скачок на поверхности раздела. Выведено нелинейное уравнение второго длинноволнового приближения и рассмотрено семейство асимптотических подмоделей, описывающих уединенные волны конечной амплитуды. Исследованы дисперсионные свойства и режимы распространения волн в зависимости от безразмерных параметров фонового кусочно-постоянного течения.

*Ключевые слова:* двухслойная жидкость, слабая стратификация, уединенные волны

DOI: 10.31857/S0032823523020091, EDN: TZPUKQ

Внутренние волны играют важную роль в процессах переноса и трансформации энергии в стратифицированных потоках в океане [1–3]. Уединенные волны являются одним из основных объектов при изучении закономерностей распространения локализованных нелинейных возмущений в диспергирующих неоднородных средах [4–6]. В работе рассматривается двумерная задача об уединенных волнах в двухслойной жидкости с плотностью, экспоненциально зависящей от глубины внутри слоев и имеющей скачок на поверхности раздела. Указанная гидродинамическая постановка является естественным обобщением модели движения расслоенной жидкости с постоянными плотностями в слоях. Математическая формулировка данной задачи сводится к решению нелинейного эллиптического уравнения Дюбрей–Жакотэн–Лонга [7, 8] для функции тока, дополненного кинематическим и динамическим граничными условиями на поверхности раздела. Методом возмущений по параметрам слабой стратификации выведено нелинейное уравнение второго длинноволнового приближения, описывающее уединенные волны конечной амплитуды. Исследованы дисперсионные свойства линеаризованной задачи, дающие условия до- и сверхкритичности невозмущенного стратифицированного потока. Рассмотрены асимптотические подмодели, описывающие некоторые предельные режимы распространения нелинейных волн [9–12].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается двумерное течение двухслойной жидкости в области, ограниченной снизу горизонтальным дном  $y = -h_1$  и сверху – непроницаемой крышкой  $y = h_2$  (рис. 1). Течение является установившимся в системе отсчета,

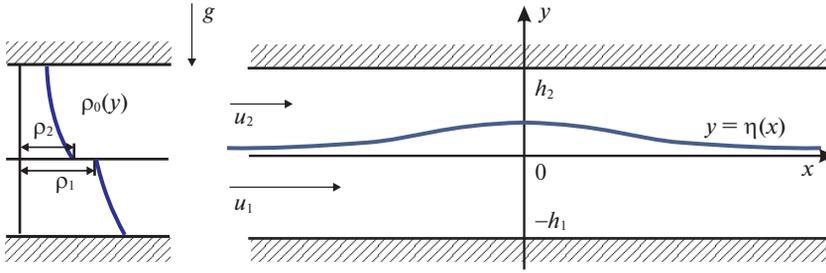


Рис. 1. Схема движения жидкости.

связанной с бегущей волной. Стационарные уравнения Эйлера невязкой неоднородной жидкости имеют вид

$$u_x + v_y = 0, \quad u\rho_x + v\rho_y = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho(uu_x + vv_y) + p_x = 0, \quad \rho(uv_x + vvy) + p_y = -\rho g, \quad (1.2)$$

где  $(u, v)$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести. Условия непротекания на ровном дне и крышке имеют вид

$$v = 0 \Big|_{y=-h_1, y=h_2} \quad (1.3)$$

На искомой поверхности раздела слоев  $y = \eta(x)$  должны быть выполнены кинематическое и динамическое граничные условия

$$u\eta_x - v = 0 \Big|_{y=\eta \pm 0}, \quad [p] = 0 \Big|_{y=\eta} \quad (1.4)$$

(квадратные скобки здесь означают символ скачка). В невозмущенном потоке, к которому течение должно стремиться при  $|x| \rightarrow +\infty$ , граница раздела совпадает с прямой  $y = 0$ , вектор скорости кусочно-постоянен:  $(u, v) = (u_j, 0)$  в  $j$ -м слое ( $j = 1, 2$ ), а профиль плотности задается в виде

$$\rho_0(y) = \begin{cases} \rho_1 \exp(-N_1^2 y/g), & -h_1 < y < 0 \\ \rho_2 \exp(-N_2^2 y/g), & 0 < y < h_2, \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $N_j$  – частота плавучести (частота Брента–Вайсяля), постоянная внутри  $j$ -го слоя. Величины  $\rho_2 < \rho_1$  являются предельными значениями для плотности сверху и снизу на поверхности раздела.

С введением функции тока  $\psi$  для поля скоростей  $u = \psi_y, v = -\psi_x$  система уравнений Эйлера (1.1)–(1.2) эквивалентным образом сводится к уравнению Дюбрей–Жакотэн–Лонга ([7, 8], см. также [1])

$$\rho(\psi)\Delta\psi + \rho'_\psi(\psi)\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + gy\right) = (\rho(\psi)b(\psi))'_\psi$$

Зависимость плотности жидкости  $\rho$  от функции тока  $\psi$  в  $j$ -м слое дается формулой  $\rho(\psi) = \rho_0(\psi/u_j)$  ( $j = 1, 2$ ), а функция Бернулли  $b$  имеет вид

$$b = b_j(\psi) = \frac{1}{2}u_j^2 + \frac{g\psi}{u_j} + \frac{g^2}{N_j^2} \left(1 - e^{\frac{N_j^2\psi}{gu_j}}\right)$$

Давление  $p$  выражается через функцию  $\psi$  в силу интеграла Бернулли

$$\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{p}{\rho(\psi)} + gy = b(\psi)$$

Таким образом, задача об уединенных волнах в двухслойной жидкости с кусочно-экспоненциальной стратификацией заключается в отыскании формы границы раздела  $\eta(x)$  и функции тока  $\psi = \psi_1(x, y)$  ( $-h_1 < y < \eta(x)$ ) и  $\psi = \psi_2(x, y)$  ( $\eta(x) < y < h_2$ ), удовлетворяющей внутри каждого из слоев нелинейному уравнению

$$\psi_{jxx} + \psi_{jyy} = \frac{N_j^2}{gu_j} \left\{ g \left( y - \frac{\psi_j}{u_j} \right) + \frac{1}{2} (\psi_{jx}^2 + \psi_{jy}^2 - u_j^2) \right\} \quad (j = 1, 2) \quad (1.6)$$

условиям постоянства функции тока на дне, крышке и поверхности раздела, равносильным кинематическим условиям (1.3)–(1.4):

$$\psi_1(x, -h_1) = -u_1 h_1, \quad \psi_1(x, \eta(x)) = \psi_2(x, \eta(x)) = 0, \quad \psi_2(x, h_2) = u_2 h_2, \quad (1.7)$$

динамическому условию, следующему из условия (1.4) непрерывности давления на поверхности раздела слоев  $y = \eta(x)$ :

$$\rho_1 (\psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2 - u_1^2 + 2g\eta) = \rho_2 (\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 - u_2^2 + 2g\eta), \quad (1.8)$$

и условию затухания волны на бесконечности

$$\psi_j(x, y) \rightarrow u_j y, \quad \eta(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) \quad (1.9)$$

Задача (1.6)–(1.9) допускает первый интеграл, вытекающий из интегрального закона сохранения потока горизонтального импульса

$$\int_{-h_1}^{h_2} (\rho u^2 + p) dy = \text{const}$$

для стационарных уравнений Эйлера (1.1)–(1.2). В терминах функции тока данный закон сохранения имеет вид

$$\rho_1 \int_{-h_1}^{\eta(x)} e^{-\frac{N_1^2 \psi_1}{gu_1}} \Psi_1 dy + \rho_2 \int_{\eta(x)}^{h_2} e^{-\frac{N_2^2 \psi_2}{gu_2}} \Psi_2 dy = C, \quad (1.10)$$

где подынтегральные функции  $\Psi_j$  даются формулой

$$\Psi_j = \psi_{jy}^2 - \psi_{jx}^2 + u_j^2 + 2g \left( \frac{\psi_j}{u_j} - y \right) - \frac{2g^2}{N_j^2} \left( e^{\frac{N_j^2 \psi_j}{gu_j}} - 1 \right),$$

а константа интегрирования  $C$ , зависящая от параметров основного течения, находится из условия (1.9).

**2. Безразмерные переменные.** Выберем в качестве масштаба для линейных величин невозмущенную глубину  $h_1$  нижнего слоя, а для функции тока – объемные расходы жидкости в слоях:

$$(x, y, \eta) = h_1 (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}), \quad \psi_j = u_j h_j \bar{\psi}_j \quad (j = 1, 2)$$

Тогда в нижнем слое безразмерная функция тока должна быть решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \psi_{1xx} + \psi_{1yy} + \lambda_1^2 (\psi_1 - y) &= \frac{1}{2} \sigma_1 (\psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2 - 1) \quad (-1 < y < \eta(x)) \\ \psi_1(x, -1) &= -1, \quad \psi_1(x, \eta(x)) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

(черта в обозначениях безразмерных величин здесь и далее опущена). В верхнем слое аналогичные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_{2xx} + \Psi_{2yy} + \lambda_2^2 r^2 (\Psi_2 - ry) &= \frac{1}{2} \sigma_2 (\Psi_{2x}^2 + \Psi_{2y}^2 - r^2) \quad (\eta(x) < y < 1/r) \\ \Psi_2(x, \eta(x)) &= 0, \quad \Psi_2(x, 1/r) = 1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

а динамическое граничное условие (1.8) принимает форму

$$2\eta = F_2^2 (r^{-2} \Psi_{2x}^2 + r^{-2} \Psi_{2y}^2 - 1) - F_1^2 (\Psi_{1x}^2 + \Psi_{1y}^2 - 1) \quad (y = \eta(x)) \quad (2.3)$$

В уравнениях (2.11)–(2.13) присутствуют следующие безразмерные константы. Спектральными параметрами в рассматриваемой задаче являются плотностные (денсиметрические) числа Фруда  $F_j$ , нормирующие фазовую скорость волны относительно каждого из слоев, и числа Лонга  $\lambda_j$ , характеризующие баланс между силами плавучести и инерции [13]:

$$F_j = \frac{u_j}{\sqrt{g_j h_j}}, \quad \lambda_j = \frac{N_j h_j}{u_j} \quad (j = 1, 2), \quad (2.4)$$

где  $g_j = g(\rho_1 - \rho_2)/\rho_j$  – приведенные гравитационные ускорения для каждого из слоев. Кусочно-экспоненциальная стратификация (1.5) в невозмущенном течении определяется тремя независимыми константами

$$\sigma_j = \frac{N_j^2 h_j}{g} \quad (j = 1, 2), \quad \mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}$$

При этом параметры Буссинеска  $\sigma_j$  характеризуют градиенты плотности внутри каждого из слоев, а величина  $\mu$  – скачок плотности между слоями (в таком качестве в литературе часто используется также число Атвуда  $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ ). Все три величины  $\mu$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  являются естественными малыми параметрами в натуральных условиях слабой стратификации. В уравнениях (2.1)–(2.3) в явном виде присутствуют только  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , однако параметр  $\mu$  играет важную роль, поскольку числа Лонга  $\lambda_j$  и числа Фруда  $F_j$ , определяемые формулой (2.4), не являются независимыми параметрами – они связаны соотношениями

$$\lambda_1^2 = \frac{\sigma_1(1 + \mu)}{\mu F_1^2}, \quad \lambda_2^2 = \frac{\sigma_2}{\mu F_2^2} \quad (2.5)$$

Кроме того, в задаче имеется геометрический параметр  $r = h_1/h_2$  – отношение толщин невозмущенных слоев.

Уравнения (2.1)–(2.3) охватывают частные случаи, когда плотность жидкости тождественно постоянна в одном из слоев или сразу в обоих. А именно, случай  $\sigma_2 = \lambda_2 = 0$  соответствует наличию однородного безвихревого приповерхностного слоя, а при  $\sigma_1 = \lambda_1 = 0$  однородным является придонный слой. Однако присутствие в формуле (2.5) отношений малых параметров  $\sigma_1/\mu$  и  $\sigma_2/\mu$  указывает на возможную неравномерность предельного перехода  $\sigma_1 \rightarrow 0$ ,  $\sigma_2 \rightarrow 0$ . Кроме того, наличие скачка скорости на границе раздела в фоновом течении может вести к развитию сдвиговой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, причем энергетически наиболее опасными для разрушения течения являются длинноволновые возмущения. Поток с постоянными скоростями и плотностями в слоях устойчив к ним при следующем ограничении на скорости, плотности и толщины слоев [4]:

$$|u_1 - u_2| < \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)}{\rho_1 \rho_2}} \quad (2.6)$$

**3. Дисперсионные свойства.** Рассмотрим условия, обеспечивающие свойство сверхкритичности нелинейных стационарных волн в рассматриваемой системе по отношению к фазовым скоростям линейных гармонических волн. Линеаризация уравнений (2.1)–(2.3) на невозмущенном кусочно-постоянном течении, описываемом точным решением

$$\eta = 0, \quad \psi_1 = y \quad (-1 < y < 0), \quad \psi_2 = ry \quad (0 < y < r^{-1}) \quad (3.1)$$

и отыскание решений в виде волновых пакетов  $\eta(x) = a \exp(ikx)$  и  $\psi = \psi_0 + W(y) \exp(ikx)$  приводит к спектральной задаче Штурма–Лиувилля для амплитудной функции  $W$  (см. [1, 2]), которая дает в случае закона стратификации (1.5) дисперсионное соотношение

$$\Delta(k; F, \lambda, \sigma) = 0, \quad (3.2)$$

где функция  $\Delta$  имеет вид

$$\Delta(k; F, \lambda, \sigma) = F_1^2 \left( \kappa_1 \operatorname{ctg} \kappa_1 + \frac{\sigma_1}{2} \right) + F_2^2 \left( \kappa_2 \operatorname{ctg} \kappa_2 - \frac{\sigma_2}{2} \right) - 1 \quad (3.3)$$

с вспомогательными волновыми числами

$$\kappa_j^2 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_j^2 - k_j^2 - \left( \frac{\sigma_j}{2} \right)^2 \quad (j = 1, 2) \quad (3.4)$$

Здесь обозначено  $k_1 = rk$  и  $k_2 = k$ , и, кроме того, нужно учитывать, что числа Лонга  $\lambda_j$  связаны с числами Фруда  $F_j$  формулой (2.5). В силу самосопряженности рассматриваемой спектральной задачи квадрат волнового числа  $k^2$ , играющий роль собственного значения, всегда вещественный. Поэтому корни  $k$  уравнения (3.2) могут быть только вещественными или мнимыми, и в силу четности дисперсионной функции  $\Delta$  по  $k$  они образуют симметричные пары на координатных осях комплексной  $k$ -плоскости, причем кратным может оказаться только корень  $k = 0$ . Спектр линейных гармонических волн образует точки в плоскости пар чисел Фруда  $F = (F_1, F_2)$ , для которых дисперсионное соотношение (3.2) имеет по крайней мере одну пару вещественных корней  $k$ . В зависимости от количества пар действительных корней весь спектр разбивается на счетное множество вложенных друг в друга подобластей, содержащих спектры отдельных волновых мод. Границы этих областей задаются ветвями кривой, определяемой уравнением  $\Delta(0; F, \lambda(F), \sigma) = 0$ , или, в развернутой форме,

$$F_1^2 \left[ \sqrt{\frac{\sigma_1(1+\mu)}{\mu F_1^2} - \left( \frac{\sigma_1}{2} \right)^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\sigma_1(1+\mu)}{\mu F_1^2} - \left( \frac{\sigma_1}{2} \right)^2} + \frac{\sigma_1}{2} \right] + F_2^2 \left[ \sqrt{\frac{\sigma_2}{\mu F_2^2} - \left( \frac{\sigma_2}{2} \right)^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\sigma_2}{\mu F_2^2} - \left( \frac{\sigma_2}{2} \right)^2} - \frac{\sigma_2}{2} \right] = 1 \quad (3.5)$$

В пределе при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  отсюда получается спектр линейных гармонических волн двухслойной жидкости с постоянными плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  в слоях, который порождается волновыми числами единственной моды и совпадает с кругом  $F_1^2 + F_2^2 \leq 1$ . Граница спектра, задаваемая уравнением (3.5), трансформируется в единичную окружность неравномерным относительно  $(F_1, F_2)$  образом из-за присутствия в подкоренных выражениях отношений  $\sigma_1/\mu$  и  $\sigma_2/\mu$  малых параметров при обратных степенях чисел Фруда  $F_j$ . Указанная неравномерность проявляется в возникновении при  $\sigma_j \rightarrow 0$

спектральных пограничных слоев [14] в окрестности координатных осей  $F_1$  и  $F_2$  плоскости  $(F_1, F_2)$ , содержащих все спектры старших мод, начиная со второй моды (см. рис. 2а и рис. 3а). Точки  $(F_1, F_2)$ , для которых отсутствуют вещественные корни  $k$  дисперсионного уравнения (3.2), принадлежат сверхкритической области, лежащей вне непрерывного спектра главной моды линейных гармонических волн.

**4. Длинноволновое приближение.** В сверхкритической области все корни дисперсионного соотношения (3.2) чисто мнимые. Пусть  $k = \pm i\varepsilon$  – наименьший из них по модулю. Величина  $\varepsilon > 0$ , являющаяся минимальным положительным корнем уравнения  $\Delta(i\varepsilon; F, \lambda(F), \sigma) = 0$ , дает показатель экспоненциального затухания решений типа уединенных волн:  $\eta(x) \sim ae^{-\varepsilon|x|}$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Этот показатель мал для точек  $F = (F_1, F_2)$  вблизи границы спектра, поэтому при построении длинноволнового приближения его удобно связать с малыми параметрами кусочно-экспоненциальной стратификации (1.5). Учитывая, что параметры Буссинеска  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  независимы друг от друга в разных слоях, выберем в качестве основного малого параметра величину  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  и введем полярный угол  $\varphi$  в плоскости  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , полагая  $\sigma_1 = \cos \varphi$ ,  $\sigma_2 = \sin \varphi$ . Из разложения дисперсионной функции

$$\Delta(0; F, \lambda, \sigma) - \Delta(i\varepsilon; F, \lambda, \sigma) = \left( F_1^2 \frac{2\lambda_1 - \sin 2\lambda_1}{4 \sin^2 \lambda_1} + F_2^2 \frac{2\lambda_2 - \sin 2\lambda_2}{4 \sin^2 \lambda_2} \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4 + \sigma^2 \varepsilon^2)$$

следует, что на семействе линий уровня вида  $\Delta(0; F, \lambda(F), \sigma) = M\sigma$  ( $M = \text{const} > 0$ ), располагающемся вблизи границы спектра главной моды в плоскости  $(F_1, F_2)$  (со стороны сверхкритической области), показатель затухания  $\varepsilon$  имеет порядок  $\sqrt{\sigma}$  при  $\sigma \rightarrow 0$ . Учитывая это, будем искать решение зависящим от медленной переменной  $\xi = \sqrt{\sigma}x$ . При выводе длинноволнового приближения используется асимптотическое представление функций тока в виде

$$\psi_j(x, y) = \psi_j^{(0)}(\xi, y) + \sigma \psi_j^{(1)}(\xi, y) + O(\sigma^2) \quad (j = 1, 2) \quad (4.1)$$

Коэффициенты  $\psi_j^{(m)}(\xi, y)$  разложения (4.1) находятся в результате интегрирования получаемой из (2.1), (2.2) рекуррентной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной  $y$ , в которые  $\xi$  входит в качестве параметра. В частности, коэффициенты низшего порядка выражаются через функцию  $\eta$  по формулам

$$\psi_1^{(0)} = y - \eta \frac{\sin \lambda_1(1+y)}{\sin \lambda_1(1+\eta)}, \quad \psi_2^{(0)} = ry - r\eta \frac{\sin \lambda_2(1-ry)}{\sin \lambda_2(1-r\eta)}$$

Коэффициент  $\psi_1^{(1)}$ , дающий в нижнем слое  $-1 < y < \eta$  дисперсионную поправку в длинноволновое приближение (4/1), имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)} = & \frac{\sin \alpha_1(y)}{2\lambda_1^2} \left( \frac{\eta}{\sin \alpha_1(\eta)} \right)_{\xi\xi} \{ \alpha_1(\eta) \text{ctg} \alpha_1(\eta) - \alpha_1(y) \text{ctg} \alpha_1(y) \} + \\ & + \cos \varphi \left\{ \frac{\eta(2\eta - 3y) \sin \alpha_1(y)}{6 \sin \alpha_1(\eta)} + \frac{\eta^2}{6} \left( \frac{\sin \lambda_1(y - \eta) - \sin \alpha_1(y)}{\sin^3 \alpha_1(\eta)} + \frac{1 + \sin^2 \alpha_1(y)}{\sin^2 \alpha_1(\eta)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где обозначено  $\alpha_1(y) = \lambda_1(1+y)$ ,  $\alpha_1(\eta) = \lambda_1(1+\eta)$ . Аналогично, в верхнем слое  $\eta < y < r^{-1}$  коэффициент  $\psi_2^{(1)}$  имеет вид

$$\Psi_2^{(1)} = \frac{\sin \alpha_2(y)}{2r\lambda_2^2} \left( \frac{\eta}{\sin \alpha_2(\eta)} \right)_{\xi\xi} \{ \alpha_2(y) \operatorname{ctg} \alpha_2(y) - \alpha_2(\eta) \operatorname{ctg} \alpha_2(\eta) \} + \\ + \sin \varphi \left\{ \frac{r^2 \eta (2\eta - 3y)}{6} \frac{\sin \alpha_2(y)}{\sin \alpha_2(\eta)} + \frac{r^2 \eta^2}{6} \left( \frac{\sin \lambda_2 r (\eta - y) - \sin \alpha_2(y)}{\sin^3 \alpha_2(\eta)} + \frac{1 + \sin^2 \alpha_2(y)}{\sin^2 \alpha_2(\eta)} \right) \right\},$$

где  $\alpha_2(y) = \lambda_2(1 - ry)$ ,  $\alpha_2(\eta) = \lambda_2(1 - r\eta)$ . Теперь нужно воспользоваться законом сохранения импульса (1.10), записанным в безразмерной форме

$$\int_{-1}^{\eta} e^{-\sigma_1 \Psi_1} \Psi_1 dy + \int_{\eta}^{1/r} e^{-\sigma_2 \Psi_2} \Psi_2 dy = C, \quad (4.2)$$

где

$$\Psi_1 = \frac{\mu F_1^2}{2} (\Psi_{1y}^2 - \sigma \Psi_{1\xi}^2 + 1) + (1 + \mu) \left( \Psi_1 - y - \frac{e^{\sigma_1 \Psi_1} - 1}{\sigma_1} \right) \\ \Psi_2 = \frac{\mu F_2^2}{2r^3} (\Psi_{2y}^2 - \sigma \Psi_{2\xi}^2 + r^2) + \frac{1}{r} \left( \Psi_2 - ry - \frac{e^{\sigma_2 \Psi_2} - 1}{\sigma_2} \right),$$

а постоянная  $C$ , вычисленная на точном решении (3.1), описывающем кусочно-постоянное течение, имеет вид

$$C = \mu (F_1^2 + r^{-2} F_2^2) + (1 + \mu) (e^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1) \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\sigma_1^2} \right) + \\ + \frac{1}{r^2} (1 - \sigma_2 - e^{-\sigma_2}) \left( \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right)$$

Подставляя ряды (4.1) в интегральное соотношение (4.2) и оставляя в нем слагаемые с точностью до величин порядка  $O(\sigma^2)$ , получаем искомое нелинейное дифференциальное уравнение второго приближения теории длинных волн для функции  $\eta = \eta(x)$ :

$$Q(\eta; F) \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 = \eta^2 P(\eta; F) \quad (4.3)$$

Здесь функции  $P$  и  $Q$  имеют структуру квазиполиномов

$$P = p_0 + p_1 \eta + p_2 \eta^2, \quad Q = q_0 + q_1 \eta + q_2 \eta^2 + q_3 \eta^3 + q_4 \eta^4 \quad (4.4)$$

с коэффициентами  $p_j = p_j(\eta; F)$  и  $q_j = q_j(\eta; F)$ , наследующими тригонометрическую зависимость коэффициентов рядов (4.1) от переменной  $\eta$ . В частности, коэффициенты  $p_0$  и  $q_0$  даются формулами

$$p_0(\eta; F) = \frac{1}{2} \mu \left\{ F_1^2 \left( \lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha_1(\eta) + \frac{\sigma_1}{2} \right) + F_2^2 \left( \lambda_2 \operatorname{ctg} \alpha_2(\eta) - \frac{\sigma_2}{2} \right) - 1 \right\} \quad (4.5)$$

$$q_0(\eta; F) = \frac{\mu F_1^2}{8\lambda_1} \frac{2\lambda_1 - \sin[2\alpha_1(\eta)]}{\sin^2 \alpha_1(\eta)} + \frac{\mu F_2^2}{8r^2 \lambda_2} \frac{2\lambda_2 - \sin[2\alpha_2(\eta)]}{\sin^2 \alpha_2(\eta)} \quad (4.6)$$

Явные формулы для остальных коэффициентов  $p_j$  и  $q_j$  с  $j \geq 1$  имеют более громоздкий вид и приведены в Приложении. Решения типа уединенных волн для уравнения (4.3) описываются квадратурами

$$x = \pm \int_0^a \sqrt{\frac{Q(s; F)}{P(s; F)}} \frac{ds}{s}, \quad (4.7)$$

где амплитуда волны определяется простым корнем  $s = a$  функции  $P(s; F)$ , ближайшим к точке  $s = 0$ . Параметрическая область существования уединенных волн дается той частью плоскости  $F = (F_1, F_2)$ , для которой подкоренное выражение  $Q/P$  в (4.7) остается положительным всюду в интервале между точками  $s = 0$  и  $s = a$ .

**5. Асимптотические подмодели.** Дополнительные предположения об относительных порядках параметров или малости искомой функции в базовом уравнении (4.3) порождают для него семейство приближенных субмоделей. Для малых  $\eta$  уравнение (4.3), рассматриваемое для медленной независимой переменной  $x = \sqrt{\sigma} \xi$ , можно представить в форме

$$\sigma \eta_\xi^2 = \eta^2 \left[ \gamma_0 + \gamma_1 \eta + \gamma_2 \eta^2 + O(\eta^3) \right], \quad (5.1)$$

где  $\gamma_0(F) = p_0(0; F)/q_0(0; F)$  с величинами  $p_0$  и  $q_0$  из формул (4.5) и (4.6). Поскольку  $\alpha_1(0) = \lambda_1$  и  $\alpha_2(0) = \lambda_2$ , имеем  $q_0(0; F) > 0$  и, согласно определению дисперсионной функции (3.3), также

$$p_0(0; F) = \frac{\mu}{2} \Delta(0; F) + O(\sigma^2)$$

Такая связь коэффициента  $\gamma_0$  с дисперсионной функцией  $\Delta$  означает, что требование положительности  $\gamma_0$ , необходимое для существования малого решения уравнения (5.1), равносильно условию сверхкритичности описываемых уединенных волн. Асимптотика решений уравнения (5.1) существенно зависит также от поведения коэффициента  $\gamma_1(F)$ . Для тех точек  $F = (F_1, F_2)$ , где  $\gamma_1(F) \neq 0$ , растяжение искомой функции  $\eta = \sigma \eta_0$  в (5.1) дает на линиях уровня  $\Delta(0; F) = M\sigma$  ( $M > 0$ ), примыкающих к границе спектра со стороны сверхкритической области, укороченное уравнение вида  $\eta_{0\xi}^2 = \eta_0^2(\gamma_0 + \gamma_1 \eta_0)$ . В исходных безразмерных переменных оно порождает обычные уединенные волны типа КдВ с профилем  $\eta(x) = a \operatorname{ch}^{-2}(\kappa x/2)$ . При этом в случае  $\gamma_1 < 0$ , получаются волны возвышения, а в случае  $\gamma_1 > 0$  – уединенные волны типа впадин. Амплитуда волны  $a$  в обоих случаях имеет одинаковый с  $\sigma$  порядок малости, а волновое число  $\kappa$  порядок  $\sqrt{\sigma}$ , что согласуется с исходными предположениями при выводе уравнения (4.3). В окрестности точек  $F = (F_1, F_2)$ , в которых достигается равенство  $\gamma_1(F) = 0$ , нелинейности третьей и четвертой степеней по  $\eta$  в правой части (5.1) дают одинаковый вклад, поэтому здесь малые решения имеют другую асимптотику (см. [5] и имеющийся там ссылки). Дополнительное растяжение переменных  $\zeta = \sqrt{\sigma} \xi$ ,  $\eta = \sigma \eta_0$  дает на линиях уровня  $\Delta(0; F) = M\sigma^2$  ( $M > 0$ ) уравнение вида

$$\eta_{0\zeta}^2 = \eta_0^2 \left( M + \vartheta_1 \eta_0 + \vartheta_2 \eta_0^2 \right),$$

решение которого имеет вид уединенных волн с уплощенными вершинами

$$\eta_0(\zeta) = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (a_2 - a_1) \operatorname{sh}^2 \kappa \zeta}; \quad \kappa^2 = a_1 a_2$$

В любом из рассмотренных случаев уединенные волны главной моды отвечают основному течению на границе непрерывного спектра линеаризованной задачи, причем ветвление происходит в сверхкритическую область. При этом асимптотическая

близость точек  $F$  к границе спектра нейтрализует наличие малого параметра  $\sigma$  при  $\eta_\xi^2$  в левой части уравнения (5.1) и обеспечивает равномерную пригодность длинноволнового приближения при  $-\infty < \xi < +\infty$ . Аналогичная асимптотическая схема может быть использована и для описания ветвления уединенных волн старших мод, однако в таком случае согласно имеющейся картине спектра будет возникать нелинейный резонанс с периодическими волновыми пакетами главной моды [5]. Эта ситуация требует дополнительного анализа и не рассматривается в данной статье.

При малых числах Лонга  $\lambda_j$  для функций  $P(\eta; F)$  и  $Q(\eta; F)$  справедливы приближенные выражения

$$P = \frac{\mu}{2} \left\{ \frac{F_1^2}{1+\eta} + \frac{F_2^2}{1-r\eta} - 1 \right\} + O(|\lambda|), \quad Q = \frac{\mu}{6} \left\{ \frac{F_1^2}{1+\eta} + \frac{F_2^2}{r^2(1-r\eta)} \right\} + O(|\lambda|)$$

Поэтому в пределе  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$  уравнение (4.3) принимает форму

$$\left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 = 3r^2\eta^2 \frac{F_1^2(1-r\eta) + F_2^2(1+\eta) - (1+\eta)(1-r\eta)}{r^2F_1^2(1-r\eta) + F_2^2(1+\eta)} \quad (5.2)$$

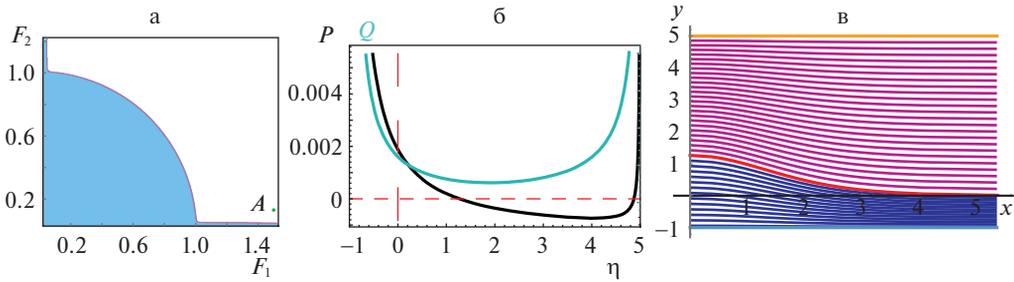
Уравнение (5.2) известно как уравнение второго приближения теории длинных волн для двухслойной жидкости с постоянными плотностями в слоях [3, 15, 16]. Знаменатель дроби в правой части (5.2) положителен всюду в интервале  $-1 < \eta < 1/r$ , поэтому положительным в окрестности значения  $\eta = 0$  должен быть и числитель. А это возможно тогда и только тогда, когда числа Фруда  $F_1$  и  $F_2$  удовлетворяют неравенству  $F_1^2 + F_2^2 > 1$ , что является условием сверхкритичности невозмущенного двухслойного течения. При этом решения типа уединенных волн существуют в случае  $|F_1| + r|F_2| < \sqrt{1+r}$ , а в качестве предельного режима при  $|F_1| + r|F_2| = \sqrt{1+r}$  получаются решения типа плавного бора [3].

Для сверхкритических точек  $F$ , находящихся вблизи узких полос спектра, где выполнено одно из условий  $F_1 = O(\sqrt{\sigma_1})$  или  $F_2 = O(\sqrt{\sigma_2})$ , параметры  $\lambda_j$  не являются малыми:  $\lambda_j = \pi + O(\sigma_j)$ . В этих случаях уравнение (4.3) также сильно упрощается в пределе при  $\sigma \rightarrow 0$  без предположений о малости амплитуды волны. В частности, при  $\lambda_2 \rightarrow \pi$  оно принимает предельную форму

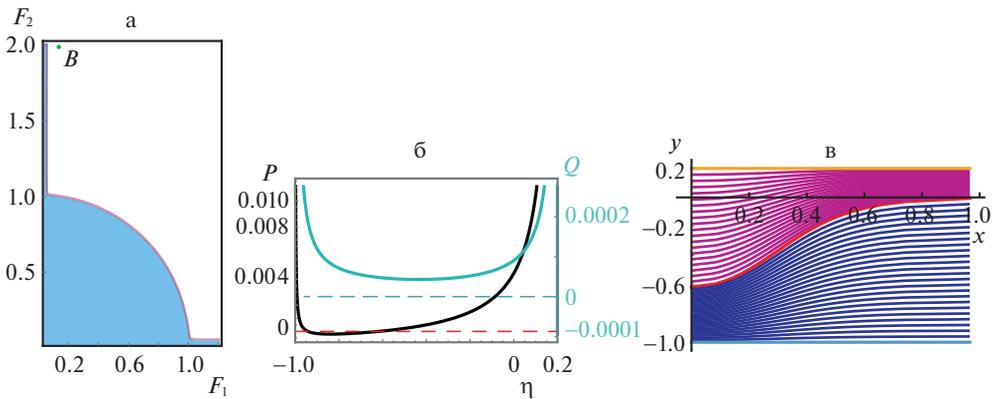
$$F_1^2 \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 = 3\eta^2 (F_1^2 - 1 - \eta) \quad (5.3)$$

Указанное уравнение по форме совпадает с известным уравнением Буссинеска–Рэлея для поверхностных уединенных волн в нижнем слое однородной жидкости с  $F_1 > 1$ . В литературе такую аппроксимацию двухслойного течения иногда называют полутораслоидным приближением, поскольку в этом случае влияние верхнего слоя становится опосредованным. Заметим, что данное приближение согласуется и с уравнением (5.2), которое в пределе при  $F_2 \rightarrow 0$  также дает уравнение (5.3).

Особый предельный случай возникает в ситуации, когда параметр  $\mu$  имеет одинаковый порядок с параметрами Буссинеска  $\sigma_1, \sigma_2$ . Физически это означает, что малый скачок плотности в слабом пикноклине сравним с суммарными перепадами плотности по всей глубине прилегающих слоев. Такая ситуация, типичная для придонных течений в океане с экстремально слабой глубоководной стратификацией, подробно рассматривалась в [17, 18], где неравенство (2.6), являющееся условием гиперболичности уравнений двухслойной мелкой воды [4], использовалось для характеристики параметрических областей устойчивости уединенных внутренних волн. Разрушение тече-



**Рис. 2.** Уединенная волна возвышения главной моды для стратифицированного течения с параметрами  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.00007$ ,  $\mu = 0.003$ ,  $r = 0.2$ ,  $F_1 = 1.5$ ,  $F_2 = 0.129$ .



**Рис. 3.** Уединенная волна типа впадины для стратифицированного течения с параметрами  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.00007$ ,  $\mu = 0.003$ ,  $r = 5$ ,  $F_1 = 0.138$ ,  $F_2 = 1.99$ .

ния в результате местного усиления сдвига скорости в окрестности вершины волны наблюдалось в лабораторных экспериментах [19] и для расслоенных течений в океане, в которых цуги уединенных внутренних волн являются генераторами интенсивного перемешивания придонных потоков [20].

**6. Примеры.** Здесь приводятся результаты расчета уединенных волн главной моды, описываемых нелинейным дифференциальным уравнением (4.3). Рис. 2 иллюстрирует решение в виде одиночной волны возвышения в случае, когда невозмущенная глубина нижнего слоя в пять раз меньше глубины верхнего слоя. Указанный волновой режим реализуется для пары чисел Фруда  $(F_1, F_2) = (1.5, 0.129)$ . Точка *A* с этими координатами находится в сверхкритической области непосредственно над спектральным пограничным слоем вблизи оси абсцисс  $OF_1$  (рис. 2,а). На рис. 2,б показаны графики функций  $P$  и  $Q$ , дающих по формуле (4.7) решение уравнения (4.3). Функция  $P(\eta; F)$  имеет простой положительный корень  $\eta = a = 1.28$ , ближайший к точке  $\eta = 0$ , который дает амплитуду уединенной волны в придонном слое единичной безразмерной глубины.

Рис. 3 демонстрирует решение уравнения (4.3) в виде волны понижения, когда невозмущенная глубина верхнего слоя в пять раз меньше глубины нижнего слоя. Этот режим получается для чисел Фруда  $(F_1, F_2) = (0.138, 1.99)$ , соответствующая ему точка *B* находится справа от спектрального пограничного слоя вблизи оси ординат  $OF_2$ .

График функции  $P(\eta; F)$  на рис. 3,б показывает наличие у нее двух достаточно близких отрицательных корней  $\eta = -0.62$  (он определяет амплитуду волны  $a$ ) и  $\eta = -0.9$ , благодаря чему заметна тенденция к уплощению линий тока в центре впадины. Амплитуда данной уединенной волны понижения почти в пять раз превышает невозмущенную толщину верхнего слоя.

**Заключение.** В работе выведено уравнение второго приближения теории стационарных длинных волн для двухслойной жидкости с кусочно-экспоненциальной стратификацией. Полученное уравнение порождает иерархию асимптотических подмоделей, описывающих уединенные волны конечной амплитуды. Базовое приближенное уравнение (4.3) может использоваться в широком диапазоне параметров стратификации, включая шельфовые и глубоководные условия океана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-71-20039).

**Приложение.** Здесь приводятся выражения для коэффициентов в формуле (4.4) функций  $P$  и  $Q$  из уравнения (4.3). Для функции  $P$ , зависящей линейно от квадратов чисел Фруда  $F_1^2$  и  $F_2^2$ , справедливо представление

$$P(\eta; F) = P_0(\eta) + \mu F_1^2 P_1(\eta) + \mu F_2^2 P_2(\eta),$$

где  $P_j(\eta) = p_{j0} + p_{j1}\eta + p_{j2}\eta^2$  ( $j = 0, 1, 2$ ) – квазиполиномы второй степени по  $\eta$  с тригонометрическими коэффициентами

$$p_{00} = -\frac{\mu}{2}$$

$$p_{01} = -\frac{\sigma_1(1 + \mu)}{48 \sin^2 \alpha_1 \cos^2(\alpha_1/2)} (2\sigma_1 - 2 + (4\sigma_1 - 1) \cos \alpha_1 + 2 \cos 2\alpha_1 + \cos 3\alpha_1) -$$

$$-\frac{r\sigma_2}{48 \sin^2 \alpha_2 \cos^2(\alpha_2/2)} (2\sigma_2 + 2 + (4\sigma_2 + 1) \cos \alpha_2 - 2 \cos 2\alpha_2 - \cos 3\alpha_2)$$

$$p_{02} = -\frac{\sigma_1^2(1 + \mu)}{24 \sin^2 \alpha_1 \cos^2(\alpha_1/2)} (1 + 2 \cos \alpha_1) + \frac{r\sigma_2^2}{24 \sin^2 \alpha_2 \cos^2(\alpha_2/2)} (1 + 2 \cos \alpha_2)$$

$$p_{10} = \frac{1}{4} (2\lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \sigma_1)$$

$$p_{20} = \frac{1}{4} (2\lambda_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 + \sigma_2)$$

$$p_{11} = -\frac{\lambda_1 \sigma_1}{144 \sin(\alpha_1/2) \cos^3(\alpha_1/2)} (1 + 2 \cos \alpha_1)^2$$

$$p_{21} = -\frac{r\lambda_2 \sigma_2}{144 \sin(\alpha_2/2) \cos^3(\alpha_2/2)} (1 + 2 \cos \alpha_2)^2$$

$$p_{12} = p_{22} = 0$$

Для функции  $Q$  справедливо представление

$$Q(\eta; F) = \frac{\mu F_1^2}{8\lambda_1} \frac{Q_1(\eta)}{\sin^5 \alpha_1(\eta)} + \frac{\mu F_2^2}{8r^2 \lambda_2} \frac{Q_2(\eta)}{\sin^5 \alpha_2(\eta)},$$

где  $Q_j(\eta) = q_{j0} + q_{j1}\eta + q_{j2}\eta^2 + q_{j3}\eta^3 + q_{j4}\eta^4$  с коэффициентами

$$q_{10} = \sin^3 \alpha_1 (2\lambda_1 - \sin 2\alpha_1)$$

$$q_{20} = \sin^3 \alpha_2 (2\lambda_2 - \sin 2\alpha_2)$$

$$q_{11} = -\frac{1}{4} \lambda_1 \sin \alpha_1 (8\lambda_1^2 - 7 + (8\lambda_1^2 + 4) \cos 2\alpha_1 + 3 \cos 4\alpha_1 + 4\lambda_1 \sin 2\alpha_1)$$

$$q_{21} = \frac{1}{4} r \lambda_2 \sin \alpha_2 (8\lambda_2^2 - 7 + (8\lambda_2^2 + 4) \cos 2\alpha_2 + 3 \cos 4\alpha_2 + 4\lambda_2 \sin 2\alpha_2)$$

$$q_{12} = \frac{\lambda_1^2}{16} \left( (56\lambda_1^2 - 18) \cos \alpha_1 + (8\lambda_1^2 + 15) \cos 3\alpha_1 + 3 \cos 5\alpha_1 - 44\lambda_1 \sin \alpha_1 - 28\lambda_1 \sin 3\alpha_1 \right)$$

$$q_{22} = -\frac{r^2 \lambda_2^2}{16} \left( (56\lambda_2^2 - 18) \cos \alpha_2 + (8\lambda_2^2 + 15) \cos 3\alpha_2 + 3 \cos 5\alpha_2 - 44\lambda_2 \sin \alpha_2 - 28\lambda_2 \sin 3\alpha_2 \right)$$

$$q_{13} = \frac{\lambda_1^3}{4} (28\lambda_1 \cos \alpha_1 + 4\lambda_1 \cos 3\alpha_1 - 7 \sin \alpha_1 - 3 \sin 3\alpha_1)$$

$$q_{23} = -\frac{r^3 \lambda_2^3}{4} (28\lambda_2 \cos \alpha_2 + 4\lambda_2 \cos 3\alpha_2 - 7 \sin \alpha_2 - 3 \sin 3\alpha_2)$$

$$q_{14} = \frac{\lambda_1^4}{2} (7 \cos \alpha_1 + \cos 3\alpha_1), \quad q_{24} = \frac{r^4 \lambda_2^4}{2} (7 \cos \alpha_2 + \cos 3\alpha_2)$$

Во всех указанных выше формулах  $\alpha_1 = \lambda_1(1 + \eta)$ ,  $\alpha_2 = \lambda_2(1 - r\eta)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краусс В. Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968.
2. Yih C.S. Stratified Flows. New York: Acad. Press, 1980.
3. Ле Блон П.Х., Майсек Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981.
4. Овсянников Л.В. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л.В. Овсянников, Н.И. Макаренко, В.И. Налимов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1985.
5. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: Физматлит, 2003.
6. Helfrich K.R., Melville W.K. Long nonlinear internal waves // Annu. Rev. Fluid Mech. 2006. V. 38. P. 395–425.
7. Dubreil-Jacotin M.L. Sur les theoremes d'existence relatifs aux ondes permanentes periodiques a deux dimensions dans les liquides heterogenes // J. Math. Pure Appl. 1937. V. 16. № 9. P. 43–67.
8. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluid. I. A theoretical investigation // Tellus. 1953. V. 5. P. 42–57.
9. Voronovich A.G. Strong solitary internal waves in a 2.5-layer model // J. Fluid Mech. 2003. V. 474. P. 85–94.
10. Goullet A., Choi W. Large amplitude internal solitary waves in a two-layer system of piecewise linear stratification // Phys. Fluids. 2008. V. 20. P. 096601. <https://doi.org/10.1063/1.2978205>
11. Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л. Асимптотические модели внутренних стационарных волн // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 4. С. 151–161.
12. Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л. Уединенные волны в двухслойной слабостратифицированной жидкости // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 2. С. 72–78.
13. Sutherland B.R. Internal Gravity Waves. Cambridge: Univ. Press, 2010.
14. Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л. О спектре фазовых скоростей внутренних волн в слабостратифицированной двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 2. С. 125–145.
15. Miyata M. An internal solitary wave of large amplitude // La Mer. 1985. V. 23. № 2. P. 43–48.
16. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. 1999. V. 396. P. 1–36.

17. *Makarenko N., Maltseva J., Morozov E., Tarakanov R., Ivanova K.* Internal waves in marginally stable abyssal stratified flow // *Nonlin. Proces. Geophys.* 2018. V. 25. P. 659–669.
18. *Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л., Морозов Е.Г., Тараканов Р.Ю., Иванова К.А.* Внутренние стационарные волны в глубоководных стратифицированных течениях // *ПМТФ.* 2019. Т. 60. № 2. С. 74–83.
19. *Carr M., Fructus D., Grue J., Jensen A., Davies P.A.* Convectively induced shear instability in large amplitude internal solitary waves // *Phys. Fluids.* 2008. V. 20. P. 126601.
20. *Van Haren H., Gostiaux L., Morozov E., Tarakanov R.* Extremely long Kelvin – Helmholtz billow trains in the Romanche fracture zone // *Geophys. Res. Lett.* 2014. V. 44. P. 8445–8451.

### Solitary Waves in Two-Layer Fluid with Piecewise Exponential Stratification

N. I. Makarenko<sup>a,#</sup>, J. L. Maltseva<sup>a,##</sup>, and A. A. Cherevko<sup>a,###</sup>

<sup>a</sup>*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: makarenko@hydro.nsc.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: maltseva@hydro.nsc.ru*

<sup>###</sup>*e-mail: cherevko@hydro.nsc.ru*

The problem on internal stationary waves in a two-layer fluid with density, depending exponentially on the depth inside the layers and having a jump at the interface, is considered. A non-linear equation of the second-order long-wave approximation is derived, and their asymptotic submodels, describing solitary waves of finite amplitude, are discussed. Dispersive properties and wave propagation regimes depending on dimensionless parameters of the background piecewise constant flow are studied.

*Key words:* two-layer fluid, stratification, solitary waves

### REFERENCES

1. *Krauss W.* *Interne Wellen.* Berlin: Gebruder Borntraeger, 1966.
2. *Yih C.S.* *Stratified Flows.* N.Y.: Acad. Press, 1980.
3. *LeBlond P.H., Mysak L.A.* *Waves in the Ocean.* N.Y.: Elsevier, 1978.
4. *Ovsyannikov L.V., Makarenko N.I., Nalimov V.I., et al.* *Nonlinear Problems of the Theory of Surface and Internal Waves.* Novosibirsk: Nauka, 1985. (in Russian)
5. *Ilichev A.T.* *Solitary Waves in Fluid Dynamics.* Moscow: Fizmatlit, 2003. (in Russian)
6. *Helfrich K.R., Melville W.K.* Long nonlinear internal waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2006, vol. 38, pp. 395–425.
7. *Dubreil-Jacotin M.L.* Sur les theoremes d'existence relatifs aux ondes permanentes perodiques a deux dimensions dans les liquides heterogenes // *J. Math. Pure Appl.*, 1937, vol. 16., no. 9, pp. 43–67.
8. *Long R.R.* Some aspects of the flow of stratified fluid. I. A theoretical investigation // *Tellus*, 1953, vol. 5, pp. 42–57.
9. *Voronovich A.G.* Strong solitary internal waves in a 2.5-layer model // *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 474, pp. 85–94.
10. *Goulet A., Choi W.* Large amplitude internal solitary waves in a two-layer system of piecewise linear stratification // *Phys. Fluids*, 2008, vol. 20, pp. 096601. <https://doi.org/10.1063/1.2978205>
11. *Makarenko N.I., Maltseva J.L.* Asymptotic models of internal stationary waves // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 4, pp. 646–654.
12. *Makarenko N.I., Maltseva J.L.* Solitary waves in a weakly stratified two-layer fluid // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 2, pp. 229–234.
13. *Sutherland B.R.* *Internal Gravity Waves.* Cambridge: Univ. Press, 2010.
14. *Makarenko N.I., Maltseva J.L.* Phase velocity spectrum of internal waves in a weakly-stratified two-layer fluid // *Fluid Dyn.*, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 278–294.
15. *Miyata M.* An internal solitary wave of large amplitude // *La Mer*, 1985, vol. 23, no. 2, pp. 43–48.

- 
16. *Choi W., Camassa R.* Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.*, 1999, vol. 396, pp. 1–36.
  17. *Makarenko N., Maltseva J., Morozov E., Tarakanov R., Ivanova K.* Internal waves in marginally stable abyssal stratified flow // *Nonlin. Proces. Geophys.*, 2018, vol. 25, pp. 659–669.
  18. *Makarenko N.I., Maltseva J.L., Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Ivanova K.A.* Steady internal waves in deep stratified flows // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 2, pp. 248–256.
  19. *Carr M., Fructus D., Grue J., Jensen A., Davies P.A.* Convectively induced shear instability in large amplitude internal solitary waves // *Phys. Fluids*, 2008, vol. 20, pp. 126601.
  20. *Van Haren H., Gostiaux L., Morozov E., Tarakanov R.* Extremely long Kelvin–Helmholtz billow trains in the Romanche fracture zone // *Geophys. Res. Lett.*, 2014, vol. 44, pp. 8445–8451.

УДК 532.5.013

**ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ  
В ТРЕХМЕРНОМ КАНАЛЕ С ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**© 2023 г. В. К. Андреев<sup>1,\*</sup>, Е. Н. Лемешкова<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

\*e-mail: andr@icm.krasn.ru

\*\*e-mail: elena\_cher@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 28.12.2022 г.

После доработки 01.03.2023 г.

Принята к публикации 01.03.2023 г.

Исследуется трехмерное стационарное течение двух несмешивающихся жидкостей в слое, ограниченном твердыми параллельными стенками. Верхняя стенка теплоизолирована, а на нижней задано квадратичное по горизонтальным координатам поле температур. Поля скоростей в жидкостях имеют специальный вид: их горизонтальные компоненты линейны по одноименным координатам. Возникающая сопряженная краевая задача в рамках модели Обербека–Буссинеска является обратной и редуцируется к системе десяти интегродифференциальных уравнений. Для малых чисел Марангони (ползущее течение) поставленная задача решена в аналитическом виде. Нелинейная задача решается тау-методом. Показано, что решение нелинейной задачи с уменьшением числа Марангони аппроксимируется решением задачи о ползущем течении. Проведен анализ влияния физических и геометрических параметров, а также поведения температуры на подложке, на структуру конвекции в слоях.

*Ключевые слова:* уравнения Обербека–Буссинеска, термокапиллярность, обратная задача

**DOI:** 10.31857/S0032823523020029, **EDN:** TYSYHA

**1. Введение.** Течения типа Хименца [1] известны как двумерные течения вблизи критической точки и характеризуются наличием зон с более высокими давлением и температурой, чем в окружающей области. Такие течения можно наблюдать как в макромасштабах (например, использование технологий гидроразрыва пласта в нефтесодобывающей промышленности), так и в микромасштабах (например, жидкостные биочипы в медицине). Изучение характеристик подобных течений необходимо для оценки технологических параметров, а также для прогнозирования динамики и эволюции жидких слоев. Точные решения определяющих уравнений – наиболее эффективный способ исследования процессов в жидкости, а также получения оценочных характеристик. В настоящее время представлены решения задач, описывающих течения типа Хименца в различной геометрии: осесимметричный [2] и трехмерный [3, 4] аналоги решения Хименца, в том числе для течений в цилиндрической геометрии [5, 6]. Краткий обзор точных решений, близких к решению Хименца, дан в [7].

Исходная идея искать точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных, по-видимому, впервые предложена в работе [8]. Было показано, что общая трехмерная система уравнений вязкой магнитной гидродинамики редуцируется к замкнутой системе одномер-

ных уравнений. Аналогичный результат для уравнений газовой динамики был получен в [9]. В работе [10] изучено решение уравнений Обербека–Буссинеска, описывающее тепловую конвекцию в трехмерном слое. В зависимости от граничных условий рассмотрены следующие движения: в слое, ограниченном твердыми стенками; твердой стенкой и свободной границей; совместное движение двух и более жидкостей с общей поверхностью раздела. Задача о ползущем конвективном движении вязкой теплопроводной жидкости с плоской свободной границей подробно изучена в [11]. В работах [12, 13] рассмотрено двухслойное трехмерное течение жидкостей при малых числах Марангони, поле скоростей которых имеет специальный вид, а также учтено полное энергетическое условие.

В настоящей работе рассматривается совместная конвекция двух вязких теплопроводных жидкостей в трехмерном слое с твердыми плоскими стенками. Верхняя стенка теплоизолирована, а на нижней стенке задано нестационарное поле температур. Жидкости предполагаются несмешивающимися и на плоской границе раздела между ними заданы сложные условия сопряжения [14]. Эволюция этой системы описывается системой уравнений Обербека–Буссинеска в каждой жидкости. Решение указанной задачи ищется в классе полей скоростей, линейных по двум координатам [15], а поля температур и давлений – квадратичные функции тех же координат.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается слой  $-l_1 < z < l_2$ ,  $|x| < \infty$ ,  $|y| < \infty$ , заполненный двумя вязкими несмешивающимися теплопроводными жидкостями. Первая жидкость занимает слой  $-l_1 < z < 0$ , а вторая  $-0 < z < l_2$ . Границы слоя  $z = -l_1$ ,  $z = l_2$  – суть твердые неподвижные стенки, а  $z = 0$  – также неподвижная поверхность раздела между несмешивающимися жидкостями (см. рис. 1). Стационарное течение в слоях описывается уравнениями Обербека–Буссинеска [16], решения которых ищется в специальном виде (здесь и далее  $j = 1, 2$ )

$$u_j = \left( (f_j(z) + h_j(z))x, (f_j(z) - h_j(z))y, -2 \int_0^z f_j(\xi) d\xi \right) \quad (2.1)$$

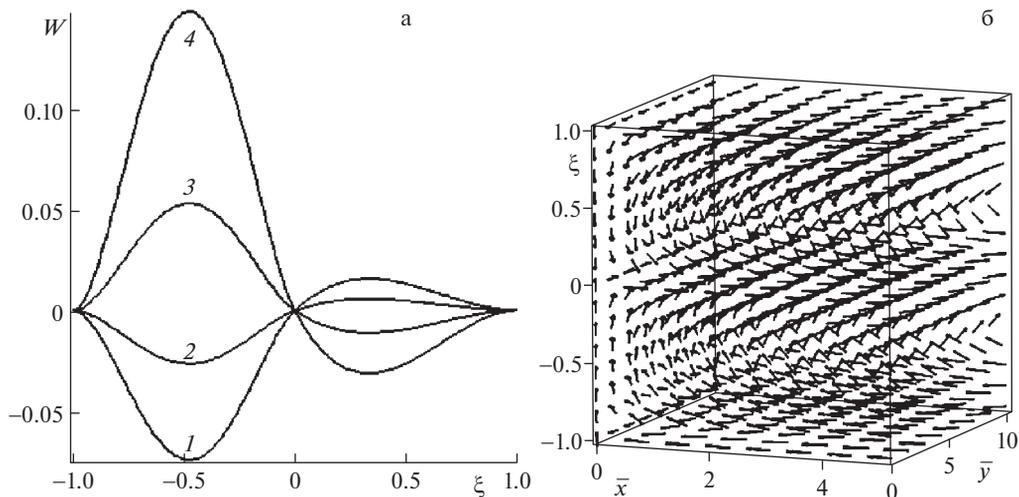
$$\bar{p}_j = \bar{p}_j(x, y, z), \quad \theta_j = a_j(z)x^2 + b_j(z)y^2 + q_j(z)$$

После подстановки (2.1) в систему уравнений Обербека–Буссинеска и анализ ее совместности приходим к выводу, что и  $\bar{p}_j$  есть квадратичные функции по  $x$ ,  $y$  (ниже они выписаны в безразмерной форме). В (2.1)  $u_j(x)$ ,  $\bar{p}_j(x)$ ,  $\theta_j(x)$  – вектора скорости, модифицированные давления и температуры в слоях. Более специальный случай представления поля скорости (2.1) для движения одной жидкости рассмотрен в [14, 17], причем давление зависело лишь от вертикальной координаты и времени. Температура распределена по квадратичному закону (2.1) только на свободных границах слоя  $z = \pm Z(t)$  и вызвала термокапиллярный эффект. Численное решение последней задачи с учетом общего распределения температуры  $\theta(z, y, z, t)$  в слое  $-Z(t) < z < Z(t)$  проведено в статье [18]. Обстоятельный обзор точных решений системы Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от  $x$  и  $y$  приведен в [15].

В настоящей работе квадратичная зависимость по  $x$  и  $y$  температур в (2.1) является дополнительным предположением. Также предполагается, что поверхностное натяжение линейно зависит от температуры этой поверхности  $\theta(x, y, 0, t)$

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 - \alpha\theta \quad (2.2)$$

с постоянными  $\sigma_0 > 0$  и  $\alpha > 0$ .



**Рис. 1.** а: Безразмерная вертикальная компонента скорости  $W(\xi)$  в зависимости от  $\alpha_2$  при  $\alpha_1 = 0.5, l_1 = 1$  см,  $l_2 = 1$  см: 1 –  $\alpha_2 = -1$ , 2 –  $\alpha_2 = -0.6$ , 3 –  $\alpha_2 = -0.1$ , 4 –  $\alpha_2 = 0.5$ ; б: поле скоростей при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ .

Для первого слоя при  $j = 1$  положим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{l_1}, \quad -1 < \xi < 0, \quad f_1 = \frac{\chi_1}{l_1^2} M F_1(\xi), \quad h_1 = \frac{\chi_1}{l_1^2} M H_1(\xi) \\ a_1 &= a^* A_1(\xi), \quad b_1 = a^* B_1(\xi), \quad q_1 = \theta^* Q_1(\xi), \quad s_j = \frac{\chi_1^2}{l_1^4} M S_j; \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$M = \frac{\alpha a^* l_1^3}{\mu_1 \chi_1}, \quad P_1 = \frac{\nu_1}{\chi_1}, \quad L_1 = \frac{\rho_1 \beta_1 g l_1^2}{\alpha}, \quad d = \frac{a^* l_1^2}{\theta^*},$$

где  $M$  – число Марангони,  $P_1$  – число Прандтля,  $a^* l_1$  – характерный градиент температуры, а  $\theta^*$  – характерная температура. Для второго слоя  $j = 2$  положим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{l_2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad f_2 = \frac{\chi_1}{l_1^2} M F_2(\xi), \quad h_2 = \frac{\chi_1}{l_1^2} M H_2(\xi) \\ a_2 &= a^* A_2(\xi), \quad b_2 = a^* B_2(\xi), \quad q_2 = \theta^* Q_2(\xi), \quad s_k = \frac{\chi_1^2}{l_1^4} M S_k; \quad k = 3, 4 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$P_2 = \frac{\nu_2}{\chi_2}, \quad L_2 = \frac{\rho \rho_2 \beta_2 g l_2}{\alpha}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad l = \frac{l_1}{l_2}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

В (2.3), (2.4)  $\rho_j > 0, \nu_j > 0, \mu_j > 0, \beta_j > 0, \chi_j > 0$  – постоянные плотности, кинематические вязкости, динамические вязкости, коэффициенты теплового расширения жидкости, температуропроводности;  $g > 0$  – ускорение силы тяжести. Подставляя вид решения (2.1) в систему уравнений Обербека–Буссинеска, учитывая (2.3), (2.4), получим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений на неизвестные функции  $F_j(\xi), H_j(\xi), A_j(\xi), B_j(\xi), Q_j(\xi)$  и постоянных  $S_i, i = \overline{1, 4}$

$$\begin{aligned}
 M \left( F_j^2 + H_j^2 - 2F_{j\xi} \int_0^\xi F_j(\zeta) d\zeta \right) &= P_j \gamma_j F_{j\xi\xi} - P_1 L_j \int_0^\xi [A_j(\zeta) + B_j(\zeta)] d\zeta - S_i \\
 2M \left( F_j H_j - H_{j\xi} \int_0^\xi F_j(\zeta) d\zeta \right) &= P_j \gamma_j H_{j\xi\xi} - P_1 L_1 \int_0^\xi [A_j(\zeta) - B_j(\zeta)] d\zeta - S_k \\
 2M \left[ A_j (F_j + H_j) - A_{j\xi} \int_0^\xi F_j(\zeta) d\zeta \right] &= \gamma_j A_{j\xi\xi} \quad (2.5) \\
 2M \left[ B_j (F_j - H_j) - B_{j\xi} \int_0^\xi F_j(\zeta) d\zeta \right] &= \gamma_j B_{j\xi\xi} \\
 -2M Q_{j\xi} \int_0^\xi F_j(\zeta) d\zeta &= \gamma_j Q_{j\xi\xi} + 2d\tilde{\chi}(A_j + B_j)
 \end{aligned}$$

В уравнениях (2.5)  $\gamma_1 = 1, \tilde{\chi} = 1, i = 1, k = 2$  для первого слоя  $-1 < \xi < 0$  при  $j = 1$  и  $\gamma_2 = l^2/\chi, \tilde{\chi} = \chi^{-1}, i = 3, k = 4$  для второго слоя  $0 < \xi < 1$  при  $j = 2$ . Система (2.5) дополняется граничными условиями. На нижней твердой стенке  $\xi = -1$

$$\begin{aligned}
 F_1(-1) = H_1(-1) = 0, \quad \int_{-1}^0 F_1(\xi) d\xi = 0, \quad A_1(-1) = \alpha_1 \\
 B_1(-1) = \alpha_2, \quad Q_1(-1) = \alpha_3,
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

т.е. выполнены условия прилипания и задана температура. В безразмерных переменных температура на нижней стенке есть

$$\bar{\theta}(\bar{x}, \bar{y}, -1) = \frac{\theta(x, y, -l_1)}{\theta^*} = d\bar{\alpha}_1 \bar{x}^2 + d\bar{\alpha}_2 \bar{y}^2 + \bar{\alpha}_3,$$

где, согласно замене (2.4),  $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1/a^*, \bar{\alpha}_2 = \alpha_2/a^*, \bar{\alpha}_3 = \alpha_3/\theta^*, \alpha_k = \text{const}, k = 1, 2, 3, \bar{x} = x/l_1, \bar{y} = y/l_1$ . Поэтому  $A_1(-1) = d\bar{\alpha}_1 \equiv \alpha_1, B_1(-1) = d\bar{\alpha}_2 \equiv \alpha_2, Q_1(-1) = \bar{\alpha}_3 \equiv \alpha_3$ . Очевидно, что температурное поле на нижней твердой стенке имеет экстремум в точке  $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ : при  $\alpha_1, \alpha_2 < 0$  – максимум, а при  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  – минимум.

Верхняя стенка  $\xi = 1$  предполагается теплоизолированной и на ней также выполняются условия прилипания

$$A_{2\xi}(1) = B_{2\xi}(1) = Q_{2\xi}(1) = 0, \quad F_2(1) = H_2(1) = 0, \quad \int_0^1 F_2(\xi) d\xi = 0 \quad (2.7)$$

На поверхности раздела  $\xi = 0$  имеем [14]

$$\begin{aligned}
 F_1(0) = F_2(0), \quad H_1(0) = H_2(0) \\
 A_1(0) = A_2(0), \quad B_1(0) = B_2(0), \quad Q_1(0) = Q_2(0) \\
 \mu F_{1\xi}(0) - lF_{2\xi}(0) = -\mu(A_1(0) + B_1(0)) \\
 \mu H_{1\xi}(0) - lH_{2\xi}(0) = -\mu(A_1(0) - B_1(0))
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$lA_{2\xi}(0) - kA_{1\xi}(0) = 0, \quad lB_{2\xi}(0) - kB_{1\xi}(0) = 0, \quad lQ_{2\xi}(0) - kQ_{1\xi}(0) = 0 \quad (2.9)$$

Условия (2.8) являются следствиями непрерывности скорости и температуры на поверхности раздела, а также динамического условия для касательных напряжений. При выводе последних двух соотношений (2.8) учтено равенство (2.2). Условие для нормальных напряжений эквивалентно тому, что поверхность раздела остается плоской.

Данное предположение может выполняться, например, при действии достаточного большого капиллярного давления [19]. Непрерывность потоков тепла влечет равенства (2.9). Для полной определенности задачи необходимо поставить еще два условия

$$\int_{-1}^0 H_1(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 H_2(\xi) d\xi = 0, \quad (2.10)$$

означающие вместе с интегральными равенствами (2.6), (2.7) замкнутость течений в слоях. Заметим, что задача для  $Q_j(\xi)$  при известных  $F_j(\xi)$ ,  $A_j(\xi)$  и  $B_j(\xi)$  отделяется. Их поведение не влияет на поле скоростей. Поэтому далее будет решаться задача для определения функций  $F_j(\xi)$ ,  $H_j(\xi)$ ,  $A_j(\xi)$ ,  $B_j(\xi)$  и постоянных  $S_k$ .

Приведем формулы для модифицированных давлений в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{\rho_1 v_1 \chi_1}{l_1^2} M \Pi_1(\xi) \\ \Pi_1(\xi) &= \left[ 2L_1 \int_0^\xi A_1 d\zeta + \frac{1}{P_1} (S_1 + S_2) \right] \frac{\bar{x}^2}{2} + \left[ 2L_1 \int_0^\xi B_1 d\zeta + \frac{1}{P_1} (S_1 - S_2) \right] \frac{\bar{y}^2}{2} - \\ &\quad - 2 \frac{F_1}{P_1} - 2 \frac{M}{P_1} \left( \int_0^\xi F_1 d\zeta \right)^2 + \frac{L_1}{d} \int_0^\xi Q_1 d\zeta + \Pi_{10} \\ \bar{p}_2 &= \frac{\rho_2 v_2 \chi_2}{l_2^2} M \Pi_2(\xi) \\ \Pi_2(\xi) &= \left[ \frac{2\chi v L_2}{l^2} \int_0^\xi A_2 d\zeta + \frac{\chi^2}{l^2 P_2} (S_3 + S_4) \right] \frac{\bar{x}^2}{2} + \left[ \frac{2\chi v L_1}{l^2} \int_0^\xi B_2 d\zeta + \frac{\chi^2}{l^2 P_2} (S_3 - S_4) \right] \frac{\bar{y}^2}{2} - \\ &\quad - 2 \frac{\chi F_2}{l^2} - 2 \frac{\chi^2 M}{l^4 P_2} \left( \int_0^\xi F_2 d\zeta \right)^2 + \frac{\chi v L_2}{d l^2} \int_0^\xi Q_2 d\zeta + \Pi_{20}, \end{aligned}$$

где  $\Pi_{10}, \Pi_{20}$  – произвольные постоянные.

**3. Решение при малых числах Марангони.** Предположим, что  $|M| \ll 1$  и будем искать решение в виде (считаем, что  $L_j = O(1)$  при  $M \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} F_j &= F_j^{(0)} + M F_j^{(1)} + \dots, \quad H_j = H_j^{(0)} + M H_j^{(1)} + \dots, \quad S_k = S_k^{(0)} + M S_k^{(1)} + \dots \\ A_j &= A_j^{(0)} + M A_j^{(1)} + \dots, \quad B_j = B_j^{(0)} + M B_j^{(1)} + \dots; \quad k = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

В нулевом приближении получим линейную задачу вида (2.5)–(2.10), где  $M = 0$ . После некоторых преобразований решение указанной задачи найдется в виде (индекс “(0)” опущен)

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{48l} \left( l L_1 (1 - 8\xi^3) - \frac{(4\xi + 1)}{(l + \mu)} (l^2 L_1 + v L_2 - 12l\mu) \right) - \frac{S_1}{2P_1} \xi^2 \\ F_2(\xi) &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{48l} \left( -\frac{4vL_2}{l} (2\xi^3 + \xi) + l L_1 (1 - 4\xi) + \frac{(4\xi - 1)}{(l + \mu)} (l^2 L_1 + v L_2 - 12l\mu) \right) - \frac{v S_3}{2P_1 l^2} \xi^2 \\ S_1 &= \frac{3P_1(\alpha_1 + \alpha_2)}{8} \left( L_1 + \frac{1}{3l(l + \mu)} (l^2 L_1 + v L_2 - 12l\mu) \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$S_3 = P_1(\alpha_1 + \alpha_2) \left( -\frac{L_2}{2} + \frac{6l^2}{48vl(l + \mu)} (l^2 L_1 + vL_2 - 12l\mu) - \frac{6l^2 L_1}{48v} \right)$$

$$A_j(\xi) = \alpha_1, \quad B_j(\xi) = \alpha_2$$

Вид функций  $H_1(\xi)$ ,  $H_2(\xi)$  и постоянных  $S_2$ ,  $S_4$  будет совпадать с  $F_1(\xi)$ ,  $F_2(\xi)$  и  $S_1$ ,  $S_3$ , соответственно, с заменой  $\alpha_1 + \alpha_2$  на  $\alpha_1 - \alpha_2$ . Для первого слоя  $j = 1$ ,  $-1 < \xi < 0$  и для второго слоя  $j = 2$ ,  $0 < \xi < 1$ .

Заметим, что  $F_j(\xi)$  пропорциональны  $\alpha_1 + \alpha_2$ , а  $H_j(\xi)$  пропорциональны  $\alpha_1 - \alpha_2$ . Поэтому для радиального нагрева подложки ( $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$ )  $H_j(\xi) = 0$ ,  $A_j(\xi) = B_j(\xi)$  и  $S_2 = S_4 = 0$ , а в случае, когда  $\alpha_1 = -\alpha_2$  имеем  $F_j(\xi) = 0$  и  $S_1 = S_3 = 0$ .

В случае невесомости ( $L_j = 0$ ) формулы (3.1) существенно упрощаются

$$F_1(\xi) = \frac{\mu(\alpha_1 + \alpha_2)(4\xi + 1)}{4(l + \mu)} - \frac{S_1}{2P_1} \xi^2, \quad F_2(\xi) = -\frac{\mu(\alpha_1 + \alpha_2)(4\xi - 1)}{4(l + \mu)} - \frac{vS_3}{2Pl^2} \xi^2$$

$$S_1 = -\frac{3\mu P_1(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(l + \mu)}, \quad S_3 = -\frac{3l^2 \rho P_1(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(l + \mu)} \quad (3.2)$$

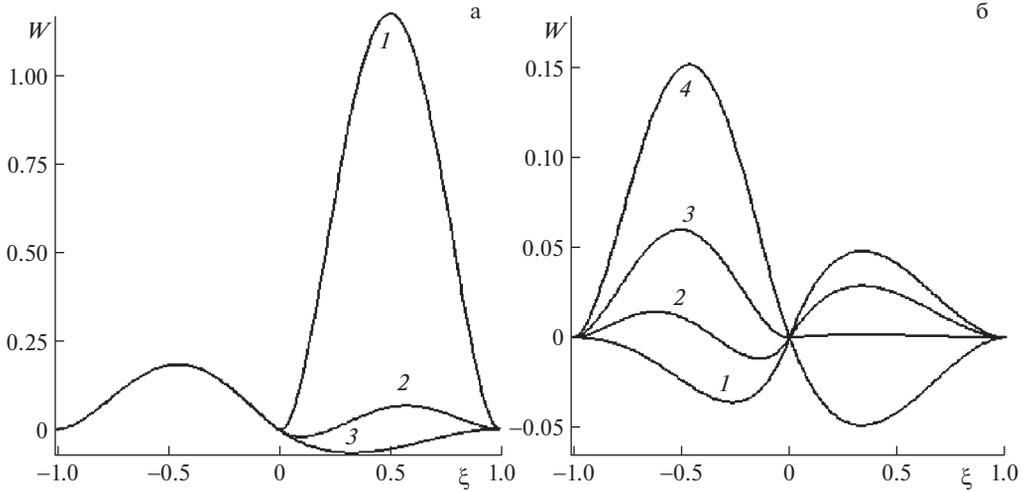
Вид функций  $A_j(\xi)$  и  $B_j(\xi)$  остается прежним.

На рис. 1, 2 приведены профили безразмерной вертикальной компоненты скорости  $W(\xi)$  для системы хладагент R134a (фреон) ( $j = 1$ )—воздух ( $j = 2$ ) [20]. На рис. 1, а приведены профили безразмерной вертикальной компоненты скорости  $W(\xi)$  в зависимости от  $\alpha_2$ . Если  $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$ , то в первом слое возникает возвратное течение (жидкость движется в противоположном направлении оси  $z$ ), а во втором слое течение направлено по оси  $z$  ( $\xi$ ) (кривые 1, 2), а если  $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ , то направление течений в слоях меняется на противоположное (кривые 3, 4). Кривая 4 соответствует радиальному нагреву, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$ . Видно, что во втором слое течение направлено в противоположную сторону оси  $z$ , а в первом слое — в направлении оси  $z$ , что и изображено на рис. 1, б. Аналогичная ситуация будет иметь место для любого случая. Поэтому далее будут приведены результаты расчетов только для вертикальной компоненты скорости, поскольку она дает представление о сформировавшихся течениях в слоях.

На рис. 2 приведены профили безразмерной вертикальной компоненты скорости  $W(\xi)$  в зависимости от безразмерного параметра  $l$  и ускорения силы тяжести  $g$ . При значении  $l = 3 \times 10^{-4}$  и меньше в каждом слое течение направлено по оси  $z$ . При  $l = 10^{-3}$  во втором слое течение становится двухвихревым, а с увеличением  $l$  течение становится полностью возвратным. Структура течения в первом слое не изменяется. Кривая 1 на рис. 2, б соответствует случаю невесомости при радиальном нагреве (см. (3.2)). Видно, что с ростом  $g$  направление течений в слоях меняется на противоположное.

**4. Решение общей нелинейной задачи.** Для решения общей нелинейной задачи (2.5)—(2.10) применяется тау-метод, являющийся модификацией метода Галеркина [21]. Произведем замену переменных в первом слое  $\xi' = -\xi$ . Тогда задача (2.5)—(2.10) переписывается в виде (штрихи опущены)

$$K_j \equiv M \left( F_j^2 + H_j^2 - 2F_j \int_0^\xi F_j d\zeta \right) - P_j \gamma_j F_j \xi \xi - P_1 L_j \int_0^\xi [A_j + B_j] d\zeta + S_i = 0$$



**Рис. 2.** Безразмерная вертикальная компонента скорости  $W(\xi)$  в зависимости от безразмерного параметра  $\xi$ : а:  $1-l = 3 \times 10^{-4}$ ,  $2-l = 10^{-3}$ ,  $3-l = 0.1$  и б: ускорения силы тяжести  $g$ :  $1-g = 0 \text{ м/с}^2$ ,  $2-g = 3 \text{ м/с}^2$ ,  $3-g = 6 \text{ м/с}^2$ ,  $4-g = 9.8 \text{ м/с}^2$ .

$$T_j \equiv 2M \left( F_j H_j - H_j \int_0^\xi F_j d\zeta \right) - P_j \gamma_j H_j \xi \zeta - P_1 L_1 \int_0^\xi [A_j - B_j] d\zeta + S_k = 0 \quad (4.1)$$

$$N_j \equiv 2M \left[ A_j (F_j + H_j) - A_j \int_0^\xi F_j d\zeta \right] - \gamma_j A_j \xi \zeta = 0$$

$$D_j \equiv 2M \left[ B_j (F_j - H_j) - B_j \int_0^\xi F_j d\zeta \right] - \gamma_j B_j \xi \zeta = 0$$

$$F_j(1) = 0, \quad H_j(1) = 0, \quad A_1(1) = \alpha_1, \quad B_1(1) = \alpha_2, \quad A_{2\xi}(1) = B_{2\xi}(1) = 0$$

$$F_1(0) = F_2(0), \quad H_1(0) = H_2(0), \quad A_1(0) = A_2(0), \quad C_1(0) = C_2(0)$$

$$l F_{2\xi}(0) + \mu F_{1\xi}(0) = \mu (A_1(0) + B_1(0)) \quad (4.2)$$

$$l H_{2\xi}(0) + \mu H_{1\xi}(0) = \mu (A_1(0) - B_1(0))$$

$$l A_{2\xi}(0) + k A_{1\xi}(0) = 0, \quad l B_{2\xi}(0) + k B_{1\xi}(0) = 0$$

$$\int_0^1 F_j(\xi) d\xi = \int_0^1 H_j(\xi) d\xi = 0; \quad j = 1, 2 \quad (4.3)$$

Приближенное решение задачи (4.1)–(4.3) ищется в виде сумм

$$\begin{aligned} F_{jn}(\xi) &= \sum_{k=1}^n F_j^k R_k(\xi), & H_{jn}(\xi) &= \sum_{k=1}^n H_j^k R_k(\xi) \\ A_{jn}(\xi) &= \sum_{k=0}^n A_j^k R_k(\xi), & B_{jn}(\xi) &= \sum_{k=0}^n B_j^k R_k(\xi), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $R_k(z) = P_k(2z - 1)$  – смещенные полиномы Лежандра,  $z \in [0, 1]$ ,  $P_k(z)$  – обычные полиномы Лежандра. Из интегральных условий (4.3), учитывая ортогональность полиномов Лежандра  $R_k(z)$  на отрезке  $[0, 1]$ , получим  $F_j^0 = H_j^0 = 0$ . Остальные коэффициенты  $F_j^k$ ,  $H_j^k$ ,  $A_j^k$ ,  $B_j^k$ , и постоянные  $S_{kn}$ ,  $k = \overline{1, 4}$  находятся из системы галеркинских приближений

$$\int_0^1 K_j R_m(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 T_j R_m(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 N_j R_m(\xi) d\xi = 0$$

$$\int_0^1 D_j R_m(\xi) d\xi = 0; \quad m = 0, \dots, n-2 \quad (4.5)$$

и преобразованных граничных условий (4.2)

$$\sum_{k=1}^n F_j^k = 0, \quad \sum_{k=1}^n H_j^k = 0, \quad \sum_{k=0}^n A_1^k - \alpha_1 = 0, \quad \sum_{k=0}^n B_1^k - \alpha_2 = 0$$

$$\sum_{k=0}^n A_2^k R_k'(1) = 0, \quad \sum_{k=0}^n B_2^k R_k'(1) = 0, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k F_1^k = \sum_{k=1}^n (-1)^k F_2^k,$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k H_1^k = \sum_{k=1}^n (-1)^k H_2^k, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k A_1^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k A_2^k, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k B_1^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k B_2^k$$

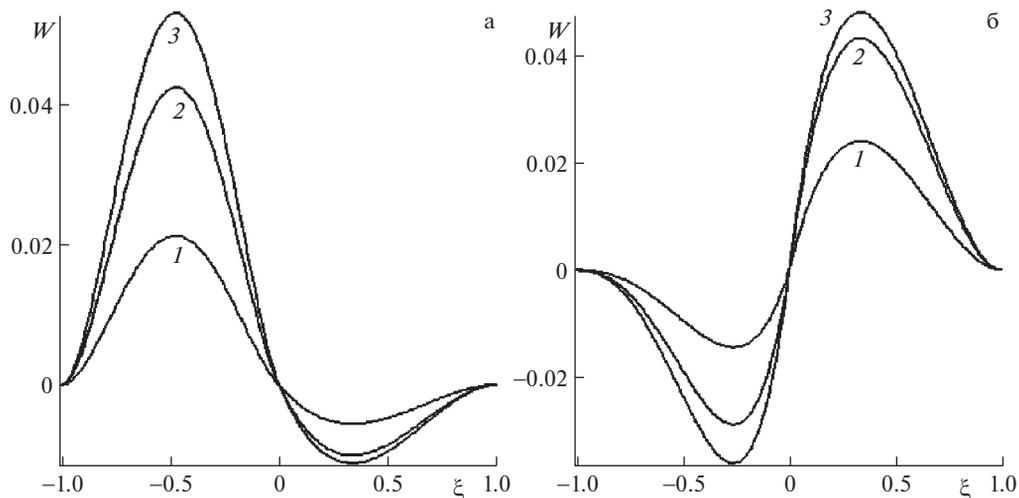
$$l \sum_{k=1}^n F_2^k R_k'(0) + \mu \sum_{k=1}^n F_1^k R_k'(0) = \mu \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k A_1^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k B_1^k \right) \quad (4.6)$$

$$l \sum_{k=1}^n H_2^k R_k'(0) + \mu \sum_{k=1}^n H_1^k R_k'(0) = \mu \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k A_1^k - \sum_{k=0}^n (-1)^k B_1^k \right)$$

$$l \sum_{k=0}^n A_2^k R_k'(0) + k \sum_{k=0}^n A_1^k R_k'(0) = 0, \quad l \sum_{k=0}^n B_2^k R_k'(0) + k \sum_{k=0}^n B_1^k R_k'(0) = 0$$

В частности, неизвестные постоянные  $S_{kn}$  определяются по известным  $F_{jn}$ ,  $H_{jn}$ ,  $A_{jn}$  и  $B_{jn}$  из уравнений  $\int_0^1 K_j R_0(\xi) d\xi = 0$ ,  $\int_0^1 T_j R_0(\xi) d\xi = 0$ . При выводе системы (4.6) было учтено, что  $R_k(1) = 1$ ,  $R_k(0) = (-1)^k$ . Таким образом уравнения (4.5), (4.6) образуют замкнутую систему алгебраических нелинейных уравнений на коэффициенты  $F_j^k$ ,  $H_j^k$ ,  $A_j^k$ ,  $B_j^k$  и постоянные  $S_{kn}$ .

Для решения нелинейной системы уравнений (4.5), (4.6) применялся метод Ньютона. В качестве нулевых приближений для неизвестных коэффициентов  $F_j^k$ ,  $H_j^k$ ,  $A_j^k$ ,  $B_j^k$  и постоянных  $S_{kn}$  взяты значения, удовлетворяющие уравнениям (4.5) и условиям (4.6). В результате для различных нулевых приближений было найдено единственное решение. Расчеты проводились при  $n = 10$ , при этом разность полученных при  $n = 10$  и  $n = 11$  для  $S_k$  составляет порядка  $10^{-15}$ , что говорит о хорошей сходимости  $\tau$ -метода при решении данной краевой задачи. Профили безразмерной вертикальной компоненты скорости  $W(\xi)$ , соответствующие найденному решению, в зависимости от числа Марангони изображены на рис. 3а. Кривая 3 ( $M = 0.1$ ) практически совпадает с кривой 3, изображенной на рис. 1а ( $M = 0$ ), а именно  $\max_{\xi \in [-1, 0]} |W(\xi, M = 0)| - \max_{\xi \in [-1, 0]} |W(\xi, M = 0.1)| \approx 10^{-5}$ . Аналогичная ситуация будет и для случая невесомости



**Рис. 3.** Безразмерная вертикальная компонента скорости  $W(\xi)$  в зависимости от числа Марангони ( $M$ ) при а:  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = -0.1, g = 9.8 \text{ м/с}^2$ : 1 –  $M = 10$ , 2 –  $M = 1$ , 3 –  $M = 0.1$ ; б:  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.5, g = 0 \text{ м/с}^2$ : 1 –  $M = 10$ , 2 –  $M = 1$ , 3 –  $M = 0.1$ .

(рис. 3,б). Кривая 3 ( $M = 0.1$ ) практически совпадает с кривой 1, изображенной на рис. 2,б ( $M = 0$ ), а именно  $\max_{\xi \in [-1,0]} |W(\xi, M = 0)| - \max_{\xi \in [-1,0]} |W(\xi, M = 0.1)| \approx 10^{-8}$ . То есть, с уменьшением числа Марангони решение общей нелинейной задачи стремится к решению модельной задачи о ползущем течении.

**Заключение.** Задача о стационарном трехмерном двухслойном движении со специальным полем скоростей сведена к сопряженной задаче для системы одномерных интегродифференциальных уравнений. Полученная задача является обратной относительно градиентов давлений вдоль горизонтальных координат. Решение линейной задачи (при малых числах Марангони) найдено в аналитическом виде. Нелинейная задача решена тау-методом. Найденное решение при уменьшении числа Марангони стремится к решению задачи о ползущем течении. Проведен анализ влияния безразмерных физических и геометрических параметров на структуру течений в слоях.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dinglers Polytech. J.* 1911. V. 326. P. 321–440.
2. *Howann F.* Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 1936. V. 16. P. 153–164.
3. *Howarth L.* The boundary layer in three-dimensional flow. Part II. The flow near a stagnation point // *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.: Ser. 7.* 1951. V. 42. № 335. P. 1433–1440.
4. *Davey A.* Boundary-layer flow at a saddle point of attachment // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10. № 4. P. 593–610.
5. *Wang C. Y.* Axisymmetric stagnation flow on a cylinder // *Q. Appl. Math.* 1974. V. 32. № 2. P. 207–213.

6. Gorla R.S.R. Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder // *Develop. Mech.* 1977. V. 9. P. 286–288.
7. Bekezhanova V.B., Andreev V.K., Shefer I.A. Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity // *Interfac. Phenom. & Heat Transfer.* 2019. V. 7. I. 4. P. 345–364.
8. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1958. V. 1. P. 391–395.
9. Сидоров А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // *ПМТФ.* 1989. № 2. С. 34–40.
10. Andreev V.K. On a creeping 3D convective motion of fluids with an isothermal interface // *J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys.* 2020. V. 13. № 6. P. 661–669.
11. Азанов А.А., Андреев В.К. Решение задачи о ползущем движении жидкости со свободной границей со специальным полем скоростей в трехмерной полосе // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2021. Матер. научн. конф. СПб.: Изд. РГПУ им. А.И. Герцена. Изд. ВВМ. 2021. С. 42–54.
12. Andreev V.K., Lemeshkova E.N. Two-layer steady creeping thermocapillary flow in a three-dimensional channel // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2022. V. 63. № 1. P. 82–88.
13. Andreev V.K. On a creeping 3D convective motion of fluids with an isothermal interface // *J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys.* 2020. V. 13 (6). P. 661–669.
14. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection.* Berlin; Boston: De Gruyter, 2020.
15. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // *Теорет. основы хим. технол.* 2009. Т. 43. № 5. С. 547–566.
16. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
17. Pukhnachev V.V. Model of viscous layer deformation by thermocapillary forces // *Eur. J. Appl. Math.* 2002. V. 13. № 2. P. 205–224.
18. Rezanova E.V. Numerical modelling of heat transfer in the layer of viscous incompressible liquid with free boundaries // *EPJ Web Conf.* 2017. № 159. P. 00047.
19. Zeytounian R.Kh. The Benard–Marangoni thermocapillary instability problem // *UFN.* 1998. V. 168. № 3. P. 259–286.
20. Богданов С.Н., Бурцев С.И., Иванов О.П., Курпиянова А.В. Холодильная техника. Кондиционирование воздуха. Свойства веществ: Справ. / Под ред. Богданова С.Н. СПб.: СПбГАХПТ, 1999. 320 с.
21. Fletcher C.A.J. *Computational Galerkin Method.* Springer, 1984.

### Thermal Convection of Two Immiscible Liquids in a 3D Channel with a Velocity Field of a Special Type

V. K. Andreev<sup>a,#</sup> and E. N. Lemeshkova<sup>a,##</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: andr@icm.krasn.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: elena\_cher@icm.krasn.ru*

The three-dimensional stationary flow of two immiscible liquids in a layer bounded by solid parallel walls is investigated. The upper wall is thermally insulated, and the lower one has a temperature field quadratic in horizontal coordinates. Velocity fields in liquids have a special form: their horizontal components are linear in the coordinates of the same name. The resulting conjugate boundary value problem in the framework of the Oberbeck–Boussinesq model is inverse and is reduced to a system of ten integro-differential equations. For small Marangoni numbers (creeping current), the problem is solved analytically. The nonlinear problem is solved by the tau method. It is shown that the solution of the nonlinear problem with a decrease in the Marangoni number is approximated by the solution of the creeping flow problem. The analysis of the influence of physical and geometric parameters, as well as

the behavior of temperature on the substrate, on the structure of convection in layers is carried out.

*Keywords:* Oberbeck–Boussinesq equations, thermocapillarity, inverse problem

## REFERENCES

1. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dinglers Polytech. J.*, 1911, vol. 326, pp. 321–440.
2. *Howann F.* Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Stromung um den Zylinder und um die Kugel // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1936, vol. 16, pp. 153–164.
3. *Howarth L.* The boundary layer in three-dimensional flow. Pt. II. The flow near a stagnation point // *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.: Ser. 7*, 1951, vol. 42, no. 335, pp. 1433–1440.
4. *Davey A.* Boundary-layer flow at a saddle point of attachment // *J. Fluid Mech.*, 1961, vol. 10, no. 4, pp. 593–610.
5. *Wang C.Y.* Axisymmetric stagnation flow on a cylinder // *Q. Appl. Math.*, 1974, vol. 32, no. 2, pp. 207–213.
6. *Gorla R.S.R.* Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder // *Develop. Mech.*, 1977, vol. 9, pp. 286–288.
7. *Bekezhanova V.B., Andreev V.K., Shefer I.A.* Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity // *Interfac. Phenom.&Heat Transfer.*, 2019, vol. 7, iss. 4, pp. 345–364.
8. *Lin C.C.* Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395.
9. *Sidorov A.F.* On two classes of solutions of equations of fluid and gas mechanics and their connection with the theory of traveling waves // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1989, no. 2, pp. 34–40.
10. *Andreev V.K.* On a creeping 3D convective motion of fluids with an isothermal interface // *J. Sib. Fed. Univ. Math.&Phys.*, 2020, vol. 13, no. 6, pp. 661–669.
11. *Azanov A.A., Andreev V.K.* Solving the problem of the creeping motion of a fluid with a free boundary with a special velocity field in a three-dimensional strip // *Some Actual Problems of Modern Math.&Math. Educ. Herzen readings – 2021. Mater. Sci. Conf. St. Petersburg: A.I. Herzen SPU Pub.*, 2021. pp. 42–54.
12. *Andreev V.K., Lemeshkova E.N.* Two-layer steady creeping thermocapillary flow in a three-dimensional channel // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, no. 1, pp. 82–88.
13. *Andreev V.K.* On a creeping 3D Convective Motion of Fluids with an Isothermal Interface // *J. Sib. Fed. Univ. Math.&Phys.*, 2020, vol. 13 (6), pp. 661–669.
14. *Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V.* *Mathematical Models of Convection.* Berlin; Boston: De Gruyter, 2020.
15. *Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyinin A.D.* Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 547–566.
16. *Joseph D.* *Stability of Fluid Movements.* Moscow: Mir, 1981. 638 p.
17. *Pukhnachev V.V.* Model of viscous layer deformation by thermocapillary forces // *Eur. J. Appl. Math.*, 2002, vol. 13, no. 2, pp. 205–224.
18. *Rezanova E.V.* Numerical modelling of heat transfer in the layer of viscous incompressible liquid with free boundaries // *EPJ Web Conf.*, 2017, no. 159, pp. 00047.
19. *Zeytounian R. Kh.* The Benard–Marangoni thermocapillary instability problem // *UFN*, 1998, vol. 168, no. 3, pp. 259–286.
20. *Bogdanov S.N., Burtsev S.I., Ivanov O.P., Kupriyanova A.V.* *Refrigeration Equipment. Air Conditioning. Properties of Substances.* / Ed. by *Bogdanov S.N.* St. Petersburg: SPbGAHPT, 1999. 320 p.
21. *Fletcher C.A.J.* *Computational Galerkin Method.* Springer, 1984.

---

---

УДК 532.6; 517.9

## ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

© 2023 г. Е. И. Роменский<sup>1,\*</sup>, И. М. Пешков<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup> *Университет Тренто, Тренто, Италия*

*\*e-mail: evrom@math.nsc.ru*

*\*\*e-mail: Ilya.Peshkov@unitn.it*

Поступила в редакцию 02.02.2023 г.

После доработки 05.03.2023 г.

Принята к публикации 05.03.2023 г.

Представлена модель двухфазного течения сжимаемых несмешивающихся жидкостей, вывод которой основан на использовании теории симметрических гиперболических термодинамически согласованных систем. Модель является расширением предложенной ранее термодинамически согласованной модели сжимаемых двухфазных течений за счет включения новых переменных состояния среды, связанных с силами поверхностного натяжения. Определяющие уравнения модели образуют гиперболическую систему дифференциальных уравнений первого порядка и удовлетворяют законам термодинамики (сохранение энергии и возрастание энтропии). Исследованы свойства уравнений модели, показано, что закон капиллярного давления Юнга–Лапласа выполнен в асимптотическом приближении на континуальном уровне.

*Ключевые слова:* двухфазное течение, поверхностное натяжение, гиперболические уравнения

DOI: 10.31857/S0032823523020121, EDN: UATYDZ

**1. Введение.** Моделирование течений несмешивающихся жидкостей актуально для решения многочисленных задач, возникающих в промышленных приложениях, в частности в задачах добычи и транспортировки углеводородов. Для корректного физического описания несмешивающихся жидкостей, в том числе на континуальном уровне, важно учитывать силы поверхностного натяжения, возникающие на границах раздела жидкостей.

В настоящее время, начиная с работы [1] (см. [2, 3]), широко распространенным является подход, в котором поверхность раздела жидкостей моделируется градиентом функции цвета. Определяющие уравнения в таком подходе содержат параболические члены, что создает определенные трудности при их численной реализации. Недавно в работах [4–6] была предложена гиперболическая переформулировка модели, которая по существу основана на использовании в уравнениях переменной состояния в виде вектора, соответствующего градиенту функции цвета. Модифицированная модель даст те же самые результаты, что и [1]. Следует, однако, отметить, что неясна возможность применения этого подхода для описания дисперсных смесей жидкостей с поверхностным натяжением на континуальном уровне.

Целью работы является применение формализма симметрических гиперболических термодинамически согласованных (СГТС) систем для создания модели двух несмешивающихся жидкостей с учетом поверхностного натяжения. Класс СГТС-уравнений включает в себя многие известные уравнения механики сплошной среды [7, 8] и, кроме этого, на основе принципов формулировки уравнений этого класса, можно строить гиперболические модели сред с усложненными свойствами, в частности, многофазных сред [9, 10]. Формулировка определяющих уравнений основана на расширении СГТС-модели многофазных сжимаемых течений жидкостей, предложенной в работе [11]. Расширение приводит к нелокальной модели и производится за счет введения новой переменной состояния – градиента объемной доли одной из фаз. При этом соответствующая объемная доля играет роль функции цвета как это принято, например, в [2]. В соответствии с формализмом СГТС-моделей для введенной новой переменной должна быть определена парная переменная состояния (которая характеризует инерциальное изменение объемной доли) и дополнительный закон сохранения для нее. Для описания диссипативных и дисперсионных эффектов вводятся правые части уравнений релаксационного типа, при этом важную роль для моделирования поверхностного натяжения играет антисимметричная их часть, не приводящая к возрастанию энтропии.

Полученная система определяющих дифференциальных уравнений является гиперболической и ее решения удовлетворяют законам термодинамики (сохранение энергии и возрастание энтропии). Проанализированы характеристические скорости в одномерном случае, исследованы релаксационные пределы для малых параметров релаксации и показано, что модель на континуальном уровне описывает закон поверхностного натяжения Юнга–Лапласа.

## 2. Гиперболическая термодинамически согласованная система порождающих уравнений для моделирования двухфазных сжимаемых течений.

Определяющие уравнения представленной модели течения смеси с поверхностным натяжением обобщают уравнения термодинамически согласованной модели двухфазного течения сжимаемой жидкости, предложенной в [11]. Как и все гиперболические термодинамически согласованные модели, модель двухфазного течения с поверхностным натяжением может быть получена из порождающей системы уравнений баланса с использованием обобщенной внутренней энергии в качестве термодинамического потенциала. В следующем параграфе представлена порождающая система обратимых процессов для двухфазного течения сжимаемой жидкости.

*2.1. Порождающая система для обратимых сжимаемых двухфазных течений.* Начнем с формулировки общих термодинамически согласованных уравнений без учета диссипации. Система порождающих дифференциальных уравнений для сжимаемых двухфазных течений сформулирована в [11, 12] и имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha u_k}{\partial x_k} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho u_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_l u_k + \rho^2 E_p \delta_{lk} + \rho w_l E_{w_k}) &= 0 \\
 \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k c + \rho E_{w_k}) &= 0 \\
 \frac{\partial w_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_l w_l + E_c) + u_l \left( \frac{\partial w_k}{\partial x_l} - \frac{\partial w_l}{\partial x_k} \right) &= 0 \\
 \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для описания течения использованы следующие переменные состояния:  $\alpha = \alpha_1$  объемная концентрация (объемная доля) фазы с номером 1, удовлетворяющая условию насыщения, что означает, что объемная доля фазы с номером 2 вычисляется как  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ ,  $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$  – массовая плотность смеси,  $\rho_1, \rho_2$  – массовые плотности фаз,  $u_i = c_1 u_i^1 + c_2 u_i^2$  – скорость смеси, где  $u_i^1, u_i^2$  – скорости фаз,  $c = c_1 = \alpha_1 \rho_1 / \rho$ ,  $c_2 = 1 - c = \alpha_2 \rho_2 / \rho$  – массовые доли фаз ( $c_1 + c_2 = 1$ ). Далее,  $w_i = u_i^1 - u_i^2$  – относительная скорость фаз,  $S$  – энтропия смеси (подчеркнем, что при формулировке модели используется приближение одной энтропии, что допустимо при небольших вариациях температур фаз).  $E$  – обобщенная внутренняя энергия смеси, а индексы внизу обозначают производные по соответствующим переменным состояниям.

Слагаемое  $u_l \left( \frac{\partial w_k}{\partial x_l} - \frac{\partial w_l}{\partial x_k} \right)$  в уравнении для относительной скорости, содержащее ротор относительной скорости  $\nabla \times \mathbf{w}$ , играет очень важную роль в структуре определяющих уравнений (2.1) (см. [11]). Оно обеспечивает существование дополнительного закона сохранения энергии для системы (2.1), а также приведение этой системы к симметрической форме. Можно доказать, что если дополнительный стационарный закон сохранения  $\nabla \times \mathbf{w} = 0$  выполнен в начальных данных при  $t = 0$ , то он выполнен для всех последующих моментов времени  $t > 0$ .

При помощи суммирования всех уравнений, а также стационарного закона сохранения  $\nabla \times \mathbf{w} = 0$ , умноженных на соответствующие множители, можно показать, что решения (2.1) удовлетворяют дополнительному закону сохранения энергии (см. [11])

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( E + \frac{1}{2} u_l u_l \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho u_k \left( E + \frac{1}{2} u_l u_l + \frac{p}{\rho} \right) + \rho u_l w_l E_{w_k} + \rho E_c E_{w_k} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь,  $E(\alpha, \rho, c, w_k)$  – плотность внутренней энергии смеси. Наличие дополнительного закона сохранения позволяет переформулировать (2.1) в терминах так называемого порождающего термодинамического потенциала и порождающих переменных и привести уравнения к симметрической форме [7, 8, 13, 14].

Для (2.1) необходимо иметь только одно замыкающее соотношение, а именно плотность внутренней энергии  $E$ , которая должна быть указана для каждого конкретного течения смеси. В двухфазных моделях, сформулированных в [11], внутренняя энергия определяется как сумма усредненных по массе внутренних энергий фаз и кинематической энергии относительного движения

$$E(\alpha, \rho, c, w_k) = c e_1(\rho_1, S) + (1 - c) e_2(\rho_2, S) + c(1 - c) \frac{w_l w_l}{2} \quad (2.3)$$

Заметим, что внутренние энергии фаз можно записать в виде зависимостей  $e_i(\rho c_i / \alpha_i, S)$ ,  $i = 1, 2$ , которые могут оказаться полезными при изучении выпуклости полной энергии.

Для симметрической гиперболичности по Фридрихсу [14–16] необходимо потребовать выпуклость энергии (2.3) по переменным  $\alpha, \rho, c, w_k$ . Хотя строгого доказательства выпуклости не имеется, проведенные многочисленные расчеты по этой модели не выявили аномалий в поведении решений, что является подтверждением выпуклости, доказательство которой является предметом дальнейших исследований.

Если внутренняя энергия смеси определена, то все термодинамические силы (производные энергии по переменным состояниям) можно вычислить по формулам (см. [11]):

$$\begin{aligned}
 p &= \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, & \frac{\partial E}{\partial w_k} &= c_1 c_2 w_k \\
 \frac{\partial E}{\partial c} &= e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} - e_2 - \frac{p_2}{\rho_2} + (1 - 2c) \frac{w_l w_l}{2}, & E_\alpha &= \frac{p_2 - p_1}{\rho},
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где давления компонент смеси вычисляются как  $p_i = \rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

*2.2. Порождающая система для необратимых сжимаемых двухфазных течений.* Типичные необратимые процессы в двухфазных сжимаемых течениях — это релаксация фазового давления к общему значению давления фаз и межфазное трение. Эти процессы учитываются в (2.1) как источниковые алгебраические члены в уравнениях для объемной доли и для относительной скорости. В итоге, определяющие уравнения модели с необратимыми процессами имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha u_k}{\partial x_k} &= -\lambda^{-1} \rho E_\alpha \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho u_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_l u_k + \rho^2 E_\rho \delta_{lk} + \rho w_l E_{w_k}) &= 0 \\
 \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k c + \rho E_{w_k}) &= 0 \\
 \frac{\partial w_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_l w_l + E_c) + u_l \left( \frac{\partial w_k}{\partial x_l} - \frac{\partial w_l}{\partial x_k} \right) &= -\chi^{-1} E_{w_k} \\
 \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} &= Q = \frac{\rho}{E_S} (\lambda^{-1} E_\alpha E_\alpha + \chi^{-1} E_{w_k} E_{w_k}) \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Можно увидеть, что диссипативные члены (источники в правой части первого и пятого уравнения в системе (2.5)) выбираются пропорциональными термодинамическим силам, соответствующим переменным уравнений, в которые они введены. Предполагая, что в состоянии термодинамического равновесия термодинамические силы  $\rho E_\alpha$  и  $E_{w_k}$  равны нулю, можно видеть, что в термодинамическом равновесии диссипация отсутствует. Учет необратимости приводит к появлению источника  $Q$  производства энтропии в уравнении ее баланса. Заметим, что производство энтропии неотрицательно ( $Q \geq 0$ ) в силу выбора диссипативных источников пропорциональными термодинамическим силам. Введение диссипации не влияет на закон сохранения энергии (2.2), и его вид остается тем же самым для системы (2.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( E + \frac{1}{2} u_l u_l \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho u_k \left( E + \frac{1}{2} u_l u_l + \frac{p}{\rho} \right) + \rho u_l w_l E_{w_k} + \rho E_c E_{w_k} \right) = 0 \tag{2.6}$$

### 3. Порождающие определяющие уравнения для двухфазных течений с поверхностным натяжением.

*3.1. Формулировка определяющих уравнений.* В этом разделе представлена гиперболическая термодинамически согласованная формулировка модели двухфазного течения с поверхностным натяжением, основанная на расширении модели двухфазного течения, описанной в предыдущих разделах. Одним из ключевых положений в представ-

ленной выше двухфазной модели является закон баланса объемных долей, включенный в систему (2.5), который может быть записан в форме

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_k \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} = -\frac{1}{\lambda} E_\alpha \quad (3.1)$$

и описывает перенос значения объемной концентрации вдоль траектории движения со скоростью смеси  $u_k$ , а также ее изменение за счет релаксации давления обеспечиваемой источником в правой части, см. выражение для  $E_\alpha$  в (2.4).

Для моделирования поверхностного натяжения в течениях несмешивающихся жидкостей необходимо иметь информацию о поверхностях раздела. Общепринятый подход состоит в использовании некоего скалярного параметра  $\phi$  (например, функции цвета – color function) для описания поверхностей раздела, который дает возможность определить континуальные характеристики сил поверхностного натяжения (см., напр., [1, 18], и приведенные там ссылки). Параметр  $\phi$  принимает значение 0, если точка в среде принадлежит одной из фаз, и значение 1, если точка принадлежит другой фазе. Распределение поверхностей (плотность площади поверхности границ раздела в единице объема и их усредненная ориентация) на континуальном уровне может характеризоваться градиентом  $\nabla \phi$  поля  $\phi$ , а силы поверхностного натяжения характеризуются тензором, образованным этим вектором. При этом, уравнения соответствующей модели содержат параболические члены со вторыми производными от параметра  $\phi$ .

Цель статьи – сформулировать гиперболические уравнения, содержащие только пространственные производные первого порядка, и принадлежащие классу симметрических гиперболических термодинамически согласованных систем. При этом, в представленной формулировке, в качестве параметра  $\phi$  оказывается естественным выбрать объемную долю  $\alpha$ , которая как раз принимает значения 0 и 1 в зависимости от принадлежности точки среды к той или иной фазе. Для определения распределения поверхностей в элементе среды, также будем основываться на нелокальном описании сплошной среды с использованием некоторого вектора  $\mathbf{b}$ , пропорционального вектору градиента объемной доли  $\nabla \alpha$  и стремящегося к нему в некотором релаксационном пределе.

Рассмотрим уравнение баланса объемной доли в виде

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_k \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} + \mathcal{F} = 0, \quad (3.2)$$

которое, аналогично (3.1), описывает перенос объемной доли вдоль траектории движения смеси и содержит источник  $\mathcal{F}$ , который мы определим ниже.

Введем новую переменную  $b_n = \partial \alpha / \partial x_n$ , уравнение для которой может быть получено дифференцированием (3.2) по  $x_n$ :

$$\frac{\partial b_n}{\partial t} + u_k \frac{\partial b_n}{\partial x_k} + b_k \frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n} = 0 \quad (3.3)$$

Заметим, что это уравнение может быть записано в эквивалентном виде

$$\frac{\partial b_n}{\partial t} + \frac{\partial (b_k u_k + \mathcal{F})}{\partial x_n} + u_k \left( \frac{\partial b_n}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k}{\partial x_n} \right) = 0 \quad (3.4)$$

и, кроме того, в силу определения  $b_n = \partial \alpha / \partial x_n$  имеет место стационарное уравнение

$$\frac{\partial b_n}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k}{\partial x_n} = 0 \quad (3.5)$$

Это стационарное уравнение может быть также получено как следствие (3.4), если предположить, что (3.5) выполнено для начальных данных.

Уравнение (3.4) будет присутствовать в качестве одного из определяющих уравнений для модели поверхностного натяжения. В соответствии с формализмом термодинамически согласованных систем полная система уравнений имеет парную структуру, или гамильтонову структуру [7, 8] – для каждой переменной состояния (обобщенная координата) имеется парная переменная (обобщенный импульс), а их потоки при выводе закона сохранения энергии образуют произведение в потоке сохранения энергии. При этом поток одной переменной выражается через производную обобщенной энергии по другой, парной, переменной состояния. Таким образом, следует принять предположение о том, что поток  $\mathcal{F}$  в уравнении (3.4), зависящий от переменных состояния среды, имеет вид  $\mathcal{F} = \partial E / \partial d$ . Здесь  $d$  – скалярная переменная состояния, которая, как видно из уравнения (3.2), характеризует скорость изменения объемной доли (учет инерции) при изменении термодинамических параметров течения, аналогично тому как в уравнении (3.1) правая часть характеризует релаксацию давлений фаз к единому значению. При таком выборе  $\mathcal{F}$ , уравнение для объемной доли, записанное в дивергентной форме, принимает вид

$$\frac{\partial \rho \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha u_k}{\partial x_k} = -\rho E_d \quad (3.6)$$

Для введенной новой переменной состояния  $d$  естественно выбрать следующее парное к (3.4) определяющее уравнение:

$$\frac{\partial \rho d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho d u_k + \rho E_{b_k}) = \rho E_\alpha - \varepsilon^{-1} \rho E_d, \quad (3.7)$$

где  $\varepsilon$  предполагается константой. Как будет показано ниже, именно такая форма уравнения для  $d$  обеспечивает закон сохранения энергии для полной системы. Заметим, что источники в правых частях уравнений (3.6), (3.7) содержат антисимметричные члены, которые моделируют изменение объемной доли при изменении термодинамических переменных состояния смеси.

В дальнейшем, для рассмотрения асимптотически предельных случаев в формулируемой модели течения, будет удобно использовать следующие перемасштабированные параметры состояния

$$B_k = \delta b_k, \quad D = \delta^{-1} d, \quad (3.8)$$

где  $\delta$  – безразмерный параметр, который может быть интерпретирован как отношение масштабов длины

$$\delta \sim L/\ell \quad (3.9)$$

Здесь, длина  $L$  ассоциирована с макромасштабом (например, с разрешающим масштабом инструментов измерения или разрешающим масштабом вычислительной сетки), а  $\ell$  – некий характерный микромасштаб ассоциированный с границами раздела фаз.

С использованием этих новых переменных состояния уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha u_k}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\delta} \rho E_D \\ \frac{\partial \rho D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho D u_k + \rho E_{B_k}) &= \frac{1}{\delta} \rho E_\alpha - \frac{1}{\varepsilon} \rho E_D \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial B_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (B_l u_l + E_D) + u_l \left( \frac{\partial B_k}{\partial x_l} - \frac{\partial B_l}{\partial x_k} \right) = 0$$

Можно заметить, что эти уравнения имеют похожую структуру с гиперболической переформулировкой дисперсионной модели Кортвега [17, 18], которая используется для моделирования дисперсионных эффектов связанных с поверхностным натяжением.

Таким образом, полная система термодинамически согласованных определяющих уравнений для описания течения несмешивающихся жидкостей с поверхностным натяжением может быть получена из системы (2.5), дополненной уравнениями (3.10). При этом в уравнении для импульса в потоке появится дополнительное слагаемое, и, кроме того, изменится формула для производства энтропии  $Q$ . Полная система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_l u_k + \rho^2 E_\rho \delta_{lk} + \rho w_l E_{w_k} + \rho B_l E_{B_k}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k c + \rho E_{w_k}) &= 0 \\ \frac{\partial w_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_l w_l + E_c) + u_l \left( \frac{\partial w_k}{\partial x_l} - \frac{\partial w_l}{\partial x_k} \right) &= -\frac{1}{\chi} E_{w_k} \\ \frac{\partial \rho \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha u_k}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\delta} \rho E_D \\ \frac{\partial \rho D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k D + \rho E_{B_k}) &= \frac{1}{\delta} \rho E_\alpha - \frac{1}{\varepsilon} \rho E_D \\ \frac{\partial B_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (B_l u_l + E_D) + u_l \left( \frac{\partial B_k}{\partial x_l} - \frac{\partial B_l}{\partial x_k} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} = Q = \frac{\rho}{E_S} (\chi^{-1} E_{w_k} E_{w_k} + \varepsilon^{-1} E_D E_D) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для замыкания системы необходимо задать зависимость плотности внутренней энергии от переменных состояния среды  $E(\alpha, \rho, c, D, w_k, B_k, S)$ . Ниже мы приведем конкретный вид подходящей формулы для плотности внутренней энергии, обобщающий (2.3).

Решения системы (3.11) удовлетворяют дополнительному закону сохранения энергии, который можно получить путем сложения всех уравнений системы умноженных, соответственно на

$$\begin{aligned} q_1 = E + \rho E_\rho - \frac{1}{2} u_l u_l - c E_c - \alpha E_\alpha - D E_D - S E_S, \quad u_l, \quad n = E_c \\ z_k = \rho E_{w_k}, \quad q_2 = E_\alpha, \quad r = E_D, \quad j_k = \rho E_{B_k}, \quad \theta = E_S \end{aligned} \quad (3.12)$$

В итоге, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho (E + u_l u_l / 2) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho u_k \left( E + \frac{1}{2} u_l u_l + \frac{p}{\rho} \right) + \rho u_l (w_l E_{w_k} + B_l E_{B_k}) + \rho E_c E_{w_k} + \rho E_D E_{B_k} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отметим, что производство энтропии в вышеприведенной системе (3.11) неотрицательно в силу выбора источников в правых частях уравнений. Как оказалось, антисимметричные части описывающих источники членов в правых частях уравнений для  $\alpha$  и  $D$  при выводе уравнения энергии взаимно сократились. Тем не менее, они должны оказывать существенное влияние на волновые поля, описываемые моделью и, по-видимому, описывают дисперсионные эффекты.

Энергия  $E$  может быть взята в форме

$$E = c_1 e_1(\rho_1, S) + c_2 e_2(\rho_2, S) + c_1 c_2 \frac{w_j w_l}{2} + \frac{1}{2\rho} \Sigma B_l B_l + \frac{1}{2} \frac{G^2}{\rho} D^2, \quad (3.14)$$

где  $G$  — модуль, характеризующий инерционные эффекты, связанные с физикой поверхностного натяжения,  $\Sigma$  называют коэффициентом капиллярности, и его связь с традиционным коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  обсуждается в параграфе 3.1. Отметим только, что физические размерности  $\Sigma$  и  $\sigma$  соотносятся как  $[\Sigma] = [\sigma] \cdot L$ , где  $L$  — некий масштаб длины.

Для энергии в форме (3.14) термодинамические силы вычисляются по формулам

$$p = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 - \frac{1}{2} \frac{\Sigma}{\rho^2} B_l B_l - \frac{1}{2} \frac{G^2}{\rho^2} D^2 \quad \left( p_i = \rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i}, i = 1, 2 \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} - e_2 - \frac{p_2}{\rho_2} + (1 - 2c) \frac{w_j w_l}{2}, \quad E_\alpha = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_k} = c_1 c_2 w_k, \quad \frac{\partial E}{\partial D} = \frac{G^2}{\rho} D, \quad \frac{\partial E}{\partial B_k} = \frac{\Sigma}{\rho} B_k$$

*3.2. Асимптотический анализ и закон Юнга—Лапласа.* В этом разделе мы покажем, что при формальном асимптотическом переходе при  $\delta \rightarrow 0$ , на решениях предложенной модели, в первом приближении, выполняется закон Юнга—Лапласа, связывающий кривизну поверхности раздела фаз и скачок давления при переходе через эту границу.

Поскольку физические единицы параметров  $\varepsilon$  и  $\lambda^{-1}$  совпадают, то в дальнейшем удобно предполагать, что

$$\varepsilon = \lambda^{-1} \delta^2 \quad (3.16)$$

Тогда пятое—седьмое уравнения системы (3.11) могут быть записаны как

$$\rho \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{\delta} \rho E_D$$

$$\frac{dB_k}{dt} + B_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial E_D}{\partial x_k} = 0 \quad (3.17)$$

$$\rho \frac{dD}{dt} + \frac{\partial \rho E_{B_k}}{\partial x_k} = -\frac{\lambda}{\delta} \left( \frac{1}{\delta} \rho E_D - \frac{1}{\lambda} \rho E_\alpha \right),$$

где для краткости мы используем материальную производную  $d/dt = \partial/\partial t + u_l \partial/\partial x_l$ .

Определим поведение решения при  $\delta \rightarrow 0$  при постоянном  $\lambda$ . Разложим решение в формальный ряд по степеням малого параметра  $\delta$ :

$$\alpha = \alpha_0 + \delta \alpha_1 + \delta^2 \alpha_2 + \dots$$

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \delta\rho_1 + \delta^2\rho_2 + \dots \\ D &= D_0 + \delta D_1 + \delta^2 D_2 + \dots\end{aligned}\quad (3.18)$$

$$B_k = B_{k,0} + \delta B_{k,1} + \delta^2 B_{k,2} + \dots$$

То же самое сделаем с термодинамическими силами:

$$\begin{aligned}E_\alpha &= E_{\alpha,0} + \delta E_{\alpha,1} + \delta^2 E_{\alpha,1} + \dots \\ E_D &= E_{D,0} + \delta E_{D,1} + \delta^2 E_{D,1} + \dots \\ E_{B_k} &= E_{B_{k,0}} + \delta E_{B_{k,1}} + \delta^2 E_{B_{k,2}} + \dots,\end{aligned}\quad (3.19)$$

для которых мы должны предположить

$$E_{\alpha,0} = 0, \quad (3.20)$$

что означает равенство давлений в элементе среды в равновесии, см. (3.15).

*Уравнение для D:*

Подставляя (3.18) и (3.19) в уравнение для  $D$ , и, собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\delta$ , получим, что

$$E_{D,0} = 0, \quad E_{D,1} = 0 \quad (3.21)$$

Далее, сравнивая коэффициенты при  $\delta^2$ , получим

$$E_{D,2} = \frac{1}{\lambda\rho_0} \left[ \rho_0 E_{\alpha,1} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_0 E_{B_{k,0}}) \right] \quad (3.22)$$

*Уравнение для  $B_k$ :*

Рассмотрим далее разложение в уравнении для  $B_k$ . При нулевой и первой степени по  $\delta$  получим

$$\frac{dB_{k,0}}{dt} + B_{j,0} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{dB_{k,1}}{dt} + B_{j,1} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (3.23)$$

а при второй степени:

$$\frac{dB_{k,2}}{dt} + B_{j,2} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{D,2}}{\partial x_k} = 0 \quad (3.24)$$

С учетом (3.22) последнее уравнение запишется как

$$\frac{dB_{k,2}}{dt} + B_{j,2} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial E_{\alpha,1}}{\partial x_k} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \rho_0 E_{B_{j,0}}}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.25)$$

*Уравнение для  $\alpha$ :*

Наконец, рассмотрим уравнение для  $\alpha$ . При первой степени по  $\delta$ , получаем

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = 0, \quad (3.26)$$

а при второй степени:

$$\rho_0 \frac{d\alpha_1}{dt} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \rho_0 E_{B_{k,0}}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\lambda} \rho_0 E_{\alpha,1} \quad (3.27)$$

Таким образом, при старших степенях  $\delta$ , определяющие уравнения для  $\alpha$  и  $B_k$  запишутся как

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{d\alpha_1}{dt} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \rho_0 E_{b_{k,0}}}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\lambda} \rho_0 E_{\alpha,1} \\ \frac{dB_{k,2}}{dt} + B_{j,2} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial E_{\alpha,1}}{\partial x_k} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \rho_0 E_{B_{j,0}}}{\partial x_j} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

В частности, видно, что на самом деле второе уравнение является следствием первого, если к нему применить оператор градиента. Другими словами, в пределе при  $\delta \rightarrow 0$ , вектор  $B_k$  стремится к градиенту  $\nabla \alpha$  в старших членах:

$$B_{k,2} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_k}, \quad (3.29)$$

если так было в начальный момент времени.

*Закон Юнга–Лапласа как асимптотический предел.* Рассмотрим границу раздела между двумя не смешивающимися фазами. Предположим, что в начальных условиях выполняется равенство  $B_k = \delta \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}$ . Далее предположим, что такая среда находится в равновесии ( $d/dt = 0$  и  $u_k = 0$ ), тогда первое из определяющих уравнений (3.28) превращается в

$$\rho_0 E_{\alpha,1} = \frac{\partial \rho_0 E_{B_{k,0}}}{\partial x_k} \quad (3.30)$$

Так, если энергия взята в форме (3.14), последнее равенство переписывается в виде

$$\rho_0 E_{\alpha,1} = \Sigma \frac{\partial B_{k,0}}{\partial x_k}, \quad (3.31)$$

и далее, учитывая, что для начальных данных  $B_{k,0} = \delta \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_k}$ , получаем

$$p_{2,1} - p_{1,1} = \delta \Sigma \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_k}, \quad (3.32)$$

где  $p_{1,1}$  и  $p_{2,1}$  – первые члены в разложении давлений фаз  $p_1$  и  $p_2$  по степеням  $\delta$ :

$$p_1 = p_{1,0} + \delta p_{1,1} + \dots, \quad p_2 = p_{2,0} + \delta p_{2,1} + \dots \quad (3.33)$$

Если учесть интерпретацию (3.9) безразмерного параметра  $\delta \sim L/\ell$  и сравнить уравнение (3.32) с континуальным аналогом закона Юнга–Лапласа, см., напр. [3],

$$[p] = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|}, \quad (3.34)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $[p]$  – скачок давления через поверхность раздела,  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к этой поверхности, то можно заключить, что для согласованности (3.32) и (3.34), необходимо выбирать капиллярный коэффициент  $\Sigma$  как

$$\sigma = \frac{\Sigma}{\ell}, \quad (3.35)$$

а масштаб  $L$  надо ассоциировать, например, с масштабом  $\Delta x$  вычислительной сетки. При этом подразумевается, что  $L < \ell$ , поскольку параметр  $\delta$  предполагается малым.

*Мгновенная релаксация давлений.* Если рассмотреть далее предел бесконечно быстрой релаксации давлений фаз, то есть  $\lambda \rightarrow 0$  в (2.4) и (3.1), то из первого уравнения (3.28), записанного в виде

$$\rho_0 \frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{1}{\lambda} \left( \rho_0 E_{\alpha,1} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_0 E_{b_{k,0}}) \right), \quad (3.36)$$

следует закон Юнга–Лапласа (3.30)–(3.32):

$$\rho_0 E_{\alpha,1} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_0 E_{b_{k,0}}) \quad (3.37)$$

*3.3. Характеристические скорости в среде с поверхностным натяжением.* Построенная система принадлежит к классу симметрических гиперболических систем, если потенциал энергии  $E + u_i u_i / 2$  является выпуклой функцией параметров состояния. Тем не менее, для построения численных методов и теоретического анализа полезно понимать структуру волн в такой гиперболической системе. Здесь мы приведем только простейшие сведения о характеристических скоростях данной модели. В общем случае, посчитать явно характеристические скорости системы (3.11) вряд ли возможно, и нам удалось найти скорости характеристик только в состоянии равновесия ( $u_i = 0$ ,  $w_l = 0$ ,  $B_l = 0$ ), которые оказываются вещественными и вычисляются по формулам

$$\pm \frac{G\sqrt{\Sigma}}{\rho}, \quad \pm \sqrt{\frac{\partial p_1}{\partial \rho_1}}, \quad \pm \sqrt{\frac{\partial p_2}{\partial \rho_2}} \quad (3.38)$$

Таким образом, в дополнение к обычным характеристическим скоростям, связанным с компонентами смеси, система обладает характеристиками, связанными с транспортом эффектов поверхностного натяжения, и скорости которых вычисляются по двум новым модулям как  $\pm G\sqrt{\Sigma}/\rho$ .

Отметим также, что в окрестности состояния равновесия, система обладает полным набором собственных векторов.

В общем случае, отличающемся от равновесия, характеристические скорости являются корнями бикубического уравнения, явное решение которого найти не удастся.

*3.4. Симметрическая форма определяющих уравнений.* Определяющие уравнения, сформулированные в предыдущем параграфе, как было показано, являются термодинамически согласованными. Их можно также привести к симметрической форме переписав их в терминах порождающих переменных (3.12). Следуя формализму симметрических гиперболических систем [7, 8], введем порождающий потенциал  $L$ , производные которого по порождающим переменным являются консервативными переменными уравнений системы (3.12):

$$\begin{aligned} L_{q_1} &= \rho, & L_{u_i} &= \rho u_i, & L_n &= \rho c, & L_{z_k} &= w_k, & L_{q_2} &= \rho \alpha, \\ L_r &= \rho D, & L_{j_k} &= B_k, & L_\theta &= \rho S \end{aligned}$$

Сам потенциал вычисляется с помощью закона сохранения энергии по формуле  $q_1 L_{q_1} + u_i L_{u_i} + n L_n + z_k L_{z_k} + q_2 L_{q_2} + r L_r + j_k L_{j_k} + \theta L_\theta - L = \rho(E + u_i u_i / 2)$ , откуда получаем  $L = \rho^2 E_p + z_k L_{z_k} + j_k L_{j_k}$ . С использованием определенного выше порождающего термодинамического потенциала и порождающих переменных (3.12) потоки системы (3.11) для каждого уравнения запишутся соответственно в виде  $\rho u_k = (u_k L)_{q_1}$ ,  $\rho u_i u_k + \rho^2 E_p \delta_{ik} + \rho w_l E_{w_k} + \rho b_l E_{b_k} = (u_k L)_{u_i} + z_k L_{z_k} + j_k L_{j_k} - \delta_{lk} z_\alpha L_{z_\alpha} - \delta_{lk} j_\alpha L_{j_\alpha}$ ,  $\rho u_k c + \rho E_{w_k} = (u_k L)_n + z_k$ ,  $u_i w_l + E_{c_1} = u_l L_{z_i} + n$ ,  $\rho \alpha_1 u_k = (u_k L)_{q_2}$ ,  $\rho u_k D + \rho E_{B_k} = (u_k L)_r + j_k$ ,  $B_l u_l + E_D = u_l L_{j_i} + r$ ,  $\rho S u_k = (u_k L)_\theta$ .

Приведение системы (3.11) к симметрическому виду проведем, пренебрегая правыми частями уравнений, которые несущественны для доказательства гиперболичности. Используя приведенные выше списки порождающих переменных и производных порождающего потенциала по этим переменным, уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_{q_i} &= 0; \quad i = 1, 2 \\
 \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_{u_i} + L_{z_i} \frac{\partial z_k}{\partial x_k} - L_{z_\alpha} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} + L_{j_i} \frac{\partial j_k}{\partial x_k} - L_{j_\alpha} \frac{\partial j_\alpha}{\partial x_i} &= 0 \\
 \frac{\partial L_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_n + \frac{\partial z_k}{\partial x_k} &= 0 \\
 \frac{\partial L_{z_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_{z_i} + L_{z_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - L_{z_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial n}{\partial x_i} &= 0 \\
 \frac{\partial L_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_r + \frac{\partial j_k}{\partial x_k} &= 0 \\
 \frac{\partial L_{j_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_{j_i} + L_{j_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - L_{j_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial r}{\partial x_i} &= 0 \\
 \frac{\partial L_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_\theta &= 0
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Можно показать, что система (3.39) может быть представлена как система квазилинейных уравнений с симметричными матрицами при временной и пространственных производных. Действительно, матрица при временной производной образована вторыми производными потенциала  $L$  по порождающим переменным, матрица при пространственной производной по координате  $x_k$  образована вторыми производными от  $u_k L$  по порождающим переменным, а остальные слагаемые уравнений также записываются симметричными матрицами.

При условии выпуклости потенциала  $L$  система (3.39) является симметрической гиперболической по Фридрихсу [7, 8, 15, 16]. Отметим, что хотя выпуклость, по-видимому, имеет место, строгое доказательство этого для используемого в работе выбора внутренней энергии отсутствует, и является предметом дальнейшего исследования.

**Заключение.** Таким образом, в работе предложена новая модель течения несмешивающихся сжимаемых жидкостей с поверхностным натяжением на границе раздела фаз, определяющие уравнения которой удовлетворяют законам термодинамики (сохранение энергии и возрастание энтропии) и могут быть представлены в виде симметрической гиперболической системы. Модель является расширением разработанной ранее СГТС-модели сжимаемых двухфазных течений [11] за счет введения новых переменных состояния – векторного поля, близкого по смыслу градиенту объемной доли, и дополнительной парной скалярной переменной, описывающей инерционные свойства поверхностей раздела. Показано, что в приближении малости параметров, входящих в кинетические члены определяющих уравнений, модель описывает на континуальном уровне закон Юнга–Лапласа для капиллярного давления. Дальнейшие исследования будут включать в себя продолжение анализа уравнений модели и численное решение тестовых задач для течений несмешивающихся жидкостей.

Исследования Е.И. Роменского в области разработки определяющих уравнений (разд. 2, 3.1, 3.4) выполнены в рамках государственного задания Института математи-

ки им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008), а в области асимптотических разложений (разд. 3.2) выполнены при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00104).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.* A continuum method for modeling surface tension // *J. Comput. Phys.* 1992. V. 100. № 2. P. 335–354.
2. *Perigaud G., Saurel R.* A compressible flow model with capillary effects // *J. Comput. Phys.* 2005. V. 209. № 1. P. 139–178.
3. *Popinet S.* Numerical models of surface tension // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2018. V. 50. № 1. P. 49–75.
4. *Schmidmayer K., Petitpas F., Daniel E., Favrie N., Gavrilyuk S.* A model and numerical method for compressible flows with capillary effects // *J. Comput. Phys.* 2017. V. 334. P. 468–496.
5. *Chiocchetti S., Peshkov I., Gavrilyuk S., Dumbser M.* High order ADER schemes and GLM curl cleaning for a first order hyperbolic formulation of compressible flow with surface tension // *J. Comput. Phys.* 2021. V. 426. P. 109898.
6. *Chiocchetti S., Dumbser M.* An exactly curl-free staggered semi-implicit finite volume scheme for a first order hyperbolic model of viscous two-phase flows with surface tension // *J. Sci. Comput.* 2022. V. 94. P. 24.
7. *Godunov S.K., Romenskii E.I.* *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws.* Springer US, 2003.
8. *Peshkov I., Pavelka M., Romenski E., Grmela M.* Continuum mechanics and thermodynamics in the Hamilton and the Godunov-type formulations // *Contin. Mech.&Thermodyn.* 2018. V. 30. № 6. P. 1343–1378.
9. *Romenski E., Belozherov A.A., Peshkov I.M.* Conservative formulation for compressible multiphase flows // *Quart. Appl. Math.* 2016. V. 74. P. 113–136.
10. *Romenski E., Reshetova G., Peshkov I.* Two-phase hyperbolic model for porous media saturated with a viscous fluid and its application to wavefields simulation // *Appl. Math. Model.* 2022. V. 106. P. 567–600.
11. *Romenski E., Drikakis D., Toro E.* Conservative models and numerical methods for compressible two-phase flow // *J. Sci. Comput.* 2010. V. 42. № 1. P. 68–95.
12. *Romenski E., Resnyansky A.D., Toro E.F.* Conservative hyperbolic formulation for compressible two-phase flow with different phase pressures and temperatures // *Quart. Appl. Math.* 2007. V. 65. № 2. P. 259–279.
13. *Годунов С.К., Михайлова Т.Ю., Роменский Е.И.* Системы термодинамически согласованных законов сохранения, инвариантных относительно вращений // *Сиб. матем. ж.* 1996. Т. 37. № 4. С. 790–806.
14. *Годунов С.К., Роменский Е.И.* *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения.* Новосибирск: Науч. книга. 1998.
15. *Friedrichs K.O.* Symmetric positive linear differential equations // *Commun. on Pure&Appl. Math.* 1958. V. 11. № 3. P. 333–418.
16. *Dafermos K.M.* *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics.* Berlin: Springer, 2016.
17. *Dhaouadi F., Dumbser M.* A first order hyperbolic reformulation of the Navier–Stokes–Korteweg system based on the GPR model and an augmented Lagrangian approach // *J. Comput. Phys.* 2022. V. 470. P. 111544.
18. *Dhaouadi F., Gavrilyuk S., Vila J.-P.* Hyperbolic relaxation models for thin films down an inclined plane // *Appl. Math.&Comput.* 2022. V. 433 P. 127378.

## Thermodynamically Compatible Hyperbolic Model for Two-Phase Compressible Fluid Flow with Surface Tension

E. Romenski<sup>a,\*</sup> and I. Peshkov<sup>b,##</sup>

<sup>a</sup>*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

<sup>b</sup>*University of Trento, Trento, Italy*

\**e-mail: evrom@math.nsc.ru*

##*e-mail: ilya.peshkov@unitn.it*

A two-phase flow model for compressible immiscible fluids is presented, the derivation of which is based on the use of the theory of symmetric hyperbolic thermodynamically compatible systems. The model is an extension of the previously proposed thermodynamically compatible model of compressible two-phase flows due to the inclusion of new state variables of the medium associated with surface tension forces. The governing equations of the model form a hyperbolic system of differential equations of the first order and satisfy the laws of thermodynamics (energy conservation and entropy increase). The properties of the model equations are studied and it is shown that the Young–Laplace law of capillary pressure is fulfilled in the asymptotic approximation at the continuum level.

*Keywords:* Two-phase flow, surface tension, hyperbolic equations

### REFERENCES

1. *Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.* A continuum method for modeling surface tension // *J. Comput. Phys.*, 1992, vol. 100, no. 2, pp. 335–354.
2. *Perigaud G., Saurel R.* A compressible flow model with capillary effects // *J. Comput. Phys.*, 2005, vol. 209, no.1, pp. 139–178.
3. *Popinet S.* Numerical models of surface tension // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2018, vol. 50, no. 1, pp. 49–75.
4. *Schmidmayer K., Petitpas F., Daniel E., Favrie N., Gavriluk S.* A model and numerical method for compressible flows with capillary effects // *J. Comput. Phys.*, 2017, vol. 334, pp. 468–496.
5. *Chiocchetti S., Peshkov I., Gavriluk S., Dumbser M.* High order ADER schemes and GLM curl cleaning for a first order hyperbolic formulation of compressible flow with surface tension // *J. Comput. Phys.*, 2021, vol. 426, pp. 109898.
6. *Chiocchetti S., Dumbser M.* An exactly curl-free staggered semi-implicit finite volume scheme for a first order hyperbolic model of viscous two-phase flows with surface tension // *J. Sci. Comput.*, 2022, vol. 94, pp. 24.
7. *Godunov S.K., Romenskii E.I.* *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws.* Springer US, 2003.
8. *Peshkov I., Pavelka M., Romenski E., Grmela M.* Continuum mechanics and thermodynamics in the Hamilton and the Godunov-type formulations // *Contin. Mech.&Thermodyn.*, 2018, vol. 30, no. 6, pp. 1343–1378.
9. *Romenski E., Belozherov A.A., Peshkov I.M.* Conservative formulation for compressible multiphase flows // *Quart. Appl. Math.*, 2016, vol. 74, pp. 113–136.
10. *Romenski E., Reshetova G., Peshkov I.* Two-phase hyperbolic model for porous media saturated with a viscous fluid and its application to wavefields simulation // *Appl. Math. Model.*, 2022, vol. 106, pp. 567–600.
11. *Romenski E., Drikakis D., Toro E.* Conservative models and numerical methods for compressible two-phase flow // *J. Sci. Comput.*, 2010, vol. 42, no. 1, pp. 68–95.
12. *Romenski E., Resnyansky A.D., Toro E.F.* Conservative hyperbolic formulation for compressible two-phase flow with different phase pressures and temperatures // *Quart. Appl. Math.*, 2007, vol. 65, no. 2, pp. 259–279.
13. *Godunov S.K., Mikhailova T.Y., Romenskii E.I.* Systems of thermodynamically coordinated laws of conservation invariant under rotations // *Sib. Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 4, pp. 690–705.

- 
14. *Godunov S.K., Romenskii E.I.* Elements of Mechanics of Continuous Media and Conservation Laws. Novosibirsk: Nauch. Kniga, 1998. 280 p. (in Russian)
  15. *Friedrichs K.O.* Symmetric positive linear differential equations // Commun. on Pure&Appl. Math., 1958, vol. 11. no. 3, pp. 333–418.
  16. *Dafermos K.M.* Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics. Berlin: Springer, 2016.
  17. *Dhaouadi F., Dumbser M.* A first order hyperbolic reformulation of the Navier–Stokes–Korteweg system based on the GPR model and an augmented Lagrangian approach // J. Comput. Phys., 2022, vol. 470, pp. 111544.
  18. *Dhaouadi F., Gavriluk S., Vila J.-P.* Hyperbolic relaxation models for thin films down an inclined plane // Appl. Math.&Comput., 2022, vol. 433, pp. 127378.

УДК 532.5

**СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ ПРИСТЕННОЙ  
ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ**© 2023 г. А. М. Гайфуллин<sup>1,\*</sup>, А. С. Щеглов<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup>Центральный аэродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

\*e-mail: gaifullin@tsagi.ru

\*\*e-mail: shcheglov@phystech.edu

Поступила в редакцию 29.12.2022 г.

После доработки 01.03.2023 г.

Принята к публикации 01.03.2023 г.

С помощью численного моделирования исследуется задача об истечении трехмерной пристенной струи несжимаемой жидкости. Целью исследования является определение структуры течения в струе, сравнение механизмов распространения турбулентной и ламинарной пристенных струй. Численное решение уравнений движения в турбулентном случае получено с помощью метода крупных вихрей с пристенным разрешением. Результаты моделирования сравниваются с данными экспериментальных исследований.

*Ключевые слова:* пристенная струя, автомодельность, метод крупных вихрей

DOI: 10.31857/S0032823523020078, EDN: TZESTU

**1. Введение.** Пристенные струи изучены намного хуже свободных. Единственное известное аналитическое решение построено только для плоских, бьющих из удлиненной щели ламинарных пристенных струй в рамках уравнений пограничного слоя [1, 2]. Оказалось, что в этом случае в любом поперечном сечении струи сохраняется величина – инвариант Акатнова, которая имеет смысл произведения импульса на расход. Таким образом, в отличие от свободных плоской и осесимметричной струй [3, 4], которые можно создать за счет привнесения в поток импульса, для пристенных струй важны при их создании как начальный (через выходное сечение струи) импульс, так и начальный расход. Наличие инварианта в плоской пристенной ламинарной струе позволило построить автомодельное решение и определить, что толщина струи при увеличении продольной координаты  $x$  растет как  $x^{3/4}$ .

Если струя выдувается в затопленное пространство параллельно бесконечной плоскости из не удлиненного выходного сечения, то такая струя называется трехмерной пристенной струей. Течение в дальнем поле трехмерной ламинарной пристенной струи выходит на автомодельный режим, но, поскольку инвариантный интеграл еще не найден, параметр автомодельности, определяющий изменение размера струи, в работе [5] был найден численно. Оказалось, что характерные размеры струи растут пропорционально  $x^{4/3}$ . В [5, 6] также определена структура линий тока автомодельного течения (рис. 1), которая указывает на то, что всю область течения можно условно разбить на две подобласти: внутреннего и внешнего течения. Разделяет эти две подобласти овальная предельная линия тока. Во внутренней области с ростом координаты  $x$  продольная скорость уменьшается, что приводит к вытесняющему действию: линии

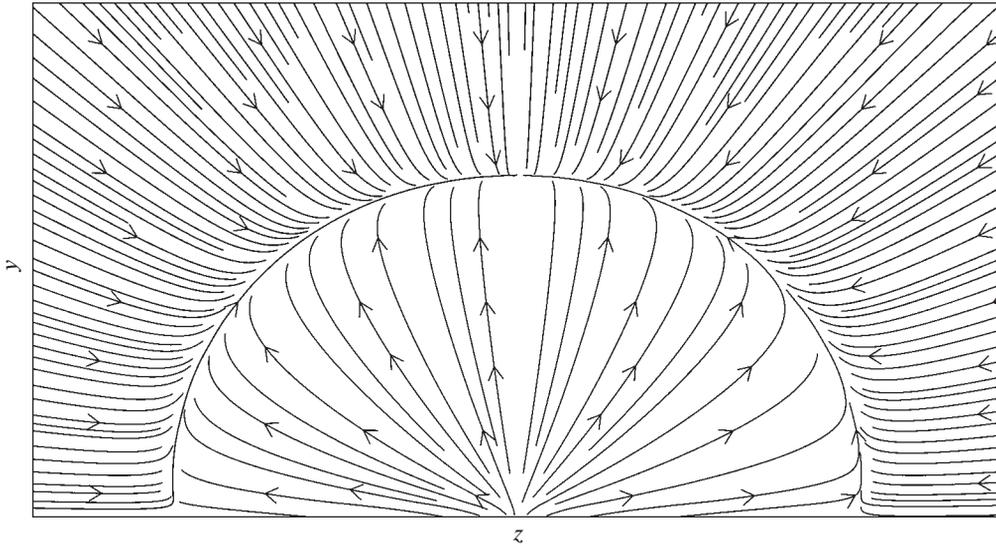


Рис. 1. Линии тока в плоскости  $x = \text{const}$ .

тока направлены от центра струи. Во внешней области линии тока направлены к центру – струя, подсасывая, разгоняет внешнее течение. Практически во всей области течения, за исключением окрестности разделительной линии тока, азимутальная скорость намного меньше радиальной.

Исследования трехмерных турбулентных пристенных струй велись в двух направлениях: экспериментальное [7–17] и немногочисленное расчетное [18–20].

Экспериментально было обнаружено, что в поперечном сечении турбулентной пристенной струи ее толщина существенно различна в перпендикулярном и параллельном к твердой поверхности направлениях. Этот факт в [7] подтвержден визуализацией течения в струе. В [8] в ближнем поле струи такое anomальное поведение было объяснено образованием в потоке подковообразных вихрей. В [7, 9–17] изучается автомодельное изменение характеристик струи. В этих работах было показано, что, несмотря на различие формы выходных сечений, из которых вытекает пристенная струя, и расположения этих сечений, течение в струе выходит на автомодельный режим. Вместе с тем, выход на автомодельный режим, по-видимому, зависит от многих факторов, например, геометрии и расположения выходного сечения, уровня турбулентных пульсаций на экспериментальной установке, числа Рейнольдса и др. В разных экспериментальных исследованиях координата выхода на автомодельный режим колеблется от 15 до 60 диаметров. Следует заметить, что выход на автомодельный режим различных величин происходит в разных сечениях струи: сначала выходит осредненная скорость, затем турбулентные напряжения и т.д.

В одной из первых работ по численному расчету характеристик трехмерной турбулентной пристенной струи результаты были получены с помощью решения осредненных уравнений Рейнольдса [18]. Хотя, как отмечают сами авторы, сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными оказалось не очень хорошим, им все же удалось численно подтвердить, что различие в толщинах струи в параллельном и перпендикулярном к твердой поверхности направлениях вызвано продольными вихрями. Примерно такое же соответствие численных и эксперимен-

тальных данных продемонстрировано в работе [19], в которой также производилось численное интегрирование уравнений Рейнольдса.

Лучшее совпадение получено в работе [20], в которой численное решение получено с помощью метода крупных вихрей (LES). В качестве подсеточной модели использовалась модель Смагоринского, поправленная вблизи твердой поверхности эмпирическим демпфирующим множителем. В работе [20] была еще раз продемонстрирована определяющая роль продольных вихрей в эволюционном развитии пристенной струи.

В данной работе проведен расчет характеристик трехмерной пристенной струи с помощью метода LES. В отличие от метода RANS, для которого необходима полуэмпирическая модель турбулентной вязкости для всего течения, в LES необходимо задание модели турбулентности лишь на масштабах, не превышающих размера ячеек сетки. При этом крупные масштабы, несущие значительную долю энергии, разрешаются достаточно точно. При измельчении сетки LES, в отличие от RANS, переходит в прямое численное моделирование уравнений Навье–Стокса. Кроме того, в настоящей работе предпринята попытка получения наиболее достоверных с позиций сегодняшнего дня результатов с различных точек зрения: подсеточной модели турбулентности, численной схемы, мелкости разбиения расчетной области.

**2. Постановка задачи.** Линию пересечения двух полубесконечных плоскостей определим как  $x = 0$ ,  $y = 0$ . В вертикальной плоскости имеется квадратное отверстие (рис. 2, длина стороны квадрата  $d$ ), из которого выдувается струя со скоростью  $u_0$  в пространство, заполненное покоящейся жидкостью. Отверстие своим основанием примыкает к горизонтальной плоскости. Введем систему координат. Струя распространяется вдоль оси  $x$ . Ось  $y$  направлена перпендикулярно горизонтальной плоскости, третья ось – ось  $z$ . Компоненты скорости  $u, v, w$  направлены вдоль осей  $x, y, z$ . Жидкость будем считать несжимаемой. Основной характеристикой струи является число Рейнольдса, образованное по скорости  $u_0$ , размеру  $d$  и кинематическому коэффициенту вязкости  $\nu$ .

$$\text{Re} = \frac{u_0 d}{\nu}$$

Будем описывать характеристики течения в рамках метода LES. Уравнения неразрывности и движения запишем в тензорном виде:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

Здесь  $\bar{f}$  – осредненная (отфильтрованная) по ячейке величина

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta V} \int f dx_1 dx_2 dx_3,$$

интегрирование проводится по объему ячейки  $\Delta V$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $\bar{u}_1 = \bar{u}$ ,  $\bar{u}_2 = \bar{v}$ ,  $\bar{u}_3 = \bar{w}$ ,  $\bar{p}$  – осредненное по ячейке давление,  $\rho$  – плотность. Вследствие процедуры осреднения по ячейке появляются дополнительные подсеточные напряжения  $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ .

Тензор подсеточных напряжений можно переписать в следующем виде:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} + \left( \tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} \right) = \frac{2}{3} \delta_{ij} k_{sgs} + \text{dev}(\tau),$$

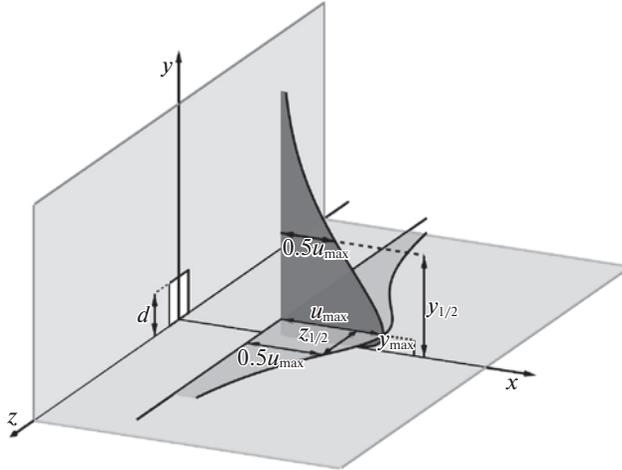


Рис. 2. Профили продольной компоненты скорости  $\langle u(y) \rangle$  и  $\langle u(z) \rangle$  в трехмерной пристенной струе, система координат и некоторые обозначения.

где  $\text{dev}(\tau) = \tau_{ij} - \delta_{ij}\tau_{kk}/3$  – девиаторная часть этого тензора. Выражения для  $k_{sgs}$ ,  $\text{dev}(\tau)$  представляют собой подсеточную модель. В настоящей работе используется адаптированная к моделированию пристенных течений модель WALE [21], основанная на гипотезе Буссинеска о турбулентной подсеточной вязкости  $\nu_{sgs}$ :

$$\text{dev}(\tau) = 2\nu_{sgs} \text{dev}(\bar{S})$$

В этой формуле  $\bar{S}$  – тензор скоростей деформации с элементами

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Величина  $k_{sgs}$ , необходимая для подсеточной модели, связана с турбулентной вязкостью соотношением

$$\nu_{sgs} = C_k \Delta \sqrt{k_{sgs}}, \quad (2.3)$$

где  $\Delta = \sqrt[3]{\Delta V}$  – линейный масштаб ячейки.

Кроме того, турбулентную подсеточную вязкость, задают соотношением, которое, в отличие от модели Смагоринского, дает “правильное” асимптотическое ее поведение в окрестности стенки без использования эмпирических демпфирующих множителей:

$$\nu_{sgs} = (C_w \Delta)^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}, \quad (2.4)$$

где

$$S_{ij}^d = \frac{\bar{g}_{ij}^2 + \bar{g}_{ji}^2}{2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{g}_{kk}^2,$$

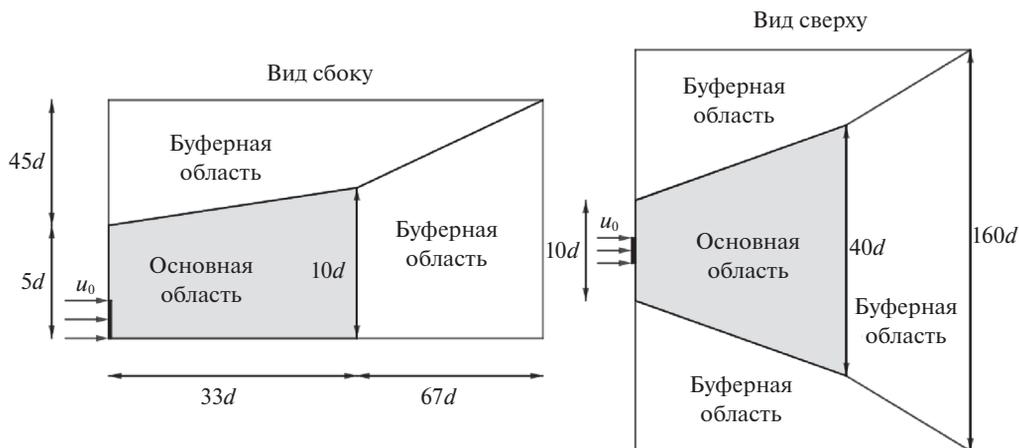


Рис. 3. Сечения расчетной области.

$\bar{g}_{ij}^2 = \bar{g}_{ik}\bar{g}_{kj}$ ,  $\bar{g}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$  – компоненты тензора градиента скорости. При заданных константах  $C_k$  и  $C_w$  формулы (2.3) и (2.4) определяют  $v_{sgs}$  и  $k_{sgs}$ . В проведенных в данной работе вычислениях принято:

$$C_k = 0.094, \quad C_w = 0.325$$

Зададим граничные условия для уравнений (2.1), (2.2). На твердых поверхностях ставится условие прилипания. На квадратном отверстии –  $u = u_0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ . На большом расстоянии от источника струи должно обеспечиваться затухание компонент вектора скорости.

Численное интегрирование уравнений (2.1), (2.2) проводится в расширяющейся с ростом  $x$  области. Продольный размер расчетной области выбран равным  $33d$ , что позволяет провести расчет в обозримое время. Во избежание проблем, вызванных отражением возмущений от границ расчетной области, к основной расчетной области была пристроена вспомогательная буферная область, размер ячеек которой намного больше размера ячеек основной области. Назначение буферной области – диссипация вихрей до достижения ими границ расчетной области. Продольные сечения расчетной области представлены на рис. 3.

На верхней, задней и боковых границах расчетной области ставятся “мягкие” условия – равенство нулю нормальной производной вектора скорости.

**3. Особенности численной схемы и достоверность результатов.** Задача, поставленная в предыдущем разделе, решается методом конечного объема. Для интегрирования по времени используется неявная схема второго порядка точности с разностями назад. Интерполяция конвективных членов на гранях расчетных ячеек проводится с помощью схемы центральных разностей второго порядка, интерполяция давления – с помощью взвешенной противопоточной схемы первого и второго порядков точности. Градиенты вычисляются по схеме, основанной на теореме Гаусса. Для решения системы (2.1), (2.2) используется алгоритм SIMPLEC [22], сводящий ее к последовательному итерационному решению уравнений импульса и уравнения Пуассона для давления.

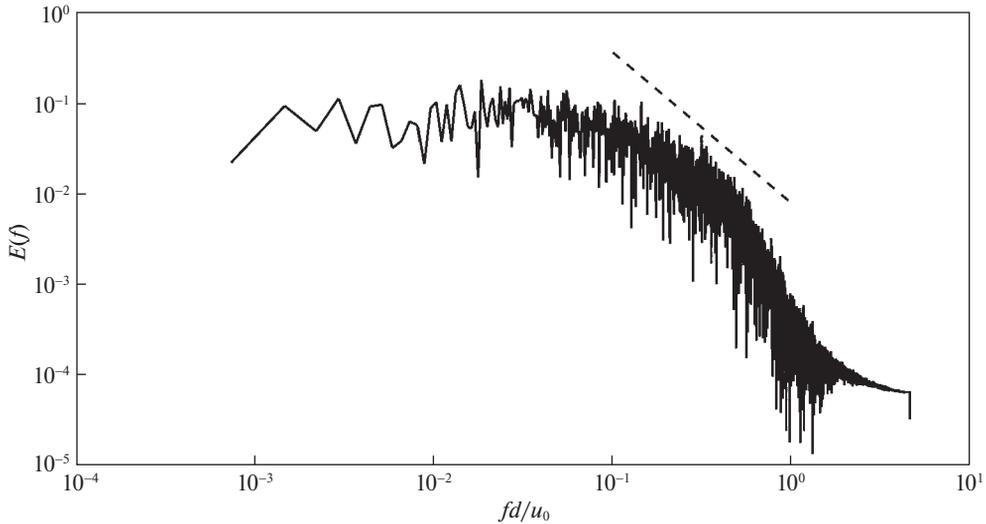


Рис. 4. Временной спектр турбулентных пульсаций.

Моделирование истечения струи было проведено для  $Re = 7500$  на сетке, содержащей 14.6 млн ячеек, построенной в соответствии с требованиями к LES-моделированию пристенных течений [23]:  $\Delta x^+ < 40$ ,  $\Delta z^+ < 20$ , размер пристенных ячеек удовлетворяет требованию  $\Delta y^+ < 1$ .

После установления статистически стационарного режима на протяжении достаточно большого промежутка времени было проведено осреднение характеристик течения. Такое осреднение величины  $a$  по времени обозначается далее треугольными скобками  $\langle a \rangle$ .

Качественный расчет методом LES должен разрешать значительную долю турбулентной энергии. На рис. 4 приведен временной спектр разрешаемой части кинетической энергии турбулентных пульсаций  $k = 0.5(u'^2 + v'^2 + w'^2)$  в точке  $x = 20d$ ,  $y = 2d$ , находящейся в плоскости симметрии. Наличие инерционного интервала на рис. 4 дает основание полагать, что разрешение достаточно высокое. Пунктиром изображена линия, соответствующая закону инерционного интервала  $E \sim f^{-5/3}$ .

**4. Результаты.** В пристенной струе продольная компонента скорости в сечении  $x = \text{const}$  плоскости симметрии имеет максимум  $\langle u \rangle_{\text{max}}(x)$  на некотором расстоянии  $y_{\text{max}}(x)$  от поверхности (рис. 2). Координату точки, в которой скорость в два раза меньше  $\langle u \rangle_{\text{max}}(x)$  в плоскости симметрии принято обозначать  $y_{1/2}(x)$ , а в выделенной на рис. 2 горизонтальной плоскости, проходящей через точку  $y_{\text{max}}(x)$ , обозначают  $z_{1/2}(x)$  (ввиду симметрии таких точек две).

Как было отмечено во введении, профили осредненной скорости становятся автомодельными на некотором удалении от источника струи. На рис. 5 приведены профили продольной компоненты скорости в различных поперечных сечениях  $x = \text{const}$  плоскости симметрии и выделенной горизонтальной плоскости (для определенности здесь и в дальнейшем нарисована часть профиля, соответствующая положительным значениям  $z$ ). Профили продольной компоненты скорости начинают подчиняться ав-

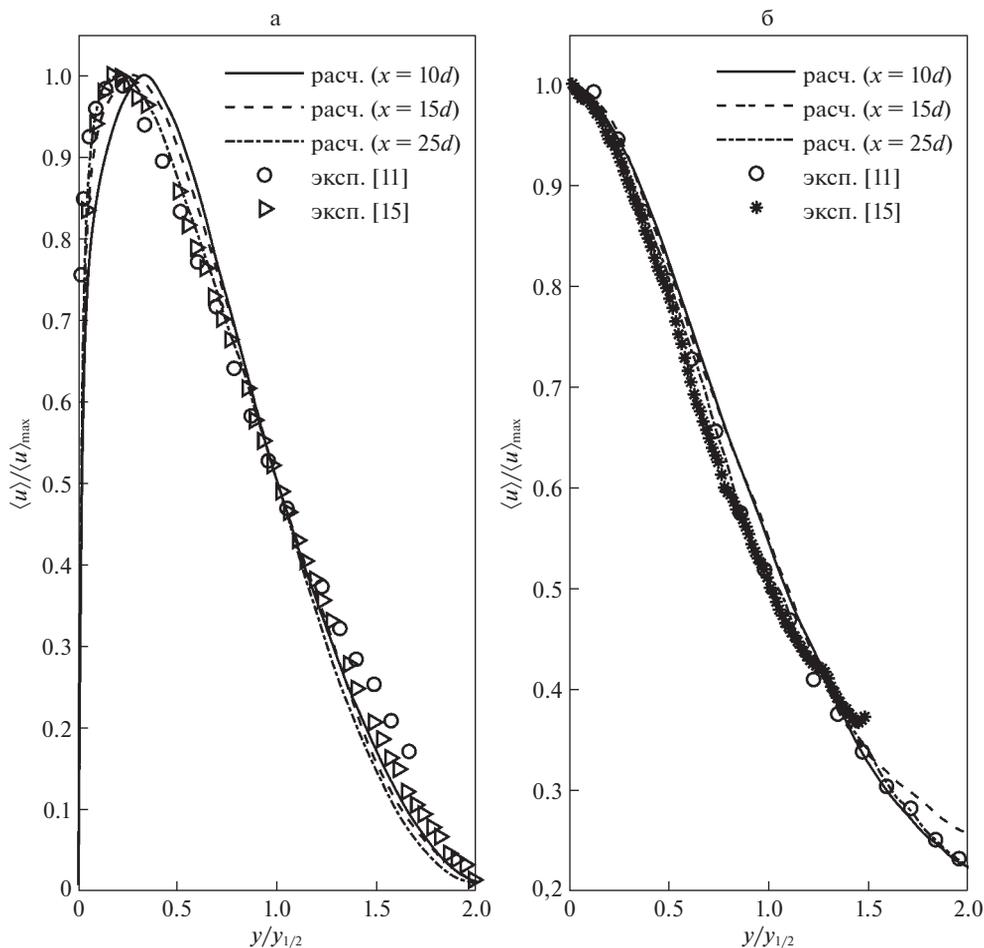


Рис. 5. Автомодельность профилей продольной компоненты скорости.

томодельному изменению при  $x \approx 15d$ , начиная с которого они довольно точно совпадают с экспериментальными данными. Возможно, такой быстрый выход на автомодельный режим достигается из-за того, что выходное отверстие струи располагается непосредственно над твердой поверхностью, а не на некотором расстоянии от нее.

Согласно экспериментальным и расчетным данным [8, 9, 11–15, 17, 20] характерные размеры струи  $y_{1/2}(x)$ ,  $z_{1/2}(x)$  в перпендикулярном и параллельном к твердой поверхности направлениях при выходе на автомодельный режим растут линейно по координате  $x$ , но с разной скоростью (рис. 6).

На рис. 7 представлено изменение максимума продольной компоненты скорости  $\langle u \rangle_{\max}(x)$ , полученное в расчете при  $x \gg d$ . Видно, что  $\langle u \rangle_{\max} \sim x^{-1}$ , что также совпадает с выводами [16].

Выход на автомодельный режим профиля осредненной скорости, еще не означает, что такой же выход наблюдается и в других величинах. На рис. 8 представлено изменение  $\langle u'^2 \rangle$ , которое выходит на автомодельный режим при  $x > 20d$ .

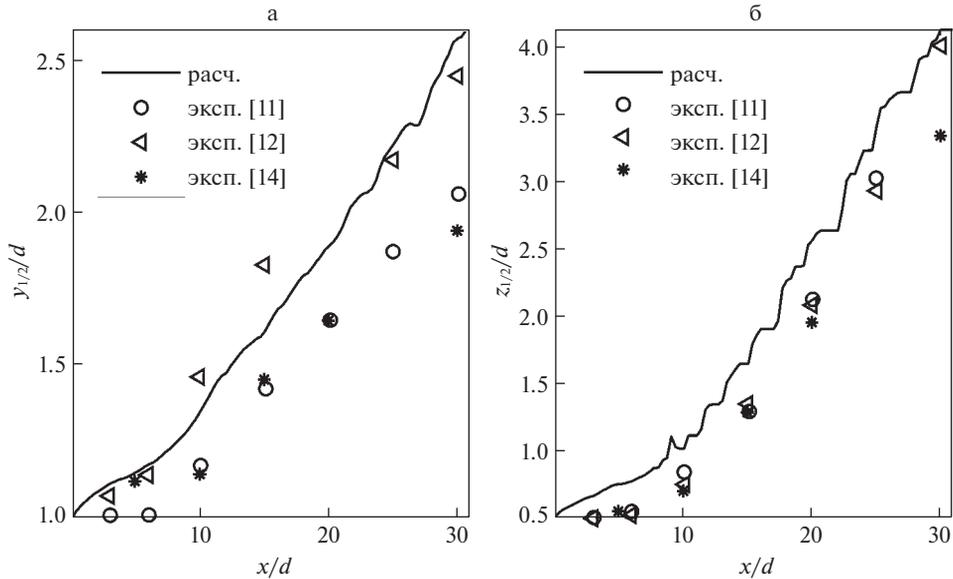


Рис. 6. Рост ширины струи в вертикальном и поперечном направлениях.

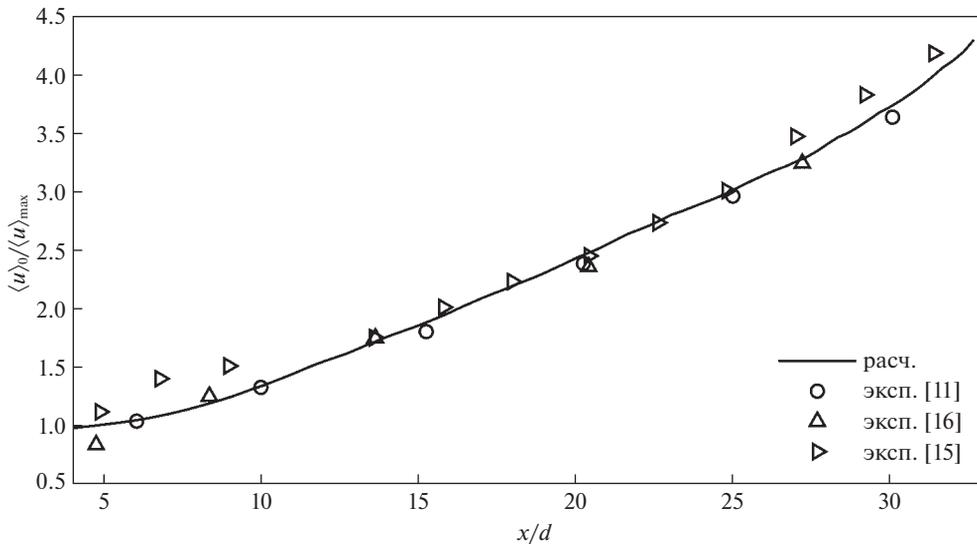
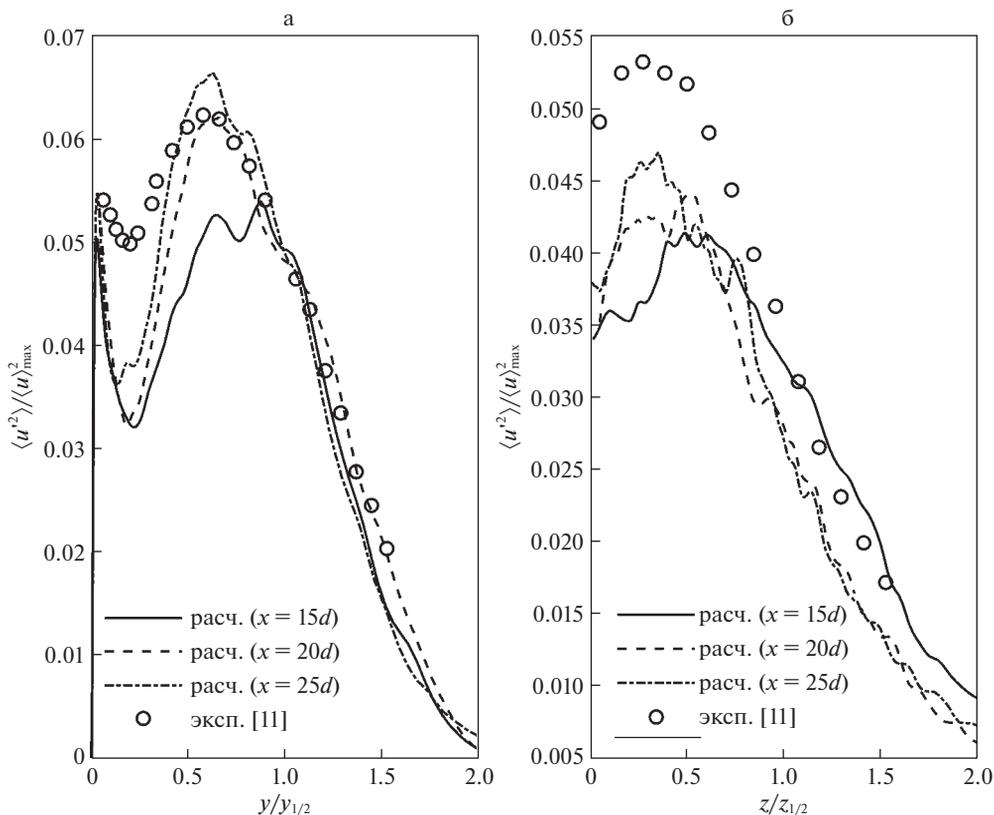


Рис. 7. Затухание продольной компоненты скорости по продольной координате.

Трехмерная пристенная струя представляет собой пример существенного различия структуры в случаях ламинарного и турбулентного течений. Дело тут не столько в неустойчивости течения, сколько в отношении диффузионных членов к инерционным. Запишем уравнение Гельмгольца для изменения завихренности  $\omega = \text{rot } V$  в несжимаемой жидкости:

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega \nabla) u + \nu \Delta \omega$$

Рис. 8. Профили  $\langle u'^2 \rangle$ .

Если компоненты завихренности  $\omega$  обозначить  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , то

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{\partial(u\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u\omega_z)}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) \quad (4.1)$$

В начальном выходном сечении струи компонента скорости  $u$  терпит разрыв, а  $\omega_x = 0$ . Внутри струи  $u = u_0$ , вне  $u = 0$ . Это означает, что в начальном сечении внешний контур струи представляет собой поверхность разрыва тангенциальной компоненты скорости. На вертикальных ребрах струи возникает ненулевая величина  $\omega_y$ , а на горизонтальных —  $\omega_z$ . Далее включаются механизмы образования завихренности  $\omega_x$  в основном из-за разворота остальных компонент завихренности (первые три слагаемых в правой части уравнения (4.1)), и диффузии завихренности. В случае малых чисел  $Re$  (ламинарные струи) диффузия превалирует над образованием завихренности, сколь-либо существенные продольные вихри не образуются, и схема течения соответствует приведенной на рис. 1.

Для турбулентных течений в начальном сечении ненулевая завихренность присутствует только на ребрах квадрата. Именно вдоль ребер появляются продольные вихри различного знака, которые с ростом координаты  $x$  усиливаются благодаря слабой диффузии. Особое значение имеют вихревые пары, которые образуются в углах квад-

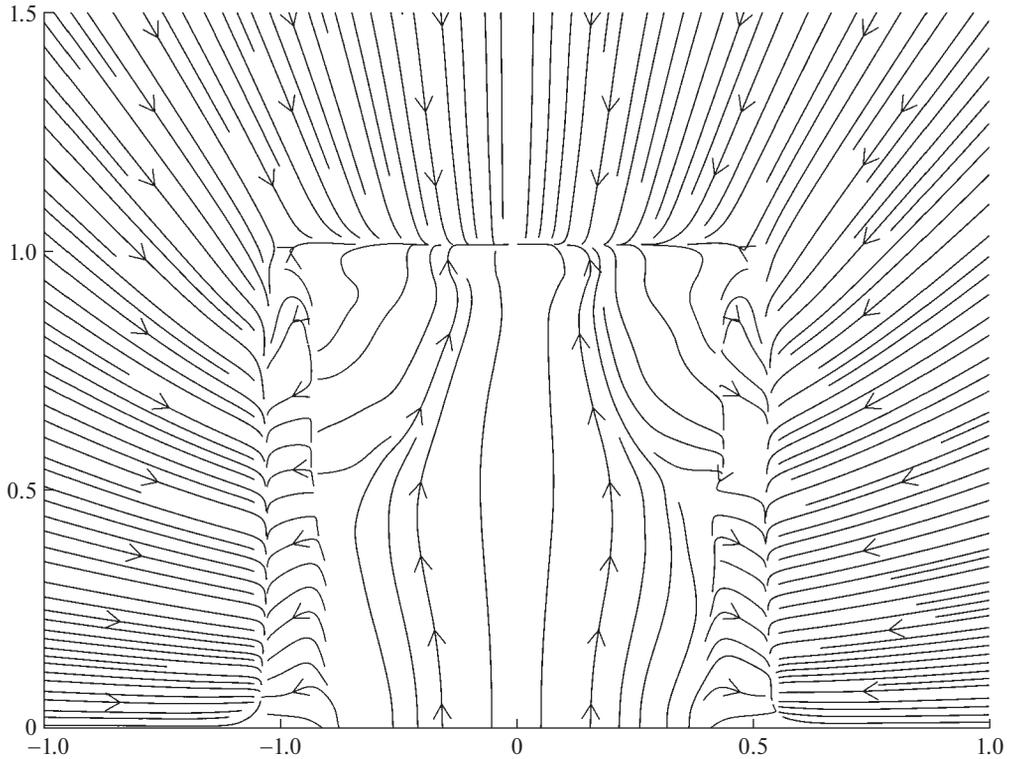


Рис. 9. Линии тока в плоскости  $x = 0.2d$ .

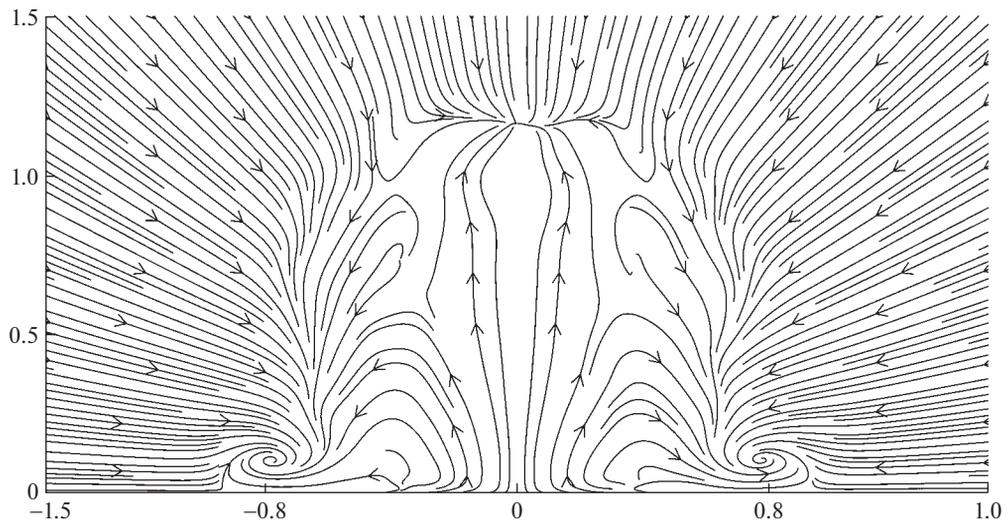


Рис. 10. Линии тока в плоскости  $x = d$ .

рата вблизи твердой поверхности (рис. 9,  $x = 0.2d$ ). Далее эти вихревые пары усиливаются, индуцируют скорость в местах их расположения, направленную от линии симметрии, и таким образом “растаскивают” струю (рис. 10–14,  $x = d, 5d, 10d, 15d, 25d$ ).

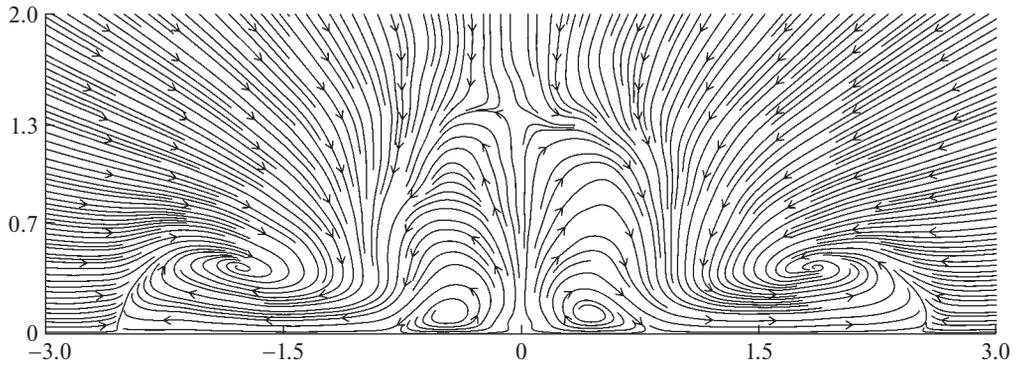


Рис. 11. Картина течения в плоскости  $x = 5d$ .

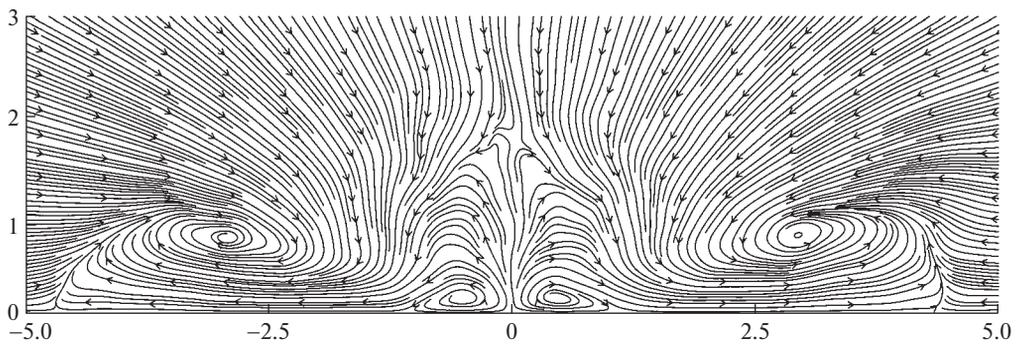


Рис. 12. Картина течения в плоскости  $x = 10d$ .

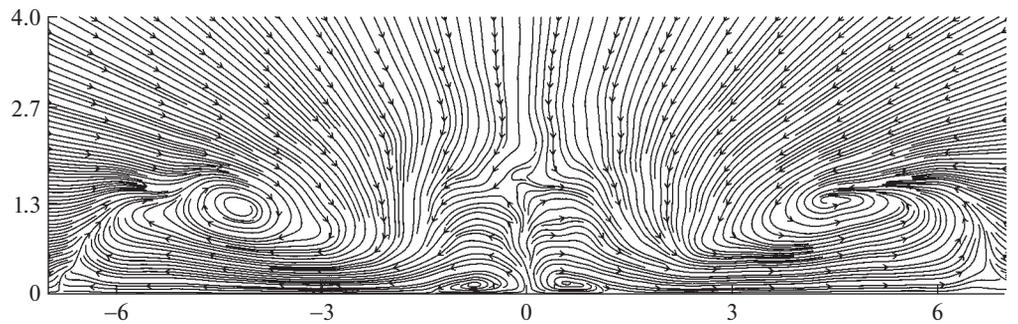


Рис. 13. Картина течения в плоскости  $x = 15d$ .

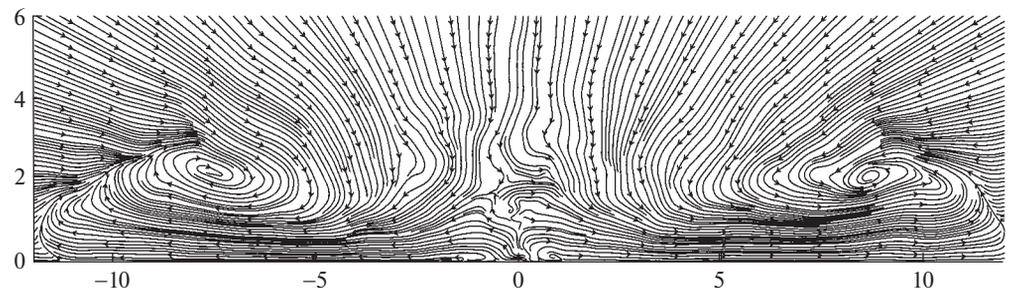


Рис. 14. Картина течения в плоскости  $x = 25d$ .

**Заключение.** Современные вычислительные комплексы позволяют при сравнительно небольших числах  $Re$  моделировать течения в турбулентных структурах. Хотя, по-прежнему, турбулентную вязкость необходимо учитывать для адекватного получения результатов, ее значение уже становится сравнимым с молекулярной вязкостью. Модель для подсеточной вязкости, которая применялась в данной работе, позволяет проводить расчеты без введения демпфирующих около твердой поверхности множителей.

Проведен расчет трехмерной пристенной турбулентной струи. Результаты расчетов согласуются и с экспериментальными, и с расчетными данными других исследователей. Показан выход течения на автомодельный режим.

Выявлены члены уравнения, которые приводят к образованию продольной завихренности, благодаря влиянию которой структура течения в трехмерных ламинарной и турбулентной пристенных струях кардинально различна. Если в ламинарном случае струя имеет предельную разделительную линию тока, отделяющую внутреннюю и внешнюю области течения, а толщина струи в поперечных направлениях не сильно различается, то в турбулентном случае образуются продольные вихри, “растаскивающие” течение в струе; размер струи вдоль твердой поверхности превалирует над размером в перпендикулярном направлении.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акатнов Н.И.* Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1953. № 5. С. 24–31.
2. *Glauert M.B.* The wall jet // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. P. 625–643
3. *Schlichting H.* Laminare Strahlausbreitung // Z. Angew. Math. Mech. 1933. Bd. 13. H. 4. S. 260–263.
4. *Ландау Л.Д.* Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43. № 7. С. 299–301.
5. *Бут И.И., Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Дальнее поле трехмерной пристенной ламинарной струи // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 6. С. 51–61.
6. *Gaifullin A.M., Shcheglov A.S.* Self-similarity of a wall jet with swirl // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43. № 5. P. 1098–1103.
7. *Newman B., Patel R., Savage S., Tjio H.* Three-dimensional wall jet originating from a circular orifice // Aeron. Quart. 1972. V. 23. № 3. P. 188–200.
8. *Matsuda H., Iida S., Hayakawa M.* Coherent structures in a three-dimensional wall jet // ASME. J. Fluids Eng. 1990. V. 112. № 4. P. 462–467.
9. *Padmanabham G., Lakshmana Gowda B.H.* Mean and turbulence characteristics of a class of three-dimensional wall jets. Pt. 1: Mean flow characteristics // ASME. J. Fluids Eng. 1991. V. 113. № 4. P. 620–628.
10. *Law A.W.-K., Herlina.* An experimental study on turbulent circular wall jets // J. Hydraul. Eng. 2002. V. 128. № 2. P. 161–174.
11. *Sun H., Ewing D.* Effect of initial and boundary conditions on development of three-dimensional wall jets // 40th AIAA Aerospace Sci. Meeting & Exhibit. 2002. P. 733.
12. *Hall J.W., Ewing D.* Three-dimensional turbulent wall jets issuing from moderate-aspect-ratio rectangular channels // AIAA J. 2007. V. 45. P. 1177–1186.
13. *Inoue Y., Yano H., Yamashita S.* Experimental study on a three-dimensional wall jet // J. Fluid Sci. & Technol. 2007. V. 2. № 3. P. 655–664.
14. *Namgyal L., Hall J.* Reynolds stress distribution and turbulence generated secondary flow in the turbulent three-dimensional wall jet // J. Fluid Mech. 2016. V. 800. P. 613–644.
15. *Agelin-Chaab M., Tachie M.F.* Characteristics of turbulent three-dimensional wall jets // ASME. J. Fluids Eng. 2011. V. 133. № 2.
16. *Pani B.S., Rajaratnam N.* Swirling circular turbulent wall jets // J. Hydraul. Res. 1976. V. 14. № 2. P. 145–154.
17. *Kumar S., Kumar A.* Effect of initial conditions on mean flow characteristics of a three dimensional turbulent wall jet // Proc. Inst. Mech. Engineers, Pt. C: J. Mech. Engng. Sci. 2021. V. 235. № 22. P. 6177–6190.

18. *Craft T., Launder B.* On the spreading mechanism of the three-dimensional turbulent wall jet // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 435. P. 305–326.
19. *Khosronejad A., Rennie C.D.* Three-dimensional numerical modeling of unconfined and confined wall-jet flow with two different turbulence models // *Canadian J. Civil Engng.* 2010. V. 37. № 4. P. 576–587.
20. *Kakka P., Anupindi K.* Flow and thermal characteristics of three-dimensional turbulent wall jet // *Phys. Fluids.* 2021. V. 33. № 2.
21. *Nicoud F., Ducros F.* Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor // *Flow, Turbul. & Combust.* 1999. V. 62. № 3. P. 183–200.
22. *Van Doormaal J.P., Raithby G.D.* Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows // *Numer. Heat Transfer.* 1984. V. 7. № 2. P. 147–163.
23. *Menter F.R.* Best Practice: Scale-Resolving Simulations in Ansys CFD. <https://www.ansys.com/content/dam/product/fluids/cfd/tb-best-practices-scale-resolving-models.pdf>.

### Flow Structure of a Three-Dimensional Turbulent Wall Jet

A. M. Gaifullin<sup>a,#</sup> and A. S. Shcheglov<sup>a,##</sup>

<sup>a</sup>*Zhukovskiy Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: gaifullin@tsagi.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: shcheglov@phystech.edu*

A numerical simulation is conducted to study the flow of a three-dimensional incompressible wall jet. The study is aimed to determine the flow structure and to compare the propagation mechanisms of turbulent and laminar wall jets. The numerical solution of the Navier–Stokes equations in the turbulent case is obtained using the wall-resolved large eddy simulation. The simulation results are compared with experimental data.

*Keywords:* wall jet, self-similarity, large eddy simulation

### REFERENCES

1. *Akatnov N.I.* Propagation of a plane laminar jet of incompressible liquid along a solid wall // *Tr. Leningr. Politekh. In-ta, Energomash., Tekh. Gidromekh.*, 1953, no. 5, pp. 24–31. (in Russian)
2. *Glauert M.B.* The wall jet // *J. Fluid Mech.*, 1956, vol. 1, pp. 625–643.
3. *Schlichting H.* Laminare Strahlausbreitung // *Z. Angew. Math. Mech.*, 1933, Bd. 13, H. 4, pp. 260–263.
4. *Landau L.D.* A new exact solution of the Navier–Stokes equations // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1944, T. 43, no. 7, pp. 299–301. (in Russian)
5. *But I.I., Gaifullin A.M., Zhvick V.V.* Far field of a three-dimensional laminar wall jet // *Fluid Dyn.*, 2021, no. 6, pp. 51–61.
6. *Gaifullin A.M., Shcheglov A.S.* Self-similarity of a wall jet with swirl // *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 5, pp. 1098–1103.
7. *Newman B., Patel R., Savage S., Tjio H.* Three-dimensional wall jet originating from a circular orifice // *Aeron. Quart.*, 1972, vol. 23, no. 3, pp. 188–200.
8. *Matsuda H., Iida S., Hayakawa M.* Coherent structures in a three-dimensional wall jet // *ASME. J. Fluids Eng.*, 1990, vol. 112, no. 4, pp. 462–467.
9. *Padmanabham G., Lakshmana Gowda B.H.* Mean and turbulence characteristics of a class of three-dimensional wall jets. Pt. 1: Mean flow characteristics // *ASME. J. Fluids Eng.*, 1991, vol. 113, no. 4, pp. 620–628.
10. *Law A.W.-K., Herlina.* An experimental study on turbulent circular wall jets // *J. Hydraul. Eng.*, 2002, vol. 128, no. 2, pp. 161–174.
11. *Sun H., Ewing D.* Effect of initial and boundary conditions on development of three-dimensional wall jets // *40th AIAA Aerosp. Sci. Meeting & Exhibit.*, 2002, pp. 733.
12. *Hall J.W., Ewing D.* Three-dimensional turbulent wall jets issuing from moderate-aspect-ratio rectangular channels // *AIAA J.*, 2007, vol. 45, pp. 1177–1186.

13. *Inoue Y., Yano H., Yamashita S.* Experimental study on a three-dimensional wall jet // J. Fluid Sci.&Technol., 2007, vol. 2, no. 3, pp. 655–664.
14. *Namgyal L., Hall J.* Reynolds stress distribution and turbulence generated secondary flow in the turbulent three-dimensional wall jet // J. Fluid Mech., 2016, vol. 800, pp. 613–644.
15. *Agelin-Chaab M., Tachie M.F.* Characteristics of turbulent three-dimensional wall jets // ASME. J. Fluids Eng., 2011, vol. 133, no. 2.
16. *Pani B.S., Rajaratnam N.* Swirling circular turbulent wall jets // J. Hydraul. Res., 1976, vol. 14, no. 2, pp. 145–154.
17. *Kumar S., Kumar A.* Effect of initial conditions on mean flow characteristics of a three dimensional turbulent wall jet // Proc. Inst. Mech. Engineers, Pt. C: J. Mech. Engng. Sci., 2021, vol. 235, no. 22, pp. 6177–6190.
18. *Craft T., Launder B.* On the spreading mechanism of the three-dimensional turbulent wall jet // J. Fluid Mech., 2001, vol. 435, pp. 305–326.
19. *Khosronejad A., Rennie C.D.* Three-dimensional numerical modeling of unconfined and confined wall-jet flow with two different turbulence models // Canadian J. Civil Engng., 2010, vol. 37, no. 4, pp. 576–587.
20. *Kakka P., Anupindi K.* Flow and thermal characteristics of three-dimensional turbulent wall jet // Phys. Fluids, 2021, vol. 33, no. 2.
21. *Nicoud F., Ducros F.* Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor // Flow, Turbul.&Combust., 1999, vol. 62, no. 3, pp. 183–200.
22. *Van Doormaal J.P., Raithby G.D.* Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows // Numer. Heat Transfer, 1984, vol. 7, no. 2, pp. 147–163.
23. *Menter F.R.* Best Practice: Scale-Resolving Simulations in Ansys CFD. <https://www.ansys.com/content/dam/product/fluids/cfd/tb-best-practices-scale-resolving-models.pdf>

УДК 532.584

**ВОЛНЫ СЕДИМЕНТАЦИИ В ДВУХФАЗНОЙ  
ГРАНУЛИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ**© 2023 г. В. В. Шелухин<sup>1,\*</sup>, В. В. Неверов<sup>1</sup><sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

\*e-mail shelukhin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

После доработки 05.03.2023 г.

Принята к публикации 05.03.2023 г.

Рассматривается вопрос математического моделирования течений суспензии твердых частиц без предположений о малых концентрациях. Различие скоростей частиц и связующей жидкости учитывается путем применения двухконтинуального подхода, в рамках которого частицы и жидкость трактуются как две различные вязкие жидкости. Исследуется роль сил плавучести и гравитационной мобильности на оседание частиц. Проводится качественное сравнение с теорией концентрационных волн Кинча для случая одномерных вертикальных течений. Отмечена роль вихрей на поперечную миграцию частиц при седиментации в двумерном сосуде.

*Ключевые слова:* суспензии, седиментация, силы плавучести, поперечная миграция частиц

DOI: 10.31857/S0032823523020145, EDN: UBNIWW

**1. Введение.** Двухфазные гранулированные жидкости отличаются от сыпучей среды тем, что фаза сухих частиц является смоченной и допускается различие скоростей между частицами и связующей жидкостью. Важно отметить, что в таких жидкостях нет гипотезы о слабой концентрации частиц; они также называются слабо смоченным сыпучим материалом, если доля связующей жидкости мала [1]. Хотя гранулированные жидкости изучались и раньше [2], в последнее время они стали вновь привлекать внимание [3]. Тематика реологии смоченных сыпучих сред [4] играет важную роль в геотехническом и геофизическом контексте [5], в технологических процессах в связи с образованием агломератов [6], изготовлением пресс-форм [7], в технологиях литья металлических форм с пустотами путем заполнения форм сыпучим материалом и последующим плавлением [8]. В последнем примере связующая жидкость занимает всего несколько процентов от смеси. Как показывают эксперименты по своей реологии смоченные сыпучие материалы отличаются от сухих сыпучих сред и относятся к не-ньютоновским жидкостям [9].

Данная работа посвящена формулировке новой математической модели двухфазной гранулированной жидкости и исследованию на ее основе проблемы седиментации частиц. При оседании скорости частиц и связующей жидкости различаются существенно, поэтому уместен подход, основанный на взаимодействии двух континуумов. Известно несколько методов построения двухскоростных математических моделей. Как правило, они выводятся либо усреднением по объему [10], либо по ансамблю частиц [11, 12]. Одно из применений двухскоростных моделей – изучение поперечной миграции частиц относительно главного потока [13]. С этой целью вводятся

силы Магнуса или Саффмана, которые оцениваются, исходя из движения одиночной частицы в потоке. Установлено, что такие силы обязаны эффектам инерции и присутствия стенок [14]. Однако согласование этих сил с законами термодинамики до сих пор не выяснено. Проблеме гравитационной конвекции посвящено много публикаций. Некоторый обзор содержится в работах [15, 16].

Уравнения в настоящей работе получены другим методом, который первоначально был разработан в работах Е.М. Халатникова и Л.Д. Ландау для термодинамики сверхтекучего гелия  $^4\text{He}$  [17]. По этому методу неизвестные потоки в законах сохранения сначала определяются для обратимых процессов согласованно с термодинамикой ввиду того, что закон сохранения энергии делает всю систему уравнений переопределенной; при этом учитывается инвариантность законов сохранения относительно преобразований Галилея. Затем находятся необратимые добавки к потокам в диссипативных процессах путем согласования законов сохранения с принципами де Гроот–Мазура необратимой термодинамики.

Развитие термодинамического метода Халатникова–Ландау для двухфазной гранулированной жидкости предложено в недавней работе [18], где в отличие от [17] к законам сохранения добавлен закон Фика для потока концентрации частиц, который учитывает не только диффузию концентрации частиц, но и гравитационную мобильность, бародиффузию и температурную диффузию. При этом закон Фика согласован с неотрицательным производством энтропии. Область применимости диффузионного подхода [18] ограничена случаем очень мелких частиц. Цель настоящей работы – отказаться от этого ограничения. С этой целью к межфазным силам будет добавлена сила плавучести, а задача седиментации будет исследована при подавлении эффекта гравитационной мобильности в законе Фика.

Для теоретической валидации модели мы устанавливаем, что в одномерном случае, когда учитываются только вертикальные течения, теория Кинча [19, 20] для седиментационных волн концентрации вытекает из разработанных уравнений как частный случай. Двумерные течения в вертикальном сосуде исследуются численно с помощью FreeFem++. Показно, что массовая концентрация частиц  $c$  не выходит за пределы интервала  $0 < c < 1$ , несмотря на то, что ее динамика описывается не уравнением переноса, как это предполагается в большинстве работ, а более сложным уравнением с матричным коэффициентом диффузии. Хотя твердые и жидкие частицы вовлечены в вихревые течения, тем не менее, осадочный слой растет таким образом, что его верхняя граница остается всегда почти горизонтальной. Это, в частности, означает, что эффект поперечной миграции частиц воспроизводится предложенной моделью.

**2. Модель двухфазной гранулированной жидкости в диффузионном приближении.** Рассматривается смесь двух взаимопроникающих сред [21], т.е. в произвольном объеме  $V$  содержатся и жидкость (индекс  $f$ ) и гранулированная фаза (индекс  $s$ ). Объем, масса и давление жидкой и гранулированной фаз обозначим  $V_f, m_f, p_f$  и  $V_s, m_s, p_s$  соответственно. Предполагается, что гранулированная фаза представляет собой смесь сухих частиц и несущей жидкости, например гель с проппантом. При этом  $V_s = V_M + V_p$  и  $m_s = m_M + m_p$ . Частицы “вморожены” в несущую жидкость, т.е. гранулированная фаза характеризуется всего одной скоростью  $\mathbf{v}_s$ , одной вязкостью и одним тензором напряжений.

Перейдем к переменным, определенным для единичного объема

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad \rho_s = \frac{m_s}{V}, \quad \rho_f = \frac{m_f}{V}, \quad \rho_p = \frac{m_p}{V}, \quad \varphi_k = \frac{V_k}{V}, \quad \rho_M = \frac{m_M}{V}, \quad c = \frac{m_p}{m} \quad (2.1)$$

Здесь  $c = \rho_p/\rho$  – массовая концентрация частиц в смеси, а  $\phi_k$  – объемная доля фазы  $k$ , где  $k = f, p, M$ . Из введенных определений следует, что парциальные плотности  $\rho_k$  связаны с физическими плотностями  $\bar{\rho}_k$  по следующим формулам

$$\rho_k = \phi_k \bar{\rho}_k, \quad \bar{\rho}_k \equiv \frac{m_k}{V_k}, \quad \phi_f + \phi_s = 1, \quad \phi_s = \phi_p + \phi_M, \quad \rho = \rho_f + \rho_p + \rho_M$$

В общем случае давления в фазах  $p_s$  и  $p_f$  различны. Далее в работе предполагается, что силы поверхностного натяжения на границах между фазами пренебрежимо малы и можно использовать приближение  $p_s = p_f = p$ , аналогично тому, как это было сделано в [21].

Введем обозначения:  $\mathbf{v}_f$  – скорость жидкой фазы;  $\mathbf{l}$  – вектор потока концентрации;  $T_i$  – вязкая часть тензора напряжения фазы  $i$ ;  $\mathbf{g}$  – вектор гравитации;  $k$  – коэффициент межфазного трения.

Если пренебречь вращением частиц и тепловыми эффектами, то из работы [21] можно получить следующую математическую модель для шести неизвестных функций  $\rho_s, \rho_f, p, c, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f$ :

$$\frac{\partial(\rho_s \mathbf{v}_s)}{\partial t} + \text{div}(\rho_s \mathbf{v}_s \otimes \mathbf{v}_s) = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p - \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 - k\mathbf{u} + \text{div} T_s + \rho_s \mathbf{g} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho_f \mathbf{v}_f)}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f) = -\frac{\rho_f}{\rho} \nabla p + \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 + k\mathbf{u} + \text{div} T_f + \rho_f \mathbf{g} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \text{div}(c\mathbf{j} + \mathbf{l}) = 0, \quad p = p(\rho) \quad (2.4)$$

$$\rho_{st} + \text{div}(\rho_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad \rho_{ft} + \text{div}(\rho_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad (2.5)$$

где  $p = p(\rho)$  – заданное уравнение состояния и

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_f \mathbf{v}_f, \quad \rho = \rho_s + \rho_f, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \equiv u_k u_k$$

Здесь использованы следующие обозначения. Тензорное произведение  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  представляет собой матрицу с компонентами  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$ . Для заданной матрицы  $A(\mathbf{x})$  обозначим через  $A(\mathbf{x})^*$  сопряженную матрицу  $(A(\mathbf{x})^*)_{ij} = (A(\mathbf{x}))_{ji}$ . Компоненты вектора  $\text{div} A$  определяются формулой  $(\text{div} A)_i = \partial A_{ij} / \partial x_j$ .

Фаза  $f$  считается вязкой ньютоновской жидкостью. Фаза  $s$  содержит частицы,  $c$  – их массовая концентрация по отношению ко всему двухскоростному континууму. В реологических соотношениях

$$T_i = 2\eta_i D_i, \quad 2D_i = \nabla \mathbf{v}_i + (\nabla \mathbf{v}_i)^*; \quad i = f, s, \quad (2.6)$$

$D_j$  – тензор скоростей деформаций,  $\eta_i$  – вязкость. Параметры  $k, \eta_s$  – обычно зависят от концентрации  $c$ , а  $\eta_f$  является константой. Напомним определение дифференциального оператора  $\nabla$ :

$$(\nabla \mathbf{u})_{ks} = \frac{\partial u_k}{\partial x_s}, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u})_k = v_s \frac{\partial u_k}{\partial x_s}$$

Скалярное произведение матриц  $A$  и  $B$  обозначается через  $A : B = A_{ij} B_{ij}$ .

Модель содержит еще одно реологическое соотношение, это закон Фика для потока концентрации:

$$\mathbf{l} = -(\gamma_2 \nabla c + \gamma_1 \nabla p + \gamma_3 \nabla \mathbf{u}^2) + \rho c B \mathbf{g}, \quad (2.7)$$

где  $\gamma_i$  – коэффициенты диффузии, а  $B$  – мобильность [17].

Для решения задачи о седиментации преобразуем систему уравнений (2.2)–(2.7). С помощью уравнений неразрывности (2.5) законы сохранения импульса (2.2) и (2.3) можно записать в виде

$$\rho_s \left( \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_s \right) = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p - \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 - k \mathbf{u} + \text{div } T_s + \rho_s \mathbf{g} \quad (2.8)$$

$$\rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right) = -\frac{\rho_f}{\rho} \nabla p + \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 + k \mathbf{u} + \text{div } T_f + \rho_f \mathbf{g} \quad (2.9)$$

Как и в работе [18] введем следующие предположения:

1. Физические плотности каждой фазы постоянны  $\bar{\rho}_k \equiv \text{const}$ , где  $k = f, p, M$ ,
2. Объемная доля геля  $\varphi_M$  мала.

Тогда из определений (2.1) получим, что:

$$\rho_s \approx c\rho, \quad \rho_f \approx (1-c)\rho, \quad \varphi_s(c) = \frac{c}{R_0 + c(1-R_0)}, \quad R_0 = \frac{\bar{\rho}_s}{\bar{\rho}_f} \quad (2.10)$$

Следует отметить, что в отличие от физических плотностей, парциальные плотности фаз  $\rho_i$  и средняя плотность суспензии  $\rho$  не являются постоянными. Далее объемные доли  $\varphi_s$  и  $\varphi_f$ , а также и функции  $\rho_s$ ,  $\rho_f$ ,  $\rho$  рассматриваются как известные функции от массовой концентрации  $c$ :

$$\frac{\rho_s}{\bar{\rho}_f} = c[1 + (R_0 - 1)\varphi_s(c)] \equiv r_s(c), \quad \frac{\rho_f}{\bar{\rho}_f} = 1 - \varphi_s(c) \equiv r_f(c), \quad \rho = \frac{\bar{\rho}_s}{R_0 + c(1-R_0)} \quad (2.11)$$

Функции  $r_s(c)$  и  $r_f(c)$  – безразмерные парциальные плотности.

Разделив первое уравнение (2.5) на  $\bar{\rho}_s$ , второе уравнение (2.5) на  $\bar{\rho}_f$  и сложив их, приходим к уравнению неразрывности для среднеобъемной скорости

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{v} \equiv \varphi_s(c) \mathbf{v}_s + \varphi_f(c) \mathbf{v}_f, \quad \varphi_f = \frac{R_0(1-c)}{R_0 + c(1-R_0)}$$

Используя законы сохранения массы (2.5) и гипотезу (2.10), можно переписать (2.4) в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c\mathbf{v}) + \rho^{-1}(c) \text{div } \mathbf{l} = 0 \quad (2.13)$$

Теперь модель сводится к отысканию четырех неизвестных функций  $p$ ,  $c$ ,  $\mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{v}_f$ , удовлетворяющих четырем уравнениям (2.8), (2.9), (2.12), (2.13). Параметры  $\eta_s$ ,  $\eta_f$ ,  $k$ ,  $\gamma_j$  считаются известными функциями от  $c$ . Заметим, что в условиях постоянства физических плотностей давление уже не является термодинамическим параметром и не удовлетворяет уравнению состояния, а находится из решения уравнений также как и в случае модели Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Соотношения (2.10) заменяют законы сохранения масс фаз.

Вязкость суспензии для плотных суспензий определяется по формуле Krieger–Dougherty [22]:

$$\eta_s/\eta_{s0} = (1 - \varphi_s/\varphi_s^*)^{-5/2}, \quad (2.14)$$

где  $\eta_{s0}$  – вязкость несущей жидкой фазы гранулированной жидкости при отсутствии частиц,  $\varphi_s^*$  – концентрация плотной упаковки. Коэффициенты диффузии  $\gamma_j$  обращаются в ноль, когда исчезает какая-либо фаза. Для коэффициента межфазного трения известна корреляция [23]

$$k = \frac{3}{4} C_D \frac{\varphi_s \bar{\rho}_s |\mathbf{u}|}{d_p}, \quad (2.15)$$

где  $d_p$  – диаметр частиц,  $C_D$  – коэффициент трения частицы о жидкость,

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}_p} (1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.678}) & \text{при } \text{Re}_p < 1000, \\ 0.44 & \text{при } \text{Re}_p > 1000, \end{cases} \quad \text{Re}_p = \frac{d_p \bar{\rho}_s |\mathbf{u}|}{\eta_f} \quad (2.16)$$

Отметим, что в задачах седиментации число Рейнольдса для частиц очень мало  $\text{Re}_p \ll 1$ , что позволяет использовать приближенные соотношения

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_p}, \quad k = \frac{18 \eta_f \varphi_s}{d_p^2} \quad (2.17)$$

**3. Модель двухфазной гранулированной жидкости с пренебрежимо малыми диффузией и диссипацией.** Если пренебречь диффузией и вязкостью, то диффузионная модель с условием несжимаемости смеси для функций  $c$ ,  $\mathbf{v}_f$ ,  $\mathbf{v}_s$ ,  $p$  примет вид

$$\rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right) = -\frac{\rho_f}{\rho} \nabla p + \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 + \mathbf{f}_d - \mathbf{f}_b + \rho_f \mathbf{g} \quad (3.1)$$

$$\rho_s \left( \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_s \right) = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p + \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 - \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_b + \rho_s \mathbf{g} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial (c\rho)}{\partial t} + \text{div}(c\mathbf{j}) = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_f \mathbf{v}_f + \rho_s \mathbf{v}_s \quad (3.3)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \equiv \varphi_s(c) \mathbf{v}_s + \varphi_f(c) \mathbf{v}_f, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_s + \varphi_f &= 1, \quad \rho_s = \bar{\rho}_s \varphi_s(c), \quad \rho_f = \bar{\rho}_f \varphi_f(c) \\ \rho &= \rho_s + \rho_f, \quad \varphi_f = \frac{R_0(1-c)}{R_0 + c(1-R_0)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

а плотности материалов  $\bar{\rho}_f$  и  $\bar{\rho}_s$  считаются постоянными. Здесь  $\mathbf{f}_d = k(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f)$  – сила межфазного трения и  $\mathbf{f}_b$  – сила плавучести. Отметим, что в литературе нет однозначного вида для  $\mathbf{f}_b$ . Например, в [24] эта сила пропорциональна градиенту объемной доли жидкой фазы, а в [15] она пропорциональна дивергенции тензора вязких напряжений жидкой фазы. Отметим, что в указанных работах законы сохранения импульсов фаз также различаются. Поскольку в данной работе уравнения импульсов тоже другие, то естественно предположить, что и вид межфазной силы плавучести будет другим. Далее приводится формула для  $\mathbf{f}_b$  и излагаются аргументы в пользу этого выбора.

В терминах скорости проскальзывания  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f$  можно записать следствия уравнений (3.1)–(3.4):

$$\frac{\partial (c\rho)}{\partial t} + \text{div}(c\rho \mathbf{v}_f + c\rho_s \mathbf{u}) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}_f = -\frac{\nabla |\mathbf{u}|^2}{2} + \mathbf{f}_b \left( \frac{1}{\rho_s} + \frac{1}{\rho_f} \right) - \mathbf{f}_d \left( \frac{1}{\rho_s} + \frac{1}{\rho_f} \right) \quad (3.7)$$

Будем искать  $\mathbf{f}_b$  в таком виде, чтобы выполнялась формула

$$\mathbf{f}_b \left( \frac{1}{\rho_s} + \frac{1}{\rho_f} \right) = \varepsilon \mathbf{g}, \quad \varepsilon = \frac{\bar{\rho}_s - \bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s}, \quad (3.8)$$

где  $\varepsilon$  – параметр плавучести. Поэтому

$$\mathbf{f}_b = \varepsilon \frac{\rho_s \rho_f}{\rho} \mathbf{g} \quad (3.9)$$

В случае стационарных течений линеаризация уравнения (3.7) приводит к формуле

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{g} \frac{\rho_s \rho_f}{k \rho} \quad (3.10)$$

Воспользуемся представлением (2.17) для коэффициента трения  $k$  и перейдем к пределу при  $\varphi_s \rightarrow 0$ , тогда с помощью (3.10) получим формулу Стокса для скорости оседания одиночной частицы:

$$|u| = \frac{g(\bar{\rho}_s - \bar{\rho}_f) d_p^2}{18\eta_f} \quad (3.11)$$

**4. Одномерная седиментация с малыми диффузией и вязкостью.** Рассмотрим одномерные вертикальные течения вдоль оси  $z$ , направленной вверх. В этом случае

$$\mathbf{v}_s = (0, 0, v^s)^T, \quad \mathbf{v}_f = (0, 0, v^f)^T, \quad \mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор оси  $z$ . Для таких течений условие соленоидальности (3.4) для среднеобъемной скорости эквивалентно уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\varphi_f v^f + \varphi_s v^s) = 0 \quad (4.2)$$

При граничных условиях на дне

$$z = 0: v^f = v^s = 0 \quad (4.3)$$

в области  $z > 0$  уравнение (4.2) сводится к следующему:

$$\varphi_f v^f + \varphi_s v^s = 0, \quad v^s = \varphi_f(c)u, \quad v^f = -\varphi_s(c)u \quad (4.4)$$

Поэтому систему (3.1)–(3.3), (4.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v^s \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v^f}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z} - u \frac{k\rho}{\rho_s \rho_f} - g\varepsilon \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial(c\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(c\rho v^f + c\rho_s u)}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

для двух функций  $u$  и  $c$ . Давление восстанавливается из уравнения

$$\frac{\partial v^s}{\partial t} + v^s \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v^f}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho_f}{2\rho} \frac{\partial u^2}{\partial z} + g - \frac{ku}{\rho_s} - \frac{\varepsilon \rho_f g}{\rho} \quad (4.7)$$

Опираясь на формулы (2.10), (2.11), введем приведенную массовую концентрацию  $r$ :

$$r = \frac{\rho c}{\bar{\rho}_f} = \frac{c}{1 - \varepsilon c}, \quad 0 \leq r \leq R_0 = \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

Выполняются следующие представления:

$$c = \frac{r}{1 + \varepsilon r}, \quad \varphi_s(r) = r(1 - \varepsilon)$$

Тогда функции  $u$  и  $r$  удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 \varphi_f)}{\partial z} = -\frac{k\rho}{\rho_s \rho_f} u - g\varepsilon \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{ur^2(1 + \varepsilon r - r)}{1 + \varepsilon r} \right) = 0 \quad (4.9)$$

**5. Теория седиментации Кинча.** Теория Кинча основана на эмпирическом соотношении [25]

$$\mathbf{u} = -V_{St} H(c) \mathbf{e}_z, \quad V_{St} = \frac{2(\bar{\rho}_s - \bar{\rho}_f)g(d_p/2)^2}{9\eta_f^2}, \quad (5.1)$$

для скорости проскальзывания, где  $\eta_f$  – вязкость жидкой фазы,  $\bar{\rho}_s$  – плотность фазы частиц,  $d_p$  – диаметр частицы,  $V_{St}$  – скорость оседания Стокса. Для экспериментов в ньютоновской жидкости подходит эмпирическая функция торможения  $H$  в форме Ричардсона–Заки [26]:

$$H(c) = -(1 - c)^m; \quad m = 4.6 \quad (5.2)$$

В этом случае  $u = -(1 - c)^m V_{St}$  и уравнение (4.9) для приведенной концентрации принимает вид

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial f(r)}{\partial z} = 0, \quad f = -\tilde{\varepsilon} r^2 \left( \frac{1 + \varepsilon r - r}{1 + \varepsilon r} \right)^{m+1}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon V_{St}, \quad 0 < r < \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad (5.3)$$

Для построения решения зададим начальные и граничные условия

$$r|_{t=0} = r_0, \quad r|_{z=0} = 1 \quad (5.4)$$

Решение задачи (5.3), (5.4) определяется следующими свойствами функции  $f(r)$  на рис. 1. Существует единственное значение  $r_1$  переменной  $r$ , такое что  $f'(r_1) = 0$ . При  $0 < r_0 < r_1$  существует единственное значение  $r_2$  переменной  $r$ , такое что

$$\frac{f(r_2) - f(r_0)}{r_2 - r_0} = f'(r_2) \quad (5.5)$$

Поэтому существует единственное энтропийное решение [27], задаваемое формулой

$$r(z, t) = \begin{cases} r_0, & \text{при } z > h(t) \\ r(\xi), & \xi = z/t, \text{ при } z < h(t) \end{cases} \quad (5.6)$$

Решение имеет следующий смысл. Снизу вверх идет ударная волна  $z = h(t)$  с постоянной скоростью  $h'(t)$ , значение которой задано уравнением (5.5) ввиду условия Гюгонио на разрыве  $h'(t)(r_2 - r_0) = f(r_2) - f(r_0)$ . Значения концентрации  $r$  перед фронтом и за ним равны  $r_0$  и  $r_2$  соответственно. За фронтом решение имеет вид централизованной

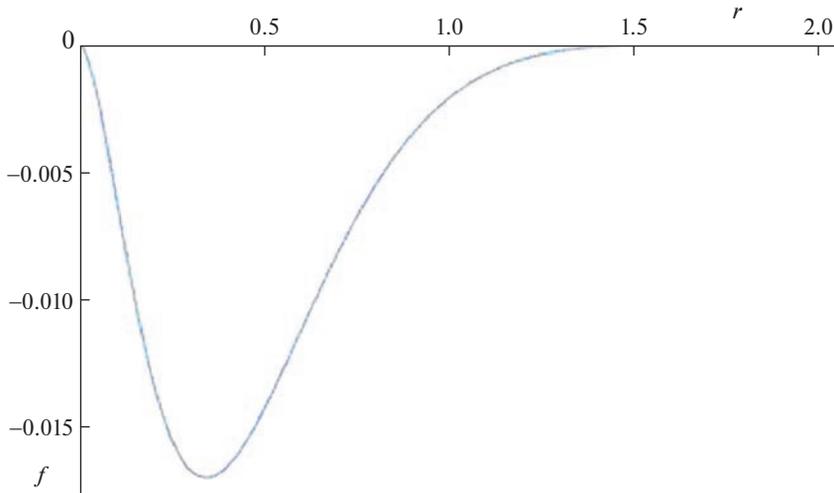


Рис. 1. Зависимость  $f(r)$  на интервале  $0 < r < (1 - \varepsilon)^{-1}$  при  $\bar{\varepsilon} = 1, \varepsilon = 0.5, m = 4.6$ .

волны разрежения  $r(\xi)$ ,  $\xi = z/t$ . Оно определяется путем решения уравнения  $\xi = f'(r(\xi))$ . Функция  $r(\xi)$  растет монотонно от  $r_2$  до  $(1 - \varepsilon)^{-1}$ , когда  $\xi$  уменьшается от  $h'(t)$  до 0. Заметим, что решение с ударной волной существует и для тех  $r_0 \geq r_1$ , для которых формула (5.5) остается в силе.

**6. Численное решение.** Рассмотрим одномерную систему (4.8), (4.9) для неизвестных  $(u, r)$ , которая описывает седиментацию без гипотез о скорости проскальзывания. Поскольку используется решатель FreeFem++, то вводятся малые коэффициенты диффузии  $D_1, D_2$  и численно исследуется регуляризованная система

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( u^2 (1 + \varepsilon r - r) \right) + \frac{k\rho(r)}{\rho_s(r)\rho_f(r)} u + g\varepsilon = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{ur^2(1 + \varepsilon r - r)}{1 + \varepsilon r} \right) = D_2 \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1)–(6.2) рассматриваются на интервале  $\Omega = 0 < z < 8$  со следующими начальными и граничными условиями:

$$r|_{t=0} = r_0 = \text{const}, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (6.3)$$

$$r = 0, \quad u = 0, \quad \text{на верхней границе } z = 8 \quad (6.4)$$

$$r = (1 - \varepsilon)^{-1}, \quad u = 0, \quad \text{на нижней границе } z = 0 \quad (6.5)$$

На рис. 2,а показано распределение по высоте массовой концентрации частиц  $c = r/(1 + \varepsilon r)$  для следующих значений параметров:

$$\varepsilon = 0.5, \quad r_0 = 0.2, \quad D_1 = 0.001, \quad D_2 = 0.001 \quad (6.6)$$

Со временем нарастает слой осадка  $c = 1$ , причем концентрация при переходе от осадка к смеси меняется скачком, что соответствует разрывному решению. Однако, в отличие от уравнения Кинча (4.9) с эмпирической корреляцией для скорости проскальзывания, в верхней части сосуда концентрация убывает плавно.

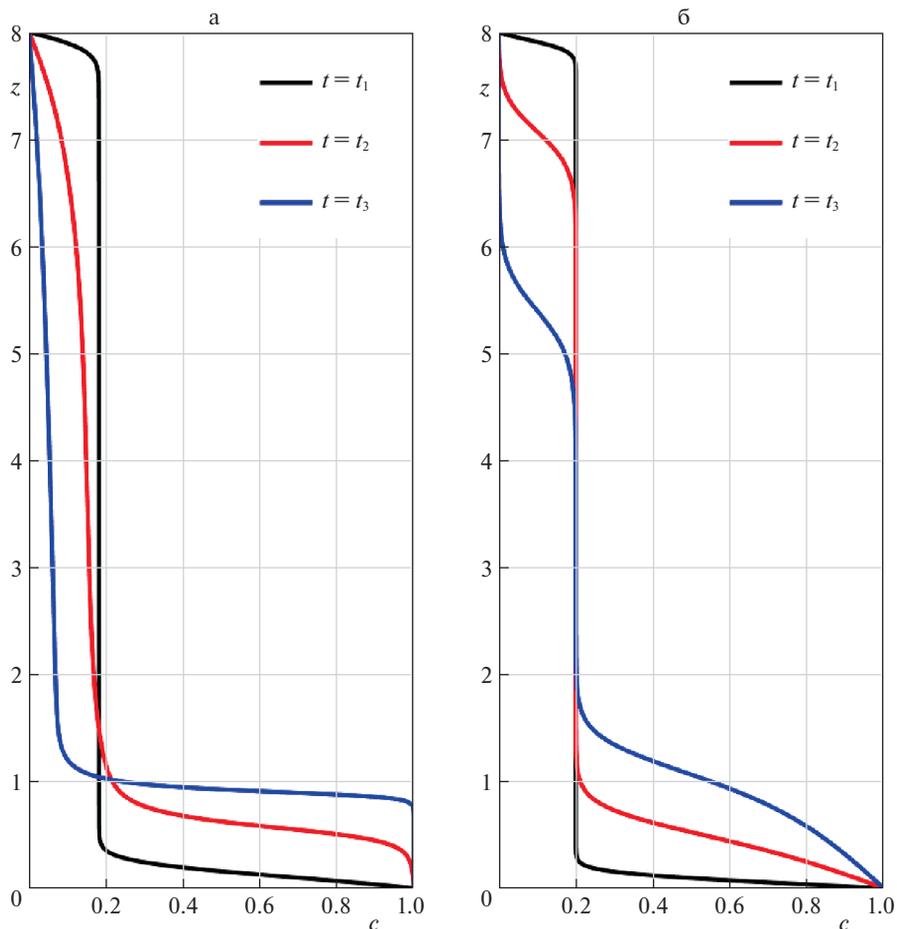


Рис. 2. а. Распределение массовой концентрации в различные моменты времени для одномерной модели вертикальных течений без условия на скорость проскальзывания. б. Распределение средней по горизонтальному сечению концентрации в различные моменты времени для 2D-седиментации.

Также с помощью FreeFem++ находилось численное решение двумерной задачи седиментации в прямоугольной области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 8]$  переменных  $x$  и  $z$ , где  $x$  – горизонтальная переменная. Для сравнения с диффузионной моделью система (3.1)–(3.4) рассматривалась в следующей модификации:

$$\rho_s \left( \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_s \right) = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p - \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 + \operatorname{div} T_s - \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_b + \rho_s \mathbf{g} \quad (6.7)$$

$$\rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right) = -\frac{\rho_f}{\rho} \nabla p + \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 + \operatorname{div} T_f + \mathbf{f}_d - \mathbf{f}_b + \rho_f \mathbf{g} \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{j} + \mathbf{l}) = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_f \mathbf{v}_s + \rho_f \mathbf{v}_s \quad (6.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \varphi_s(c) \mathbf{v}_s + \varphi_f(c) \mathbf{v}_f, \quad (6.10)$$

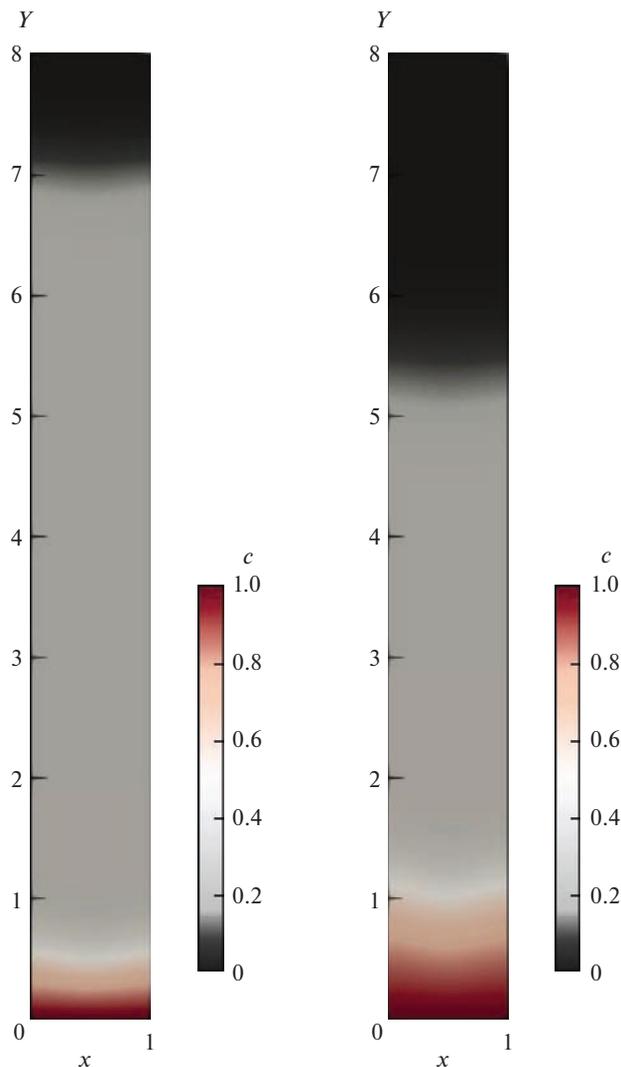
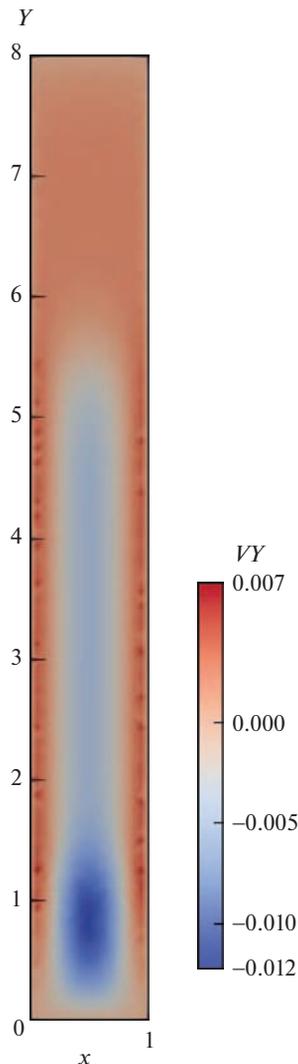


Рис. 3. Распределение концентрации в различные моменты времени. Двумерный расчет.

где тензоры вязких напряжений  $T_i$ , диффузионный поток  $\mathbf{l}$  определяются формулами (2.6) и (2.7) соответственно. Вязкость жидкой фазы  $\eta_f$  считается постоянной, а вязкость гранулированной фазы  $\eta_s$  зависит от концентрации частиц по формуле (2.14). Плотности и объемные доли фаз зависят от концентрации по формулам (3.5). Граничные условия на  $\partial\Omega$  есть условия прилипания для скоростей фаз и условие отсутствия диффузионного потока:  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали. В начальный момент скорости фаз считаются нулевыми, а концентрация выбирается постоянной.

Иллюстрации вычислений, приведенные на рис. 2,б–рис. 4, относятся к случаю, когда гравитационная мобильность на порядок меньше, чем параметр плавучести. Зависимость от вертикальной переменной усредненных по горизонтальной координате значений концентрации изображены на рис. 2,б для разных моментов времени. Если не усреднять по переменной  $x$ , а наблюдать полную картину концентрации, то можно



**Рис. 4.** Распределение средней скорости смеси. Цветом обозначена вертикальная компонента среднеемъемной скорости  $v$ .

увидеть на рис. 3, что линии уровня концентрации локально искривляются в середине 2D сосуда. Это связано с образованием вихрей, рис. 4.

**Закключение.** Предложена математическая модель двухфазной гранулированной жидкости, в которой учитываются два механизма гравитационной седиментации. Первый механизм связан с силами плавучести, а второй обязан гравитационной мобильности в диффузионном законе Фика для потока концентрации. Для течений в вертикальном 2D сосуде вычисления показывают, что линии уровня концентрации образуют локальную ямку посередине. Ямка отсутствует, если доминирует диффузионный эффект. Для валидации модели показано, что теория гравитационных волн Кинча для одномерных вертикальных потоков вытекает из нее как частный случай, если воспользоваться известными эмпирическими корреляциями для скорости проскальзывания. Еще одно следствие теории – вывод новой одномерной модели гравитаци-

онной седиментации для вертикальных течений, которая не опирается на эмпирические корреляции для скорости проскальзывания. В этой новой модели скорость проскальзывания определяется одновременно с концентрацией частиц. Вычисления показывают, что полная одномерная модель и одномерное уравнение Кинча качественно дают одну и ту же картину оседания частиц.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда, проект № 20-19-00058.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schwarze R., Gladkyy A., Uhlig F., Luding S.* Rheology of weakly wetted granular materials: a comparison of experimental and numerical data // *Granular Matter*. 2013. V. 15. P. 455–465.
2. *Herminghaus S.* Dynamics of wet granular matter // *Adv. Phys.* 2005. V. 54. P. 221–261.
3. *Hsiau S.S., Liao C.C., Tai C.H., Wan C.Y.* The dynamics of wet granular matter under a vertical vibration bed // *Granul. Matter*. 2013. V. 15. P. 437–446.
4. *Jop P., Forterre Y., Pouliquen O.* A constitutive law for dense granular flows // *Nature*. 2006. V. 441. P. 727–730.
5. *Gabrieli F., Lambert P., Cola S., Calvetti F.* Micromechanical modelling of erosion due to evaporation in a partially wet granular slope // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2012. V. 36. P. 918–943.
6. *Pietsch W.* Agglomeration Processes. Weinheim: Wiley, 2002.
7. *Guo Y., Wu C.Y., Thornton C.* The effects of air and particle density difference on segregation of powder mixtures during die filling // *Chem. Eng. Sci.* 2011. V. 66. P. 661–673.
8. *Beeley P.R.* Foundry Technology. Oxford: Elsevier, 2001.
9. *Schwarze R., Rudert A., Tilch W., Bast J.* Rheological behavior of sand-binder mixtures measured by a coaxial cylinder rheometer // *I. Foundry Res.* 2008. V. 60. № 3. P. 2–6.
10. *Anderson T., Jackson R.* Fluid mechanical description of fluidized beds. Equations of motion // *Ind. Eng. Chem. Fundamen.* 1967. V. 6. P. 527–539.
11. *Buyevich Y., Shchelchkova I.* Flow of dense suspensions // *Prog. Aerosp. Sci.* 1978. V. 18. P. 121–150.
12. *Zhang D., Prosperetti A.* Momentum and energy equations for disperse two-phase flows and their closure for dilute suspensions // *Int. J. Multiphase Flow.* 1997. V. 23. P. 425–453.
13. *Miller R., Singh J., Morris J.* Suspensions flow modeling for general geometries // *Chem. Eng. Sci.* 2009. V. 64. P. 4597–4610.
14. *Crowe C., Schwarzkopf J., Sommerfield M., Tsuji Y.* Multiphase Flows with Droplets and Particles. Boca Raton: CRC Press, 2011.
15. *Dontsov E.V., Peirce A.P.* Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fracture // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 760. P. 567–590.
16. *Nevskii Yu.A., Osipov A.N.* Slow gravitational convection of disperse systems in domain with inclined boundaries // *Fluid Dyn.* 2011. V. 46. № 2. P. 225–239.
17. *Ландау Л.Д., Lifshits E.M.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
18. *Shelukhin V.V., Neverov V.V.* Dense suspension flows: a mathematical model consistent with thermodynamics // *J. Fluids Eng. ASME*. 2022. V. 144. Iss. 021402. P. 1–13.
19. *Kynch G.F.* A theory of sedimentation // *Trans. Faraday Soc.* 1952. V. 48. P. 166–176.
20. *Bustos M.C., Concha F., Bürger R., Tory E.M.* Sedimentation and Thickening Phenomenological Foundation and Mathematical Theory. Dordrecht: Springer, 1999.
21. *Shelukhin V.V.* Thermodynamics of two-phase granular fluids // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 2018. V. 262. P. 25–37.
22. *Krieger I.M., Dougherty T.* A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres // *Trans. Soc. Rheol.* 1959. V. 3. P. 137–152.
23. *Ishii V., Mishima K.* Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations // *Nucl. Eng. & Des.* 1984. V. 82. P. 107–126.
24. *Baumgarten A.S., Kamrin K.* A general fluid-sediment mixture model and constitutive theory validated in many flow regimes // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 861. P. 721–764.

25. *Acrivos A., Herbolzheimer E.* Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined walls // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 92. P. 435–457.
26. *Richardson J.F., Zaki W.N.* The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow // *Chem. Eng. Sci.* 1954. V. 3. P. 65–73.
27. *Шелухин В.В.* Квазистационарная седиментация с адсорбцией // *ПМТФ.* 2005. Т. 46. № 4. С. 66–77.

### Sedimentation Waves in a Two-Phase Granular Liquid

V. V. Shelukhin<sup>a,#</sup> and V. V. Neverov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail shelukhin@hydro.nsc.ru*

The question of mathematical modeling of the flows of a suspension of solid particles without assumptions about low concentrations is considered. The difference between the velocities of the particles and the binding liquid is taken into account by applying the two-continuum approach, in which the particles and the liquid are treated as two different viscous liquids. The role of buoyancy forces and gravitational mobility on particle settling is investigated. A qualitative comparison is made with the theory of Kinch concentration waves for the case of one-dimensional vertical flows. The role of vortices on the transverse migration of particles during sedimentation in a two-dimensional vessel is noted.

*Keywords:* suspensions, sedimentation, buoyancy forces, transverse particle migration

### REFERENCES

1. *Schwarze R., Gladkyy A., Uhlig F., Luding S.* Rheology of weakly wetted granular materials: a comparison of experimental and numerical data // *Granular Matter.*, 2013, vol. 15, pp. 455–465.
2. *Herminghaus S.* Dynamics of wet granular matter // *Adv. Phys.*, 2005, vol. 54, pp. 221–261.
3. *Hsiau S.S., Liao C.C., Tai C.H., Wan C.Y.* The dynamics of wet granular matter under a vertical vibration bed // *Granul. Matter.*, 2013, vol. 15, pp. 437–446.
4. *Jop P., Forterre Y., Pouliquen O.* A constitutive law for dense granular flows // *Nature*, 2006, vol. 441, pp. 727–730.
5. *Gabrieli F., Lambert P., Cola S., Calvetti F.* Micromechanical modelling of erosion due to evaporation in a partially wet granular slope // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2012, vol. 36, pp. 918–943.
6. *Pietsch W.* Agglomeration Processes. Weinheim: Wiley, 2002.
7. *Guo Y., Wu C.Y., Thornton C.* The effects of air and particle density difference on segregation of powder mixtures during die filling // *Chem. Eng. Sci.*, 2011, vol. 66, pp. 661–673.
8. *Beeley P.R.* Foundry Technology. Oxford: Elsevier, 2001.
9. *Schwarze R., Rudert A., Tilch W., Bast J.* Rheological behavior of sand-binder mixtures measured by a coaxial cylinder rheometer // *I. Foundry Res.*, 2008, vol. 60, no. 3, pp. 2–6.
10. *Anderson T., Jackson R.* Fluid mechanical description of fluidized beds. Equations of motion // *Ind. Eng. Chem. Fundamen.*, 1967, vol. 6, pp. 527–539.
11. *Buyevich Y., Shchelchkova I.* Flow of dense suspensions // *Prog. Aerosp. Sci.*, 1978, vol. 18, pp. 121–150.
12. *Zhang D., Prosperetti A.* Momentum and energy equations for disperse two-phase flows and their closure for dilute suspensions // *Int. J. Multiphase Flow.*, 1997, vol. 23, pp. 425–453.
13. *Miller R., Singh J., Morris J.* Suspensions flow modeling for general geometries // *Chem. Eng. Sci.*, 2009, vol. 64, pp. 4597–4610.
14. *Crowe C., Schwarzkopf J., Sommerfeld M., Tsuji Y.* Multiphase Flows with Droplets and Particles. Boca Raton: CRC Press, 2011.
15. *Dontsov E.V., Peirce A.P.* Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fracture // *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 760, pp. 567–590.

16. *Nevskii Yu. A., Osipov A.N.* Slow gravitational convection of disperse systems in domain with inclined boundaries // *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 225–239.
17. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* *Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon, 1989.
18. *Shelukhin V.V., Neverov V.V.* Dense suspension flows: a mathematical model consistent with thermodynamics // *J. Fluids Eng. ASME*, 2022, vol. 144, iss. 021402, pp. 1–13.
19. *Kynch G.F.* A theory of sedimentation // *Trans. Faraday Soc.*, 1952, vol. 48, pp. 166–176.
20. *Bustos M.C., Concha F., Bürger R., Tory E.M.* *Sedimentation and Thickening Phenomenological Foundation and Mathematical Theory*. Dordrecht: Springer, 1999.
21. *Shelukhin V.V.* Thermodynamics of two-phase granular fluids // *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 2018, vol. 262, pp. 25–37.
22. *Krieger I.M., Dougherty T.* A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres // *Trans. Soc. Rheol.*, 1959, vol. 3, pp. 137–152.
23. *Ishii V., Mishima K.* Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations // *Nucl. Eng. & Des.*, 1984, vol. 82, pp. 107–126.
24. *Baumgarten A.S., Kamrin K.* A general fluid-sediment mixture model and constitutive theory validated in many flow regimes // *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 861, pp. 721–764.
25. *Acrivos A., Herbolzheimer E.* Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined walls // *J. Fluid Mech.*, 1979, vol. 92, pp. 435–457.
26. *Richardson J.F., Zaki W.N.* The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow // *Chem. Eng. Sci.*, 1954, vol. 3, pp. 65–73.
27. *Shelukhin V.V.* Quasistationary sedimentation with adsorption // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2005, vol. 46, iss. 4, pp. 513–522.

УДК 539.374

## К ТЕОРИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

© 2023 г. В. М. Садовский<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

\*e-mail: sadov@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 22.12.2022 г.

После доработки 01.03.2023 г.

Принята к публикации 01.03.2023 г.

На основе термомеханической модели пластической деформации упруго сжимаемой изотропно упрочняющейся среды получена система соотношений для описания пластических ударных волн конечной амплитуды, удовлетворяющая принципу максимального производства энтропии на фронте сильного разрыва. Проведена классификация допустимых ударноволновых переходов в рамках модели изотропного упрочнения при условии пластичности Мизеса.

*Ключевые слова:* пластичность, упрочнение, вариационное неравенство, сильный разрыв

DOI: 10.31857/S0032823523020133, EDN: UAWXSW

Проблема построения разрывных решений с ударными волнами конечной амплитуды в теории пластичности относится к числу нерешенных проблем механики. Основная причина здесь в том, что до настоящего времени окончательно не решен вопрос о представлении деформации среды в виде суперпозиции упругой и пластической составляющих, и поэтому не существует общепринятой геометрически нелинейной модели.

В геометрически линейном приближении полная система соотношений сильного разрыва для упругопластической среды Прандтля–Рейсса впервые была получена с помощью вспомогательной гипотезы о максимальной диссипации энергии на фронте разрыва [1]. Эта гипотеза применялась также к анализу диссипативных разрывов в необратимо сжимаемых упругопластических средах с кусочно-линейными поверхностями текучести [2, 3]. Ее математически строгим обоснованием послужил метод построения соотношений сильного разрыва на основе интегрального обобщения вариационного неравенства, связанного с принципом Мизеса максимума мощности диссипации энергии [4]. Исследование геометрически линейных моделей упрочняющихся сред проводилось в [5, 6]. Однако полученные в этих работах выражения для скоростей волн и уравнения, связывающие скачки скоростей и напряжений, пригодны лишь для анализа ударных волн малой амплитуды.

Альтернативный метод построения системы уравнений на поверхности разрыва в теории упруго-пластичности основан на приближении разрывного решения последовательностью решений модели вязкой среды, сглаживающей разрывы, при стремлении коэффициентов вязкости к нулю. Исследования в этом направлении активно ведутся А.Г. Куликовским с соавторами [7–9]. Метод вязкости применялся также к анализу одномерных движений пластической среды с плоскими волнами при конечных деформациях [10]. В случае плоского или пространственного напряженно-деформи-

рованного состояния реализация этого метода наталкивается на непреодолимые технические трудности.

Как оказалось, построить полную систему соотношений сильного разрыва в геометрически нелинейной теории, исходя только из интегрального обобщения дифференциальных уравнений модели, в принципе невозможно. Примером служит газовая динамика, где наряду с условиями для скачков функций на фронте ударной волны, полученными из интегральных законов сохранения, используется не связанное с основной системой условие положительности скачка энтропии, имеющее термодинамическую природу. Другие такие примеры приведены в работе [7]. Переходные процессы, протекающие на фронте разрыва, приходится рассматривать как самостоятельный объект моделирования. При этом проблема сводится к выбору адекватного способа построения модели, исходя из правдоподобных физико-механических гипотез или на основе формальных принципов неравновесной термодинамики.

В настоящей работе соотношения на ударных волнах конечной амплитуды анализируются в рамках упрощенной термомеханической модели динамики изотропно упрочняющейся среды с упругим изменением объема и пластическим формоизменением с помощью принципа максимального производства энтропии. При отсутствии упрочнения аналогичный метод анализа применялся в работе [11].

**1. Термодинамическое построение модели.** Деформация сплошной среды рассматривается относительно неподвижной декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$ . Уравнения движения и уравнение неразрывности в Эйлеровом описании имеют вид:

$$\rho \dot{v}_j = \sigma_{jk,k}, \quad \dot{\rho} = -\rho v_{k,k}, \quad \sigma_{jk} = -p \delta_{jk} + \tau_{jk} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $v_j$  – проекции вектора скорости,  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера,  $p = -\sigma_{jk} \delta_{jk} / 3$  – гидростатическое давление,  $\tau_{jk}$  – компоненты девiatorа тензора напряжений  $\sigma_{jk}$ . Принято правило суммирования по повторяющимся индексам, индекс после запятой означает частную производную по времени или по пространственной переменной, точка над символом – полную производную по времени.

Принципы термодинамики – уравнение баланса энергии и неравенство Клаузиуса–Дюгема, которое устанавливает баланс энтропии и, по существу, служит определением внутреннего производства энтропии  $s^i$  в элементе среды, записываются в виде:

$$\rho \dot{U} = \sigma_{jk} v_{j,k} - q_{k,k}, \quad \rho s^i = \rho \dot{s} + (q_k / T)_{,k} \geq 0, \quad (1.2)$$

где  $U$  и  $s$  – плотности внутренней энергии и полной энтропии,  $q_k$  – проекции вектора притока тепла,  $T$  – абсолютная температура.

Пренебрегая упругим формоизменением при развитых пластических деформациях, предположим, что термодинамическое состояние элемента полностью определяется тремя параметрами: плотностью  $\rho$ , характеризующей деформацию объема, энтропией  $s$  и параметром упрочнения  $\eta$ , который в случае изотропного упрочнения среды считается скалярным и неотрицательным параметром, равным нулю до наступления пластичности и неизменным в состоянии упругой разгрузки.

Обычно в качестве параметра изотропного упрочнения принимается работа пластической деформации или параметр накопленной пластической деформации Одкивиста. Обоснование такого выбора состоит лишь в том, что оба они монотонно возрастают в процессе упрочнения материала. Однако, строго говоря, введение в модель нового параметра состояния должно быть согласовано с принципами термодинамики необратимых процессов. Поэтому привлекать уравнение эволюции параметра из механических соображений, независимо от этих принципов, вообще говоря, некорректно. И в то же время, экспериментальные данные по изучению зависимости, например, предела текучести среды от работы пластической деформации или от параметра

Одквиста, могут быть с успехом использованы при построении функций состояния и при определении феноменологических коэффициентов модели.

Внутренняя энергия элемента среды  $U = U(\rho, s, \eta)$  представляет собой функцию состояния, следовательно,

$$q_{k,k} = -p v_{k,k} + \tau_{j,k} \xi_{jk} - \rho \left( \frac{\partial U}{\partial \rho} \dot{\rho} - \frac{\partial U}{\partial s} \dot{s} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \dot{\eta} \right),$$

где  $\xi_{jk} = (v_{j,k} + v_{k,j})/2 + \dot{\rho}/(3\rho)\delta_{jk}$  – компоненты тензора скоростей пластической деформации. С учетом уравнения неразрывности неравенство Клаузиуса–Дюгема преобразуется к виду:

$$\rho T \dot{s}^i = \tau_{jk} v_{j,k} + \left( p - \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \rho \left( T - \frac{\partial U}{\partial s} \right) \dot{s} - \rho \frac{\partial U}{\partial \eta} \dot{\eta} - T_{,k} \frac{q_k}{T} \geq 0$$

В силу независимости термодинамических параметров отсюда следуют система уравнений состояния  $p = \rho^2 \partial U / \partial \rho$ ,  $T = \partial U / \partial s$  и неравенство внутренней диссипации энергии

$$\rho T \dot{s}^i = \tau_{jk} \xi_{jk} - \rho \frac{\partial U}{\partial \eta} \dot{\eta} - T_{,k} \frac{q_k}{T} \geq 0 \quad (1.3)$$

Судя по правой части неравенства (1.3), систему обобщенных термодинамических сил в рассматриваемом необратимом процессе составляют величины  $\tau_{jk}$ ,  $\theta = \partial U / \partial \eta$  и  $T_{,k}/T$ , а соответствующие этой системе термодинамические потоки равны  $\xi_{jk}$ ,  $-\rho \dot{\eta}$  и  $-q_k$ . Считая обобщенные силы зависящими от потоков и от параметров состояния, можно определить диссипативную функцию  $\rho T \dot{s}^i = D(\xi_{jk}, -\rho \dot{\eta}, -q_k)$  (параметры состояния  $\rho$ ,  $s$  и  $\eta$  для краткости опущены).

Представим диссипативную функцию в виде суммы двух независимых слагаемых  $D_0(\xi_{jk}, -\rho \dot{\eta})$  и  $D_1(-q_k)$ , первое из которых характеризует процесс производства тепла в элементе среды за счет пластической деформации, а второе – тепловую диффузию. Для изотропной среды второе слагаемое может быть найдено в явной форме из закона теплопроводности Фурье:  $D_1 = q_k q_k / (\alpha T)$ , где  $\alpha(\rho, T)$  – коэффициент теплопроводности. Первое слагаемое является положительно-однородной функцией относительно потоков  $\xi_{jk}$  и  $-\rho \dot{\eta}$ , так как по определению пластичности при отсутствии вязких эффектов процесс деформации не зависит от масштаба времени. Это в точности означает, что при  $q_k = 0$  уравнение (1.3) допускает преобразование растяжения времени, и таким образом

$$D_0(\lambda \xi_{jk}, -\lambda \rho \dot{\eta}) = \lambda D_0(\xi_{jk}, -\rho \dot{\eta}) \quad \forall \lambda \geq 0$$

По теореме Эйлера для однородных функций

$$D_0 = \frac{\partial D_0}{\partial \xi_{jk}} \xi_{jk} - \frac{\partial D_0}{\partial (-\rho \dot{\eta})} \rho \dot{\eta}$$

В силу независимости термодинамических потоков из уравнения (1.3) следует система определяющих уравнений:

$$\tau_{jk} = \frac{\partial D_0}{\partial \xi_{jk}}, \quad \theta = \frac{\partial D_0}{\partial (-\rho \dot{\eta})}$$

Такие уравнения выполняются в области дифференцируемости функции  $D_0$ , однако из-за однородности она не является дифференцируемой по крайней мере в нуле про-

странства термодинамических потоков. Предполагая выпуклость  $D_0$  по совокупности аргументов, систему определяющих уравнений можно представить в обобщенной форме, допускающей отсутствие производных:

$$(\tau_{jk}, \theta) \in \partial D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) \quad (1.4)$$

Здесь  $\partial D_0$  обозначает субдифференциал выпуклой функции – множество нормалей опорных гиперплоскостей к надграфику функции  $D_0$  в данной точке пространства. Более строго, субдифференциал представляет собой следующее подмножество пространства термодинамических сил:

$$\begin{aligned} \partial D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) &= \left\{ (\tilde{\tau}_{jk}, \tilde{\theta}) \mid D_0(\xi_{jk}^*, -\rho\dot{\eta}^*) - D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) \geq \right. \\ &\left. \geq \tilde{\tau}_{jk}(\xi_{jk}^* - \xi_{jk}) - \rho\tilde{\theta}(\dot{\eta}^* - \dot{\eta}) \quad \forall \xi_{jk}^*, \forall \dot{\eta}^* \right\} \end{aligned}$$

Заметим, что из-за недифференцируемости диссипативных функций в теории пластичности понятие субдифференциала играет исключительно важную роль. Впервые оно применялось П.П. Мосоловым и В.П. Мясниковым при исследовании модели жесткопластической среды (см. [11]).

По определению субдифференциала включение (1.4) эквивалентно уравнению

$$\tau_{jk}\xi_{jk} - \rho\theta\dot{\eta} - D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) = \sup_{\xi_{jk}^*, \dot{\eta}^*} \left( \tau_{jk}\xi_{jk}^* - \rho\theta\dot{\eta}^* - D_0(\xi_{jk}^*, -\rho\dot{\eta}^*) \right),$$

правая часть которого есть преобразование Юнга функции  $D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta})$ . Можно показать, что в силу однородности  $D_0$  преобразование Юнга оказывается равным индикаторной функции

$$\delta_F(\tau_{jk}, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\tau_{jk}, \theta) \in F \\ +\infty, & \text{если } (\tau_{jk}, \theta) \notin F \end{cases}$$

выпуклого и замкнутого множества допустимых состояний в пространстве термодинамических сил

$$F = \left\{ (\tilde{\tau}_{jk}, \tilde{\theta}) \mid \tilde{\tau}_{jk}\xi_{jk}^* - \rho\tilde{\theta}\dot{\eta}^* \leq D_0(\xi_{jk}^*, -\rho\dot{\eta}^*) \quad \forall \xi_{jk}^*, \forall \dot{\eta}^* \right\}$$

Это следует из цепочки легко проверяемых равенств:

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda\xi_{jk}^*, \lambda\dot{\eta}^*} \left( \tau_{jk}\lambda\xi_{jk}^* - \rho\theta\lambda\dot{\eta}^* - D_0(\lambda\xi_{jk}^*, -\rho\lambda\dot{\eta}^*) \right) = \\ &= \sup_{\lambda \geq 0} \lambda \sup_{\xi_{jk}^*, \dot{\eta}^*} \left( \tau_{jk}\xi_{jk}^* - \rho\theta\dot{\eta}^* - D_0(\xi_{jk}^*, -\rho\dot{\eta}^*) \right) = \delta_F(\tau_{jk}, \theta) \end{aligned}$$

Граница множества  $F$  описывает поверхность текучести, точки которой отвечают пластическому состоянию упрочняющегося материала.

По свойству инволютивности преобразования Юнга диссипативная функция  $D_0$  равна преобразованию Юнга индикаторной функции, то есть

$$D_0(\xi_{jk}, -\rho\dot{\eta}) = \sup_{(\tilde{\tau}_{jk}, \tilde{\theta}) \in K} \left( \tilde{\tau}_{jk}\xi_{jk} - \rho\tilde{\theta}\dot{\eta} \right)$$

Отсюда следует двойственная формулировка системы определяющих уравнений (1.4) в виде вариационного неравенства:

$$-(\tilde{\tau}_{jk} - \tau_{jk})\xi_{jk} + \rho(\tilde{\theta} - \theta)\dot{\eta} \geq 0, \quad (\tau_{jk}, \theta) \in F, \quad \forall (\tilde{\tau}_{jk}, \tilde{\theta}) \in F \quad (1.5)$$

Дифференциальные уравнения (1.1), (1.2) совместно с законом теплопроводности Фурье:  $q_k = -\alpha T_k$ , и вариационным неравенством (1.5) составляют замкнутую термомеханическую модель сжимаемой пластической среды. Так как тензоры с компонентами  $\check{\tau}_{jk}$  и  $\tau_{jk}$  являются девиаторами (для них выполняется условие  $\check{\tau}_{ik}\delta_{jk} = 0$ ), то неравенство (1.5) можно упростить, заменив  $\xi_{jk}$  на  $v_{j,k}$ . Для определенности необходимо задать конкретный вид функции состояния  $U(\rho, s, \eta)$  и множества допустимых состояний  $F(\rho, s, \eta)$ . В случае изотропной среды множество  $F$  задается на девиаторной плоскости  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$  при помощи условия пластичности общего вида:

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \leq \kappa(\rho, T, \theta)$$

Здесь  $\tau_k$  – главные значения тензора  $\tau_{jk}$ ,  $\kappa$  – предел текучести материала,  $f$  – выпуклая, неотрицательная и симметричная относительно аргументов функция текучести. Функция  $f$  может быть выбрана неоднозначно, и простейшим вариантом выбора является положительно однородная функция Минковского [4]. Предел текучести  $\kappa$  должен быть вогнутой функцией по  $\theta$ , чтобы обеспечить выпуклость множества  $F$  в пространстве термодинамических сил.

В наиболее общем случае функция текучести представима в виде  $f = \max(f_1, f_2, \dots, f_p)$  через систему непрерывно-дифференцируемых выпуклых и положительно однородных функций  $f_l(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ . Применяя теорему Куна–Таккера, можно привести (1.5) к системе уравнений ассоциированного закона течения:

$$\xi_{jk} = \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \tau_{jk}}, \quad \rho \dot{\eta} = \sum_{l=1}^p \lambda_l \frac{\partial \kappa}{\partial \theta},$$

где  $\lambda_l$  – множители Лагранжа, равные нулю, если  $f_l < \kappa$ , и неотрицательные, если  $f_l = \kappa$ . Отсюда в силу теоремы Эйлера для однородных функций:

$$\tau_{jk} \xi_{jk} = \sum_{l=1}^p \lambda_l \kappa, \quad \rho \dot{\eta} = \tau_{jk} \xi_{jk} \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \theta}$$

С учетом полученного уравнения эволюции параметра упрочнения  $\eta$  неравенство внутренней диссипации энергии (1.3) преобразуется к виду:

$$\rho T \dot{s}^i = \tau_{jk} \xi_{jk} \left( 1 - \theta \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \theta} \right) + D_1(q_k) \geq 0,$$

и, таким образом, функция  $\kappa(\rho, T, \theta)$  должна удовлетворять следующим условиям термодинамической корректности модели:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} \leq 0, \quad \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \theta} \leq \frac{1}{\theta}$$

В модели линейного упрочнения, когда  $\kappa = \kappa_0(\rho, T) + \beta(\rho, T)\theta$ , условия корректности автоматически выполняются при  $\beta \geq 0$ . Пластическое разупрочнение материала, которое сопровождается падением предела текучести с ростом пластической деформации, недопустимо. Условие на вторую производную предела текучести по параметру  $\theta$  может, по-видимому, нарушаться, но возникающее при этом вариационное неравенство относится к теоретически более сложному случаю из-за невыпуклости ограничений на допустимые состояния. Для исследования более широкого круга термомеханических процессов, включая деформационное разупрочнение материала, служат модели, учитывающие вязкие эффекты.

**2. Соотношения сильного разрыва.** При эйлеровом описании движения приведение определяющих уравнений к дивергентной форме осуществляется с помощью формулы

$$\rho \dot{w} = (\rho w)_{,t} + (\rho v_k w)_{,k},$$

которая в силу уравнения неразрывности справедлива для любой дифференцируемой функции  $w(t, x_k)$ . Дивергентная форма позволяет получить интегральное обобщение модели на класс решений с ударными волнами.

Считая, что на фронте ударноволнового перехода можно пренебречь влиянием теплопроводности среды, рассмотрим далее адиабатическое приближение модели с  $q_k = 0$ . В этом случае дивергентные аналоги уравнений движения, неразрывности и баланса энергии принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} (\rho v_j)_{,t} + (\rho v_k v_j - \sigma_{jk})_{,k} &= 0, & \rho_{,t} + (\rho v_k)_{,k} &= 0 \\ (\rho E)_{,t} + (\rho v_k E)_{,k} &= (\sigma_{jk} v_j)_{,k}, & E &= \frac{v_k v_k}{2} + U \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для давления, плотности, температуры, энтропии и параметров, характеризующих изотропное упрочнение, по обе стороны фронта волны выполняются уравнения

$$p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial s}, \quad \theta = \frac{\partial U}{\partial \eta} \quad (2.2)$$

Вариационное неравенство (1.5), описывающее пластическую деформацию среды, преобразуется к виду:

$$(\rho s)_{,t} + (\rho v_k s)_{,k} \geq \frac{\tilde{\tau}_{jk}}{T} v_{j,k} - \frac{\tilde{\theta}}{T} ((\rho \eta)_{,t} + (\rho v_k \eta)_{,k}) \quad (2.3)$$

Варьируемые функции (термодинамические силы)  $\tilde{\tau}_{jk}$  и  $\tilde{\theta}$  далее выбираются так, чтобы удовлетворить условию пластичности:  $f(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3) \leq \kappa(\rho, T, \tilde{\theta})$  и чтобы функции  $\tilde{\tau}_{jk}/T$  и  $\tilde{\theta}/T$  оставались непрерывно-дифференцируемыми при переходе через фронт разрыва, на котором температура меняется скачком. Это требование необходимо, чтобы после умножения обеих частей неравенства (2.3) на неотрицательную гладкую финитную функцию и интегрирования по пространственно-временной области можно было корректно применить формулу Грина, сбросив производные по времени и по пространственным переменным с разрывных функций на пробные. Такая процедура преобразования вариационного неравенства подробно описана в [4].

Интегральное обобщение (2.1) приводит к следующей системе уравнений на фронте разрыва:

$$m[v_j] = -[\sigma_{jk}]n_k, \quad [m] = 0, \quad m[E] = -[\sigma_{jk} v_j]n_k \quad (2.4)$$

Здесь квадратные скобки означают скачок функции:  $[w] = w^+ - w^-$  ( $w^\pm$  — односторонние пределы  $w$  на фронте),  $m = \rho^+(c - v_n^+) = \rho^-(c - v_n^-)$  — поток массы,  $c$  — скорость движения фронта в направлении вектора нормали  $n_k$ ,  $v_n = v_k n_k$  — нормальная проекция массовой скорости.

Из интегрального обобщения вариационного неравенства (2.3) получим

$$m[s] \geq -\frac{\tilde{\tau}_{jk}}{T} [v_j]n_k - \frac{\tilde{\theta}}{T} m[\eta] \quad (2.5)$$

С помощью легко проверяемых формул

$$[w^2] = 2[w]w^0, \quad [uw] = [u]w^0 + u^0[w],$$

в которых  $w^0 = (w^+ + w^-)/2$ , из системы (2.4) выводится уравнение

$$m[U] = -\sigma_{jk}^0[v_j]n_k \quad (2.6)$$

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$[U] = -p^\lambda[1/\rho] + T^\lambda[s] + \theta^\lambda[\eta],$$

где  $w^\lambda = w^0 + \lambda[w]$  – выпуклая комбинация односторонних пределов  $w^\pm$  с подходящим значением  $\lambda \in (-1/2, 1/2)$ . Подстановка  $[U]$  в (2.6) с учетом равенства  $m[1/\rho] = -[v_n]$  приводит к уравнению

$$mT^0[s] = -\tau_{jk}^0[v_j]n_k - m\theta^0[\eta] + mQ,$$

в котором  $Q = \lambda([p][1/\rho] - [T][s] - [\theta][\eta])$  – квадратичная относительно скачков параметров состояния часть тепловой энергии. Для  $Q$  справедливо также выражение

$$Q = -p^0[1/\rho] + \theta^0[\eta] + T^0[s] - [U]$$

Полученное уравнение позволяет представить неравенство (2.5) в виде:

$$(\tau_{jk}^* - \tau_{jk}^0)[v_j]n_k + m(\theta^* - \theta^0)[\eta] + mQ \geq 0, \quad (2.7)$$

где  $\tau_{jk}^* = T^0\tilde{\tau}_{jk}/T$  и  $\theta^* = T^0\tilde{\theta}/T$ .

На фронте разрыва односторонние пределы термодинамических сил подчиняются ограничениям  $(\tau_{jk}^\pm, \theta^\pm) \in F^\pm$ , поэтому  $(\tau_{jk}^0, \theta^0)$  принадлежит множеству  $F^0 = (F^+ + F^-)/2$ . Можно показать, что область варьирования  $(\tau_{jk}^*, \theta^*)$ , то есть множество  $T^0(F^+/T^+ \cap F^-/T^-)$ , содержится в  $F^0$ . Для этого достаточно представить  $(\tau_{jk}^*, \theta^*)$  в виде суммы:

$$(\tau_{jk}^*, \theta^*) = \frac{T^+}{T^+ + T^-} (\tau_{jk}^*, \theta^*) + \frac{T^-}{T^+ + T^-} (\tau_{jk}^*, \theta^*)$$

В этом представлении первое слагаемое принадлежит  $F^+/2$ , так как  $(\tau_{jk}^*, \theta^*) \in T^0F^+/T^+$ , а второе слагаемое принадлежит  $F^-/2$ , так как  $(\tau_{jk}^*, \theta^*) \in T^0F^-/T^-$ . Следовательно,  $(\tau_{jk}^*, \theta^*) \in F^0$ .

Расширим в (2.7) область варьирования  $(\tau_{jk}^*, \theta^*)$  до множества  $F^0$  и потребуем выполнения более строгого неравенства, в которое входят только линейные относительно скачков слагаемые:

$$(\tau_{jk}^* - \tau_{jk}^0)[v_j]n_k + m(\theta^* - \theta^0)[\eta] \geq 0, \quad (\tau_{jk}^0, \theta^0), (\tau_{jk}^*, \theta^*) \in F^0 \quad (2.8)$$

Заметим, что из (2.7) после подстановки  $\tau_{jk}^* = \tau_{jk}^0$  и  $\theta^* = \theta^0$  следует условие  $Q \geq 0$ , которое играет роль критерия реализуемости разрыва, аналогичного критерию положительности скачка энтропии на ударных волнах в газовой динамике. И что неравенство (2.8) гарантирует максимальное значение скачка энтропии  $[s]$  на множестве допустимых состояний  $F^0$ .

Вариационное неравенство (2.8), совместно с системой уравнений (2.4) и уравнениями состояния (2.2), образует замкнутую математическую модель сильного разрыва в изотропно упрочняющейся пластической среде. Модель позволяет исследовать классы разрывных решений при различных условиях пластичности. Из (2.8) в общем случае вытекает, что движущиеся разрывы возможны, только если в пространстве тер-

модинамических сил точка  $(\tau_{jk}^0, \theta^0)$  принадлежит границе множества  $F^0$ , а  $(\tau^\pm, \theta^\pm)$  являются граничными точками  $F^\pm$ , соответственно. Действительно, если  $(\tau_{jk}^0, \theta^0)$  – внутренняя точка  $F^0$ , то в силу произвольности вариации выполняется система уравнений:

$$[v_j]n_k + [v_k]n_j = \frac{2}{3}[v_n]\delta_{jk}, \quad [\eta] = 0$$

Полагая за счет поворота осей координат  $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$ , получим условие непрерывности вектора скорости на фронте. При отсутствии скачка скорости из уравнения неразрывности и условия  $[\rho] \neq 0$  следует, что  $m = 0$  и  $v_1 = c$ . В данном случае реализуется контактный разрыв, неподвижный относительно среды. На фронте контактного разрыва непрерывен вектор напряжений, проекциями которого в системе координат, связанной с фронтом, являются компоненты  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  и  $\sigma_{13}$ . Остальные компоненты тензора напряжений могут быть разрывными. Допускается также скачок параметра упрочнения  $\eta$ . Разрывы такого рода реализуются, например, на границе раздела двух сред.

**3. Условие пластичности Мизеса.** На основе простого тождества [2]:

$$\frac{\kappa^+ \kappa^-}{4} \left[ \frac{\tau_{jk}}{\kappa} \right] \left[ \frac{\tau_{jk}}{\kappa} \right] = \frac{\kappa^0}{2\kappa^+} \tau_{jk}^+ \tau_{jk}^+ + \frac{\kappa^0}{2\kappa^-} \tau_{jk}^- \tau_{jk}^- - \tau_{jk}^0 \tau_{jk}^0$$

доказывается, что при условии пластичности Мизеса с функцией текучести

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \sqrt{(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)/2} = \sqrt{\tau_{jk} \tau_{jk}/2}$$

компоненты тензора  $\tau_{jk}/\kappa$  на фронте диссипативной ударной волны непрерывны.

Поэтому тензоры напряжений  $\sigma_{jk}^\pm$  по обе стороны поверхности разрыва соосны. В результате поворота координатной системы к главным осям этих тензоров уравнения (2.4) преобразуются к виду:

$$m[v_j] = -[\sigma_j]n_j, \quad m^2[1/\rho] = [\sigma_j]n_j^2, \quad 2m^2[U] = [\sigma_j^2]n_j^2 \quad (3.1)$$

С учетом обозначений  $2\tau_{jk}^* = \tilde{\tau}_{jk}^+ + \tilde{\tau}_{jk}^-$  и  $2\theta^* = \tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-$  вариационное неравенство (2.8) приводится к эквивалентной задаче минимизации при ограничениях  $(\tilde{\tau}_{jk}^\pm, \tilde{\theta}^\pm) \in F^\pm$  линейной функции

$$l(\tilde{\tau}_{jk}^\pm, \tilde{\theta}^\pm) = -(\tilde{\tau}_{jk}^+ + \tilde{\tau}_{jk}^-)([\sigma_j + \sigma_k]n_j n_k - 2[\sigma_l]n_l^2 \delta_{jk}/3) + 2m^2(\tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-)[\eta],$$

причем минимум этой функции достигается, когда  $\tilde{\tau}_{jk}^\pm = \tau_{jk}^\pm$  и  $\tilde{\theta}^\pm = \theta^\pm$ . Соответствующий лагранжиан

$$L(\tilde{\tau}_{jk}^\pm, \tilde{\theta}^\pm) = l(\tilde{\tau}_{jk}^\pm, \tilde{\theta}^\pm) + 2\lambda^+ (f(\tilde{\tau}_{jk}^+) - \kappa^+) + 2\lambda^- (f(\tilde{\tau}_{jk}^-) - \kappa^-)$$

включает в себя множители Лагранжа  $\lambda^\pm \geq 0$ , удовлетворяющие условиям дополненности:  $\lambda^\pm (f(\tilde{\tau}_{jk}^\pm) - \kappa^\pm) = 0$ . В силу теоремы Куна–Таккера решение задачи минимизации удовлетворяет системе уравнений

$$[\sigma_j + \sigma_k]n_j n_k - \frac{2}{3}[\sigma_l]n_l^2 \delta_{jk} = \lambda^\pm \frac{\tau_j}{\kappa} \delta_{jk}, \quad m^2[\eta] = \lambda^\pm \frac{\partial \kappa^\pm}{\partial \theta}, \quad (3.2)$$

которая получена из условия минимума лагранжиана с учетом равенства

$$\left. \frac{\partial f(\bar{\tau}_{jk})}{\partial \tau_{jk}} \right|_{\bar{\tau}_{jk} = \tau_j \delta_{jk}} = \frac{\tau_j}{2\kappa} \delta_{jk}$$

Анализируя уравнения (3.2), можно показать, что в изотропно упрочняющейся пластической среде с условием пластичности Мизеса наряду с контактными разрывами возможны два типа диссипативных ударных волн: продольные волны, распространяющиеся вдоль главных осей, и квазипоперечные волны, направления движения которых лежат в главных плоскостях тензора напряжений. При пространственной ориентации вектора нормали к фронту относительно главных осей, когда  $n_1 n_2 n_3 \neq 0$ , движущиеся разрывы невозможны. В этом случае для всех индексов  $j \neq k$  выполняются уравнения  $[\sigma_j + \sigma_k] = 0$ , из которых следует непрерывность решения.

В общем случае в силу уравнений (3.2) имеют место равенство  $\lambda^+ = \lambda^-$  и условие непрерывности производной  $\partial \kappa / \partial \theta$  на фронте разрыва. Продольные волны, движущиеся вдоль оси  $x_1$  ( $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$ ), описываются системой:

$$\frac{\tau_1}{\kappa} = \frac{\pm 2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\tau_2}{\kappa} = \frac{\tau_3}{\kappa} = -\frac{\tau_1}{2\kappa}, \quad [\sigma_1] \frac{\tau_1}{\kappa} > 0 \quad (3.3)$$

Неравенство в (3.3) (условие положительности множителя Лагранжа) обеспечивает диссипативность волны. Знак “+” в (3.3) соответствует ударной волне растяжения ( $[\sigma_1] > 0$ ), знак “-” соответствует волне сжатия ( $[\sigma_1] < 0$ ). С помощью уравнений (3.1) и (3.2) выводится уравнение для скачка параметра упрочнения:

$$[\eta] = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{\rho} \right] \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}$$

Из системы (3.1) с учетом равенств

$$[\sigma_j] = -[p] + [\kappa] \tau_j / \kappa, \quad \sigma_j^0 = -p^0 + \kappa^0 \tau_j / \kappa \quad (3.4)$$

выводится уравнение ударной адиабаты:

$$[U] = -p^0 \left[ \frac{1}{\rho} \right] + \frac{\kappa^0 [\eta]}{\partial \kappa / \partial \theta} \quad (3.5)$$

Для скачка плотности на фронтах продольных волн растяжения и сжатия справедлива формула:

$$m^2 \left[ \frac{1}{\rho} \right] = -[p] \pm \frac{2[\kappa]}{\sqrt{3}}$$

Если нормальный вектор к фронту волны лежит в главной плоскости тензора напряжений и не совпадает с главными направлениями, то реализуется квазипоперечная волна. Пусть, например,  $n_1 n_3 \neq 0$  и  $n_2 = 0$ , тогда из системы (3.2) следует уравнение  $[\sigma_1 + \sigma_3] = 0$ , которое означает, что в плоскости  $x_1, x_3$  для скачков напряжений реализуется состояние чистого сдвига. Остальные уравнения системы, принимая во внимание, что  $[\sigma_3] = -[\sigma_1]$  и  $n_1^2 + n_2^2 = 1$ , можно привести к виду:

$$\frac{2}{3}(1 + n_1^2)[\sigma_1] = \lambda \frac{\tau_1}{\kappa}, \quad -\frac{2}{3}(1 + n_3^2)[\sigma_1] = \lambda \frac{\tau_3}{\kappa}, \quad m^2[\eta] = \lambda \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}$$

Отсюда в силу условия пластичности выполняются равенства

$$\frac{\tau_1}{\kappa} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \frac{1 + n_1^2}{\sqrt{1 - n_1^2 n_3^2}}, \quad \frac{\tau_3}{\kappa} = -\frac{1 + n_3^2}{1 + n_1^2} \frac{\tau_1}{\kappa} \quad (3.6)$$

Из уравнения  $[\sigma_1 + \sigma_3] = 0$  с привлечением (3.4) и (3.6) выводятся формулы для скачков давления и напряжений:

$$[p] = \pm \frac{[\kappa]}{2\sqrt{3}} \frac{n_1^2 - n_3^2}{\sqrt{1 - n_1^2 n_3^2}}, \quad [\sigma_1] = -[\sigma_3] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{[\kappa]}{\sqrt{1 - n_1^2 n_3^2}}$$

Для скачков плотности и параметра упрочнения справедливы формулы

$$m^2 \left[ \frac{1}{\rho} \right] = -3[p], \quad m^2[\eta] = [\kappa] \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}$$

Уравнение баланса энергии для квазипоперечных волн приводится к уравнению ударной адиабаты (3.5).

При  $n_1^2 = n_3^2$  квазипоперечная волна превращается в поперечную волну, на фронте которой давление и плотность непрерывны. Разрывны напряжения и параметр упрочнения.

Заметим, что в случае постоянного предела текучести из вышеперечисленных диссипативных разрывов допускаются только продольные ударные волны, на которых непрерывен девиатор тензора напряжений, а давление и плотность среды разрывны.

Для детального анализа соотношений сильного разрыва в изотропно упрочняющейся пластической среде необходимо построить уравнение состояния материала и зависимость предела текучести от параметров состояния на основе имеющихся экспериментальных данных (см. [13, 14]).

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 106–116.
2. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Рычков В.А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред // Проблемы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. к 60-летию акад. В.П. Мясникова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 1996. С. 116–127.
3. Буренин А.А., Дудко О.В., Семенов К.Т. Об условиях существования поверхностей разрывов необратимых деформаций в упругопластических средах // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 5. С. 176–185.
4. Садовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997. 208 с.
5. Садовский В.М. К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 5. С. 166–172.
6. Садовский В.М. Упругопластические волны сильного разрыва в линейно упрочняющихся средах // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 104–111.
7. Куликовский А.Г. О многопараметрических фронтах сильных разрывов в механике сплошных сред // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 531–550.
8. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Ударные волны в упругопластических средах со структурой, определяемой процессом релаксации напряжений // Тр. МИАН. 2015. Т. 289. С. 178–194.
9. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Исследование разрывов в решениях уравнений упругопластической среды Прандтля–Рейсса // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 4. С. 650–663.

10. Садовский В.М. К исследованию структуры поперечных ударных волн конечной амплитуды в пластической среде // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 40–49.
11. Садовский В.М. К теории ударных волн в сжимаемых пластических средах // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 87–95.
12. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
13. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е. Экспериментальные профили ударных волн в конденсированных веществах. М.: Физматлит, 2008. 248 с.
14. Канель Г.И. Ударные волны в физике твердого тела. М.: Физматлит, 2018. 208 с.

### On the Theory of Shock Waves in Isotropic Hardening Plastic Media

V. M. Sadovskii<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup>Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia

<sup>#</sup>e-mail: sadov@icm.krasn.ru

Based on the thermomechanical model of plastic deformation of an elastically compressible isotropic hardening medium, the system of relations for describing plastic shock waves of finite amplitude is obtained, which satisfies the maximum entropy production principle at the front of strong discontinuity. A classification of admissible shock-wave transitions is performed within the framework of the model of isotropic hardening under the von Mises plasticity condition.

*Keywords:* plasticity, hardening, variational inequality, strong discontinuity

### REFERENCES

1. Bykovtsev G.I., Kretova L.D. Shock wave propagation in elastic-plastic media // JAMM, 1972, vol. 36, no. 1, pp. 94–103.
2. Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Rychkov V.A. Surfaces of velocity discontinuities in the dynamics of irreversibly compressible media // Problems of Continuum Mechanics (Problemy mekhaniki sploshnyh sred: Sb. nauch. tr.). Vladivostok: IACP FEB RAS, 1996. pp. 116–127. (in Russian)
3. Burenin A.A., Dudko O.V., Semenov K.T. Conditions for the existence of discontinuity surfaces of irreversible strains in elastoplastic media // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2009, vol. 50, no. 5, pp. 878–885.
4. Sadovskii V.M. Discontinuous Solutions in Dynamic Elastic-Plastic Problems. Moscow: Fizmatlit, 1997. 208 p. (in Russian)
5. Sadovskii V.M. Toward a theory of the propagation of elastoplastic waves in strain-hardening media // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 1994, vol. 35, no. 5, pp. 798–804.
6. Sadovskii V.M. Elastoplastic waves of strong discontinuity in linearly hardening media // Mech. Solids, 1997, vol. 32, no. 6, pp. 88–94.
7. Kulikovskii A.G. Multi-parameter fronts of strong discontinuities in continuum mechanics // J. Appl. Math. Mech., 2011, vol. 75, no. 4, pp. 378–389.
8. Kulikovskii A.G., Chugainova A.P. Shock waves in elastoplastic media with the structure defined by the stress relaxation process // Proc. Steklov Inst. Math., 2015, vol. 289, pp. 167–182.
9. Kulikovskii A.G., Chugainova A.P. Study of discontinuities in solutions of the Prandtl–Reuss elastoplasticity equations // Comput. Math. Math. Phys., 2016, vol. 56, no. 4, pp. 637–649.
10. Sadovskii V.M. To the analysis of the structure of finite-amplitude transverse shock waves in a plastic medium // Mech. Solids, 2003, vol. 38, no. 6, pp. 31–39.
11. Sadovskii V.M. On the theory of shock waves in compressible plastic media // Mech. Solids, 2001, vol. 36, no. 5, pp. 67–74.
12. Mosolov P.P., Myasnikov V.P. Mechanics of Rigid-Plastic Media. Moscow: Nauka, 1981. 208 p. (in Russian)
13. Kanel G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. Experimental Profiles of Shock Waves in Condensed Matter. Moscow: Fizmatlit, 2008. 248 p. (in Russian)
14. Kanel G.I. Shock Waves in Solid State Physics. Moscow: Fizmatlit, 2018. 208 p. (in Russian)

УДК 519.958:531.33:517.956.8

## УПРУГИЕ ВОЛНЫ, ЗАХВАЧЕННЫЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСОЙ С ЗАЩЕМЛЕННЫМИ БОКОВЫМИ СТОРОНАМИ И ИЗЛОМАННЫМ ТОРЦОМ

© 2023 г. С. А. Назаров<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 24.12.2022 г.

После доработки 15.02.2023 г.

Принята к публикации 15.02.2023 г.

Указаны несколько геометрических условий захвата упругих волн однородной изотропной полосой с одной или двумя защемленными боковыми сторонами и достаточно произвольно искривленным торцом. Найдены формы резонатора, обеспечивающие любое заданное наперед количество линейно независимых захваченных волн.

*Ключевые слова:* однородная изотропная полуполоса, искривленный торец, условия свободного и защемленного краев, захваченные волны, собственные частоты

DOI: 10.31857/S0032823523020108, EDN: TZWXRA

**1. Постановка задачи.** Пусть  $\Pi$  – единичная полоса и  $\Pi_+ = \{x = (x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 \in (0, 1)\}$  – ее полубесконечная часть (далее – полуполоса). Собственные колебания плоского однородного изотропного тела  $\Omega \subset \Pi$ , содержащего полуполосу  $\Pi_+$  (рис. 1), описываются системой дифференциальных уравнений

$$-\partial_1 \sigma_{1k}(u; x) - \partial_2 \sigma_{2k}(u; x) = \Lambda u_k(x); \quad x \in \Omega, \quad k = 1, 2 \quad (1.1)$$

Здесь  $\partial_j = \partial/\partial x_j$  при  $j = 1, 2$ ,  $\sigma_{jk}$  – декартовы компоненты тензора напряжений, порожденного вектором смещений  $u = (u_1, u_2)$

$$\sigma_{jk}(u) = 2\mu \epsilon_{jk}(u) + \lambda \delta_{j,k} (\epsilon_{11}(u) + \epsilon_{22}(u)); \quad \epsilon_{jk}(u) = \frac{1}{2} (\partial_j u_k + \partial_k u_j)$$

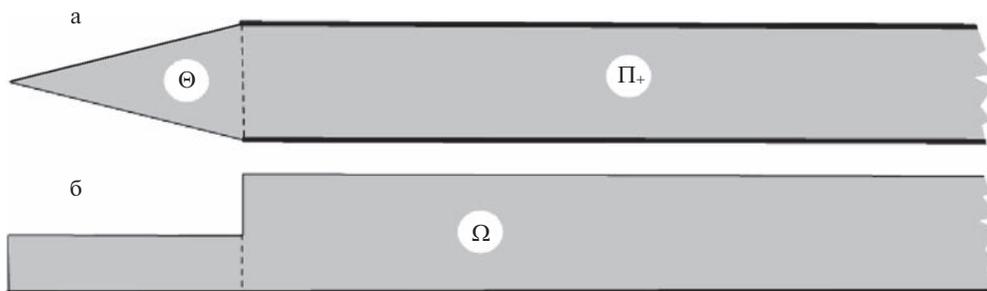
Кроме того,  $\lambda \geq 0$  и  $\mu > 0$  – постоянные Ламе,  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера,  $\Lambda = \rho \omega^2$  – спектральный параметр, а  $\omega > 0$  – частота гармонических во времени колебаний и  $\rho > 0$  – постоянная плотность упругого тела. Граница  $\Gamma = \partial\Omega$  разбита на участки  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ , на которых поставлены условия Дирихле (жесткого защемления) и Неймана (свободного края)

$$u(x) = 0; \quad x \in \Gamma_D \quad (1.2)$$

$$\sigma^{(n)}(u; x) = 0; \quad x \in \Gamma_N \quad (1.3)$$

При этом  $n = (n_1, n_2)$  – единичный вектор внешней нормали и  $\sigma^{(n)}(u)$  – вектор нормальных напряжений с декартовыми компонентами

$$\sigma_j^{(n)}(u) = n_1 \sigma_{1j}(u) + n_2 \sigma_{2j}(u); \quad j = 1, 2$$



**Рис. 1.** Упругие волноводы. Резонатор  $\Theta$  отделен штрих-пунктирной линией, а защемленные участки изображены полужирными линиями.

Далее рассматриваем две ситуации, с которыми связываем индексы  $J = 1$  и  $J = 2$  соответственно, а именно

$$J = 1: \mathfrak{w}_0 \cup \mathfrak{w}_1 \subset \Gamma_D \subset \{x : x_2 = 0, 1\}$$

$$J = 2: \mathfrak{w}_0 \subset \Gamma_D \subset \{x : x_2 = 0\}$$

В первой ситуации закреплены обе ( $p = 0, 1$ ) боковые стороны  $\mathfrak{w}_p = \{x : x_1 > 0, x_2 = p\}$  полуполосы  $\Pi_+$ , но во второй — только нижняя  $\mathfrak{w}_0$ , расположенная на оси абсцисс. Множество  $\Theta = \Omega \setminus \bar{\Pi}_+$  называем резонатором упругого волновода  $\Omega$ , а границу  $\mathfrak{w} = \partial\Theta \setminus \partial\Pi_+$  — его торцом. Торцевая часть может быть полностью свободна от внешних воздействий (рис. 1,а), но допускается ее частичное закрепление (рис. 1,б) вдоль отрезков на  $\partial\Pi$  при  $J = 1$  или только на оси абсцисс при  $J = 2$ .

Задачи вида (1.1)–(1.3) возникают при изучении явления пограничного слоя около краев листовой прокладки между параллельными фланцами или цилиндрической накладкой на абсолютно жесткий профиль. Установлено [1], что решающую роль при образовании моделей пониженной размерности собственных колебаний упомянутых объектов играет наличие или отсутствие захваченных упругих волн в волноводе  $\Omega$ , т.е. решений задачи (1.1)–(1.3), исчезающих на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Возникновение таких волн провоцирует эффект локализации мод собственных колебаний тонкой трехмерной пластины около ее кромки. Именно поиску захваченных волн и посвящена настоящая статья.

**2. Инструментарий спектрального анализа.** Вариационная постановка задачи (1.1)–(1.3) апеллирует к интегральному тождеству [2, 3]

$$E(u, \psi; \Omega) = \Lambda(u, \psi)_\Omega; \quad \psi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_D) \quad (2.1)$$

При этом  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега  $L_2(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$  — пространство Соболева функций, подчиненных условию Дирихле (1.2), а  $E(u, u; \Omega)$  — удвоенная упругая энергия, запасенная телом  $\Omega$

$$E(u, u; \Omega) = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^2 \sigma_{jk}(u; x) \epsilon_{jk}(u; x) dx = \\ = \int_{\Omega} \left( 2\mu \left( |\partial_1 u_1(x)|^2 + |\partial_2 u_2(x)|^2 \right) + \mu |\partial_2 u_1(x) + \partial_1 u_2(x)|^2 + \lambda |\partial_1 u_1(x) + \partial_2 u_2(x)|^2 \right) dx$$

$$E(u, \psi; \Omega) = \frac{1}{4}(E(u + \psi, u + \psi; \Omega) - E(u - \psi, u - \psi; \Omega))$$

Пространства скалярных и векторных функций не различаем в обозначениях.

Поскольку левая часть формулы (2.1) – положительно определенная замкнутая в пространстве  $H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$  билинейная форма, задаче (2.1) (или (1.1)–(1.3) в дифференциальной форме) ставится ([4], гл. 10 § 1) в соответствие положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор  $A$  в пространстве  $L^2(\Omega)$ . В работе [5] и далее в разд. 3 установлено, что непрерывным спектром  $\wp_c$  оператора  $A$  служит луч  $[\Lambda^\dagger, +\infty)$  с точкой отсечки

$$\Lambda^\dagger = \mu\pi^2 J^{-2} \quad \text{при} \quad J = 1, 2 \tag{2.2}$$

Не зависящая от продольной координаты  $x_1$  волна имеет вид

$$w^\dagger(x_2) = \sin(\pi J^{-1} x_2) e_{(1)} \tag{2.3}$$

Здесь  $e_{(k)} = (\delta_{k,1}, \delta_{k,2})$  – орт оси  $x_k, k = 1, 2$

Нижняя грань  $\underline{\wp}$  всего спектра  $\wp$  оператора задачи (2.1) находится согласно минимальному принципу ([4], теорема 10.2.1)

$$\underline{\wp} = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega; \Gamma_D) \setminus \{0\}} \frac{E(\psi, \psi; \Omega)}{\|\psi; L^2(\Omega)\|^2} \tag{2.4}$$

Если случилось, что правая часть соотношения (2.4) строго меньше  $\Lambda^\dagger$ , то дискретный спектр  $\wp_d$ , точки которого порождают захваченные волны в теле  $\Omega$ , непустой и  $\Lambda_1 = \underline{\wp}$  – первое (наименьшее) собственное число в нем. Наконец, при наличии в  $\wp_d$  нескольких точек все они находятся при помощи максиминимального принципа

$$\Lambda_j = \max_{\mathcal{E}_j \subset H_0^1(\Omega; \Gamma_D)} \inf_{\psi \in \mathcal{E}_j \setminus \{0\}} \frac{E(\psi, \psi; \Omega)}{\|\psi; L^2(\Omega)\|^2}, \tag{2.5}$$

При этом  $\mathcal{E}_j$  – любое подпространство в  $H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$  с коразмерностью  $j - 1$ ; в частности,  $\mathcal{E}_1 = H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$ , т.е. соотношение (2.5) при  $j = 1$  превращается в соотношение (2.4). Более точно, теорема 10.2.2 [4] гарантирует, что в том случае, когда правая часть формулы (2.5) строго меньше  $\Lambda^\dagger$ , дискретный спектр  $\wp_d$  содержит, по крайней мере, точки  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_j$  и последняя из указанных принимает вид (2.5).

**3. Непрерывный спектр.** Проверим формулу (2.2) в ситуации  $J = 2$ . Теория эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечности (см. [6] и ([7], гл. 5), ([8], § 3)) показывает, что точкой отсечки  $\Lambda^\dagger$  непрерывного спектра  $\wp_c = [\Lambda^\dagger, +\infty)$  задачи (1.1)–(1.3) при  $J = 2$  служит наименьшее число  $\Lambda$ , при котором для какого-то параметра  $\xi \in \mathbb{R}$  следующая краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет нетривиальное решение

$$-\mu(\partial_z^2 - \xi^2)U_1 - (\lambda + \mu)i\xi(i\xi U_1 + \partial_z U_2) = \Lambda U_1 \quad \text{при} \quad z \in (0, 1) \tag{3.1}$$

$$-\mu(\partial_z^2 - \xi^2)U_2 - (\lambda + \mu)\partial_z(i\xi U_1 + \partial_z U_2) = \Lambda U_1 \quad \text{при} \quad z \in (0, 1)$$

$$U_1(0) = 0, \quad U_2(0) = 0 \tag{3.2}$$

$$(\lambda + 2\mu)\partial_z U_2(1) + \lambda i \xi U_1(1) = 0, \quad \mu i \xi U_2(1) + \mu \partial_z U_1(1) = 0 \quad (3.3)$$

Здесь  $i$  – мнимая единица. Задача (3.1)–(3.3) получается из задачи (1.1)–(1.3) в бесконечной полосе  $\Pi = \mathbb{R} \times (0, 1)$  при  $\Gamma_D = \{x : x_2 = 0\}$  и  $\Gamma_N = \{x : x_2 = 1\}$  посредством преобразования Фурье. Для  $\Lambda = \mu\pi^2/4$  нужное решение имеет вид  $\sin(\pi z/2)$  (ср. формулы (2.2) и (2.3)).

Убедимся в том, что при  $\Lambda < \mu\pi^2/4$  и любом  $\xi \in \mathbb{R}$  задача (3.1), (3.3) имеет только тривиальное решение – этот факт достаточен для справедливости равенства  $\wp_c^2 = \left[ (\mu\pi^2)/4, +\infty \right)$ , так как согласно общим результатам ([7], гл. 5) непрерывный спектр цилиндрического волновода – связное множество на положительной полуоси  $\mathbb{R}_+$ .

Обозначим чертой комплексное сопряжение, умножим уравнения (3.1) соответственно на  $\overline{U_1}$  и  $\overline{U_2}$ , а затем проинтегрируем по  $z \in (0, 1)$  при учете краевых условий (3.3). В результате суммирования получим равенство

$$\Lambda \int_0^1 |U|^2 dz = \int_0^1 \left( 2\mu\xi^2 |U_1|^2 + 2\mu |\partial_z U_2|^2 + \mu |\partial_z U_1 + i\xi U_2|^2 \right) dz + \lambda \int_0^1 |i\xi U_1 + \partial_z U_2|^2 dz \quad (3.4)$$

Последний неотрицательный интеграл далее игнорируем ввиду ненужности. Алгебраическая формула

$$\mu |\partial_z U_1 + i\xi U_2|^2 \geq \mu (1 - \rho^2) |\partial_z U_1|^2 + \mu (\rho |\partial_z U_1| - \rho^{-1} |\xi U_2|)^2 + \mu (1 - \rho^2) |\xi|^2 |U_2|^2$$

при  $\rho = 2\pi^{-1} |\xi| > 0$  и неравенство Фридрикса при  $H = 1$

$$\int_0^H |\partial_z \mathcal{U}(z)|^2 dz \geq \frac{\pi^2}{4H^2} \int_0^H |\mathcal{U}(z)|^2 dz \quad \text{для } \mathcal{U} \in H^1(0, H), \quad \mathcal{U}(0) = 0 \quad (3.5)$$

доказывают, что правая часть равенства (3.4) превосходит интеграл

$$\mu \int_0^1 \left( \left( \frac{\pi^2}{4} - \xi^2 \right) + 2\xi^2 \right) |U_1|^2 + \left( \frac{\pi^2}{2} + \left( |\xi|^2 - \frac{\pi^2}{4} \right) \right) |U_2|^2 dz = \mu \left( \frac{\pi^2}{4} + |\xi|^2 \right) \int_0^1 |U|^2 dz$$

Следовательно,  $U = 0$  при  $\Lambda < \mu\pi^2/4$ .

Формула (2.2) для точки отсечки непрерывного спектра задачи (1.1)–(1.3) в ситуации  $J = 2$  проверена. Ситуация  $J = 1$ , в которой условия Неймана (3.3) заменены условиями Дирихле  $U_1(1) = 0$  и  $U_2(1) = 0$ , была разобрана в статье [5] при помощи значительно более простых выкладок.

**4. Достаточное условие существования захваченной волны.** В силу минимального принципа (2.4) дискретный спектр  $\wp_d$  непустой при условии, что нашлась пробная вектор-функция  $\psi^\delta \in H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$ , обеспечивающая неравенство

$$E(\psi^\delta, \psi^\delta; \Omega) - \Lambda^\dagger \|\psi^\delta; L^2(\Omega)\|^2 < 0 \quad (4.1)$$

Определим ее следующим образом

$$\psi^\delta(x) = w^\dagger(x_2) \quad \text{при } x_1 < 0 \quad \text{и} \quad \psi^\delta(x) = e^{-\delta x_1} w^\dagger(x_2) \quad \text{при } x_1 > 0$$

Здесь  $\delta > 0$  и потому  $\psi^\delta \in H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$  при учете условий, наложенных на форму резонатора в разд. 1. Согласно формуле (2.2) имеем

$$\|\psi^\delta; L^2(\Omega)\|^2 = \|w^\dagger; L^2(\Theta)\|^2 + \int_0^{+\infty} e^{-2\delta x_1} dx_1 \int_0^1 |w^\dagger(x_2)|^2 dx_2 = \|w^\dagger; L^2(\Theta)\|^2 + \frac{1}{4\delta}$$

$$\begin{aligned}
 E(\Psi^\delta, \Psi^\delta; \Omega) &= E(\Psi^\delta, \Psi^\delta; \Pi) + \int_0^{+\infty} e_1^{-2\delta x_1} dx_1 \mu \int_0^1 |\partial_2 w_1^\dagger(x_2)|^2 dx_2 + O(\delta) = \\
 &= E(\omega^\dagger, \omega^\dagger; \Theta) + \frac{\mu\pi^2}{4\delta J^2} + O(\delta)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

В итоге при учете соотношений (2.2) и (2.3) обнаруживаем, что неравенство (4.1), превратившееся в оценку  $\theta^\dagger + C\delta < 0$ , выполнено при малом  $\delta > 0$ , если оказалось, что

$$\theta^\dagger = Ew \|\omega^\dagger; L^2(\Theta)\|^2 = \frac{\mu\pi^2}{J^2} \int_{\Theta} \cos\left(\frac{2\pi}{J}x_2\right) dx < 0 \tag{4.3}$$

Для подынтегрального выражения справедливо соотношение

$$\cos\left(\frac{2\pi}{J}x_2\right) < 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x_2 \in (1/4, 3/4) & \text{в ситуации } J = 1 \\ x_2 \in (1/2, 1) & \text{в ситуации } J = 2 \end{cases}$$

Таким образом, добиться захвата волны путем подбора формы резонатора нетрудно: достаточно поместить резонатор  $\Theta$  в полуполосу

$$\Pi_-^J = \{x : x_1 < 0, x_2 - J/4 \in [0, 1/2]\}; \quad J = 1, 2$$

Последнему требованию удовлетворяют, например, волноводы на рис. 2,г, в случае  $J = 1$  и на рис. 2,д, в случае  $J = 2$ .

Кроме того, в ситуации  $J = 1$  ограничение (4.3) выполнено для волновода на рис. 1,а, а при симметричном наросте – и на рис. 2,г. В ситуации  $J = 2$  ограничение (4.3) обеспечено наверняка для волноводов на рис. 2,а, д.

Вместе с тем в общем случае неизвестно, оказывается ли пустым дискретный спектр при условии  $\theta^\dagger > 0$ . Впрочем, при помощи одномерного неравенства Фридрикса (3.5) можно убедиться в том, что для случая  $J = 1$  волноводы на рис. 1,а, и рис. 2,д, не производят захват волны, если толщина  $H$  выступов не превосходит  $1/2$ , а значит, при любой ширине выемки то же верно и для волновода на рис. 2,в. При  $J = 2$  то же неравенство (3.5) обеспечивает отсутствие захваченных волн у волновода на рис. 1,б. В то же время следующие разделы предоставят захваченные волны, например, у волноводов на рис. 2,а,б,д, при определенных значениях геометрических параметров.

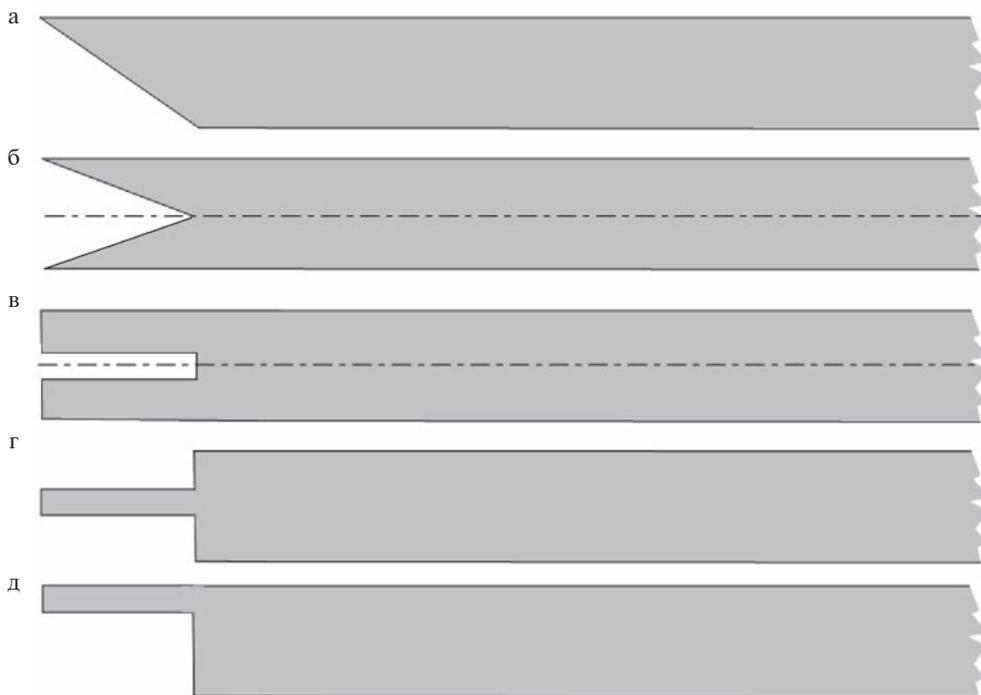
**5. Еще одно достаточное условие.** При  $J = 1$  нетрудно проверить, что

$$\theta^\dagger = 0 \tag{5.1}$$

для полуполос со скошенным торцом (рис. 1,а, или рис. 2,а) или с “ласточкиным хвостом” (рис. 2,б). В ситуации  $J = 2$  для наростов толщиной  $H < 1/2$  на рис. 1,а, или рис. 2,а величина  $\theta^\dagger$  соответственно положительна и отрицательна, а значит, при каком-то, обязательно нецентральной, положении нароста на рис. 1,г, равенство (5.1) становится верным. Можно привести и многие другие примеры выполнения введенного ограничения.

При помощи приема [9] убедимся в том, что в случае (5.1) захват волны происходит при любой форме резонатора. На торце  $\partial\Omega$  выберем точку  $P$ , в которой косинус  $\cos(\pi J^{-1}x_2)$  и компонента  $n_1(P)$  вектора нормали отличны от нуля, а в качестве пробной вектор-функции в минимальном принципе (2.4) возьмем сумму

$$\Psi^\delta(x) = \psi^\delta(x) + \sqrt{\delta} e_{(2)} \Phi(x) \tag{5.2}$$



**Рис. 2.** Полуполоса со скошенным торцом (а), и “ласточкин хвостом” (б). Прямоугольные выемка (в) и наросты, центральный (г) и боковой (д). Штрих-пунктиром изображена средняя линия.

в которой  $\Phi$  — гладкая функция с носителем в малой окрестности точки  $P$ . При учете выкладок (4.2) получим

$$\begin{aligned} \|\Psi^\delta; L^2(\Omega)\|^2 &= \|w^\dagger; L^2(\Theta)\|^2 + \frac{1}{4\delta} + O(\delta) \\ E(\Psi^\delta, \Psi^\delta; \Omega) &= E(w^\dagger, w^\dagger; \Theta) + \frac{\mu\pi^2}{4\delta J^2} + 2\sqrt{\delta}E(w^\dagger, e_{(2)}\Phi; \Theta) + O(\delta) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Отметим, что  $(w^\dagger, e_{(2)}\Phi)_\Theta = 0$  согласно определениям (2.3) и (5.2). После подстановки соотношений (5.3) в неравенство (4.1) обнаруживаем, что в силу формул (2.2) и (5.1) члены порядков  $\delta^{-1}$  и 1 взаимно уничтожаются, т.е. само неравенство принимает вид

$$0 > 2\sqrt{\delta}E(w^\dagger, e_{(2)}\Phi; \Theta) + C\delta = 2\sqrt{\delta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Phi(x) n_1(x) \sigma_{12}(w^\dagger; x) dx + C\delta$$

Поскольку  $\sigma_{12}(w^\dagger; x) = \pi\mu J^{-1} \cos(\pi J^{-1}x_2)$ , выбор точки  $P$  позволяет сделать последний интеграл отрицательным при подходящей функции  $\Phi$ , и тем самым для достаточно малого  $\delta > 0$  обеспечить неравенство (4.1), гарантирующее существование захваченной волны.

Малое возмущение профиля торца способно нарушить равенство (5.1), причем придать выражению (4.3) любой знак. При этом достаточно малое возмущение не выводит собственное число из дискретного спектра  $\wp_d$ . Следовательно, найденное усло-

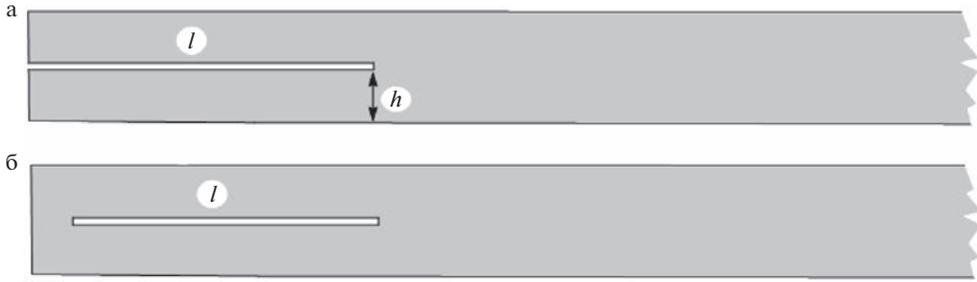


Рис. 3. Полуполосы с трещинами, краевой (а) и внутренней (б).

виде  $\theta^\dagger \leq 0$  наличия захваченной волны является только достаточным и такая волна может существовать и при  $\theta^\dagger > 0$ . Подробно это наблюдение обсуждается [10] для скалярных задач. Вопрос о наглядном геометрическом условии отсутствия захваченных упругих волн остается открытым для волноводов любой природы.

Метод Фурье демонстрирует, что уравнение Гельмгольца в полуполосе  $\Pi_+$  с условиями Дирихле на прямом торце  $\mathfrak{D} = \{x : x_1 = 0, x_2 \in (0, 1)\}$  и с условиями Дирихле или Неймана на ее боковых сторонах не имеет захваченных волн. Поскольку касательное напряжение  $\sigma_{12}(w^\dagger)$  не вырождается на торце  $\mathfrak{D}$ , приведенные рассуждения обнаруживают захваченную волну в задаче (1.1)–(1.3) в полуполосе  $\Pi_+$ . Этот результат был получен в работе [5], однако в ней не найдена полная кратность дискретного спектра – для абсолютного большинства геометрических форм этот вопрос остается открытым до сих пор. Кроме того, в отличие от скалярных задач осталось неизвестным, возникает или нет в задачах теории упругости пороговый резонанс [11–13].

**6. Полуполоса с трещиной.** Пусть  $\Omega_h^\ell = \Pi^\ell \setminus T_h^\ell$  – удлиненная полуполоса  $\Pi^\ell = \{x : x_1 > -l, x_2 \in (0, 1)\}$  с трещиной  $T_h^\ell = \{x : x_1 \in (-l, 0], x_2 = h\}$  (рис. 3, а), где  $\ell > 0$  – большой положительный параметр и  $h \in (1/2, 1)$  (случай  $h \leq 1/2$  обсуждаем в конце раздела). Исследуя спектр задачи (1.1)–(1.3) при  $\Gamma_D^\ell = \{x : x_1 > -l, x_2 = 0, 1\}$  (боковые стороны защемлены, а берега трещины и торец полуполосы свободны), рассмотрим вспомогательную задачу: систему уравнений (1.1) в длинном прямоугольнике  $\Xi_h^\ell = (-l, 0) \times (0, h)$  с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u^\ell(x) &= 0 \quad \text{при} \quad x_1 \in (-l, 0), \quad x_2 = 0 \quad \text{или} \quad x_1 = 0, \quad x_2 \in (0, h) \\ \sigma^{(n)}(u^\ell; x) &= 0 \quad \text{при} \quad x_1 \in (-l, 0), \quad x_2 = h \quad \text{или} \quad x_1 = -l, \quad x_2 \in (0, h) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Иными словами, на боковой стороне  $\mathfrak{v} = \{x : x_1 = 0, x_2 \in (0, h)\}$  прямоугольника  $\Xi_h^\ell$  назначены искусственные условия Дирихле, а краевые условия на остальных сторонах унаследованы от исходных условий (1.2) и (1.3). Следуя обычной процедуре (см., напр., ([14], гл. 16) и ([15], гл. 4)) асимптотику собственных пар  $\{\Lambda^\ell, u^\ell\}$  задачи (1.1), (5.1) ищем в виде

$$\Lambda^\ell = \mu\pi^2(2h)^{-2} + \ell^{-2}M + \dots \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} u^\ell(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2h}x_2\right)v(\eta)e_{(1)} + \frac{1}{\ell}V_2(x_2)e_{(2)}\frac{dv}{d\eta}(\eta) + \frac{1}{\ell^2}V_1(\eta, x_2)e_{(1)} + \dots \\ &\text{при} \quad x \in \Xi_h^\ell \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предприняемого анализа,  $\eta = \ell^{-1}x_1$  – растянутая продольная координата, а остальные ингредиенты принятых представлений подлежат определению.

Подставим соотношения (6.2) и (6.3) в систему (1.1). Выполнив дифференцирование, обнаружим, что множители при  $h^{-2}$  взаимно уничтожаются, а обращение в нуль суммы множителей при  $h^{-1}\partial_{\eta}v(\eta)$  дает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-(\lambda + 2\mu)\frac{d^2V_2}{dx_2^2}(x_2) - \frac{\pi^2\mu}{4h^2}V_2(x_2) = (\lambda + \mu)\frac{\pi}{2h}\cos\left(\frac{\pi x_2}{2h}\right); \quad x_2 \in (0, h) \quad (6.4)$$

Снабдив уравнение вытекающими из равенств (6.1) граничными условиями

$$V_2(0) = 0, \quad (\lambda + 2\mu)\frac{dV_2}{dx_2}(h) = -\lambda \quad (6.5)$$

находим решение

$$V_2(x_2) = \frac{2h}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi x_2}{2h}\right) - \cos\left(\frac{\pi x_2}{2h}\alpha\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi x_2}{2h}\alpha\right)\right)$$

При этом

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}, \quad \beta = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{-1}\left(2\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right) > 0$$

На очередном шаге процедуры получим задачу

$$\begin{aligned} -\mu\frac{d^2V_1}{dx_2^2}(\eta, x_2) - \frac{\pi^2\mu}{4h^2}V_1(\eta, x_2) &= M\sin\left(\frac{\pi x_2}{2h}\right)v(\eta) + (\lambda + \mu)\frac{dV_2}{dx_2}(x_2)\frac{d^2v}{d\eta^2}(\eta) + \\ &+ (\lambda + 2\mu)\sin\left(\frac{\pi x_2}{2h}\right)\frac{d^2v}{d\eta^2}(\eta); \quad x_2 \in (0, h) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$V_1(0) = 0, \quad \mu\frac{dV_1}{dx_2}(h) = -\mu V_2(h)\frac{d^2v}{d\eta^2}(\eta) \quad (6.7)$$

Условие ее разрешимости – ортогональность правых частей собственной функции  $\sin(\pi x_2/2h)$  в смысле формулы Грина – сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-B\frac{d^2v}{d\eta^2}(\eta) = Mv(\eta); \quad \eta \in (-1, 0) \quad (6.8)$$

с коэффициентом

$$\begin{aligned} B &= \mu + (\lambda + 2\mu)\frac{4}{\pi}\alpha(1 + 4\alpha^2)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{-1}b(\alpha) \\ b(\alpha) &= \frac{4\alpha}{1 + 4\alpha^2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) > 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Собственные пары этого уравнения, снабженного граничными условиями

$$v(0) = 0, \quad v(-1) = 0 \quad (6.10)$$

имеют вид

$$\{M_k; v_k(\eta)\} = \{b\pi^2 k^2, \sin(\pi k\eta)\}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.11)$$

Пусть, как упоминалось,  $h > 1/2$  и

$$\ell > \ell_k := \frac{2h}{\pi} \sqrt{\frac{M_k}{\mu(4h^2 - 1)}} > 0$$

Тогда сумма  $\mu\pi^2(2h)^{-2} + \ell^{-2}M_k$  попадает на интервал  $(0, \mu\pi^2)$ , в котором может находиться дискретный спектр задачи (1.1)–(1.3) в ситуации  $J = 1$ . Это наблюдение дает возможность обнаружить собственные числа при помощи максиминимального принципа (2.5).

Зафиксируем натуральное число  $j$  в соотношении (2.5) и определим вектор-функции  $U^1, \dots, U^j$  с компонентами

$$\begin{aligned} U_1^q(x) &= A \sin\left(\frac{\pi x_2}{2h}\right) v_q\left(\frac{x_1}{\ell}\right) + \frac{1}{\ell^2} AX^\ell(x_1) V_{1q}\left(\frac{x_1}{\ell}, x_2\right) \\ U_2^q(x) &= \frac{1}{\ell} AX^\ell(x_1) V_{2q}(x_2) \frac{dv_q\left(\frac{x_1}{\ell}\right)}{d\eta} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Здесь  $v_k$  – собственная функция задачи (6.8), (6.10) из списка (6.11),  $V_{1q}$  – решение задачи (6.6), (6.7), содержащей функцию  $v = v_q$  и ставшей разрешимой по построению, а  $X^\ell$  – срезающая функция, которая нужна для продолжения компонент (6.12) нулем с прямоугольника  $\Xi_h^\ell$  на всю область  $\Omega_h^\ell$

$$X^\ell(x_1) = 1 \quad \text{при} \quad x_1 \in (1 - \ell, -1), \quad X^\ell(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad x_1 > 0 \tag{6.13}$$

Благодаря нормирующему множителю  $A = 2(\ell h)^{-1/2}$  выполнены соотношения

$$(U^q, U^p)_{\Xi_h^\ell} = \delta_{p,q} + O(\ell^{-2}); \quad p, q = 1, \dots, j$$

Иными словами, вектор-функции  $U^1, \dots, U^j$  “почти ортонормированы” в пространстве  $L^2(\Omega^\ell)$  при большом размере  $\ell$ , а значит, любое подпространство  $\mathfrak{E}_j$  из формулы (2.5) содержит нетривиальную линейную комбинацию

$$\Psi^{\mathfrak{E}_j} = \sum_{q=1}^j C_q^{\mathfrak{E}_j} U^q, \quad \text{где} \quad \sum_{q=1}^j |C_q^{\mathfrak{E}_j}|^2 = 1$$

Вычислим дробь Рэлея из максимального принципа (2.5). Имеем

$$\left\| \Psi^{\mathfrak{E}_j}; L^2(\Omega_h^\ell) \right\|^2 = \sum_{p,q=1}^j C_p^{\mathfrak{E}_j} C_q^{\mathfrak{E}_j} (U^q, U^p)_{\Xi_h^\ell} \Rightarrow \left\| \Psi^{\mathfrak{E}_j}; L^2(\Omega_h^\ell) \right\|^2 - 1 \leq C_j \ell^{-1}$$

Обозначим через  $L(\nabla_x)$  и  $B^0(\nabla_2)$ ,  $B^h(\nabla_2)$  матрицы дифференциальных операторов размером  $2 \times 2$ , взятые из системы уравнений (1.1) в прямоугольнике  $\Xi_h^\ell$  и краевых условий (1.3) на его основаниях  $\Upsilon_0^\ell = \{x : x_1 \in (-\ell, 0), x_2 = 0\}$ ,  $\Upsilon_h^\ell = \{x : x_1 \in (-\ell, 0), x_2 = h\}$ . Обработаем члены представления

$$\begin{aligned} E(\Psi^{\mathfrak{E}_j}, \Psi^{\mathfrak{E}_j}; \Xi_h^\ell) &= \frac{\pi^2}{4h^2} (\Psi^{\mathfrak{E}_j}, \Psi^{\mathfrak{E}_j})_{\Xi_h^\ell} - \left( L\Psi^{\mathfrak{E}_j} + \frac{\pi^2}{4h^2} \Psi^{\mathfrak{E}_j}, \Psi^{\mathfrak{E}_j} \right)_{\Xi_h^\ell} + \\ &+ \left( B^0\Psi^{\mathfrak{E}_j}, \Psi^{\mathfrak{E}_j} \right)_{\Upsilon_h^\ell} + \left( B^h\Psi^{\mathfrak{E}_j}, \Psi^{\mathfrak{E}_j} \right)_{\Upsilon_h^\ell} \end{aligned}$$

Рассмотрим последние два скалярных произведения ( $t = 0$  и  $t = h$ ) и заметим, что

$$\left| \Psi^{\otimes j}(x_1, t) B_k^t(\nabla_x) \Psi^{\otimes j}(x_1, t) \right| \leq cA^2 \ell^{-3}; \quad k = 1, 2 \quad (6.14)$$

При  $x_1 \in (1 - \ell, -1)$  оценка (6.14) обеспечена процедурой построения асимптотики, точнее структурой граничных условий (6.5) и (6.7), но при  $x_1 \in (-\ell, 1 - \ell) \cup (-1, 0)$  нужно еще учесть дифференцирования срезки  $X^\ell$ , а также соотношение

$$|v_q(\eta)| \leq c_q \min\{|\eta|, |1 + \eta|\} \leq c_q \ell^{-1} \min\{|x_1|, |\ell + x_1|\} \quad (6.15)$$

Таким образом,

$$\left| (B^0 \Psi^{\otimes j}, \Psi^{\otimes j})_{\Gamma^{\ell}} \right| + \left| (B^h \Psi^{\otimes j}, \Psi^{\otimes j})_{\Gamma^{\ell}} \right| \leq c \ell^{-2}$$

Аналогично, уравнения (6.4) и (6.6) обеспечивают неравенства

$$\left| L_k(\nabla_x) \Psi^{\otimes j}(x) - \frac{\mu \pi^2}{4h^2} \Psi^{\otimes j}(x) - \frac{1}{\ell^2} \sum_{p=1}^j C_p^{\otimes j} M_p U_j^p(x) \right| \leq cA^2 \frac{1}{\ell^2} K_k^\ell(x_1); \quad k = 1, 2$$

$$K_1^\ell(x_1) = \min\{\ell^{-1}, |x_1|, |x_1 + \ell|\}, \quad K_2^\ell(x_1) = 1$$

Как и ранее, разные мажоранты возникли из-за дифференцирования срезки (6.13). Впрочем, в силу формул (6.12) и (6.15) находим, что

$$\left| (L \Psi^{\otimes j}, \Psi^{\otimes j})_{\Xi_h^\ell} - \frac{\pi^2}{4h^2} (\Psi^{\otimes j}, \Psi^{\otimes j})_{\Xi_h^\ell} - \sum_{p=1}^j C_p^{\otimes j} M_p (U^p, \Psi^{\otimes j})_{\Xi_h^\ell} \right| \leq \frac{c_j}{\ell^3}$$

Собрав полученные соотношения, получим

$$\begin{aligned} \Lambda_j &\leq \max_{\mathfrak{E}_j \subset H_0^1(\Omega_h^\ell; \Gamma_D)} \frac{E(\Psi^{\otimes j}, \Psi^{\otimes j}; \Xi_h^\ell)}{\|\Psi^{\otimes j}; L^2(\Xi_h^\ell)\|^2} \leq \\ &\leq \frac{\mu \pi^2}{4h^2} + \frac{1}{\ell^2} \max_{\mathfrak{E}_j \subset H_0^1(\Omega_h^\ell; \Gamma_D)} \left| \sum_{p=1}^j C_p^{\otimes j} M_p (U^p, U^p)_{\Xi_h^\ell} \right| + \frac{c_j}{\ell^3} \leq \frac{\mu \pi^2}{4h^2} + \frac{M}{\ell^2} + \frac{c_j}{\ell^3} \end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно большом  $\ell_j$  и  $\ell \geq \ell_j$  правая часть неравенства (6.16) строго меньше точки отсечки (2.2) при  $J = 1$ , т.е. согласно максиминимальному принципу кратность дискретного спектра задачи (1.1)–(1.3) в полуполосе с трещиной  $\Omega^\ell = \Pi^\ell \setminus \mathcal{T}^\ell$  равна или превосходит выбранное число  $j$ .

Подведем итог: удлинение асимметричной продольной трещины в полуполосе с заземленными боковыми сторонами позволяет добиться любого количества линейно независимых захваченных волн в волноводе  $\Omega^\ell$ . Асимптотический анализ показывает, что эти волны концентрируются в прямоугольнике  $\Xi_h^\ell$ , а именно, они затухают с экспоненциальной скоростью в целой полуполосе  $\Pi_+$  и приобретают малые амплитуды в верхнем прямоугольнике  $\Xi_{1-h}^\ell = \{x : x_1 \in (-\ell, 0), x_2 \in (h, 1)\}$  с высотой  $1 - h < 1/2$ .

Аналогичные указанным конструкции в прямоугольнике  $\Xi_{1-h}^\ell$  не позволяют обнаружить точки дискретного спектра, так как  $\mu \pi^2 (2(1-h))^{-2} > \mu \pi^2$  при  $h > 1/2$  и, следовательно, применить максиминимальный принцип не удастся. Вместе с тем случай  $h \in (0, 1/2)$  по сути не отличается от рассмотренного  $h \in (1/2, 1)$  и требует лишь замены  $x_2 \mapsto 1 - x_2$  поперечной координаты. По той же причине предъявленный анализ не

дает результата для симметричной ( $h = 1/2$ ) трещины. Впрочем, для нее выполнено требование (5.1), а значит, по крайней мере одна захваченная волна существует, однако осталось непонятным, увеличивается ли их количество при росте длины  $\ell$  трещины  $T_{1/2}^\ell$ .

Точно так же в ситуации  $J = 2$  при  $T_h^\ell = \{x = x_1 \in (-\ell, 0), x_2 = h\}$  приведенные построения в  $\Xi_h^\ell$  бесполезны при всяком  $h \in (0, 1)$ . Вместе с тем любое заданное наперед количество захваченных волн появляется в задаче (1.1)–(1.3) при  $J = 2$ , если  $h \in (0, 1)$  и размер  $\ell$  достаточно велик. Этот уже упомянутый в [16] результат получается при помощи максиминимального принципа, примененного к обычным приближенным конструкциям упругих полей в балке Кирхгофа  $\Xi_{1-h}^\ell$  с малой относительной толщиной  $\ell^{-1}(1-h)$ , у которой (балки) зашечлены торцы, а основания свободны от внешних воздействий (ср. конец разд. 7).

Использование срезки (6.13) означает, что форма левого конца полуполосы  $\Pi^\ell$  и краевые условия на нем не играют никакой роли. Кроме того, результаты в целом сохраняются и для внутренней трещины большой длины на рис. 3, б.

**7. Множественность точек дискретного спектра в полуполосе со скошенным торцом.** В ситуации  $J = 1$ , т.е. при  $\Gamma_D = \{x \in \partial\Omega : x_2 = 0, 1\}$ , рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) в волноводе с заостренным концом (рис. 1, а). Пусть резонатор  $\Theta^\ell$  – длинный (как и ранее,  $\ell$  – большой положительный параметр) прямоугольный треугольник

$$\Theta^\ell = \{x \in \Pi; x_1 < 0, x_2 < \text{tg } \theta(x_1 + \ell)\} \tag{7.1}$$

При этом угол наклона  $\theta = \text{arctg } \ell^{-1} \in (0, \pi/2)$  – малый параметр. Сформируем вспомогательную задачу в треугольнике  $\Theta$ . На катете  $\mathfrak{W}^0 = \{x : x_1 = 0, x_2 \in (0, 1)\}$ , совпадающем с торцом полуполосы  $\Pi_+$ , назовем искусственное условие Дирихле и построим асимптотику собственных пар полученной задачи теории упругости о балке  $\Theta^\ell$  переменной толщины  $H(\eta) = 1 + \eta$ , где  $\eta = x_1/\ell$  – растянутая продольная координата. Воспользуемся асимптотической процедурой из работы [17], для чего укажем соотношение

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4H(\eta)} = \frac{\pi^2(H(\eta) - 1)}{4H(\eta)} = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\ell} \frac{x_1}{1 + \ell^{-1}x_1} = \frac{\pi^2}{4} \frac{x_1}{\ell} \left(1 + O\left(\frac{|x_1|}{\ell}\right)\right) \tag{7.2}$$

и введем новую растянутую координату

$$\xi = \ell^{-1/3} x_1 \tag{7.3}$$

Выбор дробного показателя в формуле (7.3) обусловлен следующим наблюдением: порядок  $\ell^{-2/3}$  главного члена  $O(\ell^{-1}|x_1|) = O(\ell^{-2/3}|\xi|)$  выражения (7.2) такой же, как у множителя в равенстве  $\partial^2/\partial x_1^2 = \ell^{-2/3}\partial^2/\partial \xi^2$ .

Примем похожие на выражения (6.2) и (6.3) асимптотические представления для собственных пар  $\{\Lambda^\ell, u^\ell\}$  задачи теории упругости для треугольной балки  $\Theta^\ell$ , закрепленной вдоль нижнего основания

$$\Lambda^\ell = \frac{\pi^2}{4} + \ell^{-2/3}M + \dots$$

$$u^\ell(x) = \sin\left(\frac{\pi x_2}{2H(\eta)}\right) v(\xi) e_{(1)} + \ell^{-\frac{1}{3}} V_2\left(\frac{x_2}{H(\eta)}\right) e_{(2)} \partial_\xi v(\xi) + \\ + \ell^{-2/3} V_1\left(\xi, \frac{x_2}{H(\eta)}\right) e_{(2)} + \dots$$

Подставив эти формулы в систему уравнений (1.1) и краевые условия (1.2) и (1.3) на длинных катете и гипотенузе треугольника  $\Theta^\ell$ , получим прежнюю, уже решенную, задачу (6.4), (6.5), однако согласно представлению (7.2) и замене координаты (7.3) в правой части уравнения (6.6) для составляющей  $V_1$  появляется дополнительное слагаемое

$$-\frac{\pi}{4} |\eta| \sin\left(\frac{\pi x_2}{H(\eta)}\right) v(\eta)$$

Таким образом, условие разрешимости модифицированной задачи (6.6), (6.7) принимает вид уравнения

$$-B \frac{d^2 v}{d\xi^2}(\xi) + \frac{\pi^2}{4} |\xi| v(\xi) = M v(\xi),$$

которое распространим на полуось  $(-\infty, 0) \ni \xi$  и снабдим его граничным условиям

$$v(0) = 0$$

Коэффициент  $B$  имеет вид (6.9). Полученная задача Дирихле для уравнения Эйри (см., например, книгу [18]) имеет дискретный спектр, образующий строго монотонную неограниченную положительную последовательность собственных чисел

$$0 < M_1 < M_2 < M_3 < \dots < M_m < \dots \rightarrow +\infty \quad (7.4)$$

Соответствующие собственные функции  $v_m$  затухают на бесконечности с экспоненциальной скоростью, а именно

$$v_m(\xi) = o\left(e^{-k|\xi|^{3/2}}\right) \quad \text{при} \quad k < \pi B^{1/2}/3$$

Как и ранее, при большом  $\ell$  сумма  $\frac{\pi^2}{4} + \ell^{-2/3} M_j$  строго меньше точки отсечки  $\Lambda^\dagger$  непрерывного спектра задачи (1.1)–(1.3) в ситуации  $J = 1$ . Упомянутое свойство затухания собственных функций  $v_1, \dots, v_j$  означает, что построенный предложенным в разд. 5 способом набор пробных вектор-функций  $U_1, \dots, U_j$  при помощи максиминимального принципа (2.3) позволяет обнаружить не менее  $j$  точек дискретного спектра рассматриваемой задачи в случае  $\ell > \ell_j$  и некотором  $\ell_j > 0$ .

Если  $J = 2$  и  $\Omega^\ell$  – полуполоса с “ласточкиным хвостом” (рис. 2, б), то предыдущие конструкции в треугольнике

$$\Theta_-^\ell = \left\{x : x_1 \in (-\ell, 0), x_2 \in \left(0, H\left(\ell^{-1} x_1\right)\right)\right\} \quad \text{при} \quad H(\eta) = (1 + \eta)/2$$

не дают информации о дискретном спектре. Вместе с тем в другом треугольнике

$$\Theta_+^\ell = \left\{x : x_1 \in (-\ell, 0), x_2 \in \left(1 - H\left(\ell^{-1} x_1\right), 1\right)\right\} \quad (7.5)$$

с искусственными условиями Дирихле на меньшем катете и условиями Неймана на остальной части границы годятся привычные приближения упругих полей в балке Кирхгофа переменной толщины.

Одномерная модель такой балки имеет вид

$$\frac{\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{d^2}{d\eta^2} \left( H(\eta)^3 \frac{d^2 w}{d\eta^2}(\eta) \right) = M H(\eta) w(\eta); \quad \eta \in (-1, 0) \quad (7.6)$$

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{d\eta}(0) = 0 \quad (7.7)$$

Коэффициенты обыкновенного дифференциального уравнения (7.6) вырождаются в точке  $\eta = -1$  и поэтому граничные условия в ней не нужны (см. ([19], § 28 и § 37) и, напр., [20]). Вместе с тем задача (7.6), (7.7) имеет полностью дискретный спектр, образующий последовательность вида (7.4). При этом для собственных чисел задачи в треугольнике (7.5) верна асимптотическая формула (см., например, ([15], гл. 7))

$$\left| \Lambda_m^h - \ell^{-2} M_m \right| \leq C_m \ell^{-5/2} \quad \text{при} \quad \ell > \ell_m > 0$$

Здесь  $C_m$  и  $\ell_m$  – положительные величины, а  $2/\ell$  – средняя относительная толщина балки  $\Theta_+^\ell$ . Теперь по прежней схеме при помощи максиминимального принципа (2.3) проверяем, что увеличение размера  $\ell$  вызывает неограниченное возрастание кратности дискретного спектра.

В полуполосе с заостренным концом (рис. 1,а), свободном от внешних воздействий, интерпретация резонатора

$$\Theta^\ell = \left\{ x : x_1 \in (-\ell, 0), |x_2 - 1/2| < H(\ell^{-1} x_1) \right\} \quad \text{при} \quad H(\eta) = (1 + \eta)/2$$

как балки Кирхгофа малой относительной толщины также приводит к выводу о нелимитированном накоплении дискретного спектра при росте параметра  $\ell$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров С.А. Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок // Дифф. уравн. 2022. Т. 58. № 12. С. 1666–1682.
2. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
3. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
4. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
5. Камоцкий И.В., Назаров С.А. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Пробл. матем. анализа. 1999. Вып. 19. С. 105–148.
6. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. об-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
7. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
8. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // УМН. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
9. Камоцкий И.В., Назаров С.А. Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 1. С. 138–140.
10. Назаров С.А. Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сибирск. матем. ж. 2010. Т. 51. № 5. С. 1086–1101.
11. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
12. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
13. Назаров С.А. Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.

14. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie, 1991.
15. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
16. *Назаров С.А.* Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полуцилиндром // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 11. С. 99–130.
17. *Назаров С.А.* Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках // Сибирск. матем. ж. 2013. Т. 54. № 3. С. 655–672.
18. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
19. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
20. *Campbell A., Nazarov S.A., Sweers G.H.* Spectra of two-dimensional models for thin plates with sharp edges // SIAM J. Math. Anal. 2010. V. 42. № 6. P. 3020–3044.

### **Elastic Waves Trapped by Semi-Infinite Strip with Clamped Lateral Sides and a Curved or Broken End**

**S. A. Nazarov<sup>a,#</sup>**

<sup>a</sup>*Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Saint-Petersburg, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

We show several geometric conditions of trapping elastic waves by homogeneous isotropic strip with one or two fixed lateral sides and arbitrarily curved end. Shapes of the resonator are found that support any given in advance number of linearly independent trapped modes.

### REFERENCES

1. *Nazarov S.A.* Two-dimensional asymptotic models of thin cylindrical elastic gaskets // Diff. Eqns., 2022, vol. 58, no. 12, pp. 1651–1667.
2. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics // Appl. Math. Sci., 1985, vol. 49.
3. *Fichera G.* Existence Theorems in the Theory of Elasticity. Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1972.
4. *Birman M.Sh., Solomyak M.Z.* Spectral Theory of Selfadjoint Operators in Hilbert Space Dordrecht: Reidel, 1987.
5. *Kamotskii I.V., Nazarov S.A.* On eigenfunctions localized in a neighborhood of the lateral surface of a thin domain // J. Math. Sci., 2000, vol. 101, no. 2, pp. 2941–2974.
6. *Kondrat'ev V.A.* Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // Trans. Moscow Math. Soc., 1967, vol. 16, pp. 227–313.
7. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.
8. *Nazarov S.A.* The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes // Russ. Math. Surv., 1999, vol. 54, no. 5, pp. 947–1014.
9. *Kamotskii I.V., Nazarov S.A.* Exponentially decreasing solutions of the problem of diffraction by a rigid periodic boundary // Math. Notes, 2003, vol. 73, no. 1–2, pp. 129–131.
10. *Nazarov S.A.* Variational and asymptotic methods for finding eigenvalues below the continuous spectrum threshold // Sib. Math. J., 2010, vol. 51, no. 5, pp. 866–878.
11. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys., 2007, vol. 273, no. 2, pp. 533–559.
12. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc., 2008, vol. 97, no. 3, pp. 718–752.
13. *Nazarov S.A.* Threshold resonances and virtual levels in the spectrum of cylindrical and periodic waveguides // Math. Izv., 2020, vol. 84, no. 6, pp. 1105–1180.

14. *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000.
15. *Nazarov S.A.* Asymptotic Theory of Thin Plates and Rods. Dimension Reduction and Integral Bounds. Novosibirsk: Nauch. Kniga, 2002. (in Russian)
16. *Nazarov S.A.* Elastic waves trapped by a homogeneous anisotropic semicylinder // *Sb. Math.*, 2013, vol. 204, no. 11, pp. 1639–1670.
17. *Nazarov S.A.* The localization for eigenfunctions of the Dirichlet problem in thin polyhedra near the vertices // *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 3, pp. 517–532.
18. *Babich V.M., Buldyrev V.S.* Asymptotic Methods in Short-wavelength Diffraction Theory. Alpha Science Int., 2009.
19. *Mikhlin S.G.* Variational Methods in Mathematical Physics. N.Y.: Pergamon, 1964.
20. *Campbell A., Nazarov S.A., Sweers G.H.* Spectra of two-dimensional models for thin plates with sharp edges // *SIAM J. Math. Anal.*, 2010, vol. 42, no. 6, pp. 3020–3044.

УДК 539.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ТЕРМОУПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ПОЛОГИХ АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

© 2023 г. А. П. Янковский<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,  
Новосибирск, Россия*

*\*e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

Поступила в редакцию 13.10.2022 г.

После доработки 26.01.2023 г.

Принята к публикации 15.02.2023 г.

Разработана математическая модель неізотермического упруговязкопластического деформирования гибких пологих оболочек с многонаправленными структурами армирования. Волновые процессы и слабое сопротивление поперечным сдвигам в искривленных панелях моделируется в рамках теории изгиба Амбарцумяна. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Компоненты композиции предполагаются изотропными материалами, а их пластичность описывается теорией течения с функцией нагружения, зависящей от скорости деформирования и температуры. Учтена связанность термомеханической задачи при динамическом нагружении композитных пологих оболочек. В поперечном направлении конструкций температура аппроксимирована полиномом 7-го порядка. Сформулированная двумерная нелинейная начально-краевая задача решена с использованием явной численной схемы шагов по времени. Исследовано термоупруговязкопластическое и термоупругопластическое поведение ортогонально армированных в двух тангенциальных направлениях стеклопластиковых и металлокомпозитных пологих оболочек, нагруженных в поперечном направлении воздушной взрывной волной. Показано, что гибкие искривленные стеклопластиковые панели в отдельных точках могут дополнительно нагреваться на 14...27°C, а аналогичные металлокомпозитные конструкции – на 70°C и более. Пиковые значения температуры при этом удерживаются на кратковременных интервалах – порядка долей 1 мс. Продемонстрировано, что в отличие от гибких пластин аналогичные пологие оболочки (с такой же структурой армирования и с такими же характерными размерами) при динамическом нагружении в поперечном направлении необходимо рассчитывать не только при учете зависимости пластических свойств компонентов композиции от скорости их деформирования, но и при учете теплового отклика в таких тонкостенных конструкциях. Более интенсивное неупругое деформирование искривленных композитных панелей наблюдается при их нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности.

*Ключевые слова:* гибкие пологие оболочки, многонаправленное армирование, термоупруговязкопластичность, связанная термомеханическая задача, теория изгиба Амбарцумяна, динамическое нагружение, явная численная схема

DOI: 10.31857/S0032823523020157, EDN: UBHYJV

**1. Введение.** Конструкции из композитных материалов (КМ) широко используются в современной конструкторской практике [1–4] и в процессе эксплуатации часто испытывают воздействие интенсивных термосиловых нагрузок [5–8], при которых ком-

поненты их композиций деформируются пластически [5–7, 9–13]. Поэтому актуальна проблема математического моделирования неизотермического упругопластического динамического поведения тонкостенных КМ-изделий, в том числе и искривленных панелей и пологих оболочек, которая на сегодняшний день находится на стадии становления [5–7, 12–17].

Физико-механические свойства многих материалов существенно зависят от температуры [10, 18, 19], кроме того, при динамическом нагружении их пластические характеристики зависят и от скорости деформирования [18, 19], поэтому в [17] была построена модель термоупруговязкопластического деформирования многонаправленно армированного материала и проведен ряд расчетов термомеханического поведения гибких пластин из таких КМ, нагруженных в поперечном направлении воздушной взрывной волной. В работе [17] продемонстрировано, что упруговязкопластический расчет металлокомпозитных пластин необходимо проводить при учете теплового отклика в них, а пластины из стеклопластика можно рассчитывать без учета возникающего при этом температурного поля (в силу пренебрежимо малого нагрева таких композитных конструкций). Однако известно, что при высокоскоростном нагружении материалов основным источником выделения тепла в них является диссипация энергии механического происхождения, которая равна полной свертке произведения тензоров напряжений и скоростей деформаций [20]. Так как частота поперечных колебаний искривленных панелей значительно больше, чем аналогичных пластин, изготовленных из тех же материалов и имеющих те же характерные размеры, то и скорости деформаций пологих КМ-оболочек при их динамическом нагружении в поперечном направлении будут существенно больше, чем у подобных им КМ-пластин. Следовательно, при таком нагружении искривленных КМ-панелей тепловыделение в них может оказаться значительно большим, чем в аналогичных КМ-пластинах, и результаты, полученные в [17], уже нельзя будет дословно переносить на пологие КМ-оболочки.

Для расчета волновых процессов в динамически изгибаемых тонкостенных элементах КМ-конструкций и для учета их слабого сопротивления поперечным сдвигам используют неклассические теории Тимошенко–Рейсснера [5, 7, 21, 22], Амбарцумяна [17, 23], Редди [24, 25] и теории изгиба более высоких порядков [5, 26, 27].

Для интегрирования физически и геометрически нелинейных задач динамики пластин и оболочек используют явные [5, 17] и неявные [6, 28] численные схемы.

Исходя из вышеизложенного, данная работа посвящена моделированию неизотермического упруговязкопластического деформирования динамически нагружаемых в поперечном направлении пологих армированных оболочек при использовании теории изгиба Амбарцумяна. Связанная нелинейная термомеханическая задача, возникающая при этом, численно интегрируется с использованием явной схемы шагов по времени.

**2. Формулировка задачи и метод ее решения.** Рассмотрим пологую оболочку толщиной  $2h$ , с которой свяжем ортогональную систему координат  $x_i$  так, чтобы отсчетная поверхность  $x_3 = 0$  была срединной ( $|x_3| \leq h$ ), а координатные линии  $x_1$  и  $x_2$  совпадали с линиями главных кривизн этой поверхности (рис. 1, на котором искривленность панели не изображена в силу ее малости). Оболочка усилена  $N$  семействами волокон (возможно и пространственно) с плотностями армирования  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ). В поперечном направлении  $x_3$  структура армирования однородна.

С каждым  $k$ -м семейством волокон свяжем ортогональную систему координат  $x_i^{(k)}$ . При этом ось  $x_1^{(k)}$  направим вдоль траектории армирования, а ее ориентацию в пространстве  $x_1x_2x_3$  зададим двумя углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$  (рис. 2).

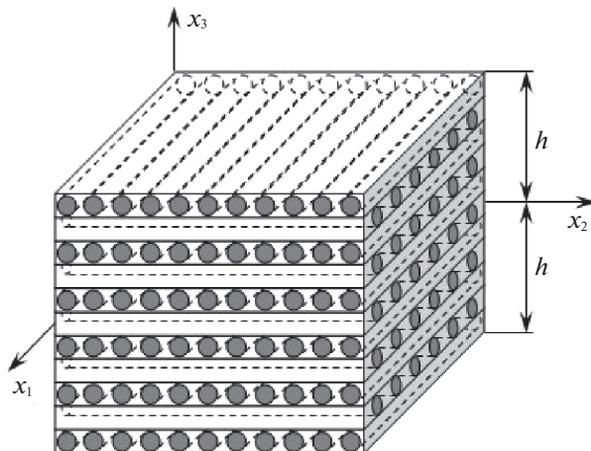


Рис. 1. Элемент полой оболочки с 2D-структурой армирования.

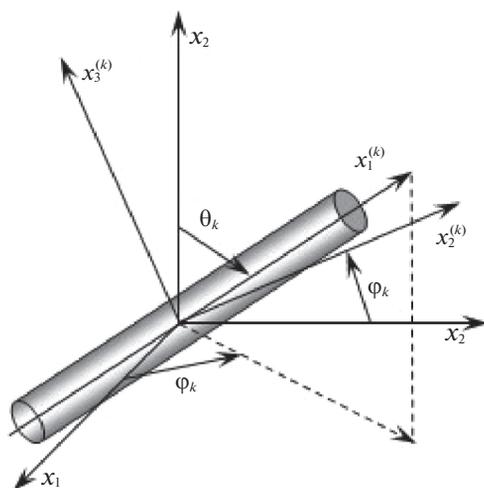


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волокном  $k$ -го семейства.

Направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  оси  $x_i^{(k)}$  в глобальной системе координат  $x_j$  ( $i, j = \overline{1,3}$ ,  $1 \leq k \leq N$ ) определяются формулами [17]:

$$\begin{aligned}
 l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k \\
 l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0 \\
 l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k; \quad 1 \leq k \leq N
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Внешние касательные силы на лицевых поверхностях панели традиционно не учитываем, а в случае пространственного армирования дополнительно считаем, что выполняются требования, предъявляемые к структуре армирования, приведенные в замечании в [17]. (При многонаправленном плоском армировании (см. рис. 1) указан-

ные требования выполняются заведомо.) Тогда на основании результатов работ [17, 23] перемещения точек гибкой полой КМ-оболочки  $U_i$  и осредненные деформации ее композиции  $\varepsilon_{ij}$  в рамках теории Амбарцумяна аппроксимируются так:

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) \varepsilon_{i3}^0, \quad U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}) \quad (2.2)$$

$$i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) (\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) +$$

$$+ \delta_{ij} \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i, j = 1, 2,$$

где  $w$  – прогиб конструкции;  $u_i$  – перемещения точек срединной поверхности ( $x_3 = 0$ ) в тангенциальных направлениях  $x_i$ ;  $\varepsilon_{i3}^0$  – деформации поперечных сдвигов в точках этой же поверхности;  $R_i$  – радиусы главных кривизн отсчетной поверхности;  $t_0$  – начальный момент времени  $t$ ;  $\partial_i$  – оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\Omega$  – область, занимаемая КМ-панелью в плане. В выражениях (2.2) и (2.3) неизвестны двумерные функции  $w$ ,  $u_i$  и  $\varepsilon_{i3}^0$  ( $i = 1, 2$ ), зависящие и от времени  $t$ .

В настоящем исследовании моделируется поведение искривленной КМ-панели как гибкой тонкостенной термомеханической системы, поэтому с приемлемой для практических приложений точностью напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  по координате  $x_3$  можно аппроксимировать так [17, 22]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  – нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях конструкции, известные из соответствующих силовых граничных условий.

К соотношениям (2.2) и (2.3) необходимо присоединить уравнения движения гибкой полой КМ-оболочки, которые при учете равенства (2.4) имеют вид [23]:

$$2h\rho\ddot{w} = \sum_{i=1}^2 \left[ \partial_i \left( F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) + R_i^{-1} F_{ii} \right] + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}$$

$$2h\rho\ddot{u}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) + R_i^{-1} F_{i3} - (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) \partial_i w \quad (2.5)$$

$$\frac{2}{3} h^3 \rho \ddot{\gamma}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3}; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad F_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) dx_3 \quad (2.6)$$

$$F_{i3}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{i3}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad M_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3; \quad i, j = 1, 2$$

$$\gamma_i(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) - \partial_i w(t, \mathbf{x}); \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

$\rho_0$  и  $\rho_k$  – объемные плотности материалов связующего и арматуры  $k$ -го семейства;  $\omega_0$  – относительное объемное содержание связующей матрицы в представительном элементе композиции;  $\gamma_i$  – традиционно вводимые для удобства новые кинематические переменные;  $\sigma_{ij}$  – осредненные напряжения в композиции искривленной панели;  $F_{ij}$ ,  $F_{i3}$  и  $M_{ij}$  – внутренние силовые факторы; точка – производная по времени  $t$ . Внешние массовые силы в уравнениях (2.5) не учитываются.

Как уже отмечалось, для интегрирования формулируемой нелинейной задачи предполагается использовать явную численную схему, т.е. значения неизвестных функций будем вычислять в дискретные моменты времени  $t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). При этом считаем, что в моменты времени  $t_m$  уже определены величины следующих функций [17]:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), & u_l(\mathbf{x}) &\equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), & \gamma_l(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_l(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}) \\ \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), & \Theta(\mathbf{r}) &\equiv \Theta(t_m, \mathbf{r}), & \dot{\Theta}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{r}), & \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}) \\ \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), & \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}) \\ \chi_k(\mathbf{r}) &\equiv \chi_k(t_m, \mathbf{r}); & l = 1, 2, & i, j = \overline{1, 3}, & m = n - 1, n \\ & & 0 \leq k \leq N, & \mathbf{x} \in \Omega, & |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $\sigma_{ij}^{(k)}$  и  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  – тензоры напряжений и деформаций в  $k$ -м компоненте композиции ( $k = 0$  – связующая матрица,  $k \geq 1$  – волокна  $k$ -го семейства);  $\chi_k$  – параметр Одкиста (упрочнения) того же материала;  $\Theta$  – температура КМ (пологой оболочки).

Определяющие уравнения термоупруговязкопластического деформирования армированного материала, пригодные для практического использования, получим на основе следующих предположений [29]:

1. В пределах представительного элемента КМ является макроскопически квазиоднородным телом. (При достаточно равномерном и густом наполнении связующего материала тонкими волокнами это допущение справедливо.)

2. Между связующей матрицей и волокнами имеет место идеальный термомеханический контакт.

3. В пределах представительного элемента, выделенного из КМ на миниуровне, напряжения, деформации и их скорости во всех компонентах и в композиции в целом кусочно-постоянны. Эффектами более высоких порядков, характеризующих локальные изменения полей напряжений, деформаций и их скоростей на микроуровне в малых окрестностях границ контакта связующего и волокон, пренебрегаем.

4. Поля деформаций, напряжений и их скоростей усредняем по объему репрезентативной ячейки КМ (т.е., согласно допущению 3, пропорционально  $\omega_k$ ,  $0 \leq k \leq N$ ).

5. Материалы компонентов композиции являются однородными и изотропными; их пластическое течение ассоциировано с поверхностями нагружения, соответствующими условию текучести Мизеса и зависящими от параметров упрочнения, температуры и скоростей деформирования.

Повторяя на базе этих гипотез рассуждения из работы [17], получим, что в рассматриваемый дискретный момент времени  $t_n$  связь между скоростями осредненных напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$ , деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  и температурой композиции  $\Theta$  можно записать в следующей матричной форме:

$$\overset{n}{\dot{\mathbf{c}}} = \mathbf{B} \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \mathbf{p}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5 \ \sigma_6)^T \equiv (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12})^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6)^T \equiv (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{31} \ 2\varepsilon_{12})^T \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6)^T \\ \mathbf{B} &\equiv \left( \omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \left( \mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k \right) \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k \\ \mathbf{E}_k &\equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad \mathbf{B}_k \equiv \mathbf{Z}_k + \frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{p}_k \equiv -\frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k + \frac{2}{\Delta} \left( \overset{n}{\Theta} - \overset{n-1/2}{\Theta} \right) \boldsymbol{\beta}_k, \quad \overset{n-1/2}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k \equiv \overset{n-1}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\Theta} \equiv \overset{n-1}{\Theta} + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\Theta}}$$

$$\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - G_k \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{Y}_k = \tau_H^{(k)} \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k,$$

$\Delta$  – шаг по времени;  $\mathbf{I}$  – единичная  $6 \times 6$ -матрица;  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_k$ ,  $\mathbf{E}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{Z}_k$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_k$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k$  и  $\mathbf{Y}_k$  –  $6 \times 6$ -матрицы;  $\mathbf{D}_k^{-1}$  и  $\mathbf{H}^{-1}$  – матрицы, обратные  $6 \times 6$ -матрицам  $\mathbf{D}_k$  и  $\mathbf{H}$ ;  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{r}_k$ ,  $\boldsymbol{\zeta}_k$ ,  $\mathbf{p}_k$  и  $\boldsymbol{\beta}_k$  – шестикомпонентные векторы-столбцы;  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  – шестикомпонентный вектор-столбец деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$   $k$ -го компонента композиции, по структуре аналогичный вектору  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (см. выражения (2.10)). Ненулевые элементы матриц  $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$  и вектор-столбцов  $\boldsymbol{\zeta}_k = (\zeta_i^{(k)})$ ,  $\boldsymbol{\beta}_k = (\beta_i^{(k)})$  вычисляются так:

$$c_{ij}^{(k)} = d_{ij}^{(k)} = q_{ij}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \zeta_1^{(k)} &= 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}); \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N \\ g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \dots \\ 2g_{61}^{(k)} &= q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\bar{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij} G_k + \lambda_k, \quad \bar{\bar{z}}_{ll}^{(k)} = G_k$$

$$\beta_i^{(k)} = \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)} + 3K_k \alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k} \left[ G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k \right]$$

$$\beta_l^{(k)} = \frac{s_l^{(k)}}{G_k} \left[ G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k \right]$$

$$(i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}), \quad \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} = A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad A_k = \frac{\gamma_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}$$

$$\begin{aligned}
K_{\Theta}^{(k)} &= \frac{dK_k}{d\Theta}, \quad G_{\Theta}^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \quad \tau_{\Theta}^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}, \quad \tau_H^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial H_k}, \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k} \\
\lambda_k &= \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}, \quad 2G_k = \frac{E_k}{1 + \nu_k}, \quad 3K_k = \frac{E_k}{1 - 2\nu_k} \\
\gamma_k &= \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)} \quad \text{или} \quad T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k \leq 0 \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k > 0 \end{cases} \quad (2.14) \\
W_k &= G_k \mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} (\tau_s^{(k)} G_{\Theta}^{(k)} - \tau_{\Theta}^{(k)} G_k) \dot{\Theta} - 2\tau_s^{(k)} \tau_H^{(k)} H_k^{-1} \xi_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \\
T_k^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}, \quad H_k^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)2} + 4 \sum_{i=4}^6 \xi_i^{(k)2}, \quad \chi_k = \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{2 p_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt \\
\mathbf{s}_k &= (s_1^{(k)} \ s_2^{(k)} \ s_3^{(k)} \ s_4^{(k)} \ s_5^{(k)} \ s_6^{(k)})^T \equiv (s_{11}^{(k)} \ s_{22}^{(k)} \ s_{33}^{(k)} \ s_{23}^{(k)} \ s_{31}^{(k)} \ s_{12}^{(k)})^T \\
\xi_k &= (\xi_1^{(k)} \ \xi_2^{(k)} \ \xi_3^{(k)} \ \xi_4^{(k)} \ \xi_5^{(k)} \ \xi_6^{(k)})^T \equiv (\xi_{11}^{(k)} \ \xi_{22}^{(k)} \ \xi_{33}^{(k)} \ \xi_{23}^{(k)} \ \xi_{31}^{(k)} \ \xi_{12}^{(k)})^T \\
\xi_{ij}^{(k)} &= \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)}, \quad s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)}, \quad \bar{e}_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{mm}^{(k)} \\
&(i, j = 1, 2, 3), \quad 0 \leq k \leq N,
\end{aligned}$$

где  $e_{ij}^{(k)}$  и  $p_{ij}^{(k)}$  – упругие и пластические деформации  $k$ -го материала композиции;  $E_k = E_k(\Theta)$  и  $\nu_k = \nu_k(\Theta)$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона того же компонента;  $\alpha_k = \alpha_k(\Theta)$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $\tau_s^{(k)} = \tau_s^{(k)}(\chi_k, H_k, \Theta)$  – мгновенный предел текучести при чистом сдвиге, зависящий от уровня накопленной пластической деформации  $\chi_k$  и значений интенсивности скорости деформаций  $H_k$  и температуры  $\Theta$  в текущий момент времени  $t_n$ ;  $p_l^{(k)}$  и  $b_{ij}^{(k)}$  ( $0 \leq k \leq N$ ) – элементы вектор-столбцов  $\mathbf{p}_k$  и матриц  $\mathbf{B}_k$ , определенных равенствами (2.10) и (2.11);  $\gamma_k$  – параметр переключения, определяющий при  $\gamma_k = 0$  условия термоупругого деформирования, разгрузки или нейтрального нагружения, а при  $\gamma_k = 1$  – активного нагружения при пластическом деформировании  $k$ -го материала композиции; индекс “Т” – операция транспонирования. По повторяющимся индексам  $k$  и  $l$  в выражениях (2.14) суммирование нет. В равенствах (2.14) опущен верхний индекс  $n$ , означающий рассматриваемый дискретный момент времени  $t = t_n$ . Между вектор-столбцами  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  и  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$  (см. соотношения (2.9)–(2.11)) существует матричная связь [17]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k; \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.15)$$

где матрицы  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}_k$  и вектор-столбцы  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{r}_k$  определены выражениями (2.11). Для материалов композиции выполняются определяющие соотношения, записанные в матричной форме [17]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{p}_k; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.16)$$

где  $\dot{\sigma}_k$  – шестикомпонентный вектор-столбец скоростей напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$  в  $k$ -й фазе композиции, по структуре аналогичный вектору  $\sigma$  в соотношениях (2.10); матрица  $\mathbf{B}_k$  и вектор  $\mathbf{p}_k$  определены равенствами (2.11).

Вектор-столбец  $\dot{\epsilon}_k$  в соотношениях (2.14) необходимо выразить его конечно-разностным аналогом, используя формулу трапеций [17]:

$$\dot{\epsilon}_k^n = \frac{2}{\Delta} \left( \epsilon_k^n - \epsilon_k^{n-1/2} \right); \quad 0 \leq k \leq N, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где последнее слагаемое определено в (2.11).

Не выписанные в соотношениях (2.13) элементы  $6 \times 6$ -матриц  $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$  и  $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$  представлены в табл. (21.40) и (21.44) в [29]. Эти матрицы  $\mathbf{G}_k$  и  $\mathbf{Q}_k$  задают преобразования векторов-столбцов  $\dot{\sigma}_k$  и  $\dot{\epsilon}_k$  (см. равенство (2.16)) при переходе от глобальной ортогональной системы координат  $x_j$  к локальной системе  $x_i^{(k)}$  (см. рис. 2). Направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = \overline{1,3}, 1 \leq k \leq N$ ) между указанными осями вычисляются по формулам (2.1).

Согласно условиям соответствия (2.10), из третьего уравнения системы (2.9), линеаризованной по методу переменных параметров упругости [17, 30], выразим скорость поперечной деформации полой КМ-оболочки:

$$\dot{\epsilon}_{33}^n \equiv \dot{\epsilon}_3^n = \frac{1}{b_{33}} \left( \dot{\sigma}_3^n - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \dot{\epsilon}_i^n - p_3^n \right), \quad (2.17)$$

где  $b_{3i}$  и  $p_3$  ( $i = \overline{1,6}$ ) – элементы матрицы  $\mathbf{B}$  и вектора  $\mathbf{p}$  в равенстве (2.9); скорость  $\dot{\sigma}_3$  получается из соотношения (2.4) дифференцированием по времени  $t$ . Производные  $\dot{\epsilon}_i$  в правой части равенства (2.17) определяются путем дифференцирования по  $t$  кинематических соотношений (2.3), т.е. характеризуются двумерными функциями  $w, \dot{w}, \dot{u}_i$  и  $\dot{\epsilon}_{i3}^0$  ( $i = 1, 2$ ).

Как и в [17], температуру  $\Theta$  аппроксимируем по толщине искривленной панели полиномом порядка  $L$ :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (2.18)$$

где  $\Theta^0 = \text{const}$  – температура естественного состояния конструкции;  $\Theta_l$  – искомые двумерные функции, зависящие и от времени  $t$ .

Согласно известным экспериментальным данным [10, 18], удельную теплоемкость  $k$ -го материала композиции  $c_k$  вполне допустимо представить полиномом второго порядка от температуры:

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.19)$$

где  $c_l^{(k)}$  ( $l = \overline{0,2}$ ) – известные коэффициенты.

Так как метрику в полой оболочке с приемлемой для практических приложений точностью можно отождествить с метрикой в декартовой прямоугольной системе координат [23], используя результаты работы [17], в качестве разрешающих двумерных уравнений теплофизической составляющей рассматриваемой задачи, соответствующих разложению (2.18), получим равенства

$$\rho \dot{U}^{(m)} = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L - 2 \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} \left( l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} \left( \Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0 \right) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}) \\
& \sum_{l=0}^L h^{l-1} \left( l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} \left( \Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0 \right) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
& C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \\
& + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \\
& \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

где

$$\begin{aligned}
U^{(m)}(t, \mathbf{x}) & \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1,3}) \\
\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) & \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m \left[ q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)} \right] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}) \\
W^{(m)}(t, \mathbf{x}) & \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2) \\
H(s) & \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} \left[ 1 - (-1)^{s+1} \right], \quad \lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33} \Big|_{\Theta = \Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_3(t, \mathbf{x}, \pm h) = q_{\infty}^{(\pm)},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$U$  – удельная внутренняя энергия материала конструкции;  $q_i$  – компоненты вектора теплового потока в КМ, связанные с  $\text{grad } \Theta$  законом Фурье для волокнистого материала (см. соотношения (3.1) и (3.2) в [17]);  $q_{\infty}^{(\pm)}$  – заданные тепловые потоки через верхнюю (+) и нижнюю (–) лицевые поверхности оболочки;  $\Theta_{\infty}^{(\pm)}$  – температуры окружающей среды со стороны тех же поверхностей;  $\alpha^{(\pm)}$  – коэффициенты теплоотдачи на тех же поверхностях;  $\lambda_{33}$  – коэффициент теплопроводности композиции в направлении  $x_3$ , определяемый по структурным формулам (3.2) и (3.3) из [17];  $\rho$  задано первым выражением в (2.6).

Приведенные двумерные уравнения (2.20) при учете выражений (2.23) получены из трехмерного уравнения теплового баланса методом взвешенных невязок; при этом в качестве весовых функций использовались однородные полиномы  $x_3^m$ . Равенства (2.21) – это тепловые граничные условия на лицевых поверхностях искривленной КМ-панели, преобразованные с учетом разложения для температуры (2.18). Уравнения (2.22) задают связь между двумерными функциями  $U^{(m)}$  (см. формулу (2.23)) и коэффициентами представления (2.18) при учете аппроксимаций (2.19).

Для завершения постановки задачи термоупруговязкопластического деформирования искривленной КМ-панели к уравнениям (2.3), (2.5) и (2.9) необходимо присоединить общеизвестные силовые (выраженные через силовые факторы  $F_{ij}$ ,  $F_{i3}$  и  $M_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ ) и кинематические граничные условия, а также начальные условия для неизвестных функций  $w$ ,  $u_i$  и  $\varepsilon_{i3}^0$ ,  $i = 1, 2$  (см. выражения (2.7)) [23]. Кроме того, для однозначного определения функций  $\Theta_l$  ( $0 \leq l \leq L$ ) в разложении (2.18) нужно использовать соответствующие теплофизические граничные условия, которые также получаются методом взвешенных невязок и при учете выражений (2.18) и (2.23) имеют вид [17]:

$$Q_1^{(m)} n_1 + Q_2^{(m)} n_2 - \alpha_* \sum_{l=0}^L H(l+m) \Theta_l = -\alpha_* H(m) (\Theta_\infty^* - \Theta^0) + Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

где

$$Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_\infty^*(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3; \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

$n_1, n_2$  – направляющие косинусы внешней нормали к контуру  $\Gamma$ , ограничивающему область  $\Omega$ ;  $\alpha_*$ ,  $\Theta_\infty^*$ ,  $q_\infty^*$  имеют тот же смысл, что и аналогичные величины в соотношениях (2.21), только на торцевой поверхности конструкции.

Для интегрирования уравнений (2.20) по времени необходимо задать начальные значения для функций  $U^{(m)}$  при  $t = t_0$ . Эти значения получаются из равенств (2.22) при подстановке в них функций  $\Theta_l(t_0, \mathbf{x})$  ( $0 \leq l \leq L$ ), полученных из разложения (2.18) заданной начальной температуры  $\Theta(t_0, \mathbf{x})$  КМ-оболочки.

Как и в [17], заменим вторые производные по  $t$  от неизвестных функций в левых частях уравнений (2.5) их конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне  $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ , тогда с учетом обозначений, аналогичных (2.8) получим

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{i=1}^2 \left[ \partial_i \left( F_{i3}^n + \sum_{j=1}^2 F_{ij}^n \partial_j w^n \right) + R_i^{-1} F_{ii}^n \right] + \sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)} \\ \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left( u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( F_{ij}^n - F_{j3}^n \partial_i w^n \right) + R_i^{-1} F_{i3}^n - \left( \sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)} \right) \partial_i w^n \\ \frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} \left( \gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij}^n - F_{i3}^n; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

По формулам (2.6) при учете предположений (2.8) в текущий дискретный момент времени  $t_n$  можно определить все внутренние силовые факторы и внешние силы  $\sigma_{33}^{n(\pm)}$ , входящие в правые части уравнений (2.25). Следовательно, из этих равенств при учете соответствующих граничных условий [23] по явной схеме можно вычислить значения

искомых функций  $w^{n+1}$ ,  $u_i^{n+1}$  и  $\gamma_i^{n+1}$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ . Затем, используя выражения (2.7), можно получить и значения деформаций  $\varepsilon_{i3}^{n+1}$  ( $i = 1, 2$ ), определяющих совместно с  $w^{n+1}$  и  $u_i^{n+1}$  перемещения точек конструкции и усредненные деформации композиции (см. соотношения (2.2) и (2.3)).

Предполагаем, что помимо функций, указанных в равенствах (2.8), при  $t = t_m$  дополнительно известны значения и таких функций [17] (см. соотношения (2.18), (2.21) и (2.23)):

$$\begin{aligned} \Theta_l(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_l(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\Theta}_l(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_l(t_{n-1}, \mathbf{x}), \quad U^{(j)}(\mathbf{x}) \equiv U^{(j)}(t_n, \mathbf{x}) \\ q_i(\mathbf{r}) &\equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \quad q_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \quad \Theta_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \Theta_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$i = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq j \leq L-2, \quad 0 \leq l \leq L, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h$$

Для численного интегрирования теплофизической составляющей рассматриваемой связанной задачи также используем явную схему, но на двухточечном шаблоне по времени  $\{t_n, t_{n+1}\}$ . Заменяв производные по  $t$  в левых частях равенств (2.20) их конечными разностями и учитывая обозначения, аналогичные (2.26), получим уравнения

$$\frac{\rho}{\Delta} \left( U^{(m)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L - 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Используя выражения (2.23) и принимая во внимание предположения (2.26), в текущий момент времени  $t_n$  можем вычислить правые части в уравнениях (2.27). Затем, учитывая тепловые граничные (2.24) и начальные температурные условия, из ра-

венств (2.27) по явной схеме определяем значения функций  $U^{(m)}$  на следующем шаге по времени  $t_{n+1}$ . После этого при  $t = t_{n+1}$  из уравнений (2.21) и (2.22), в которых правые части уже известны, при учете соотношений (2.23) получаем коэффициенты разложе-

ния температуры  $\Theta_l(\mathbf{x})$  (см. формулу (2.18)). В случае термочувствительных материалов фаз композиции, когда в разложении (2.19)  $c_1^{(k)} \neq 0$  и/или  $c_2^{(k)} \neq 0$  ( $0 \leq k \leq N$ ), система уравнений (2.21) и (2.22) является нелинейной относительно функций  $\Theta_l$  ( $0 \leq l \leq L$ ). Линеаризовать уравнения (2.22) можно, используя, например, метод переменных теплофизических параметров, формально аналогичный методу переменных параметров упругости [30]. В остальном разработанный численный метод интегрирования рассматриваемой задачи термоупруговязкопластического динамического деформирования пологих КМ-оболочек при учете равенств (2.3), (2.4), (2.17) и структурных соотношений (2.9), (2.15) и (2.16) реализуется так, как подробно описано в [17], где было показано, что шаг интегрирования по времени  $\Delta$  в уравнениях (2.25) и (2.27) нужно выбирать, исходя из необходимого условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [5, 31].

**3. Обсуждение результатов расчетов.** Исследуем термоупруговязкопластический динамический изгиб относительно тонких пологих цилиндрических КМ-оболочек ( $\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b; 1/R_1 \equiv 0, R_2 \equiv R = \text{const}; 2h = 2 \text{ см}, b = 50 \text{ см}$ ), стрела подъема которых  $f$  над продольными (в направлении  $x_1$ ) кромками равна 10 см. При этом радиус кривизны КМ-панелей вычисляется так:  $R = (b^2 + f^2)/(2f)$ . В рассматриваемом случае  $0 < f < 0.4b$ , поэтому оболочки действительно являются пологими [23]. Кромки конструкций жестко закреплены:  $w = 0, u_i = 0$  и  $\gamma_i = 0, \mathbf{x} \in \Gamma, t \geq t_0$  (см. выражения (2.2) и (2.7)). До начального момента времени  $t = t_0 = 0$  искривленные КМ-панели покоятся ( $w = 0, u_i = 0$  и  $\gamma_i = 0, \mathbf{x} \in \Omega, t \leq t_0, i = 1, 2$ ) при температуре естественного состояния  $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$  ( $\mathbf{x} \in \Omega, |x_3| \leq h$  и  $t \leq t_0$ ). При  $t = t_0 = 0$  конструкции нагружаются избыточным давлением  $p(t)$ , которое порождается воздушной взрывной волной [28]:

$$\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max} \\ p_{\max} \exp[-\beta(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$\beta = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0; \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad (3.2)$$

$t_{\max}$  – момент времени, при котором  $p(t)$  достигает наибольшего по модулю значения  $|p_{\max}|$ ;  $t_{\min}$  – момент времени, при котором уже можно пренебречь  $|p(t)|$  по сравнению с  $|p_{\max}|$  (в частности, выражение (3.2) справедливо при  $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$ ). На основании данных экспериментов [28] в расчетах примем  $t_{\max} = 0.1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс. Из соотношений (3.1) вытекает: при  $p_{\max} > 0$  пологие оболочки нагружаются со стороны нижней (вогнутой) лицевой поверхности (при этом предполагается, что  $\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0$ ), а при  $p_{\max} < 0$  – со стороны верхней (выпуклой) лицевой поверхности (при этом считаем, что  $\sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$ ).

Известно, что при нарастании внешней динамической нагрузки до максимального ее значения за время, меньшее 0.1 мкс, в КМ-конструкциях возникают откольные явления и расслоения [7]. Так как в рассматриваемом случае нагружения  $t_{\max} = 0.1$  мс  $\gg 0.1$  мкс, материал искривленных панелей остается сплошным, и вполне обоснованно применимы допущения, использованные в разд. 2.

Теплообмен КМ-панелей с окружающей средой на лицевых поверхностях происходит в условиях естественной конвекции ( $\alpha^{(\pm)} = 30$  Вт/(м<sup>2</sup> К) [32] и  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$ ) при температуре воздуха  $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$  (см. равенства (2.21)). На торцевых поверхностях тонкостенных конструкций задана температура, которая поддерживается равной  $\Theta^0$  (см. формулу (2.24) при  $\alpha_* \rightarrow \infty$  и  $\Theta_{\infty}^* = \Theta^0$ ).

Оболочки выполнены из эпоксидной смолы [9] и армированы стеклянными волокнами [10] (стеклопластик) или из магниевого сплава ВТ65 [18] и усилены стальной проволокой марки У8А [10] (металлокомпозиция). Упругопластическое деформирование компонентов композиций при постоянстве температуры  $\Theta$  и скорости деформаций  $\dot{\epsilon}$  определяется диаграммой с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E_k \epsilon, & |\epsilon| \leq \epsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_k \\ \text{sign}(\epsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\epsilon - \text{sign}(\epsilon) \epsilon_s^{(k)}); & |\epsilon| > \epsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где  $\sigma$  и  $\epsilon$  – осевое напряжение и соответствующая ему деформация при растяжении–сжатии;  $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$  – модуль упрочнения  $k$ -го материала композиции;  $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$  – условный предел текучести того же материала. Физико-механические характеристики компонентов композиций представлены в табл. 1, где в скобках указана температура  $(\Theta, ^\circ\text{C})$ , при которой определено значение соответствующей величины. Во второй и третьей частях табл. 1 (для скоростей деформаций  $\dot{\epsilon} = 0.417$  с<sup>-1</sup> и  $\dot{\epsilon} = 104$  с<sup>-1</sup>) представлены только те значения характеристик, которые отличаются от данных, приведенных в первой части (для  $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>). Как и в [17], предполагается: в рассматриваемом диапазоне изменения скорости деформации  $\dot{\epsilon}$  можно пренебречь зависимостью упругих и теплофизических характеристик материалов композиции от  $\dot{\epsilon}$  [18, 19]. В расчетах зависимости физико-механических характеристик от температуры  $\Theta$  аппроксимировались линейно по данным, указанным в табл. 1, а аппроксимации зависимостей характеристик пластичности материалов от скорости деформирования  $\dot{\epsilon}$  принимались такими же, как в [17].

Для реализации разработанного в разд. 1 численного метода по пространственным переменным  $x_1$  и  $x_2$  вводилась регулярная сетка с шагами  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1$  см; шаг по времени  $\Delta$  задавался равным 0.25 мкс. При такой дискретизации рассматриваемых задач необходимые условия устойчивости построенной конечно-разностной схемы выполняются с запасом (см. формулы (6.3) в [17]).

Таблица 1. Физико-механические характеристики компонентов композиций [9, 10, 18]

Характеристика материала	Эпоксидная смола	Стекланные волокна	Магнийевый сплав ВМ65 (Mg)	Стальная проволока У8А
$\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$				
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1210.0 (20)	2520.0 (20)	1800.0 (20)	7800.0 (20)
	1208.0 (40)	2519.6 (80)	1796.2 (100)	7791.8 (100)
$E$ , ГПа	2.8 (20)	86.8 (20)	43.0 (20)	210.0 (20)
	2.3 (40)	86.3 (80)	38.5 (100)	195.0 (100)
$\nu$	0.330 (20)	0.250 (20)	0.330 (20)	0.300 (20)
	0.333 (40)	0.254 (80)	0.334 (100)	0.305 (100)
$\sigma_s$ , МПа	20 (20)	4500 (20)	267 (20)	3968 (20)
	18 (40)	4400 (80)	219 (100)	3971 (200)
$E_s$ , ГПа	1.114 (20)	6.230 (20)	0.379 (20)	6.973 (20)
	0.783 (40)	5.168 (80)	0.367 (100)	5.014 (200)
$\lambda$ , Вт/(м К)	0.243 (20)	0.89 (20)	117.23 (20)	42.7 (20)
	0.240 (40)	0.86 (80)	121.42 (100)	41.7 (100)
$\alpha \times 10^6$ , К <sup>-1</sup>	68.1 (20)	2.5 (20)	20.9 (20)	12.3 (20)
	70.3 (40)	2.6 (80)	22.6 (100)	13.2 (100)
$c$ , кДж/(кг К)	1.54 (20)	0.800 (20)	1.032 (20)	0.485 (20)
	1.60 (40)	0.839 (80)	1.054 (100)	0.488 (100)
$\dot{\epsilon} = 0.417 \text{ c}^{-1}$				
$\sigma_s$ , МПа	—	—	306 (20)	—
	—	—	243 (100)	—
$E_s$ , ГПа	—	—	0.589 (20)	—
	—	—	0.596 (100)	—
$\dot{\epsilon} = 104.0 \text{ c}^{-1}$				
$\sigma_s$ , МПа	22.0 (20)	4600 (20)	385 (20)	4100 (20)
	19.5 (40)	4550 (80)	340 (100)	4075 (200)
$E_s$ , ГПа	1.238 (20)	6.314 (20)	1.010 (20)	7.035 (20)
	0.853 (40)	5.458 (80)	0.625 (100)	6.158 (200)

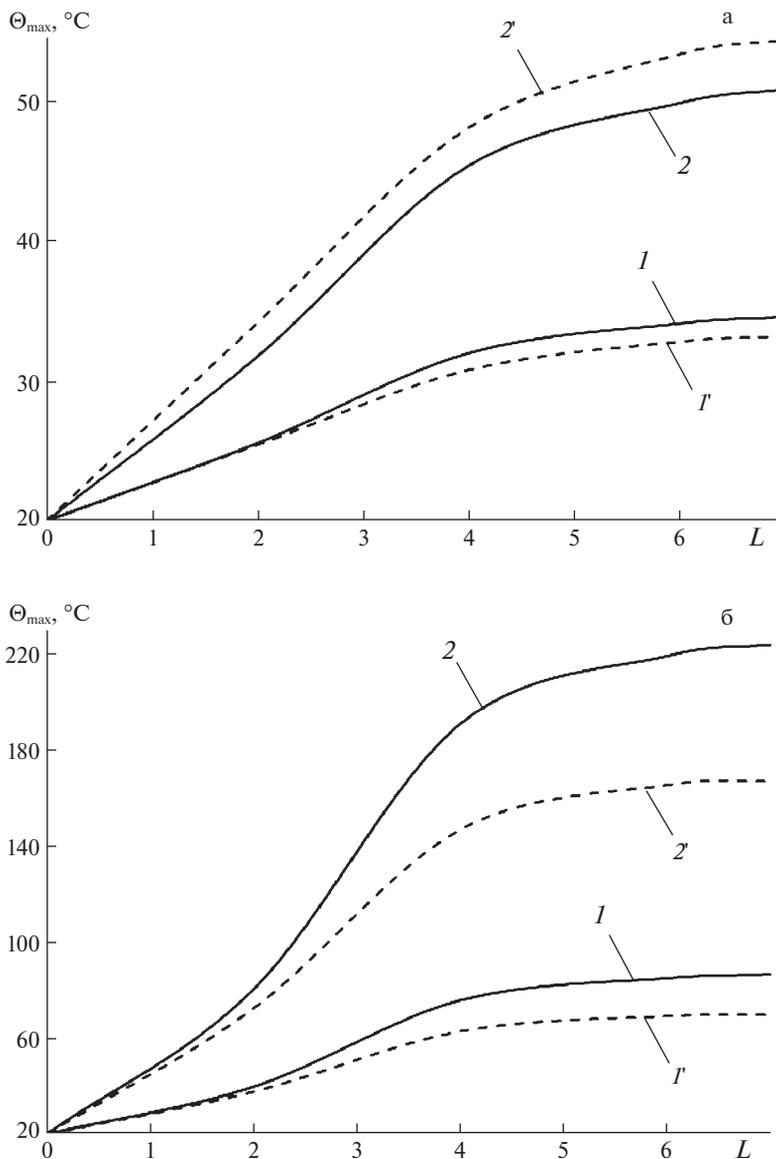
Пологие оболочки усилены двумя семействами волокон ( $N = 2$ ), уложенных в направлениях  $x_1$  и  $x_2$  соответственно (как изображено на рис. 1) с плотностями армирования  $\omega_1 = 0.1$  и  $\omega_2 = 0.3$ . Углы армирования для такой плоской структуры, согласно рис. 2, имеют значения:  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 = \pi/2$  (см. соотношения (2.1)).

Чтобы выяснить вопрос о выборе значения  $L$  в формуле (2.18), при котором обеспечивалась бы приемлемая для практических расчетов точность определения температуры  $\Theta$ , исследуем зависимости от  $L$  наибольших значений  $\Theta_{\max}(L) = \max_{t,r} \Theta(t, r; L)$  ( $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$ ,  $|x_3| \leq h$  и  $0 \leq t \leq 50$  мс). На рис. 3 представлены эти зависимости для стеклопластиковой КМ-панели (рис. 3,а), полученные при  $|p_{\max}| = 8$  МПа (см. выражения (3.1) и (3.2)), и для Mg–У8А-оболочки (рис. 3,б) при  $|p_{\max}| = 30$  МПа. При указанных значениях  $|p_{\max}|$  в рассматриваемых конструкциях наблюдается пластическое деформирование компонентов композиции. Значению  $L = 0$  на рис. 3 соответствуют

случаи, когда тепловой отклик в пологих КМ-оболочках не учитывается, поэтому условно принято  $\Theta_{\max}(0) = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ . Сплошные кривые на рис. 3 рассчитаны при учете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования (от величины  $H_k$  в соотношениях (2.14)), а штриховые кривые, номера которых помечены штрихом, – без учета этой зависимости (термоупругопластическое деформирование). В последнем случае расчеты проводились по данным первой части табл. 1 (при значении  $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ ). Кривые 1 и 1' получены при нагружении КМ-панелей снизу – со стороны вогнутой лицевой поверхности ( $p_{\max} > 0$ ), а кривые 2 и 2' – при нагружении сверху – со стороны выпуклой лицевой поверхности ( $p_{\max} < 0$ ).

Анализ поведения кривых на рис. 3 показывает, что приращение величины  $\Theta_{\max}$  при переходе от  $L = 6$  к  $L = 7$  можно считать практически пренебрежимо малым. При  $L \geq 8$  система линеаризованных уравнений (2.21) и (2.22), из которой при учете соотношений (2.23) в текущий момент времени вычисляются коэффициенты в представлении температуры (2.18), становится плохо обусловленной, поэтому зависимости  $\Theta_{\max}(L)$  при  $L \geq 8$  являются расходящимися и на рис. 3 не изображены. (Этот результат качественно совпадает с полученным ранее для КМ-пластин разной относительной толщины [17].) Далее в расчетах принимаем  $L = 7$ .

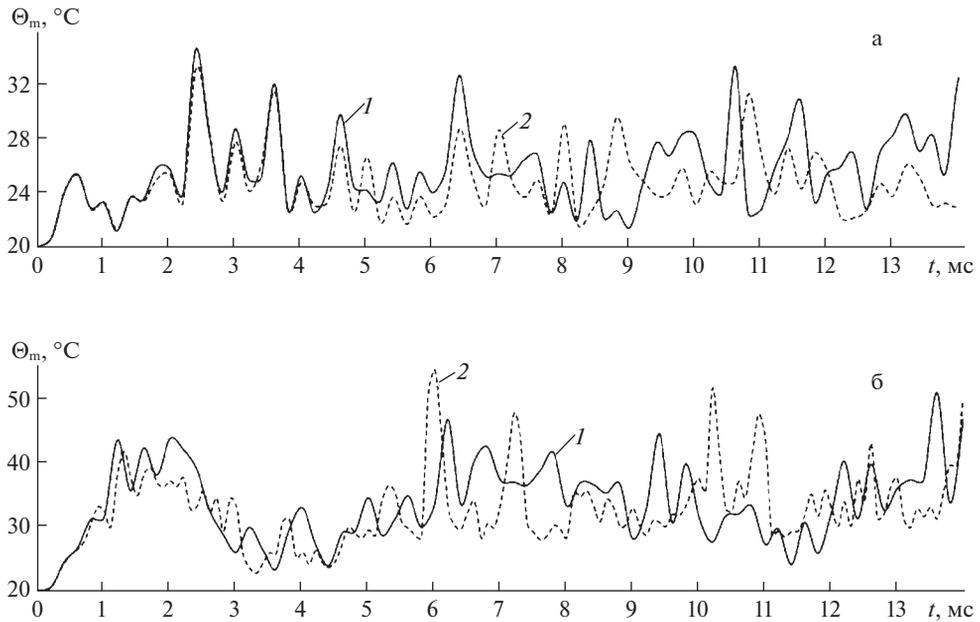
На рис. 4 изображены осцилляции наибольших значений температуры  $\Theta_m(t) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r})$  ( $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$  и  $|x_3| \leq h$ ) в стеклопластиковой полой оболочке, нагруженной снизу (рис. 4,а) давлением  $p_{\max} = 8$  МПа и сверху:  $p_{\max} = -8$  МПа (рис. 4,б). Сплошные кривые 1 на рис. 4 рассчитаны по термоупруговязкопластической теории, а штриховые кривые 2 – термоупругопластической теории. Сравнение поведения кривых 1 и 2 на рис. 4 показывает, что расчеты, выполненные по термоупруговязкопластической (кривые 1) и по термоупругопластической (кривые 2) моделям деформирования компонентов композиции искривленных панелей при их динамическом поперечном нагружении, приводят к существенно разным температурным откликам. При этом указанные теории деформирования предсказывают разные значения достигаемого максимума температуры  $\Theta_{\max} = \max_{t \geq t_0} \Theta_m(t)$ . Так, при нагружении стеклопластиковой панели снизу, согласно поведению кривой 1 на рис. 4,а, значение  $\Theta_{\max} = 34.5^\circ\text{C}$  при учете чувствительности фазовых материалов к скорости их деформирования и  $\Theta_{\max} = 33.2^\circ\text{C}$  (см. кривую 2 на рис. 4,а) при неучете этой чувствительности. Оба указанных значения достигаются в один и тот же момент времени  $t \approx 2.4$  мс и в данном случае различаются незначительно (менее, чем на  $1.5^\circ\text{C}$ ). Однако уже в случае нагружения полой оболочки из стеклопластика сверху (см. рис. 4,б) такое различие становится более существенным, причем значения  $\Theta_{\max}$ , полученные по термоупруговязкопластической и термоупругопластической теориям, достигаются в разные моменты времени. А именно: согласно поведению кривой 1 на рис. 4,б, значение  $\Theta_{\max} = 50.8^\circ\text{C}$  достигается при  $t \approx 13.6$  мс, а на кривой 2 глобальный максимум со значением  $\Theta_{\max} = 54.3^\circ\text{C}$  реализуется при  $t \approx 6$  мс. Таким образом, расчеты, выполненные без учета зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования, занижают расчетное значение  $\Theta_{\max}$  при нагружении стеклопластиковой искривленной панели снизу (см. рис. 4,а), и, наоборот, завышают это значение при нагружении такой конструкции сверху (см. рис. 4,б). Для сравнения напомним: согласно результатам работы [17], аналогичная стеклопластиковая пластина с теми же характерными размерами и с такой же структурой армирования при  $p_{\max} = \pm 4$  МПа нагревается практически до таких же значений  $\Theta_{\max}$ , что и полая оболочка, нагру-



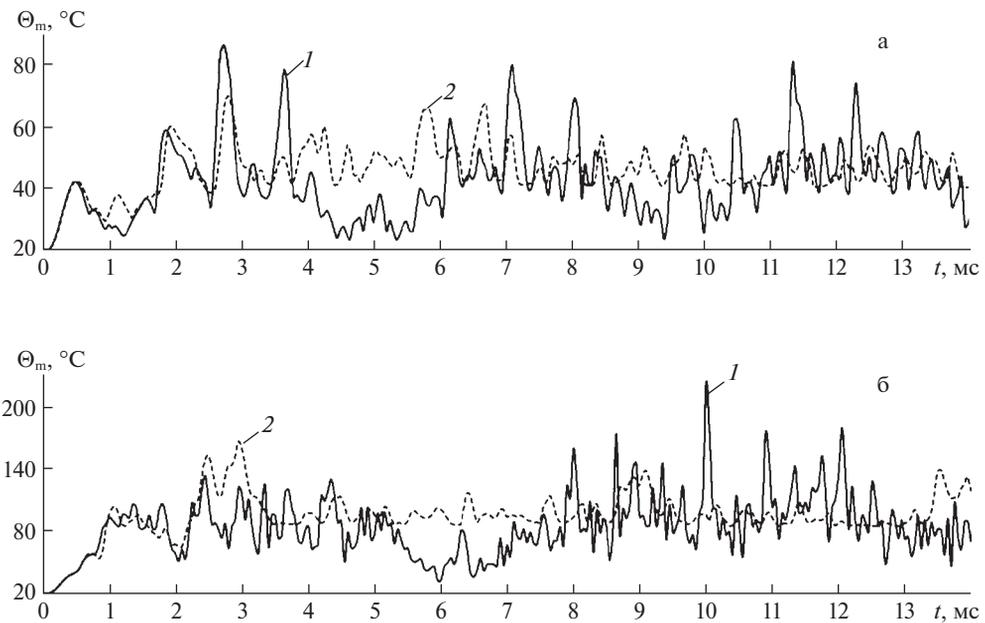
**Рис. 3.** Зависимости максимальных значений температуры от порядка аппроксимирующего полинома в стеклопластиковой (а) и металлокомпозитной (б) искривленных панелях.

женная снизу (см. рис. 4,а). Однако эти значения существенно меньше тех, что достигаются при нагружении искривленной панели сверху (см. рис. 4,б).

На рис. 5 изображены аналогичные зависимости  $\Theta_m(t)$ , полученные для металлокомпозитной полой оболочке, нагруженной снизу при  $p_{\max} = 30$  МПа (рис. 5,а) и сверху при  $p_{\max} = -30$  МПа (рис. 5,б). Номера кривых на рис. 5 имеют тот же смысл, что и на рис. 4. Поведение кривых 1 и 2 на рис. 5 различается в еще большей степени,



**Рис. 4.** Зависимости от времени наибольших значений температуры в стеклопластиковой искривленной панели, нагруженной снизу (а) и сверху (б).



**Рис. 5.** Зависимости от времени наибольших значений температуры в металлокомпозитной искривленной панели, нагруженной снизу (а) и сверху (б).

чем на рис. 4. Объясняется это тем, что пластические свойства связующего рассматриваемой металлокомпозиции сильно чувствительны к изменению скорости его деформирования, а компоненты стеклопластиковой композиции относительно слабо чувствительны к изменению этой скорости (см. табл. 1).

Сравнение кривых с одинаковыми номерами на рис. 4,а, 4,б и 5,а, 5,б соответственно показывает, что при практически одинаковых уровнях максимальных значений интенсивностей деформаций компонентов композиций, достигаемых в процессе поперечных осцилляций оболочек, металлокомпозитные искривленные панели (как и в случае пластин [17]) нагреваются в значительно большей степени, чем стеклопластиковые. Так, согласно поведению кривых на рис. 5,б, в отдельных точках пологой Mg–У8А-оболочки, нагруженной сверху, температура может превышать 100°C. Однако резкий интенсивный нагрев отдельных точек такой конструкции является кратковременным и длится менее 1 мс.

Согласно поведению кривой 2 на рис. 3,б (при  $L = 7$ ) и кривой 1 на рис. 5,б, для Mg–У8А-панели, нагруженной воздушной взрывной волной сверху, пиковые значения температуры могут превышать 200°C. По оценкам же, приведенным в [33], при ударном нагружении металлических образцов в областях локализованной пластической деформации температура может достигать 1000 К и выше. Как видно из предыдущего анализа, максимальные значения температуры для металлокомпозитной полой оболочки уже сопоставимы с этими оценками.

В [17] было показано, что динамический неупругий расчет стеклопластиковых пластин можно проводить без учета температуры в них (в силу незначительного их нагрева – не более, чем на 13°C). Расчеты же, выполненные по формулам данной работы, демонстрируют необходимость учета теплового отклика в полых стеклопластиковых оболочках, нагружаемых воздушной взрывной волной. Так, на рис. 6 изображены поперечные колебания центральной точки искривленной панели из стеклопластика ( $w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$ ), определенные при значениях  $p_{\max} = 8$  МПа (рис. 6,а) и  $p_{\max} = -8$  МПа (рис. 6,б). Кривые 1 и 2 на рис. 6 рассчитаны при тех же условиях, что и на рис. 4, а пунктирные кривые  $I$  приведены для сравнения и соответствуют упруговязкопластическому расчету, при котором изменение температурного поля в КМ-панели не учитывается. Поведение кривых 1 и  $I$  на рис. 6 демонстрирует, что с течением времени зависимости  $w_0(t)$ , полученные с учетом и без учета теплового отклика в стеклопластиковой полой оболочке, все более различаются, особенно при ее нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности (см. рис. 6,б). Аналогичное сравнение кривых 1 и 2 на рис. 6 показывает, что зависимости  $w_0(t)$  для рассматриваемой КМ-конструкции, рассчитанные с учетом и без учета чувствительности пластических свойств компонентов ее композиции к скорости их деформирования, с течением времени также все более различаются.

Согласно поведению кривых 1 на рис. 6,а и 6,б, максимальный по модулю прогиб искривленной стеклопластиковой панели достигается после ее прощелкивания вниз – в сторону вогнутой лицевой поверхности (вследствие динамической неустойчивости конструкции), которое наступает после прекращения действия внешней нагрузки (см. выражения (3.1) и (3.2) при  $t > t_{\min} = 2$  мс). Так, на кривой 1 рис. 6,а наибольший по модулю прогиб  $w_{\max} \equiv \max_{t \geq t_0} |w_0(t)| = 6.22$  см реализуется при  $t \approx 2.4$  мс, а для кривой 1 на рис. 6,б  $w_{\max} = 12.46$  см, который достигается при  $t \approx 15$  мс  $\gg t_{\min}$ . Следовательно, при нагружении искривленной панели из стеклопластика со стороны ее выпуклой лицевой поверхности наблюдается прощелкивание (причем не на первой осцилляции) вдвое большей амплитуды, чем при ее нагружении со стороны вогнутой лицевой поверхности. Это приводит к тому, что максимальные значения интенсивности деформаций фазовых материалов композиции такой оболочки в первом случае

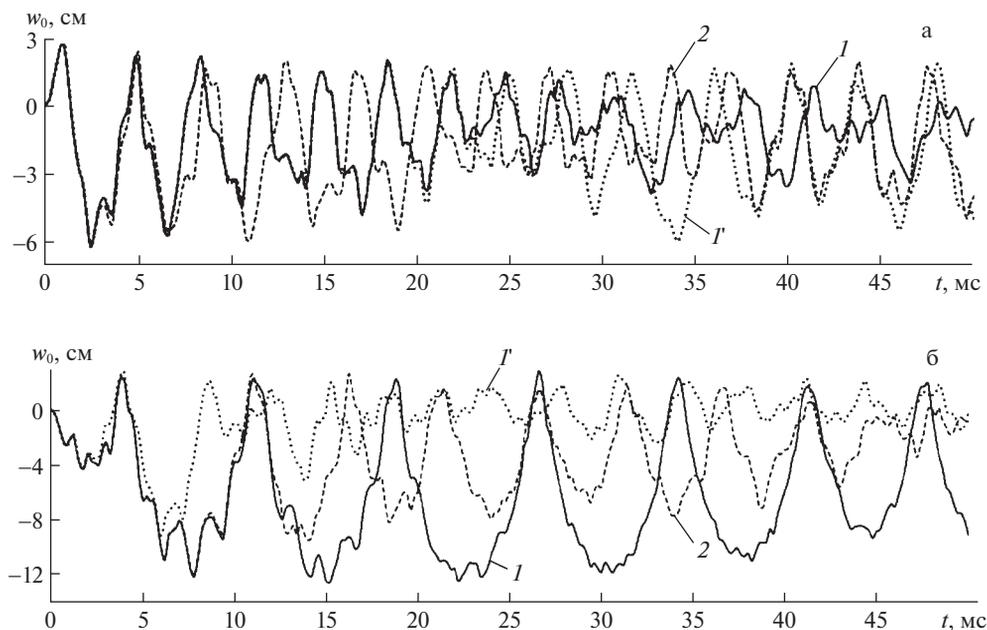


Рис. 6. Осцилляции прогиба центральной точки стеклопластиковой искривленной панели, нагруженной снизу (а) и сверху (б).

оказываются на 20–40% больше, чем во втором. Поэтому в процессе осцилляций искривленная стеклопластиковая панель, нагруженная сверху, нагревается значительно больше (см. рис. 4,б), чем при нагружении снизу (см. рис. 4,а). Расчеты показывают, что максимальные значения температуры в пологих КМ-оболочках не всегда достигаются в момент их максимального прощелкивания.

На рис. 7 изображены аналогичные зависимости  $w_0(t)$ , полученные для металлокомпозитной искривленной панели при  $p_{\max} = 30$  МПа (рис. 7,а) и  $p_{\max} = -30$  МПа (рис. 7,б). Кривые на рис. 7 определены при тех же условиях, что и кривые с теми же номерами на рис. 6. Как видно из рис. 7, уже на рассматриваемом малом промежутке времени ( $0 \leq t \leq 24$  мс) кривые 2 и  $\Gamma$  существенно отличаются от кривой 1. В еще большей степени в соответствующих расчетах различаются и осцилляции максимальных значений интенсивностей деформаций компонентов композиции Mg–У8А-оболочки (такие зависимости от времени здесь не представлены). Это замечание справедливо и для стеклопластиковых искривленных панелей, обсуждавшихся выше. Поэтому все выводы, сделанные ранее для пологих оболочек из стеклопластика, можно перенести и на металлокомпозитные конструкции с той лишь разницей, что в последних все эффекты и различия проявляются более ярко.

Можно предположить, что достаточно большие значения температуры, достигаемые в отдельных точках металлокомпозитной искривленной панели при ее динамических колебаниях в поперечном направлении (см. рис. 5), являются следствием того, что в проведенных расчетах использовано допущение: теплообмен тонкостенной КМ-конструкции с окружающей средой через лицевые поверхности осуществляется в условиях естественной конвекции ( $\alpha^{(\pm)} = 30$  Вт/(м<sup>2</sup> К)). Так как пологая КМ-оболочка при поперечном нагружении воздушной взрывной волной осциллирует с достаточ-

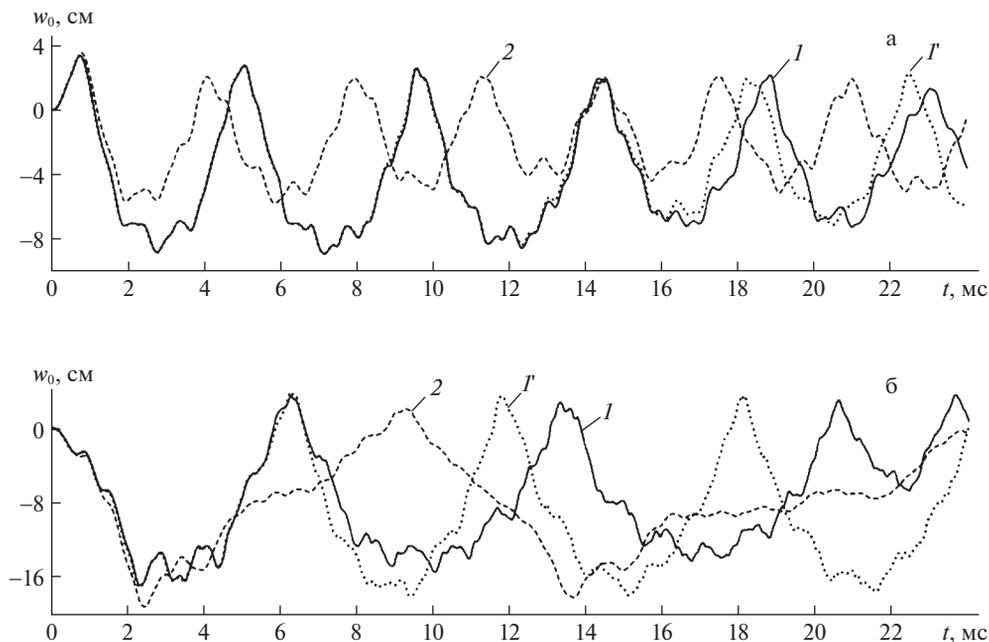


Рис. 7. Осцилляции прогиба центральной точки металлокомпозитной искривленной панели, нагруженной снизу (а) и сверху (б).

но большой частотой (см. рис. 6 и 7), то, возможно, теплообмен через ее лицевые поверхности необходимо рассматривать как происходящий в условиях вынужденной, а не естественной конвекции. Исходя из этого допущения, были выполнены дополнительные расчеты при задании коэффициентов теплоотдачи  $\alpha^{(\pm)} = 300 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$  (см. равенства (2.21)), значения которых характерны для вынужденной конвекции газов [32]. Рассчитанные при этом величины  $\Theta_m(t)$  отличаются от ранее полученных, т.е. в условиях естественной конвекции газов (см. рис. 4 и 5), только в четвертой значащей цифре. А значит, увеличение значений коэффициентов теплоотдачи на лицевых поверхностях изучаемых КМ-конструкций в 10 раз практически не оказывает влияния на результаты расчетов их термоупруговязкопластического деформирования на рассматриваемых промежутках времени ( $0 \leq t \leq 50 \text{ мс}$ ). Следовательно, на таких, достаточно малых, интервалах времени тепловые процессы, протекающие в пологих КМ-оболочках, можно считать адиабатическими, так как теплообмен кондуктивным путем в них еще пренебрежимо мал. Это обстоятельство, по-видимому, объясняет тот факт, что, как было показано выше (см. рис. 3) и в [17], для адекватного описания теплофизического состояния тонкостенной КМ-конструкции при ее динамическом нагружении в поперечном направлении температуру по толщине следует аппроксимировать полиномами 6–7 порядков, а не 1–2 порядков, как это традиционно принято делать для таких конструкций при их квазистатическом нагружении, когда доминирует именно кондуктивная составляющая теплопереноса.

**Заключение.** Разработанная математическая модель неизотермического упруговязкопластического деформирования гибких пологих оболочек со структурами многонаправленного армирования позволяет рассчитывать волновые процессы в них, а также учитывать слабое сопротивление таких тонкостенных элементов КМ-конструкций

поперечному сдвигу и связанность механической и теплофизической составляющих рассматриваемой задачи. Разработанный метод решения позволяет численно интегрировать сформулированную нелинейную начально-краевую задачу по явной схеме при использовании численно-аналитической модели структурной механики композитов, предложенной в [17].

Проведенный сравнительный анализ термоупруговязкопластического и термоупругопластического поведения динамически нагружаемых гибких искривленных КМ-панелей показал, что в отличие от аналогичных по структуре и характерным размерам армированных пластин [17] как стеклопластиковые, так и металлокомпозитные пологие оболочки необходимо рассчитывать, учитывая наличие теплового отклика, возникающего в них при динамическом нагружении. При этом гибкие искривленные панели из стеклопластика в отдельных точках могут нагреваться дополнительно на 14...27°C (подобные же им КМ-пластины – не выше, чем на 15°C [17]), а металлокомпозитные пологие оболочки – на 66...200°C (аналогичные им КМ-пластины – на 30...31°C [17]). Однако промежутки времени, на которых достигаются пиковые значения температуры кратковременны – составляют доли миллисекунды. Более интенсивный нагрев и, как следствие, большее термическое влияние наблюдается при нагружении пологих КМ-оболочек воздушной взрывной волной со стороны их выпуклых, а не вогнутых лицевых поверхностей.

При динамическом нагружении таких тонкостенных КМ-конструкций со стороны любой из лицевых поверхностей происходит их прощелкивание в сторону вогнутых лицевых поверхностей, которое наблюдается уже после прекращения действия кратковременной интенсивной нагрузки. Величины прогибов при прощелкивании в случае нагружения пологих оболочек со стороны их выпуклых лицевых поверхностей значительно превышают по модулю аналогичные величины при нагружении таких КМ-конструкций со стороны вогнутых поверхностей. Это обстоятельство и объясняет более интенсивное выделение тепла в первом случае по сравнению со вторым.

Таким образом, в отличие от армированных гибких пластин [17], аналогичные по структуре и характерным размерам пологие оболочки при динамическом нагружении нужно рассчитывать, учитывая наличие теплового отклика в них и чувствительность пластических свойств компонентов их композиций к скорости деформирования, т.е. по термоупруговязкопластической теории.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bannister M.* Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites*. 2001. Pt. A 32. P. 901–910.
2. *Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K.* Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.* 2001. V. 53. № 1. P. 21–42.
3. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers Mech. Eng.* 2013. V. 8. № 2. P. 187–200.
4. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progress in Aersp. Sci.* 2005. V. 41. № 2. P. 143–151.
5. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
6. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2011. V. 46. P. 807–817.
7. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
8. *Димитриенко Ю.И.* Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2019. 448 с.

9. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / ред. *Любин Дж.* М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
10. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. *Карпиноса Д.М.* Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
11. *Leu S.-Y., Hsu H.-C.* Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // *Int. J. Mech. Sci.* 2010. V. 52. P. 1579–1587.
12. *Vena P., Gastaldi D., Contro R.* Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Int. J. Plasticity.* 2008. V. 24. P. 483–508.
13. *Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L.* Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plasticity.* 2012. V. 36. P. 86–112.
14. *Ахундов В.М.* Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // *Механ. композ. матер.* 2015. Т. 51. № 3. С. 539–558.
15. *Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review // *Int. J. Impact Eng.* 2014. V. 67. P. 27–38.
16. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.* 2010. V. 93. P. 14–31.
17. *Янковский А.П.* Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // *ПММ.* 2022. Т. 86. № 1. С. 121–150.  
<https://doi.org/10.31857/S003282352201009X>
18. *Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. *Гольденблата И.И.* М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
19. *Белл Дж.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х частях. Ч. II. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
20. *Грешнов В.М.* Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов. М.: Физматлит, 2018. 232 с.
21. *Reissner E.* On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.* 1955. V. 13. № 2. P. 169–176.
22. *Богданович А.Е.* Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
23. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
24. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. N.Y.: CRC Press, 2004. 831 p.
25. *Андреев А.* Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Acad. Pub., 2013. 93 с.
26. *Куликов Г.М.* Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // *Изв. РАН. МТТ.* 1994. № 2. С. 33–42.
27. *Пикуль В.В.* Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 536 с.
28. *Houlston R., DesRochers C.G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers&Struct.* 1987. V. 26. № 1/2. P. 1–15.
29. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопrotивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
30. *Хажинский Г.М.* Модели деформирования и разрушения металлов. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
31. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
32. *Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М., Нечаев, С.Г. Иванов И.Е., Матюхин Л.М., Морозов К.А.* / Под ред. *Луканина В.Н.* Теплотехника. М.: Высш. шк., 2003. 671 с.
33. *Зуев Л.Б., Данилов В.И.* Физические основы прочности материалов: Учебное пособие. Долгопрудный: Изд. Дом “Интеллект”, 2013. 376 с.

## Modeling of Dynamic Thermo-Elastic-Viscous-Plastic Deformation of Flexible Shallow Reinforced Shells

A. P. Yankovskii<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

A mathematical model of non-isothermal elastic-viscous-plastic deformation of flexible shallow shells with multidirectional reinforcement structures has been developed. Wave processes and weak resistance to transverse shear in curved panels are modeled in terms of Ambartsumian's bending theory. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The composition components are assumed to be isotropic materials, and their plasticity is described by the flow theory with a loading function depending on the strain rate and temperature. The connectedness of the thermomechanical problem under dynamic loading of composite shallow shells is taken into account. In the transverse direction of constructions, the temperature is approximated by a 7th order polynomial. The formulated two-dimensional nonlinear initial-boundary value problem is solved using an explicit numerical scheme of time steps. The thermo-elastic-visco-plastic and thermo-elastic-plastic behavior of fiberglass and metal-composite shallow shells orthogonally reinforced in two tangential directions, loaded in the transverse direction by an air blast wave, has been studied. It is shown that flexible curved fiberglass panels at certain points can additionally heat up by 14...27°C, and similar metal-composite constructions – by 70°C or more. In this case, peak temperature values are kept at short-term intervals – on the order of fractions of 1 ms. It is shown that, unlike flexible plates, similar shallow shells (with the same reinforcement structure and the same characteristic dimensions) under dynamic loading in the transverse direction must be calculated not only taking into account the dependence of the plastic properties of the composition components on their strain rate, but also taking into account thermal response in such thin-walled constructions. A more intense inelastic deformation of curved composite panels is observed when they are loaded from the side of the convex front surface.

*Keywords:* flexible shallow shells, multidirectional reinforcement, thermo-elastic-viscous-plasticity, coupled thermomechanical problem, Ambartsumyan's bending theory, dynamic loading, explicit numerical scheme

## REFERENCES

1. *Bannister M.* Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites*, 2001, pt. A 32, pp. 901–910.
2. *Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K.* Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–42.
3. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200.
4. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progress in Aerosp. Sci.*, 2005, vol. 41, no. 2, pp. 143–151.
5. *Abrosimov N.A., Bazhenov V.G.* *Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs.* N. Novgorod: Nizhniy Novgorod State Univ., 2002. 400 p. (in Russian)
6. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Lin. Mech.*, 2011, vol. 46, pp. 807–817.
7. *Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A.* *Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells.* Moscow: Fizmatlit, 2014. 408 p. (in Russian)
8. *Dimitrienko Yu.I.* *Mechanics of Composite Structures at High Temperatures.* Moscow: Fizmatlit, 2019. 448 p. (in Russian)
9. *Handbook of Composites / Ed. by Lubin G.* N.Y.: Springer, 1982. 786 p.
10. *Composite Materials. Handbook / Ed. by Karpinos D.M.* Kiev: Nauk. Dumka, 1985. 592 p. (in Russian)

11. *Leu S.-Y., Hsu H.-C.* Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // *Int. J. Mech. Sci.*, 2010, vol. 52, pp. 1579–1587.
12. *Vena P., Gastaldi D., Contro R.* Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 483–508.
13. *Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L.* Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plasticity*, 2012, vol. 36, pp. 86–112.
14. *Akhundov V.M.* Incremental carcass theory of fibrous media under larger elastic and plastic deformations // *Mech. Compos. Mater.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 539–558.
15. *Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review // *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38.
16. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, pp. 14–31.
17. *Yankovskii A.P.* Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates // *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 111–133. doi: 10.3103/S0025654422070184
18. *Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M.* Calculations on Strength, Stability and Fluctuations in Conditions of High Temperatures. / Ed. by *Gol'denblat I.I.* Moscow: Mashinostroenie, 1965. 567 p. (in Russian)
19. *Encyclopedia of Physics. Vol. VIa/1, Mechanics of Solids I* / Ed. by *Truesdell C.* Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer, 1973.
20. *Greshnov V.M.* Physical and Mathematical Theory of Large Irreversible Deformations of Metals. Moscow: Fizmatlit, 2018. 232 p. (in Russian)
21. *Reissner E.* On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176.
22. *Bogdanovich A.E.* Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells. Riga: Zinatne, 1987. 295 p. (in Russian)
23. *Ambardzumyan S.A.* The General Theory of Anisotropic Shells. Moscow: Nauka, 1974. 446 p. (in Russian)
24. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. N.Y.: CRC Press, 2004, 831 p.
25. *Andreev A.N.* Elasticity and Thermo-Elasticity Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of the Numerical Analysis. Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Acad. Pub., 2013. 93 p. (in Russian)
26. *Kulikov G.M.* Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells // *Mech. Solids*, 1994, no. 2, pp. 33–42.
27. *Pikul' V.V.* Mechanics of Shells. Vladivostok: Dal'nauka, 2009. 536 p. (in Russian)
28. *Houlston R., DesRochers C.G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers&Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1–15.
29. *Malmmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A.* Resistance of Rigid Polymeric Materials. Riga: Zinatne, 1972. 500 p. (in Russian)
30. *Khazhinskii G.M.* Model of Deformation and Fracture of Metals. Moscow: Nauchny Mir, 2011. 231 p. (in Russian)
31. *Richtmyer R.D., Morton K.W.* Difference Methods for Initial-Value Problems. N.Y.: John Wiley&Sons, 1967.
32. *Lukanin V.N., Shatrov M.G., Camfer G.M., Nechaev S.G., Ivanov I.E., Matyukhin L.M., Morozov K.A.* Heat Engineering: Textbook for Universities / Ed. by *Lucanin V.N.* Moscow: Vysshaya Shkola, 2003. 671 p. (in Russian)
33. *Zuev L.B., Danilov V.I.* Physical Foundations of the Strength of Materials: Textbook. Dolgoprudny: Intellect Publ., 2013. 376 p. (in Russian)

УДК 539.3

**О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ С ДЕФОРМИРУЕМЫМ ШТАМПОМ  
В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ****© 2023 г. В. А. Бабешко<sup>1,2,\*</sup>, О. В. Евдокимова<sup>1,\*\*</sup>, О. М. Бабешко<sup>2,\*\*\*</sup>,  
М. В. Зарецкая<sup>2,\*\*\*\*</sup>, В. С. Евдокимов<sup>2,\*\*\*\*\*</sup>**<sup>1</sup>*Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*<sup>2</sup>*Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия**\*e-mail: babeshko41@mail.ru**\*\*e-mail: evdokimova.olga@mail.ru**\*\*\*e-mail: babeshko49@mail.ru**\*\*\*\*e-mail: zarmv@mail.ru**\*\*\*\*\*e-mail: evdok\_vova@mail.ru*

Поступила в редакцию 16.01.2023 г.

После доработки 02.03.2023 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

В работе впервые строго исследуется двумерная динамическая контактная задача о действии деформируемого штампа на четверть плоскости многослойной среды. В отличие от случая абсолютно твердого штампа, деформируемый штамп вносит дополнительные особенности, состоящие в возможности возникновения дискретных резонансов, предсказанных академиком И.И. Воровичем. Показано, что использование метода, основанного на применении блочных элементов, позволяет получать уравнение, описывающее резонансные частоты. Для исследования контактных задач с деформируемым штампом из материалов сложной реологии, в том числе, смарт-материалов. Вначале рассмотрен случай деформируемого штампа из материала простой реологии, которая описывается уравнениями Гельмгольца. Решения граничных задач для штампов сложной реологии, представляются комбинацией решений граничных задач для штампов простой реологии.

*Ключевые слова:* контактная задача, блочный элемент, деформируемый штамп, интегральное уравнение Винера–Хопфа

**DOI:** 10.31857/S0032823523020030, **EDN:** TYZHLI

**1. Введение.** Углубленному теоретическому исследованию контактных задач с деформируемым штампом, особенно динамических, посвящено ограниченное количество работ. Большинство из них связано с применением различных пакетов программ, например, COMSOL. Они дают, как правило, лишь качественные картинки в статических задачах, не проникая в глубинные их особенности. Наиболее глубокие исследования в этой области были выполнены И.И. Воровичем [1, 2]. Им были изучены спектральные свойства неоднородной полосы и исследованы возможности возникновения дискретных резонансов. В связи со сложностью решения динамических граничных задач для деформируемого штампа, в [3] была предложена модель деформируемого штампа, состоящая из абсолютно твердых массивных штампов, соединенных упругой пружиной. Возможность учета деформаций штампов, состоящих из материалов сложной реологии, открыл метод блочного элемента и связанный с ним фрактальный универсальный метод моделирования [4]. Этот подход позволяет разла-

гать решения граничных задач для деформируемого штампа из материала сложной реологии на составляющие решений граничных задач, для штампов из материалов простых реологий, что значительно облегчает анализ. Именно этот подход был использован в исследованиях контактных задач для деформируемых штампов в форме полос, действующих на многослойное основание [5]. В процессе исследования этой контактной задачи методом блочного элемента обнаружено, что в отличие от случаев абсолютно твердого штампа, решения для деформируемых штампов зависят от функционалов составных решений, вид которых полностью определяется в процессе решения граничной задачи. Выяснено, что именно с их помощью строятся уравнения для определения упомянутых выше частот дискретных резонансов. Показано, что применявшийся подход позволяет исследовать контактную задачу с деформируемым штампом в том случае, если имеется решение контактной задачи для случая абсолютно жесткого штампа. Определенные возможности в этом отношении дают работы [6–15]. Исследование особенностей рассматриваемой двумерной контактной задачи с деформируемым штампом в четверть плоскости на многослойной среде стало возможным благодаря результату, полученному в [16] в этой области для абсолютно жесткого штампа. На его основе изучается контактная задача с деформируемым штампом простой реологии, описываемым уравнением Гельмгольца. Возможность переноса исследований на случай штампов из материалов сложных реологий дает подход [4].

В работе построено высокоточное решение этой контактной задачи, дающее возможность переноса этого метода для исследования контактных задач с деформируемым штампом более сложных реологий. В отличие от одномерного случая, где удается построить аналитически точное решение контактной задачи для деформируемого штампа [5], в случае двумерной задачи построены точные решения для абсолютно жесткого штампа и высокоточные приближенные решения контактной задачи для деформируемого штампа.

**2. Постановка задачи.** Будем рассматривать линейно упругую многослойную среду конечной толщины, на верхней границе которой расположен деформируемый штамп, занимающий область первого квадранта, рис. 1. Предполагается, что многослойная среда сформирована изотропными упругими слоями, так, как это описано в [3]. Предполагается, что штамп колеблется вертикально по гармоническому закону, описываемому функцией  $e^{-i\omega t}$ . Ось декартовой системы координат  $ox_3$  располагается на верхней границе многослойной среды, и направлена по нормали наружу. Остальные оси расположены в касательной плоскости. Принимая во внимание возможность применения универсального метода моделирования [4, 16], позволяющего представлять решения граничной задачи для деформируемого штампа из материала сложной реологии разложенными по решениям граничных задач для уравнений простых реологий, применим в дальнейшем этот подход. Он состоит в том, что решение векторной граничной задачи, например, для системы уравнений Ламе, может быть представлено комбинацией решений скалярных, то есть, отдельных граничных задач, решенных в этой же области. Для выбора уравнений скалярных граничных задач необходимо брать те из них, которые доказаны либо преобразованием Галеркина, либо методом потенциалов [4]. Для системы уравнений Ламе доказано, что необходимо брать скалярные граничные задачи для уравнения Гельмгольца. Для системы уравнений Ламе необходимо брать две скалярные граничные задачи для уравнений Гельмгольца, продиктованных преобразованиями Галеркина или потенциалами. При этом не существенно, какой материал описывается скалярной граничной задачей для уравнения Гельмгольца, важно, чтобы он соответствовал требованиям указанных выше преобразований. В качестве граничных условий берутся условия Дирихле или Неймана.

Известно, что преобразования Галеркина можно применять ко множеству систем дифференциальных уравнений механики и физики [3]. Решения для всех их, в конечном счете, представляются разложениями решений скалярных граничных задач, как

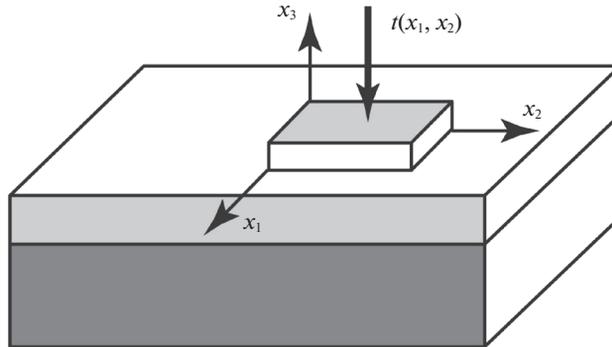


Рис. 1. Часть неограниченной области первого квадранта, занятой деформируемым штампом, действующим на многослойную среду.

описано и опубликовано, в качестве примера, для системы уравнений Ламе. Будем считать, что материал деформируемого штампа описывается уравнением Гельмгольца, рассматриваемым в первом квадранте, а граничная задача является скалярной. В зависимости от реологий материалов для систем дифференциальных уравнений, необходимо находить решения нескольких граничных задач для уравнений Гельмгольца с разными параметрами.

Внешние воздействия на объект будут задаваться на границе – условиями Дирихле или Неймана, а также распределенными или сосредоточенными воздействиями на поверхности  $t(x_1, x_2)$ .

Построенные решения интегрального уравнения в двумерном случае обладают теми же особенностями решения вблизи границ (описываемыми функциями  $\sqrt{x_1}$  и  $\sqrt{x_2}$ ), что и в работе [16], а в угловой точке – интегрируемой особенностью, требующей дополнительного исследования.

Достоинством настоящей работы по сравнению с работой [16] явилась возможность задания внешних воздействий, не требующих разделения переменных, что открывает путь к решению задач для анизотропных материалов.

**3. Граничная задача для деформируемого штампа.** Рассмотрим граничную задачу для уравнений Гельмгольца, моделирующего материал деформируемого штампа простой реологии

$$(\Delta + k^2)\psi(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2); \quad k = c\omega, \quad c = \text{const} \quad (3.1)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\psi(x_1, x_2)$  – решение граничной задачи для уравнений Гельмгольца,  $q(x_1, x_2)$  – воздействие на штамп со стороны многослойной среды в области контакта,  $t(x_1, x_2)$  внешнее воздействие на штамп сверху. Для уравнения Гельмгольца ставится граничная задача Дирихле вида

$$\psi_1(x_1, x_2) = \psi_1(0, x_2), \quad \psi_2(x_1, x_2) = \psi_2(x_1, 0) \quad (3.2)$$

Вводится обозначение  $s(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2)$ . Алгоритм метода блочного элемента, включающий этапы внешней алгебры, внешнего анализа и фактор-топологий, для совокупности блоков, описан во многих работах. После его применения к рас-

смагнриваемой граничной задаче, получаем внешнюю форму в преобразовании Фурье, в виде

$$\begin{aligned} \omega(\alpha_1, \alpha_2) = & \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} - 1 \right] \langle \Psi_1(0, \alpha_2) - \Psi_1(0, \alpha_{2+}) \rangle + \\ & + \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} - 1 \right] \langle \Psi_2(\alpha_1, 0) - \Psi_2(\alpha_{1+}, 0) \rangle + S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{1+}, \alpha_{2+}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{1+}, \alpha_{2+}) = & -Q(\alpha_1, \alpha_2) - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) + \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) + \\ & + \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) + T(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} T(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) - \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} T(\alpha_{1+}, \alpha_2) - \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} T(\alpha_1, \alpha_{2+}) \\ \alpha_{1+} = & i\sqrt{\alpha_1^2 - k^2}, \quad \alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - k^2}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\alpha_m^2 - k^2} > 0; \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

В дальнейшем, для краткости, если оговаривается отдельно, прописными буквами обозначены преобразований Фурье функций, обозначенных строчными буквами, например,

$$Q(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\alpha x} dx$$

Первые четыре члена справа у функции  $S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{1+}, \alpha_{2+})$  представляют преобразования Фурье неизвестного контактного напряжения  $Q(\alpha_1, \alpha_2)$  и неизвестные функционалы  $Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})$ ,  $Q(\alpha_{1+}, \alpha_2)$ ,  $Q(\alpha_1, \alpha_{2+})$  от искомого контактного напряжения. Остальные члены справа представляют преобразования Фурье и функционалы от задаваемых внешних воздействий. По опыту исследования одномерной контактной задачи [5], вначале должны быть определены контактные напряжения под деформируемым штампом, после этого, определяются функционалы.

**4. Двумерное интегральное уравнение Винера–Хопфа.** Контактная задача о действии деформируемого штампа на многослойную среду, применяемым в статье подходом может быть исследована, если удастся точно решить интегральное уравнение соответствующей контактной задачи для абсолютно жесткого штампа при задании в правой части произвольной функции. В работе [16] впервые решено точно двумерное интегральное уравнение Винера–Хопфа в четверти плоскости, применением разделения переменных. В настоящей работе развивается другой подход решения этого уравнений для произвольной правой части, не требующий разделения переменных. Ниже дается его краткое изложение. Интегральное уравнение контактной задачи о действии абсолютно твердого штампа на многослойную среду при наличии гармонических воздействий на штамп, в декартовой системе координат в первом квадранте имеет вид [16].

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2); \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq \infty, \\ k(x_1, x_2) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha x)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad K(\alpha_1, \alpha_2) \equiv K(u) = \frac{R(u)}{P(u)} \\ u = & \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad K(u) = \frac{R(u)}{P(u)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(u)}{P_n(u)}, \quad R_n(u) = (u^2 - z_n^2) \\ & P_n(u) = (u^2 - \xi_n^2), \quad K(u) = \frac{1}{u} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (4.1)$$

Обозначения работы [16] полностью сохранены. Здесь  $\gamma_1, \gamma_2$  – контуры, лежащие на вещественной оси и отклоняющиеся от нее в динамических задачах гармонической во времени вибрации, лишь обходя вещественные полюса, по малым полуокружностям, если они возникают [16]. Не усложняя проблему, выше рассматривается случай изотропной задачи теории упругости. Функции  $R(u), P(u)$  являются четными целыми функциями, представимыми бесконечными произведениями. Предполагается, что функции  $R(u)$  и  $P(u)$  – целые функции первого порядка и конечного типа, то есть являются трансцендентными, в частности, полиномами. В принятых обозначениях целая функция  $R(u)$  обращается нуль на множествах значений  $u_n = \pm z_n$ . Разрешая эти соотношения относительно переменных  $\alpha_s$ ;  $s = 1, 2$ , имеем нули в форме  $\alpha_{11m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - z_m^2}, \alpha_{21m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - z_m^2}$ . Соответственно, целая функция  $P(u)$  имеет нули на множествах  $u_n = \pm \zeta_n, \alpha_{12r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - \zeta_r^2}, \alpha_{22r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - \zeta_r^2}$ . Все нули, предполагаемые однократными, имеют точки сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях, содержащих мнимые полуоси комплексной плоскости. Для нулей приняты обозначения: плюс – принадлежность верхней полуплоскости комплексной плоскости, минус – нижней.

$$R_m(u) = R_{m\pm}(\alpha_m) R_{m\mp}(\alpha_m), \quad R_{m\mp}(\alpha_m) = T_{m\mp} e^{\mp i\alpha_m} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}\right) e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}}$$

$$T_{m\mp} = \text{const}; \quad m = 1, 2$$

$$P_m(u) = P_{m\pm}(\alpha_m) P_{m\mp}(\alpha_m), \quad P_{m\mp}(\alpha_m) = S_{m\mp} e^{\mp i\alpha_m} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}\right) e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}} \quad (4.2)$$

$$S_{m\mp} = \text{const}; \quad m = 1, 2$$

$$K_{+m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m-}(\alpha_m)}{P_{m-}(\alpha_m)}, \quad K_{-m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m+}(\alpha_m)}{P_{m+}(\alpha_m)}$$

После деления  $R_m(u)$  на  $P_m(u)$ , возникают мероморфные функции, обозначенные  $K(u)$ . Их нулями являются  $\pm z_{mp}$ . Примем правую часть  $f(x_1, x_2)$  интегрального уравнения (4.1) в форме

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.3)$$

Для построения решения этого уравнения, не требуя разделения переменных, воспользуемся подходом, изложенным в [16] и будем искать решение в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s1} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{22s} x_2)} + \sum_{s=1}^{\infty} C_{s2} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{21s} x_2)} + D(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}$$

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s1} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{22s} x_2)}, \quad \varphi_2(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s2} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{21s} x_2)}$$

$$\varphi_*(x_1, x_2) = D(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}$$

Причем, справедливы соотношения (ср. с [16])

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_{s1} e^{i(\beta_{11s} x_1 + \beta_{22s} x_2)} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{C_{s1}}{(\beta_{11s} + \alpha_1)(\beta_{22s} + \alpha_2)}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_{s2} e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{C_{s2}}{(\beta_2 + \beta_{21s+})(\beta_1 + \alpha_1)}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} D(\eta_1) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{D(\eta_1, \eta_2)}{(\alpha_1 - \eta_1)(\alpha_2 - \eta_2)}$$

Следуя [16], получим решение интегрального уравнения в форме

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) + \varphi_2(x_1, x_2) + \varphi_{\text{ж}}(x_1, x_2)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{K_{+1}(\eta_1, \beta_2)}{K_{+1}(\lambda, \beta_2)(\eta_1 - \lambda)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)_1}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)} d\lambda d\beta_2 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{K_{+2}(\beta_1, \eta_2)}{K_{+2}(\beta_1, \lambda)(\eta_2 - \lambda)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)} d\lambda d\beta_1 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.4)$$

Построенное решение двумерного уравнения Винера–Хопфа в первом квадранте легко трансформируется в решения одномерных уравнений Винера–Хопфа, в случаях, когда справедлива замена  $K(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow K(\alpha_1)$  или  $K(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow K(\alpha_2)$ .

**5. Интегральное уравнение для деформируемого штампа.** Составим интегральное уравнение для определения контактных напряжений под деформируемым штампом. Для этого с учетом формул (3.1)–(3.4) представим перемещение  $\psi(x_1, x_2)$  деформируемого штампа в области контакта в виде упакованного блочного элемента

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{\omega(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} \quad (5.1)$$

Преобразуем представление внешней формы, разделив в ней неизвестные и заданные составляющие

$$\omega(\alpha_1, \alpha_2) = -Q(\alpha_1, \alpha_2) + Q_1(\alpha_1, \alpha_2) + G(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$Q_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) + \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) \quad (5.2)$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = T(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} T(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) - \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} T(\alpha_{1+}, \alpha_2) - \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} T(\alpha_1, \alpha_{2+}) +$$

$$+ \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} - 1 \right] \langle \Psi_1(0, \alpha_2) - \Psi_1(0, \alpha_{2+}) \rangle + \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} - 1 \right] \langle \Psi_2(\alpha_1, 0) - \Psi_2(\alpha_{1+}, 0) \rangle$$

Выберем в интегральном уравнении (4.1) в качестве неизвестной функции  $\varphi(x_1, x_2)$  контактные напряжения  $q(x_1, x_2)$ , возникающие под деформируемым штампом. Приравняем вертикальные перемещения (4.1) поверхности многослойной среды  $f(x_1, x_2)$  параметрам вертикального перемещения (5.1)  $\psi(x_1, x_2)$  деформируемого штампа снизу. Применяя к этому равенству преобразование Фурье, получим соотношение

$$\frac{-Q(\alpha_1, \alpha_2) + Q_1(\alpha_1, \alpha_2) + G(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} = K(\alpha_1, \alpha_2) Q(\alpha_1, \alpha_2)$$

В результате приходим к функциональному уравнению

$$M(\alpha_1, \alpha_2) Q(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{Q_1(\alpha_1, \alpha_2) + G(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)}$$

$$M(\alpha_1, \alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)}$$

С учетом (4.2), функция  $M(\alpha_1, \alpha_2)$  принимает вид

$$M(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R(u) \left[ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) \right] + P(u)}{P(u) \left[ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) \right]} \quad (5.3)$$

Преобразование Фурье правой части двумерного интегрального уравнения Винера–Хопфа для деформируемого штампа (4.3) представимо в форме

$$A(\eta_1, \eta_2) = \frac{Q_1(\eta_1, \eta_2) + G(\eta_1, \eta_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 - k^2)} \quad (5.4)$$

Применив к этому соотношению обращение Фурье, получаем интегральное уравнение контактной задачи о действии деформируемого штампа на многослойную среду в виде

$$\int_0^\infty \int_0^\infty m(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{Q_1(\eta_1, \eta_2) + G(\eta_1, \eta_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 - k^2)} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (5.5)$$

$$m(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} M(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

#### 6. Дисперсионные уравнения частот дискретных резонансов академика И.И. Воровича.

Вспользуемся построенным решением интегрального уравнения Винера–Хопфа в первом квадранте (5.5). С учетом принятых обозначений (5.3), (5.4), его решение, для произвольной правой части имеет вид

$$q(x_1, x_2) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1, \beta_2)}{M_{+1}(\lambda_1, \beta_2)(\eta_1 - \lambda_1)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)_1}{M(\eta_1, \eta_2)} e^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)} d\lambda_1 d\beta_2 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\beta_1, \eta_2)}{M_{+2}(\beta_1, \lambda_2)(\eta_2 - \lambda_2)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} e^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)} d\lambda_2 d\beta_1 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (6.1)$$

Принимая во внимание обозначения (5.3), (5.4), получаем

$$\frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} = \frac{[Q_1(\eta_1, \eta_2) + G(\eta_1, \eta_2)] P(u)}{R(u) \left[ (\eta_1^2 + \eta_2^2 - k^2) \right] + P(u)}; \quad u = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$$

Для нахождения функционалов (5.2),  $Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})$ ,  $Q(\alpha_{1+}, \alpha_2)$ ,  $Q(\alpha_1, \alpha_{2+})$  применим к формуле (6.1) преобразование Фурье по координатам  $x_1, x_2$ , с параметрами  $\alpha_1, \alpha_2$  получим соотношение

$$\begin{aligned}
Q(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{A(\alpha_1, \alpha_2)}{M(\alpha_1, \alpha_2)} + \frac{i2\pi}{M_{+1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1, \alpha_2)}{(\eta_1 - \alpha_1)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2 + \\
&+ \frac{i2\pi}{M_{+2}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\alpha_1, \eta_2)}{(\eta_2 - \alpha_2)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2
\end{aligned} \quad (6.2)$$

С учетом (5.2) представим уравнение (6.2) в следующем виде

$$\begin{aligned}
Q(\alpha_1, \alpha_2) &= \left[ -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{1+} \alpha_{2+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) + \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right] B(\alpha_1, \alpha_2) + \\
&+ G_1(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{i2\pi}{M_{+1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1, \alpha_2)}{(\eta_1 - \alpha_1)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2 + \\
&+ \frac{i2\pi}{M_{+2}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\alpha_1, \eta_2)}{(\eta_2 - \alpha_2)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2,
\end{aligned} \quad (6.3)$$

где

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{P(u)}{R(u) \left[ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) \right] + P(u)}$$

Полагая слева в этом выражении  $\alpha_1 = \alpha_{1+}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{2+}$ , получаем систему трех интегральных уравнений относительно  $Q(\alpha_{1+}, \alpha_2)$ ,  $Q(\alpha_1, \alpha_{2+})$ ,  $Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})$

$$\begin{aligned}
Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2) (\eta_1 - \alpha_{1+}) (\eta_2 - \alpha_2)} + \frac{i2\pi A_1(\alpha_{1+})}{M_{+1}(\alpha_{1+}, \alpha_2)} + \\
&+ \frac{i2\pi A_2(\alpha_2)}{M_{+2}(\alpha_{1+}, \alpha_2)} + G_1(\alpha_{1+}, \alpha_2) \\
Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2) (\eta_1 - \alpha_{1+}) (\eta_2 - \alpha_2)} + \frac{i2\pi A_1(\alpha_1)}{M_{+1}(\alpha_1, \alpha_{2+})} + \\
&+ \frac{i2\pi A_2(\alpha_{2+})}{M_{+2}(\alpha_1, \alpha_{2+})} + G_1(\alpha_1, \alpha_{2+}) \\
Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2) (\eta_1 - \alpha_{1+}) (\eta_2 - \alpha_2)} + \frac{i2\pi A_1(\alpha_{1+})}{M_{+1}(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})} + \\
&+ \frac{i2\pi A_2(\alpha_{2+})}{M_{+2}(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})} + G_1(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}),
\end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$G_1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{G(\alpha_1, \alpha_2)}{R(u) \left[ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) \right] + P(u)}$$

$$\frac{A(\alpha_1, \alpha_2)}{M(\alpha_1, \alpha_2)} = Q_1(\alpha_1, \alpha_2) B(\alpha_1, \alpha_2) + G_1(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$A_1(\alpha_1) = \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1, \alpha_2)}{(\eta_1 - \alpha_1)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2, \quad A_2(\alpha_2) = \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\alpha_1, \eta_2)}{(\eta_2 - \alpha_2)} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{M(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2$$

Полученная система уравнений (6.4) является точной для определения функционалов. Однако, она имеет сложный вид из-за наличия интегральных операторов. Важно отметить, что входящие в это уравнение члены, содержащие функции  $A_1(\alpha_1)$ ,  $A_2(\alpha_2)$ , получаются в результате учета узкой приграничной зоны штампа, в которой описыва-

ются особенности типа  $x^{-0.5}$  [3]. Остальные члены уравнения учитывают значение контактных напряжений во внутренней зоне области. Пренебрегая узкой зоной вблизи границы, получим следующие приближенные уравнения для функционалов.

$$\begin{aligned} Q(\alpha_{1+}, \alpha_2) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2)(\eta_1 - \alpha_{1+})(\eta_2 - \alpha_2)} \\ Q(\alpha_1, \alpha_{2+}) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2)(\eta_1 - \alpha_1)(\eta_2 - \alpha_{2+})} \\ Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+}) &= - \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1, \eta_2)(\eta_1 - \alpha_{1+})(\eta_2 - \alpha_{2+})} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Функционалы (6.5) позволяют описать высокоточные дисперсионные уравнения для нахождения частот  $\omega_k$  дискретных резонансов, предсказанных И.И. Воровичем.

Подставляя найденные значения функционалов (6.5)  $Q(\alpha_{1+}, \alpha_2)$ ,  $Q(\alpha_1, \alpha_{2+})$ ,  $Q(\alpha_{1+}, \alpha_{2+})$  в правую часть соотношения (6.3), получаем высокоточное аналитическое решение контактной задачи с деформируемым штампом. Для большей точности приближенного решения, функционалы следует внести также и в подынтегральные функции в (6.3). Переход к штампам более сложной реологии осуществляется по алгоритму, описанному в работе [4].

**Заключение.** В работе впервые построены основы теории двумерных контактных задач для деформируемых штампов, действующих на многослойные основания. Установлено соответствие получаемых результатов с ранее обнаруженным И.И. Воровичем существованием дискретных резонансов в контактных задачах с деформируемыми штампами. Найденны высокоточные приближенные решения контактных задач с деформируемым штампом в четверть плоскости и дисперсионные уравнения для случая материала штампа простой реологии. Изложен алгоритм решения таких контактных задач для деформируемых штампов сложных реологий. В основе теории лежит универсальный метод моделирования, позволивший точно решать контактные задачи для абсолютно жесткого штампа и высокоточно для случая с деформируемым штампом.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00129.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И.И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–820.
2. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
3. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.
4. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // Докл. РАН. 2021. Т. 499. С. 21–26. <https://doi.org/10.31857/S2686740021040039>
5. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О контактных задачах с деформируемым штампом // Пробл. прочн. и пластич. 2022. Т. 84. № 1. С. 25–34. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34>
6. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
7. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proc. Roy. Soc. 2015. A 471. Iss. 2180: Art. No. 20150271.

8. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory, II-Examples // *Int. J. Solids Struct.* 1998. V. 35. P. 2349–2378.
9. *Zhou S., Gao X.L.* Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.* 2013. V. 64. P. 145–166.
10. *Guler M.A., Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // *Int. J. Mech. Sci.* 2007. V. 49. P. 161–182.
11. *Ke L.-L., Wang Y.-S.* Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2007. V. 26. P. 171–188.
12. *Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S.* On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // *Tribol. Int.* 2007. V. 40 (4). P. 574–579.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823522050046>
13. *Almqvist A.* An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem // <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216>.
14. *Andersson L.E.* Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // *Appl. Math. Optim.* 2000. V. 42. P. 169–202.
15. *Cocou M.* A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // *Nonlin. Anal.: Real World Appl.* 2015. V. 22. P. 508–519.
16. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 5. С. 628–637.

### On the Contact Problem with Deformable Stamp in the Quarter Plain

**V. A. Babeshko<sup>a,b,#</sup>, O. V. Evdokimova<sup>a,##</sup>, O. M. Babeshko<sup>b,###</sup>,  
M. V. Zaretskaya<sup>b,####</sup>, and V. S. Evdokimov<sup>b,#####</sup>**

<sup>a</sup>*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

<sup>b</sup>*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: babeshko41@mail.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*

<sup>###</sup>*e-mail: babeshko49@mail.ru*

<sup>####</sup>*e-mail: zarmv@mail.ru*

<sup>#####</sup>*e-mail: evdok\_vova@mail.ru*

In this paper, for the first time, a two-dimensional dynamic contact problem on the action of a deformable stamp on a quarter of the plane of a multilayer medium is strictly mathematically investigated. In contrast to the case of an absolutely solid stamp, a deformable stamp introduces additional features, consisting in the possibility of the occurrence of discrete resonances predicted by academician I.I. Vorovich. The paper shows that the use of a method based on the use of block elements makes it possible to obtain an equation describing resonant frequencies. To study contact problems with a deformable stamp made of materials of complex rheology, including smart materials, it is proposed in the paper to first conduct a study for the case of a deformable stamp made of a material of simple rheology described by Helmholtz equations. Solutions of boundary value problems for stamps of complex rheology, after that, are represented by a combination of solutions of boundary value problems for stamps of simple rheology.

*Keywords:* contact problem, block element, deformable stamp, Wiener–Hopf integral equation

### REFERENCES

1. *Vorovich I.I.* Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous band // *Dokl. akad. nauk SSSR*, 1979, vol. 245, no. 4, pp. 817–820. (in Russian)
2. *Vorovich I.I.* Resonant properties of an elastic inhomogeneous band // *Dokl. akad. nauk SSSR*, 1979, vol. 245, no. 5, pp. 1076–1079. (in Russian)

3. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Prakhina O.D. Dynamics of Massive Bodies and Resonant Phenomena in Deformable Media. Moscow: Nauka, 1999. 246 p. (in Russian).
4. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method // Dokl. Phys., 2021, vol. 66, iss. 8, pp. 218–222.
5. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On contact problems with a deformable stamp // Problems of Strength&Plasticity, 2022, vol. 84, no. 1, pp. 25–34. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34 (in Russian)
6. Goracheva I.G., Dobichin M.N. Contact Problems of Tribology. Moscow: Mashinostroenie, 1988. 256 p. (in Russian)
7. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proc. Roy. Soc., 2015, A 471, iss. 2180, Art. No. 20150271.
8. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory, II-Examples // Int. J. Solids Struct., 1998, vol. 35, pp. 2349–2378.
9. Zhou S., Gao X.L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2013, vol. 64, pp. 145–166.
10. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci., 2007, vol. 49, pp. 161–182.
11. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // Eur. J. Mech. A/Solids, 2007, vol. 26, pp. 171–188.
12. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // Tribol. Int., 2007, vol. 40 (4), pp. 574–579. DOI: 10.31857/S0032823522050046
13. Almqvist A. An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem. // <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216>.
14. Andersson L.E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // Appl. Math. Optim., 2000, vol. 42, pp. 169–202.
15. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // Nonlin. Anal.: Real World Appl., 2015, vol. 22, pp. 508–519.
16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Exact Solution to the Contact Problem in a Quarter-Plane of a Multilayer Medium by the Universal Simulation Method // Mech. Solids, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 2058–2065. DOI: 10.3103/S0025654422080039

УДК 532.49

**К ТЕОРИИ МЕТОДА “ЭХОСКОПИИ” ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЫ СКВАЖИНЫ  
В НИЗКОПРОНИЦАЕМОМ ПЛАСТЕ, ПОДВЕРЖЕННЫМ ГРП****© 2023 г. Р. А. Башмаков<sup>1,2,\*</sup>, Э. В. Галиакбарова<sup>1,3,\*\*</sup>,  
З. Р. Хакимова<sup>1,3,\*\*\*</sup>, В. Ш. Шагапов<sup>1,\*\*\*\*</sup>**<sup>1</sup>*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН,  
Уфа, Россия*<sup>2</sup>*Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия*<sup>3</sup>*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия**\*e-mail: Bashmakov\_Rustem@mail.ru**\*\*e-mail: Emi.galiakbar@yandex.ru**\*\*\*e-mail: Zulfya.hakimova@yandex.ru**\*\*\*\*e-mail: Shagapov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 05.12.2022 г.

После доработки 01.03.2023 г.

Принята к публикации 01.03.2023 г.

Строится математическая модель, описывающая эволюцию импульсного сигнала в скважине при наличии продольной или поперечной трещины ГРП в призабойном участке. Полагается, что из устья скважины сигнал посылается с длиной волны большей диаметра скважины и длины открытого участка скважины. По динамике “эха” импульсного сигнала, возвратившегося к устью скважины, можно судить о качестве гидроразрыва пласта. Приведены результаты численных расчетов для импульса колоколообразной формы. Показано, что при диагностике трещин в качестве флюида, по которому распространяется сигнал, более предпочтительна вода, чем нефть.

*Ключевые слова:* импульсный сигнал, гидроразрыв пласта, нефтяная скважина, фаза волны, коэффициент отражения, гармонические волны

**DOI:** 10.31857/S0032823523020042, **EDN:** TZACKT

**1. Введение.** Для исследования призабойной зоны скважин могут быть использованы различные методы: гидродинамические, акустические, сейсмические, термодинамические. Наиболее активно применяются исследования скважин при установленных отборах (снятие индикаторных диаграмм); исследование скважин при неустановившихся режимах (снятие кривых восстановления давления, кривых восстановления уровня), исследование скважин на взаимодействие (гидропрослушивание) (см., напр., [1]). Гидроразрыв пласта (ГРП) зарекомендовал себя, как один из наиболее эффективных методов интенсификации добычи высоковязкой нефти или нефти из низкопроницаемых пластов [2].

Существующие способы оценки высоты трещины ГРП после ее образования (акустический, температурный, импульсный нейтрон-нейтронный каротаж с использованием нейтроно-поглощающего проппанта) имеют высокую погрешность. Применение новых способов добычи нефти и необходимость более точного прогнозирования процесса эксплуатации скважин, совершенствование приборов и способов наблюде-

ния за режимами работы требуют новых подходов для определения состояния призабойной зоны скважин.

В работах [3, 4] изучаются собственные колебания жидкости в скважине с трещиной ГРП. При этом период колебаний, а также, особенно, интенсивность затухания колебаний определяются не только протяженностью столба жидкости в скважине, ее диаметром и реологическими свойствами жидкости, но и коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважин и свойствами образованных трещин ГРП).

В работе [5] предложен метод гидравлического импедансного тестирования, идея которого заключается в интерпретации фактического изменения гидравлического сопротивления между стволом скважины и открытой трещиной ГРП. Для этого искусственно создается импульс давления в скважину и анализируется отраженный сигнал.

В работе [6] приведены результаты полевых измерений изменения давления в различных точках скважины при резком изменении скорости потока жидкости. Скважинные датчики фиксировали изменение давления в зависимости от времени со скоростью 100 проб в секунду.

В статье [7] исследована динамика импульсного сигнала, распространяющегося в кольцевом зазоре между диагностирующим зондом и открытой скважиной, окруженной низкопроницаемым пластом, подвергаемым гидроразрыву. В [8] изучено влияние на дисперсию сигнала влияния фильтрационных характеристик призабойной зоны скважины.

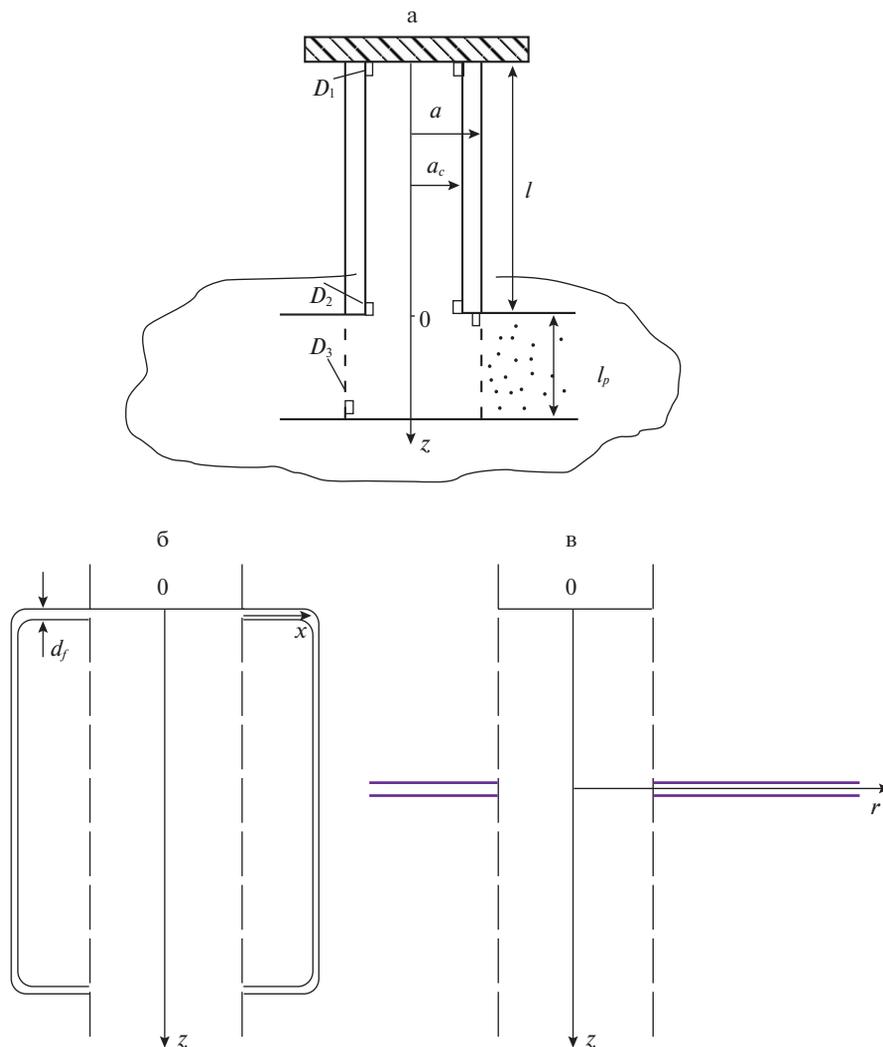
В данной работе рассматривается метод эхоскопии призабойной зоны скважины: из устья скважины посылается сигнал распространяющийся по жидкости с длиной волны большей диаметра скважины и большей, чем длина открытого участка скважины.

Термин “эхоскопия” используется в основном в медицинской литературе и означает исследование органов и тканей с помощью ультразвуковых волн. Особенностью ультразвуковых волн является способность отражаться от границ сред, отличающихся друг от друга по плотности. Использование этого термина применительно к диагностике трещин ГРП оправдывается использованием идеи анализа изменения волнового сигнала при изменении параметров трещины. Для решения поставленной задачи строится математическая модель, описывающая распространение импульсного сигнала в скважине и для описания распространения волн в трещине используются интегро-дифференциальное уравнение фильтрации жидкости в вертикальной трещине ГРП (плоской трещине, идущей параллельно стволу скважины) [9] и радиальной трещине, перпендикулярной стволу скважины в виде, представленном в работе [10]. Изменение импульсного сигнала в скважине изучается с применением преобразования Фурье, для численной реализации используется быстрое преобразование Фурье [11].

**2. Основные уравнения.** Рассмотрим систему “вертикальная скважина—пласт—трещина ГРП” (рис. 1). Предполагается, что скважина через открытый участок длины  $l_p$  сообщается с пластом, а также трещинами, имеющими симметричное продольное или радиальное расположение относительно вскрытого участка скважины. Кроме того, длина открытого участка скважины значительно меньше длины его закрытого участка ( $l_p \ll l$ ). Примем, что в исходном состоянии жидкость, находящаяся в системе “скважина—пласт” покоится, т.е. течение в вертикальной скважине и горизонтальном пласте отсутствует.

Пусть на устье скважины (точка  $D_1$  на рис. 1) создается импульсный сигнал давления, который будет распространяться по жидкости в скважине. Принимается приближение акустически сжимаемой жидкости. Ось  $Oz$  направим вертикально вниз, начало координат поместим на забое скважины.

Рассмотрим распространение волн давления малой амплитуды в скважине при следующих допущениях: длина сканирующей волны  $\lambda$  больше радиуса скважины  $a_c$  и



**Рис. 1.** Схема скважины, сообщаемой с пластом (а) и призабойной зоны с продольными (б) и радиальными (в) трещинами ГРП.

Обозначения:  $a_c$  – радиус скважины,  $a$  – радиус обсадной колонны скважины,  $l$  – протяженность скважины,  $l_p$  – протяженность призабойной зоны пласта.

длины открытого участка скважины, но значительно меньше длины скважины ( $\lambda > a_c$ ,  $\lambda > l_p$ ,  $\lambda \ll l$ ); при распространении акустической волны по каналу вязкость проявляется в тонком пограничном слое, и означает, что для частоты возмущения выполняется условие:  $a_c \gg 2\sqrt{\nu/\omega}$ , где  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости;  $\omega$  – круговая частота.

Система основных уравнений, описывающая распространение импульсного сигнала в скважине, представляющая собой законы сохранения масс и импульса, в линеаризованном приближении имеет вид [8]:

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2\sigma}{a_c}, \quad \sigma = \rho_0 \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{(\partial w / \partial \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \quad (\nu = \mu / \rho_0)$$
(2.1)

Здесь  $P$  и  $w$  – возмущения давления и скорости;  $\rho_0$  – плотность жидкости в невозмущенном состоянии;  $C$  – скорость звука в жидкости;  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $\sigma$  – касательное напряжение на стенках канала [12].

Поскольку длина  $l_p$  открытого участка  $0 < z < l_p$  значительно меньше длины закрытого участка  $-l < z < 0$ , то можем принять, что возмущение давления в открытом участке однородное. Поэтому в качестве граничного условия для системы (2.1) при  $z = 0$  примем

$$P(0, t) = P_{(l)}(t)$$
(2.2)

Второе граничное условие получим из закона сохранения массы жидкости на открытом участке, которое с учетом однородности возмущений давления в призабойной зоне скважины для продольной и радиальной трещин, соответственно, запишется в виде:

$$\pi a_c^2 l_p \frac{1}{C^2} \frac{\partial P_{(l)}}{\partial t} = \pi a_c^2 \rho_0 w_{(l)} - 2\pi a l_p \rho_0 u_p - 2d_f l_p \rho_0 u_f$$
(2.3)

$$\pi a_c^2 l_p \frac{1}{C^2} \frac{\partial P_{(l)}}{\partial t} = \pi a_c^2 \rho_0 w_{(l)} - 2\pi a l_p \rho_0 u_p - 2\pi a d_f \rho_0 u_f,$$
(2.4)

где  $w_{(l)}$  – скорость жидкости в скважине при  $z = 0$ ;  $u_p$  и  $u_f$  – скорости фильтрации жидкости в пласт через стенку открытого участка скважины и в трещину шириной  $d_f$ ;  $a_c$  и  $a$  – радиусы скважины и обсадной трубы.

Для определения значений  $u_p$  и  $u_f$ , в свою очередь, необходимо рассмотреть внешнюю, от открытого участка скважины, фильтрационную задачу в пласте и трещине. Уравнения упругой фильтрации жидкости из открытого участка скважины в пласт в процессе отражения импульса давления от забойного участка запишем в виде:

$$u_p = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P_p}{\partial r}, \quad \frac{\partial P_p}{\partial t} = \frac{\alpha_p}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P_p}{\partial r} \right) \quad (0 < z < l_p, a < r < \infty)$$
(2.5)

Для фильтрации в продольную трещину примем уравнения [9]:

$$u_f = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_f}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} - 2 \frac{m_p \sqrt{\alpha_p}}{m_f d_f} \int_{-\infty}^t \frac{\partial P_f(\tau, x) / \partial \tau}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} d\tau$$

$$(0 < z < l_p, 0 < x < \infty),$$
(2.6)

а для радиальной трещины используем [10]:

$$u_f = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial r}, \quad \frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P_f}{\partial r} \right) - 2 \frac{m_p \sqrt{\alpha_p}}{m_f d_f} \int_{-\infty}^t \frac{\partial P_f(\tau, r) / \partial \tau}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} d\tau$$

$$(0 < z < l_p, a < r < \infty),$$
(2.7)

где  $r$  – расстояние от оси скважины,  $P_p$  и  $P_f$  – возмущения давления в пласте и трещине;  $m_s$ ,  $k_s$  и  $\alpha_s = \frac{k_s \rho_0 C^2}{m_s \mu}$  ( $s = f, p$ ) – пористость, коэффициенты проницаемости и пьезопроводности.

Начальные и граничные условия запишутся как:

$$P|_{l \rightarrow -\infty} = 0, \quad w|_{l \rightarrow -\infty} = 0 \quad (2.8)$$

$$P|_{z=-l} = f(t) \quad (2.9)$$

$$P_p(r \rightarrow +\infty) = 0, \quad P_p(r = a) = P_{(l)}(t) \quad (2.10)$$

$$P_f(x \rightarrow +\infty) = 0, \quad P_f(x = 0) = P_{(l)}(t) \quad \text{для продольной трещины} \quad (2.11)$$

$$P_f(r \rightarrow +\infty) = 0, \quad P_f(r = a) = P_{(l)}(t) \quad \text{для радиальной трещины} \quad (2.12)$$

Условие (2.9) задает форму импульса давления характерной длительности  $\Delta t$  и амплитуды  $\Delta P_0$ , создаваемого в устье ( $z = -l$ ) скважины.

**3. Дисперсионные выражения для гармонических волн в скважине.** Решения системы уравнений (2.1) ищем в виде затухающих гармонических волн:

$$P, w = A^{(p)}(z), A^{(w)}(z) [\exp[i(Kz - \omega t)]], \quad (3.1)$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $K = k + i\delta$  – волновой вектор,  $C_p = \omega/k$  и  $\delta$  – фазовая скорость и коэффициент затухания,  $A^{(p)}$  – амплитуда параметра  $p$ ,  $A^{(w)}$  – амплитуда параметра  $w$ .

Подставляя (3.1) в систему (2.1), получим

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{C^2} A^{(p)} + iK\rho_0 A^{(w)} &= 0 \\ -\rho_0 \omega A^{(w)} + K A^{(p)} &= \left( \frac{2}{a_c} \sqrt{\rho_0 \mu} \sqrt{\frac{\omega}{2}} (1+i) \right) A^{(w)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из этой системы уравнений (3.2), при условии существования нетривиального решения вида (3.1), получим дисперсионное уравнение:

$$K = \pm \frac{\omega}{C} \left( 1 + \frac{1}{a_c} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} (1+i) \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

Учитывая, что длина сканирующей волны  $\lambda$  больше длины открытого участка скважины  $l_p$  ( $\lambda > l_p$ ), открытый участок скважины принимается отражающей поверхностью с координатой  $z = 0$ .

Для гармонической волны вида (3.1), падающей на отражающую поверхность ( $z = 0$ ) положим, что на участке  $-l < z < 0$  формируется отраженная волна для которой соответствующее волновое число из (3.3) берется со знаком “–”. Причем, в забое скважины (на отражающей поверхности  $z = 0$ ) давление определяется как сумма давлений, соответствующих падающей и отраженной волнам

$$P_{(o)} + P_{(r)} = P_{(l)} \quad (3.4)$$

Здесь нижние индексы ( $o$ ) и ( $r$ ) указывают значениям давления для падающей и отраженной волнам при  $z = 0$ .

Тогда для решения вида (3.1) условие (3.4) можно записать как

$$A_{(o)}^{(p)} + A_{(r)}^{(p)} = A_{(l)}^{(p)} \quad (3.5)$$

Скорость жидкости  $w_{(l)}$  на границе колонны скважины ( $z = 0$ ) складывается из  $w_{(o)}$  и  $w_{(r)}$ , соответствующим падающей и отраженным волнам ( $w_{(l)} = w_{(o)} + w_{(r)}$ ). Причем для гармонической волны следует

$$w_{(o)} = A_{(o)}^{(w)} e^{-i\omega t}, \quad w_{(r)} = A_{(r)}^{(w)} e^{-i\omega t} \quad (3.6)$$

Для амплитуд скорости  $A_{(o)}^{(w)}$  и  $A_{(r)}^{(w)}$ , соответствующих падающей и отраженной волнам, на основе первого уравнения из (3.2) с учетом (3.3) можно записать

$$A_{(o)}^{(w)} = \frac{A_{(o)}^{(p)}}{\rho_0 C} \left( 1 + \frac{1}{a_c} \sqrt{\frac{2v}{\omega}} (1+i) \right)^{-1/2}, \quad A_{(r)}^{(w)} = -\frac{A_{(r)}^{(p)}}{\rho_0 C} \left( 1 + \frac{1}{a_c} \sqrt{\frac{2v}{\omega}} (1+i) \right)^{-1/2} \quad (3.7)$$

Граничные условия при  $z = 0$ , следующие из (2.3) и (2.4) для продольной трещины и радиальной трещины с учетом уравнений фильтрации в пласт (2.4) и трещины ((2.6) – продольная и (2.7) – радиальная), можно привести к виду:

$$\frac{1}{\rho_0 C^2} \frac{\partial P_{(l)}}{\partial t} = \frac{w_{(l)}}{l_p} + \frac{2a}{a_c^2} \frac{k_p}{\mu} \left( \frac{\partial P_p}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} + \frac{2d_f}{\pi a_c^2} \frac{k_f}{\mu} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{\rho_0 C^2} \frac{\partial P_{(l)}}{\partial t} = \frac{w_{(l)}}{l_p} + \frac{2a}{a_c^2} \frac{k_p}{\mu} \left( \frac{\partial P_p}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} + \frac{2ad_f}{a_c^2 l_p} \frac{k_f}{\mu} \left( \frac{\partial P_f}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} \quad (3.9)$$

Решения для распределения давления и скорости в призабойной зоне для гармонического закона изменения давления в забое скважины будем искать в виде:

$$P_p = A_p^{(p)}(r) \exp[-i\omega t], \quad u_p = A_p^{(u)}(r) \exp[-i\omega t], \quad (3.10)$$

где  $A^{(u)}$  – амплитуда параметра  $u$ .

Тогда из уравнений (2.5) для закона распределения давления и скорости фильтрации получим следующие уравнения

$$A_p^{(u)}(r) = -\frac{k_p}{\mu} \frac{dA_p^{(p)}}{dr} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_p^{(p)}}{dr} \right) = q_p^2 A_p^{(p)}, \quad (3.11)$$

где  $q_p^2 = -i\omega/\alpha_p$ .

Из граничного условия (2.10) следует

$$A_p^{(p)}(a) = A_{(l)}^{(p)} \quad \text{и} \quad A_p^{(p)}(r) \rightarrow 0 \Big|_{r \rightarrow \infty}$$

Тогда для решения уравнений (3.11) можно записать

$$A_p^{(p)}(r) = A_{(l)}^{(p)} \frac{K_0(q_p r)}{K_0(q_p a)}, \quad A_p^{(u)}(r) = \frac{k_p}{\mu} q_p A_{(l)}^{(p)} \frac{K_1(q_p r)}{K_0(q_p a)}, \quad (3.12)$$

где  $K_0(S) = \int_0^\infty e^{-S \operatorname{ch} \xi} d\xi$  и  $K_1(S) = -\frac{dK_0(S)}{dS}$  – функции Макдональда нулевого и первого порядков

Для распределения давления и скорости фильтрации в продольной трещине решение будем искать в виде:

$$P_f = A_f^{(p)}(x) \exp[-i\omega t], \quad u_f = A_f^{(u)}(x) \exp[-i\omega t],$$

из уравнения (2.6) получим:

$$A_f^{(u)}(x) = -\frac{k_f}{\mu} \frac{dA_f^{(p)}}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 A_f^{(p)}}{dx^2} = q_f^2 A_f^{(p)}, \quad (3.13)$$

где  $q_f^2 = -i \left( \frac{\omega}{\alpha_f} + 2 \frac{m_p}{m_f} \frac{\sqrt{\alpha_p} \sqrt{i\omega}}{\alpha_f d_f} \right)$ .

С учетом граничных условий (2.11) решения уравнений (3.13) имеют вид:

$$A_f^{(p)}(x) = A_{(l)}^{(p)} \exp[-q_f x], \quad A_f^{(u)}(x) = \frac{k_f}{\mu} q_f A_{(l)}^{(p)} \exp[-q_f x] \quad (3.14)$$

Аналогично предыдущему (3.10) решения уравнений (2.7) для радиальной трещины при условии (2.12) запишем как

$$A_f^{(p)}(r) = A_{(l)}^{(p)} \frac{K_0(q_f r)}{K_0(q_f a)}, \quad A_f^{(u)}(r) = \frac{k_f}{\mu} q_f A_{(l)}^{(p)} \frac{K_1(q_f r)}{K_0(q_f a)} \quad (3.15)$$

Тогда, подставляя (3.12) и (3.14) в уравнение (3.8) и принимая во внимание (3.5), получим

$$\frac{-i\omega}{\rho_0 C^2} (A_{(o)}^{(p)} + A_{(r)}^{(p)}) = \frac{A_{(l)}^{(w)}}{l_p} - \frac{2a k_p}{a_c^2 \mu} q_p \frac{K_1(q_p a)}{K_0(q_p a)} A_{(l)}^{(p)} - \frac{2d_f k_f}{\pi a_c^2 \mu} q_f A_{(l)}^{(p)} \quad (3.16)$$

Из (3.16) с учетом (3.7) можем записать

$$A_{(o)}^{(p)} - A_{(r)}^{(p)} = A_{(l)}^{(p)} \Delta_{\parallel} \quad (3.17)$$

$$\Delta_{\parallel} = \rho_0 C l_p \left( 1 + \frac{1}{a_c} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} (1+i) \right)^{1/2} \left( \frac{-i\omega}{\rho_0 C^2} + \frac{2k_p}{\mu} q_p \frac{a}{a_c^2} \frac{K_1(q_p a)}{K_0(q_p a)} + \frac{2d_f k_f}{\pi a_c^2 \mu} q_f \right)$$

Из совместного решения (3.5) и (3.17) получим выражение для коэффициента отражения  $N$  ( $N = A_{(r)}^{(p)} / A_{(o)}^{(p)}$ ) от забоя скважины в случае продольной трещины

$$N = 1 - \frac{2\Delta_{\parallel}}{1 + \Delta_{\parallel}} \quad (3.18)$$

После аналогичных преобразований из (3.9) с учетом (3.12) и (3.15) найдем коэффициент отражения в случае радиальной трещины:

$$N = 1 - \frac{2\Delta_r}{1 + \Delta_r} \quad (3.19)$$

$$\Delta_r = \rho_0 C l_p \left( 1 + \frac{1}{a_c} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} (1+i) \right)^{1/2} \left( \frac{-i\omega}{\rho_0 C^2} + \frac{2k_p}{\mu} q_p \frac{a}{a_c^2} \frac{K_1(q_p a)}{K_0(q_p a)} + \frac{2d_f a k_f}{l_p a_c^2 \mu} q_f \frac{K_1(q_f a)}{K_0(q_f a)} \right)$$

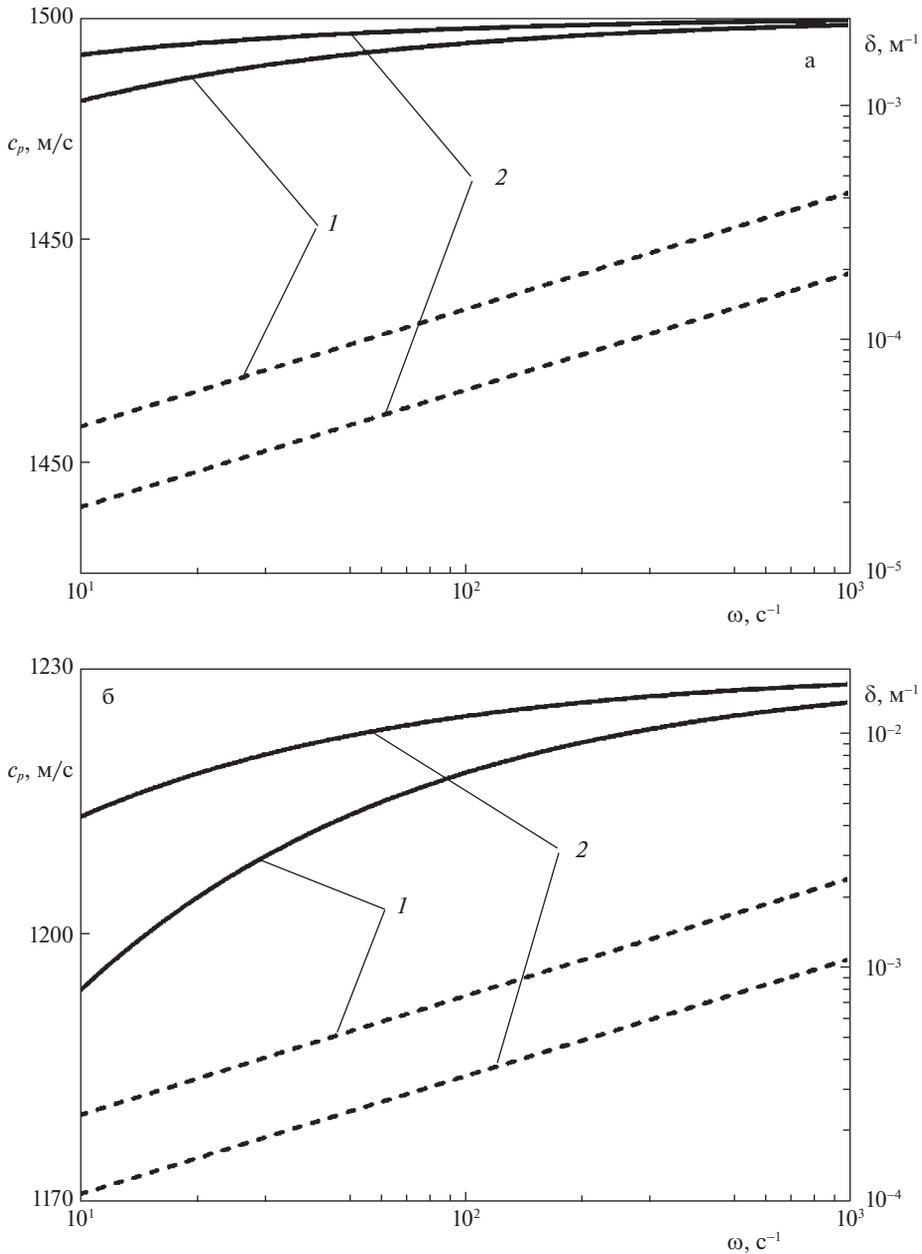
**4. Численные анализ.** Динамика импульсного сигнала в скважине изучается с применением преобразования Фурье и программы быстрого преобразования, для численной реализации [11, 13], а в качестве импульсного сигнала в момент времени  $t_0$  возьмем давление колоколообразной формы длительности  $\Delta t$  с амплитудой  $\Delta P_0$ :

$$\tilde{P}^{(0)} = \Delta P_0 \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2\right) \quad (4.1)$$

Для сигнала, дошедшего и отраженного от сечения  $z = 0$  канала имеем:

$$P_{(o)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}^{(0)}(\tau) \exp(iK(\omega)l) \exp[i\omega(t-\tau)] d\omega d\tau \quad (4.2)$$

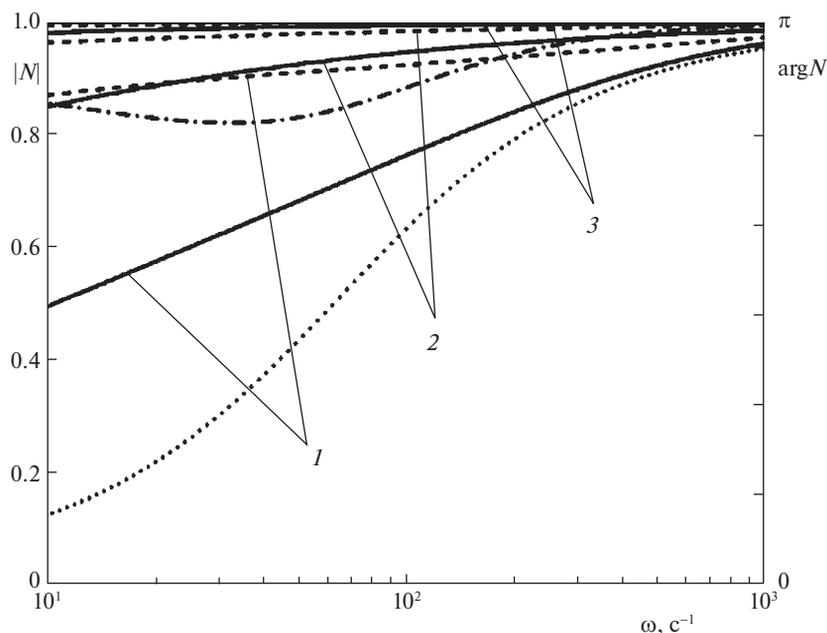
$$P_{(r)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{(l)}(\tau) N(\omega) \exp[i\omega(t-\tau)] d\omega d\tau \quad (4.3)$$



**Рис. 2.** Зависимости фазовой скорости (сплошные) и коэффициента затухания (пунктирные) от частоты. Линии 1 и 2 соответствуют обсаженной и не обсаженной ( $a_c = a$ ) скважине. Скважина и пласт заполнены водой – а, нефтью – б.

Согласно выражениям (4.2) с учетом (3.3) и (4.3) с учетом (3.18) и (3.19) следует, что наличие гидроразрывных трещин, продольных и радиальных вскрытому участку скважины, приводит к дисперсии в динамике импульсного сигнала по скважине.

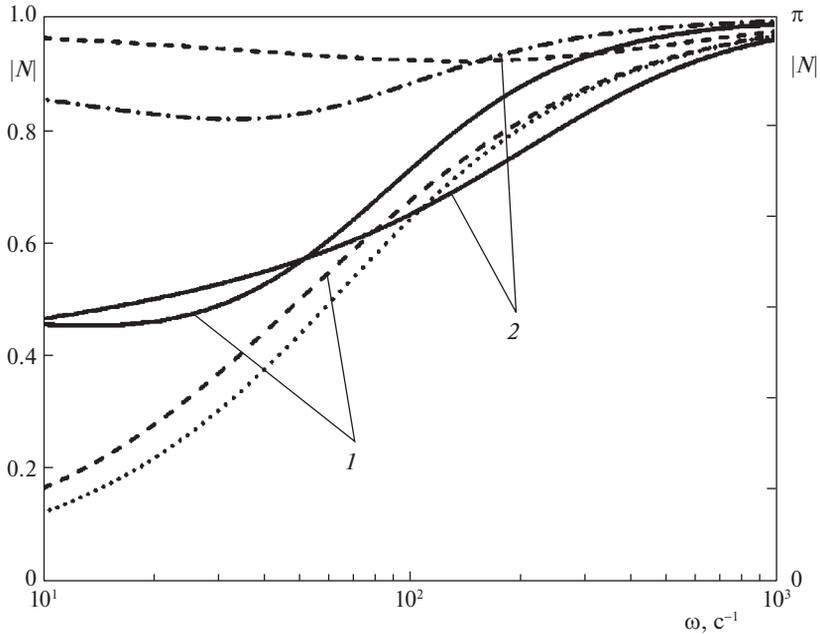
На рис. 2 представлено влияние вида жидкости в скважине на зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты. Для параметров скважины и жидко-



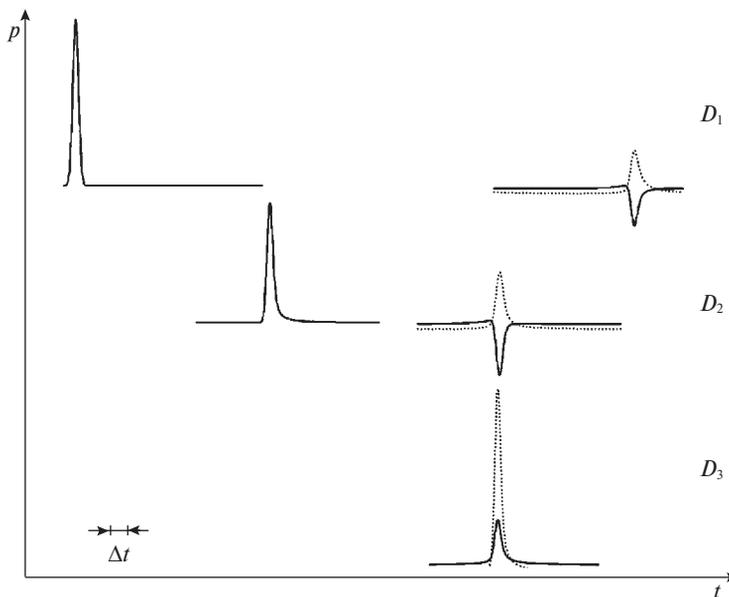
**Рис. 3.** Зависимости модуля коэффициента отражения (сплошные и штрихпунктирные линии) и аргумента (пунктирные и точечные линии) от частоты. Штрихпунктирные и точечные линии – при отсутствии трещины. Линии 1, 2 и 3 соответствуют продольной трещине проводимости  $C_f = 5 \times 10^{-13}$ ;  $5 \times 10^{-12}$ ;  $5 \times 10^{-11} \text{ м}^3$ .

сти (воды или нефти) приняты следующие величины:  $l = 2.6 \times 10^3 \text{ м}$ ;  $a_c = 3.5 \times 10^{-2} \text{ м}$ ;  $a = 7.75 \times 10^{-2} \text{ м}$ ;  $\rho_0 = 10^3, 890 \text{ кг/м}^3$ ;  $C = 1.5 \times 10^3, 1.23 \times 10^3 \text{ м/с}$ ;  $\mu = 10^{-3}, 2 \times 10^{-2} \text{ Па с}$ . Заметно снижение фазовой скорости, которое для воды составляет менее  $10 \text{ м/с}$ , а для нефти в обсаженной скважине может уменьшаться на  $15 \text{ м/с}$  при круговой частоте  $\omega = 10^2 \text{ с}^{-1}$  и на  $40 \text{ м/с}$  при круговой частоте  $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$ . Коэффициенты затухания в обсаженной скважине для воды и нефти отличаются более, чем в 6 раз. Например, при круговой частоте  $\omega = 10^2 \text{ с}^{-1}$  коэффициент затухания примерно равен  $\delta = 1.5 \times 10^{-4} \text{ м}^{-1}$  в воде и  $\delta = 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  в нефти, а характерное расстояние затухания примерно равно  $z_\delta = 6.6 \times 10^3 \text{ м}$  для воды и  $z_\delta = 10^3 \text{ м}$  для нефти.

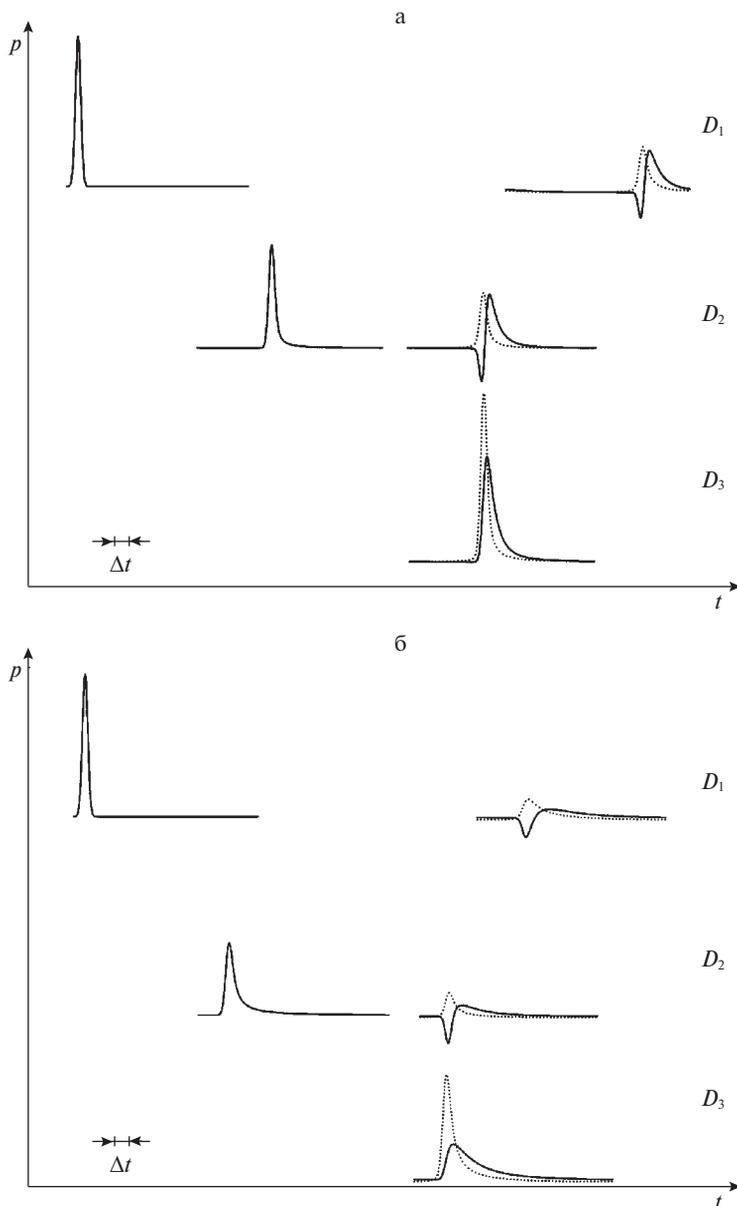
На рис. 3, 4 показано влияние трещины проводимости  $C_f = d_f k_f$  пористостью  $m_f = 0.2$  на модуль и аргумент коэффициента отражения сигнала, рассчитанных для продольной и радиальной трещины по выражению (3.18) и (3.19) соответственно. Принято, что обсаженная скважина и пласт  $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $m_p = 0.1$ ,  $l_p = 20 \text{ м}$  заполнены водой. Из рисунков следует, что при отсутствии трещины значение модуля коэффициента отражения примерно равно  $0.9$ , аргумент близок к углу  $\pi/2$  для круговой частоты  $\omega = 10^2 \text{ с}^{-1}$ . Наличие трещины проводимости  $C_f = 5 \times 10^{-12} \text{ м}^3$  изменяет фазу сигнала, поскольку аргумент коэффициента отражения становится близкий к углу  $\pi$  для круговой частоты  $\omega = 10^2 \text{ с}^{-1}$ . Для радиальной трещины проводимости  $C_f = 5 \times 10^{-13} \text{ м}^3$  несмотря на некоторое снижение модуля коэффициента отражения, его аргумент близок к углу  $\pi/2$ , также как и при отсутствии трещины. Это позволяет



**Рис. 4.** Зависимости модуля коэффициента отражения (сплошные и штрихпунктирные линии) и аргумента (пунктирные и точечные линии) от частоты. Штрихпунктирные и точечные линии – при отсутствии трещины. Линии 1 и 2 соответствуют радиальной трещине проводимости  $C_f = 5 \times 10^{-13}$  и  $5 \times 10^{-12} \text{ м}^3$ .



**Рис. 5.** Динамика сигнала длительности  $\Delta t = 5 \times 10^{-2}$  с в обсаженной скважине. Сплошная линия соответствует наличию продольной трещины проводимости  $C_f = 5 \times 10^{-13} \text{ м}^3$ , точечная – при отсутствии трещины.



**Рис. 6.** Расчетные осциллограммы импульсного сигнала длительности  $\Delta t = 5 \times 10^{-2}$  с – а и  $\Delta t = 8 \times 10^{-3}$  с – б в обсаженной скважине с радиальной трещиной (сплошные линии) проводимости  $C_f = 5 \times 10^{-13}$  м<sup>3</sup> и без трещины (точечные линии) на вскрытом участке.

предположить, что “эхоскопия” будет менее чувствительна к трещинам, перпендикулярным вскрытому участку скважины.

На рис. 5 представлена динамика импульсного сигнала длительности  $\Delta t = 5 \times 10^{-2}$  с в обсаженной скважине с водой. Расчетные параметры совпадают с параметрами рис. 2–4. Алгоритмические датчики  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  расположены на устье, забое и дне скважины. Видно, наличие трещины приводит к качественному изменению эволю-

ции импульсного сигнала в скважине. Образуется импульс сжатия от забоя без трещины или импульс разгрузки при наличии трещины в забое. Для обнаружения радиальной трещины малой проводимости можно использовать более короткие сигналы (рис. 6,б). Заметим, что на дне вскрытой скважины при отсутствии трещины в забое происходит усиление сигнала, т.к. из-за низкой проницаемости пласта призабойная зона ведет себя как жесткая стенка.

**Заключение.** Предложен метод “эхоскопии” для обнаружения трещин гидроразрыва в низкопроницаемых пластах, проницаемостью порядка миллидарси. По динамике импульсного сигнала в обсаженной скважине с открытым участком, заполненным водой можно судить качественно о наличии ГРП трещин. Для более детального определения фильтрационных характеристик гидроразрывных трещин следует запускать еще более короткие импульсные сигналы конкретно на вскрытом участке скважины, соответствующая теория акустического “телевизора” предложена в работах [7, 8]. Эволюция импульсного сигнала более четко прослеживается, если в роли фильтрующей жидкости используется вода. Наблюдается импульс сжатия от забоя без трещины или импульс разгрузки при наличии трещины в забое. Для обнаружения радиальной трещины малой проводимости целесообразно использовать более короткие сигналы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кременецкий М.И., Ипатов А.И.* Гидродинамические и промыслово-технологические исследования скважин. М.: МАКС Пресс, 2008. 475 с.
2. *Экономидес М.* Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. М.; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2007. 237 с.
3. *Байков В.А., Булгакова Г.Т., Ильясов А.М., Кашапов Д.В.* К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 64–75.
4. *Башмаков Р.А., Насырова Д.А., Шагапов В.Ш.* Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП // ПММ. 2022. Т. 86. № 1. С. 88–104.
5. *Holzhausen G.R., Gooch R.P.* Impedance of Hydraulic Fractures: Its Measurement and Use for Estimating Fracture Closure Pressure and Dimensions // Paper presented at the SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symp., Denver / Colorado, May 1985. Paper Number: SPE- SPE-13892-MS.
6. *Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y.* Water Hammer Effects on Water Injection Well Performance and Longevity // SPE Int. Symp. Exhib. on Formation Damage Control, 2008, SPE-112282-MS. <https://doi.org/10.2118/112282-MS>
7. *Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.* К теории локального зондирования трещин, образовавшихся при гидроразрыве пласта, с использованием импульсных волн давления // ПМТФ. 2021. Т. 62. № 4. С. 46–56.
8. *Галиакбарова Э.В.* Влияние проводимости гидроразрывной трещины на возможность диагностирования с помощью акустического “телевизора” // Вестн. Башкирск. ун-та. 2021. Т. 26. № 4. С. 866–870.
9. *Шагапов В.Ш., Нагаева З.М., Аносова Е.П.* Упругий режим фильтрации жидкости к скважине через перпендикулярную ей трещину, образовавшуюся при гидроразрыве пласта // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 4 (374). С. 105–115.
10. *Нагаева З.М., Шагапов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
11. *Лайонс Р.* Цифровая обработка сигналов. М.: ООО “Бином-Пресс”, 2006. 656 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
13. *Айфичер Э.С., Джервис Б.У.* Цифровая обработка сигналов: практический подход. М.: Издат. дом “Вильямс”, 2004. 992 с.

**On the Theory of the Method of “Echoscopy” of the Bottomhole Zone  
of a Well in a Low-Permeability Formation Subject to Hydraulic Fracturing**

**R. A. Bashmakov<sup>a,b,#</sup>, E. V. Galiakbarova<sup>a,c,##</sup>, Z. R. Khakimova<sup>a,c,###</sup>, and V. Sh. Shagapov<sup>a,####</sup>**

<sup>a</sup>*Mavlutov Institute of Mechanics, Ufa, Russia*

<sup>b</sup>*Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia*

<sup>c</sup>*Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: Bashmakov\_Rustem@mail.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: Emi.galiakbar@yandex.ru*

<sup>###</sup>*e-mail: Zulfya.hakimova@yandex.ru*

<sup>####</sup>*e-mail: Shagapov@rambler.ru*

We build a mathematical model describing the evolution of the pulse signal in the well in the presence of a longitudinal or transverse fracture in the bottomhole section. It is assumed that the signal is sent from the wellhead with a wavelength greater than the diameter of the well and the length of the open section of the well. According to the dynamics of the “echo” of the pulse signal returning to the wellhead, it is possible to judge the quality of hydraulic fracturing. The results of numerical calculations for a bell-shaped pulse are presented. It is shown that when diagnosing fractures, water is more preferable than oil as a fluid through which the signal propagates.

*Keywords:* pulse signal, hydraulic fracturing, oil well, wave phase, reflection coefficient, harmonic waves

## REFERENCES

1. *Kremenetskiy M.I., Ipatov A.I.* Hydrodynamic and Field-Technological Studies of Wells. Moscow: MAKS Press, 2008.
2. *Economides M.J., Ronald E.O., Valko P.* Unified Fracture Design Bridging the Gap between Theory and Practice. Alvin, TX: Orsa Press, 2002. 200 p.
3. *Baikov V.A., Bulgakova G.T., Il'yasov A.M., Kashapov D.V.* Estimation of the geometric parameters of a reservoir hydraulic fracture // *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, pp. 642–653. <http://ras.jes.su/mzg/s207987840000962-7-2-en>.
4. *Bashmakov R.A., Nasyrova D.A., Shagapov V.Sh.* Natural vibrations of a fluid in a well connected with formation in the presence of a hydraulic fracture // *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, pp. 1049–1061. <https://doi.org/10.1134/S0015462821080024>
5. *Holzhausen G.R., Gooch R.P.* Impedance of hydraulic fractures: its measurement and use for estimating fracture closure pressure and dimensions // *SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symp.*, Denver / Colorado, May 1985. Paper No: SPE- SPE-13892-MS.
6. *Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y.* Water Hammer effects on water injection well performance and longevity // *SPE Int. Symp. & Exhib. on Formation Damage Control*, 2008, SPE-112282-MS. doi: <https://doi.org/10.2118/112282-MS>
7. *Shagapov V.S., Galiakbarova E.V., Khakimova Z.R.* On the theory of local sounding of hydraulic fractures using pulsed pressure waves // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, pp. 563–572. <https://doi.org/10.1134/S0021894421040052>
8. *Galiakbarova E.V.* The influence of the conductivity of a hydraulic fracturing crack on the possibility of diagnosing using an acoustic “TV” // *Bull. Bashk. Univ.*, 2021, vol. 26, no. 4, pp. 866–870. doi: <https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2021.4.2>
9. *Shagapov V.S., Nagaeva Z.M., Anosova E.P.* Elastic filtration of fluid to a wellbore through a fracture perpendicular to it and formed during hydraulic fracturing // *J Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, pp. 643–651. <https://doi.org/10.1134/S0021894422040113>
10. *Nagaeva Z.M., Shagapov V.Sh.* Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir // *JAMM*, 2017, vol. 81, iss. 3, pp. 214–222.
11. *Lyons R.G.* Understanding Digital Signal Processing. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 2001. xvii+517 p.
12. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical Physics. Vol. 6: Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1986.
13. *Ifeachor E.C., Jervis B.W.* Digital Signal Processing. Addison-Wesley Publ. Company, 1993. xxiii+760p.

УДК 539.3

**СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ ПРОДОЛЬНЫХ И КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**© 2023 г. И. С. Никитин<sup>1,\*</sup>, Н. Г. Бурого<sup>1,2,\*\*</sup>, А. Д. Никитин<sup>1,\*\*\*</sup><sup>1</sup>Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: i\_nikitin@list.ru

\*\*e-mail: buragong@yandex.ru

\*\*\*e-mail: nikitin\_alex@bk.ru

Поступила в редакцию 09.01.2023 г.

После доработки 02.03.2023 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

Рассматривается задача определения частоты и формы собственных продольных или крутильных колебаний для стержня переменного сечения на основе теории возмущений. Предполагается, что упругие свойства и площадь поперечного сечения прямого стержня меняются достаточно медленно и слабо отклоняются от некоторых средних значений по продольной координате. С использованием метода асимптотических разложений по малому параметру, получены аналитические формулы для поправок к собственным частотам и формам стационарных гармонических колебаний стержня. Работоспособность формул проверена сравнением с точными решениями для некоторых зависимостей площади поперечного сечения от продольной координаты. Показано, что приближенные формулы хорошо работают даже для стержней, у которых отношение максимального и минимального радиуса сечения достигает 2.5–3. Численные расчеты ориентированы на оценку геометрических и упругих свойств образцов для проведения экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении на растяжение-сжатие и кручение. Пьезоэлектрические установки для проведения таких высокочастотных испытаний основаны на общем принципе резонансного нагружения корсетных образцов с частотой порядка 20 кГц.

*Ключевые слова:* сверхмногоцикловая усталость, колебания стержней, переменное сечение, растяжение-сжатие, теория возмущений, аналитическое решение, высокочастотные испытания, пьезоэлектрическая установка

DOI: 10.31857/S003282352302011X, EDN: UAJFFL

**1. Введение.** Уравнения продольных, крутильных и поперечных колебаний стержней с переменным сечением приведены в различных учебниках и монографиях, в частности, в [1]. Задача определения собственных частот и форм продольных и крутильных колебаний стержней с переменным сечением исследовалась многими авторами [2–6]. Обзор работ по определению собственных частот и форм изгибных колебаний можно найти в [7], решение конкретных задач дано в [8–12]. Основные приложения связаны с определением поправок к резонансным частотам и формам колебаний, обусловленных дефектами поверхности – при продольных колебаниях [2–4], при крутильных колебаниях [5, 6], при изгибных колебаниях [10, 11], при наличии внутренних дефектов (трещин) [12].

Стержни переменного сечения используются при проведении экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении образцов на растяжение-сжатие, кручение или трехточечный изгиб [13]. Пьезоэлектрические установки для проведения высокочастотных СВМУ испытаний осуществляют циклическое нагружение: растяжением–сжатием и кручением [13]. Эти испытательные установки обладают общим принципом резонансного нагружения с частотой порядка 20 кГц. Испытания на растяжение-сжатие и кручение контролируются и программируются с использованием одного и того же программного комплекса. Различие между машинами состоит лишь в типе пьезоэлектрического конвертера и геометрии волновода. Для реализации осевых нагружений используется конвертер, обеспечивающий продольные смещения малой амплитуды (10–30 мкм). Для крутильного нагружения используется конвертер, обеспечивающий непосредственно вращательные колебания с амплитудой 0.10–0.25 миллирадиан. Для случая кручения резонансные длины оказываются меньше, чем для осевых испытаний [13]. Базовая корсетная форма осесимметричного стержня имеет вид “песочных часов” для создания квазиоднородного напряженного состояния с повышенным уровнем напряжений в центральной, узкой части образца.

В данной работе основной интерес представляет исследование влияния геометрии стержня на первую резонансную частоту и антисимметричную форму продольных или крутильных колебаний при исследовании сверхмногоциклового усталостного разрушения (СВМУ) с числом циклов  $N > 10^8$ .

Пьезоэлектрические установки с несущей частотой порядка 20 кГц имеют достаточно узкий частотный диапазон отклонений при эксплуатации, составляющий  $\pm 500$  Гц. Поэтому оценка и определение чувствительности и влияния геометрических параметров образца (общей длины, длины участка переменного сечения и характеристик его изменчивости) на резонансную частоту является необходимой при проектировании экспериментальных установок и образцов из различных металлических сплавов.

Для определения поправок к резонансной частоте и форме собственных продольных и крутильных колебаний для стержня переменного сечения используется теория возмущений [14]. Теория возмущений использовалась в [4] при решении обратной задачи восстановления распределения плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня переменного сечения по частотам собственных колебаний. В данной работе рассматривается прямая задача нулевого и первого приближений для упрощенного, но достаточно общего представления формы стержня, для которой удалось получить явные решения в удобной аналитической форме.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение колебаний общего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( I(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Пусть параметры колебательной системы зависят от продольной координаты  $x$ . Для продольных колебаний  $I(x) = E(x)S(x)$ ,  $A(x) = S(x)$ ,  $E$  – модуль Юнга стержня,  $S$  – переменная площадь сечения. Для крутильных колебаний  $I(x) = \mu(x)J(x)$ ,  $A(x) = J(x)$ , где  $\mu$  – модуль сдвига стержня,  $J$  – полярный момент инерции. Поскольку уравнения продольных и крутильных колебаний отличаются только обозначениями, далее будем вести изложение для случая продольных колебаний стержня.

Рассматривая гармонические колебания  $w(x, t) = u(x)e^{i\omega t}$ , приходим к уравнению для амплитуды

$$\frac{d}{dx} \left( I \frac{du}{dx} \right) + \rho S \omega^2 u = 0 \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$du/dx = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l \quad (2.2)$$

2.1. Построение общего решения методом разложения по малому параметру. Рассмотрим случай малого изменения параметров стержня по длине

$$I = I_0 + \varepsilon I_1(x) + \dots, \quad S = S_0 + \varepsilon S_1(x) + \dots; \quad \varepsilon \ll 1$$

Тогда, решение для функций смещений и собственной частоты также будем искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1(x) + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots$$

Подставим разложения в уравнение (2.1) и в граничные условия (2.2) и, приравнявая члены при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$ , получаем задачи нулевого а) и первого б) порядков для определения собственных частот и форм колебаний. Введя обозначение  $k^2 = \rho S_0 \omega_0^2 / I_0$  и безразмерные геометрические и упругие параметры стержня, получим

$$u_0'' + k^2 u_0 = 0, \quad u_0' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l$$

$$u_1'' + k^2 u_1 = -\left(\bar{I}_1' u_0' + k^2 (\bar{S}_1 - \bar{I}_1) u_0 + 2k^2 \bar{\omega}_1 u_0\right), \quad u_1' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l,$$

где  $\bar{I}_1 = I_1 / I_0$ ,  $\bar{S}_1 = S_1 / S_0$ ,  $\bar{\omega}_1 = \omega_1 / \omega_0$ .

Тогда, учитывая, что

$$I(x) = E(x)S(x) = E_0 S_0 + \varepsilon (E_1 S_0 + E_0 S_1) + \dots, \quad I_0 = E_0 S_0, \quad I_1 = E_1 S_0 + E_0 S_1,$$

получим

$$\bar{S}_1 - \bar{I}_1 = S_1 / S_0 - (E_1 S_0 + E_0 S_1) / (E_0 S_0) = -\bar{E}_1, \quad \bar{E}_1 = E_1 / E_0, \quad \bar{I}_1 = I_1 / I_0$$

2.2. Решение для поправок к собственным частотам и формам колебаний. Будем рассматривать антисимметричное решение задачи а) нулевого приближения, которое имеет простой вид:

$$u_{0n} = U_n \sin k_n x, \quad \cos k_n l = 0$$

Отсюда получаем значения параметра  $k$  (нулевого приближения собственных частот):

$$k_n l = \frac{1}{2} \pi + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что наименьшее значение  $k_n$  равно  $k_0 = \pi / (2l)$ .

С учетом решения для нулевого приближения задача б) для первого приближения запишется в виде неоднородного дифференциального уравнения с граничными условиями:

$$u_{1n}'' + k_n^2 u_{1n} = -U_n k \left( \bar{I}_1' \cos k_n x - k_n \bar{E}_1 \sin k_n x + 2k_n \bar{\omega}_{1n} \sin k_n x \right)$$

$$u_{1n}' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l$$

Будем решать эту задачу методом вариации постоянных:

$$u_{1n}(x) = A_{1n}(x) \cos k_n x + A_{2n}(x) \sin k_n x$$

Коэффициентные функции  $A_{i,n}$  находятся из системы уравнений:

$$A_{1n}' \cos k_n x + A_{2n}' \sin k_n x = 0$$

$$A'_{1n}(-k_n \sin k_n x) + A'_{2n}(k_n \cos k_n x) = -U_n k_n \left( \bar{I}'_1 \cos k_n x - k_n \bar{E}'_1 \sin k_n x + 2k_n \bar{\omega}_{1n} \sin k_n x \right),$$

решение которой имеет вид:

$$A_{1n} = U_n \left( \int_{-l}^x f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi + \bar{\omega}_{1n} (k_n(x+l) - \sin k_n x \cos k_n x) \right) + B_{1n}$$

$$A_{2n} = -U_n \left( \int_{-l}^x f_n(\xi) \cos k_n \xi d\xi - \bar{\omega}_{1n} \cos^2 k_n x \right) + B_{2n}$$

$$f_n(\xi) = \bar{I}'_1 \cos k_n \xi - k_n \bar{E}'_1 \sin k_n \xi$$

Учитывая граничные условия при  $x = \pm l$

$$u'_{1n} = 0,$$

имеем:

$$x = \pm l: \quad A_{1n} \sin k_n x - A_{2n} \cos k_n x = 0, \quad \cos k_n l = 0$$

Тогда, из граничных условий при нахождении:

$$x = -l: \quad B_{1n} = 0; \quad x = l: \quad A_{1n}(l) = \int_{-l}^l f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi + 2k_n l \bar{\omega}_{1n} = 0$$

Таким образом, поправка к частоте равна:

$$\bar{\omega}_{1n} = -\frac{1}{2k_n l} \int_{-l}^l f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi$$

Если фиксировать полную амплитуду колебаний величиной  $U_n$ , то константу  $B_{2n}$  можно положить равной нулю. Тогда поправка к собственной форме колебаний примет вид:

$$u_{1n}(x) = U_n \left\{ \left( \int_{-l}^x f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi + \bar{\omega}_{1n} k_n (x+l) \right) \cos k_n x - \left( \int_{-l}^x f_n(\xi) \cos k_n \xi d\xi \right) \sin k_n x \right\},$$

или, с учетом выражения для  $f_n(\xi)$ :

$$u_{1n}(x) = U_n \left\{ \left( \int_{-l}^x (\bar{I}'_1 \cos k_n \xi \sin k_n \xi - k_n \bar{E}'_1 \sin^2 k_n \xi) d\xi + \bar{\omega}_{1n} k_n (x+l) \right) \cos k_n x - \left( \int_{-l}^x (\bar{I}'_1 \cos^2 k_n \xi - k_n \bar{E}'_1 \sin k_n \xi \cos k_n \xi) d\xi \right) \sin k_n x \right\}$$

Если переменные по длине стержня площадь сечения и модуль Юнга являются четными функциями пространственной координаты, то функция  $f_n(\xi) = \bar{I}'_1 \cos k_n \xi - k_n \bar{E}'_1 \sin k_n \xi$  является нечетной. Тогда поправка к собственной частоте колебаний будет равна:

$$\bar{\omega}_{1n} = -\frac{1}{k_n l} \int_0^l f_n(\xi) \sin k_n \xi d\xi$$

Подставляя выражение для  $f_n(\xi)$ , получим окончательно:

$$\bar{\omega}_{1n} = \frac{1}{l} \left( \int_0^l (\bar{I}'_1 - \frac{1}{2} \bar{E}'_1) \cos 2k_n \xi d\xi + \frac{1}{2} \int_0^l \bar{E}'_1 d\xi \right)$$

2.3. *Случай однородного стержня переменного сечения.* Для однородного по модулю упругости стержня  $E_1 = 0$ ,  $\bar{I}_1 = \bar{S}_1$ . Для этого случая первые поправки

$$\bar{\omega}_{1n} = \frac{1}{l} \left( \int_0^l \bar{S}_1 \cos 2k_n \xi d\xi \right)$$

$$u_{1n}(x) = U_n \left\{ \left( \int_{-l}^x \bar{S}_1' \cos k_n \xi \sin k_n \xi d\xi + \bar{\omega}_{1n} k_n (x+l) \right) \cos k_n x - \left( \int_{-l}^x \bar{S}_1' \cos^2 k_n \xi d\xi \right) \sin k_n x \right\}$$

Проводя интегрирование по частям, в этом случае получим

$$u_{1n}(x) = k_n U_n \left\{ \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \bar{S}_1 \cos(2k_n \xi) d\xi \cos(k_n x) (x+l) - \int_{-l}^x \bar{S}_1 \cos(k_n x - 2k_n \xi) d\xi \right\}$$

Для первой моды  $k_0 = \pi/(2l)$ :

поправка к собственной частоте равна

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \bar{S}_1 \cos\left(\frac{\pi\xi}{l}\right) d\xi = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \bar{S}_1 \cos\left(\frac{\pi\xi}{l}\right) d\xi \quad (2.3)$$

поправка к собственной форме равна

$$u_1(x) = \frac{\pi U}{2l} \left\{ \int_{-l}^l \bar{S}_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi\xi}{l}\right) d\xi \frac{(x+l)}{2l} - \int_{-l}^x \bar{S}_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2l} - \frac{\pi\xi}{l}\right) d\xi \right\} \quad (2.4)$$

### 3. Примеры аналитических расчетов собственной частоты и формы колебаний.

3.1. *Тригонометрическое представление формы стержня.* Рассмотрим конкретную форму осесимметричного стержня радиуса  $r(x) = r_0 + \varepsilon r_1(x)$ ,  $S(x) = S_0 + \varepsilon S_1(x)$ ,  $S_0 = \pi r_0^2$ ,  $S_1(x) = 2\pi r_0 r_1(x)$ ,  $\bar{S}_1 = 2r_1(x)/r_0$ .

Пусть радиус стержня может быть представлен в следующем виде:

$$r(x) = r_0(1 - \varepsilon \cos(\pi x/l))$$

Определим первую собственную частоту и антисимметричную моду колебаний при  $k_0 = \pi/(2l)$  по формуле (2.3).

Поправка к частоте равна:

$$\bar{\omega}_1 = -\frac{2}{l} \int_0^l \cos^2(\pi\xi/l) d\xi = -\frac{2}{l} \int_0^l \frac{1 + \cos(2\pi\xi/l)}{2} d\xi = -1 - \frac{1}{l} \frac{\sin(2\pi\xi/l)}{2\pi/l} \Big|_0^l = -1$$

Собственная частота определится формулой:

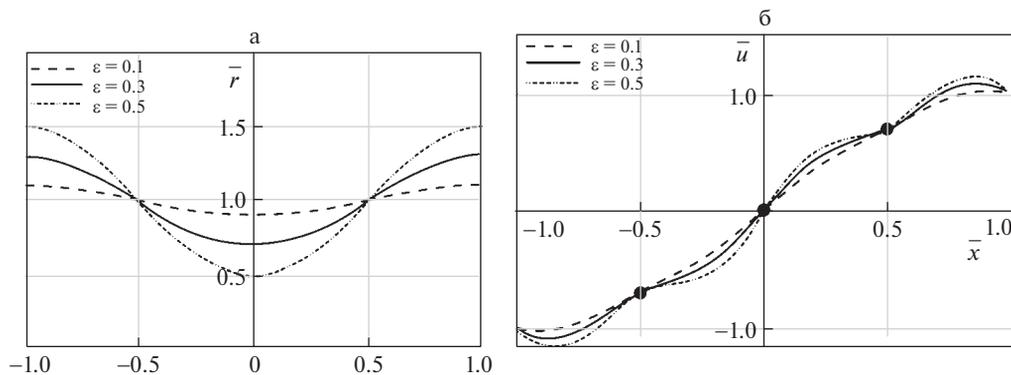
$$\omega = \omega_0(1 - \varepsilon + \dots), \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$$

Вычисляя интегралы (2.4), находим поправку к собственной форме:

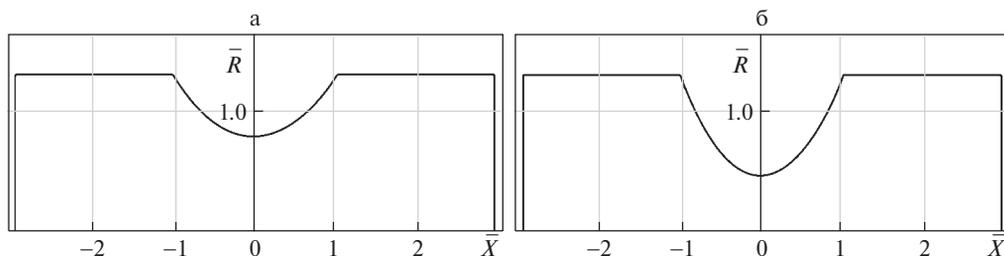
$$u_1(x) = \frac{U}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Первая антисимметричная собственная форма колебаний имеет вид:

$$u(x) = U \left( \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \dots \right)$$



**Рис. 1.** Форма стержня – а) и собственная форма колебаний – б) при различных значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  – штрихованная,  $\varepsilon = 0.3$  – сплошная,  $\varepsilon = 0.5$  – штрих-пунктир.



**Рис. 2.** Форма стержня при различных значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.3$  (а),  $\varepsilon = 0.5$  (б).

Для наглядной иллюстрации поведения решений задачи для конкретных функций переменного радиуса поперечного сечения на рис. 1,а представлены безразмерные формы стержня  $\bar{r} = r(\bar{x})/r_0$ , а на рис. 1,б безразмерные собственные формы колебаний  $\bar{u} = u(\bar{x})/U$  при различных значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.5$  в зависимости от безразмерной продольной координаты  $\bar{x} = x/l$ .

*3.2. Экспериментальные корсетные образцы в форме “песочных часов”.* Выберем следующее, часто используемое для образцов в высокочастотных усталостных испытаниях, представление переменного радиуса осесимметричного стержня [8]:

$$r(x) = \begin{cases} R_1 \operatorname{ch}(\alpha x), & \text{при } |x| < l_2 \\ R_2, & \text{при } l_2 \leq |x| \leq l, \end{cases}$$

где значение параметра  $\alpha$  определяется равенством  $R_2 = R_1 \operatorname{ch}(\alpha l_2)$ .

Выберем срединный радиус стержня равным  $R_0 = (R_1 + R_2)/2$ , что соответствует горизонтальной координате  $l_0$  ( $R_0 = R_1 \operatorname{ch}(\alpha l_0)$ ). Далее считаем, что отклонение наружного и внутреннего радиусов стержня от среднего радиуса невелико  $R_2 = R_0(1 + \varepsilon)$ ,  $R_1 = R_0(1 - \varepsilon)$ .

Характерная форма такого стержня со значительным изменением поперечного сечения показана на рис. 2,а для  $\varepsilon = 0.3$  и на рис. 2,б для  $\varepsilon = 0.5$ , введены безразмерные переменные  $\bar{R} = r(\bar{X})/R_0$  для формы стержня и  $\bar{X} = x/l_2$  для продольной координаты.

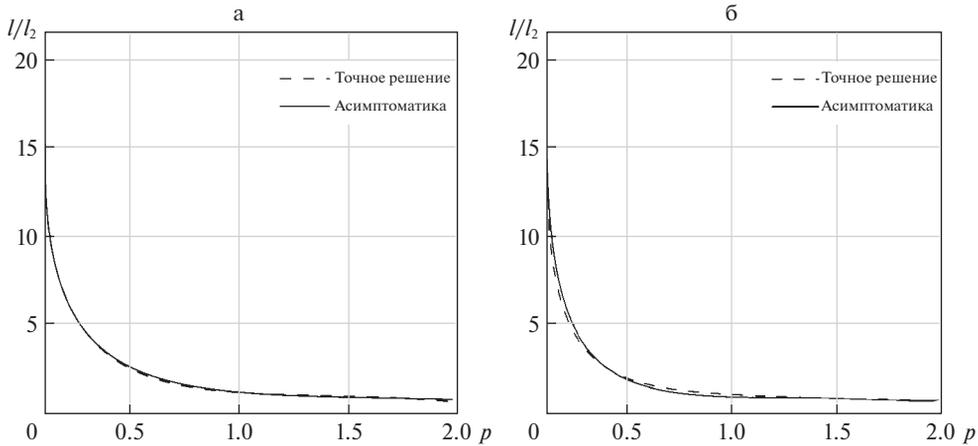


Рис. 3. Зависимость геометрических характеристик стержня от безразмерной частоты а)  $R_2/R_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.96$ , б)  $R_2/R_1 = 2.1$ ,  $\varepsilon = 0.355$ ,  $\gamma = 1.38$ .

Определим унифицированные представления этой формы стержня с учетом малости параметра  $\varepsilon$

$$R_2/R_1 \sim 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2, \quad R_0/R_1 \sim 1 + \varepsilon + \varepsilon^2, \quad \alpha \sim \frac{2}{l_2} \sqrt{\varepsilon} \left(1 - \frac{5}{4} \varepsilon\right)$$

С учетом этих оценок определим поправки к собственной частоте для первой антисимметричной моды:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{8}{\pi^2} \frac{l}{l_2} \left[ \cos\left(\pi \frac{l_2}{l}\right) - \frac{1}{\pi l_2} \sin\left(\pi \frac{l_2}{l}\right) \right]$$

Введя обозначение  $\delta = \pi l_2/l$ , получим компактную формулу для поправки к собственной частоте:

$$\bar{\omega}_1 = 8[\cos \delta - (\sin \delta)/\delta]/(\pi \delta)$$

Частота первого резонанса будет вычисляться по следующей формуле:

$$\omega = \omega_0[1 + 8\varepsilon(\cos \delta - (\sin \delta)/\delta)/(\pi \delta)]; \quad \omega_0 = \pi c/(2l), \quad c = \sqrt{E/\rho}$$

Для данной формы стержня существует точная формула для первой частоты собственных колебаний [8], которая позволяет оценить точность полученной приближенной асимптотической формулы в зависимости от отношения  $R_2/R_1$ .

Точная формула связи геометрии стержня с первой резонансной частотой  $\omega$  в безразмерных переменных имеет вид:

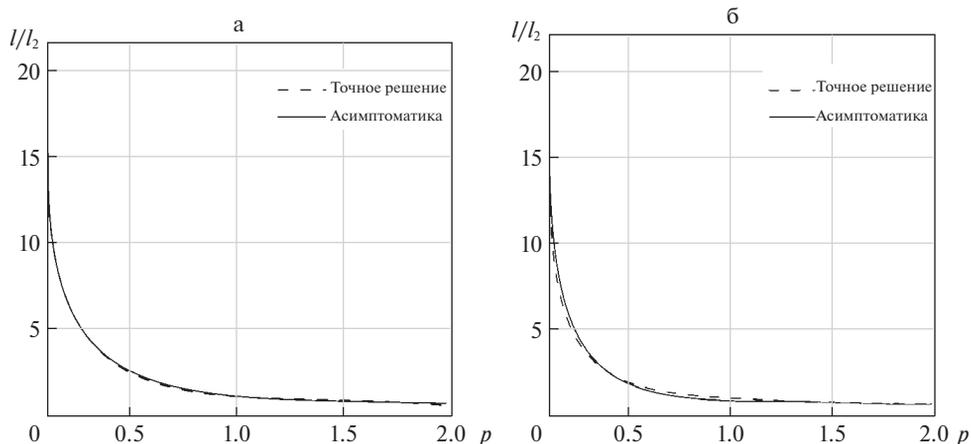
$$l/l_2 = 1 + \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\gamma^2/p^2 - 1} \operatorname{cth} \left( p \sqrt{\gamma^2/p^2 - 1} \right) - \operatorname{th}(\gamma) \gamma/p \right\} / p,$$

где  $\gamma = \operatorname{arcsch}(R_2/R_1)$ ,  $p = kl_2$ ,  $\alpha = \gamma/l_2$ ,  $\beta = k\sqrt{\gamma^2/p^2 - 1}$ .

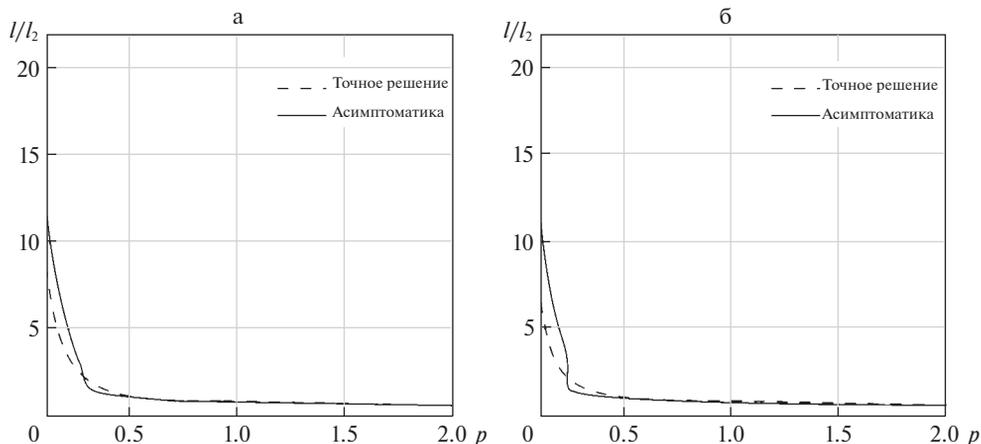
В этих же обозначениях асимптотическая формула для безразмерной частоты  $p$

$$p = \delta[1 + 8\varepsilon(\cos \delta - (\sin \delta)/\delta)/(\pi \delta)]/2, \quad \varepsilon = (R_2/R_1 - 1)/(R_2/R_1 + 1), \quad \delta = \pi l_2/l$$

Для оценки точности асимптотических формул построим графики зависимостей  $l/l_2(p)$  для точной и приближенной формул при различных значениях  $R_2/R_1$  и  $\varepsilon$ . Эти графики попарно представлены на рис. 3–5, где прерывной линией изображены кривые, соответствующие точному решению, а сплошной линией – решению по асимптотическим формулам.



**Рис. 4.** Зависимость геометрических характеристик стержня от безразмерной частоты а)  $R_2/R_1 = 2.5$ ,  $\varepsilon = 0.429$ ,  $\gamma = 1.56$ , б)  $R_2/R_1 = 3$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\gamma = 1.76$ .



**Рис. 5.** Зависимость геометрических характеристик стержня от безразмерной частоты а)  $R_2/R_1 = 4$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ,  $\gamma = 2.06$ , б)  $R_2/R_1 = 5$ ,  $\varepsilon = 0.67$ ,  $\gamma = 2.30$ .

Из рис. 3–4 видно, что при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.2$  решения на графике неограниченно малы, даже при не малых значениях  $\varepsilon = 0.35$ – $0.43$  ошибка не превышает 2.5%.

Только при более высоких значениях  $\varepsilon > 0.5$ , когда параметр  $\varepsilon$  ни в коем случае не может считаться малым, графики серьезно расходятся в диапазоне  $0 < p < 0.4$  (рис. 5).

Однако можно отметить такой любопытный факт. Для типичных образцов из титанового сплава, применяемых в пьезоэлектрической испытательной установке с эксплуатационной частотой 20 кГц,  $E = 115$  ГПа,  $\rho = 4500$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 5055$  м/с и геометрическим параметром  $l_2 = 1.5$  см, величина  $p = 0.373$ . Как видно из рис. 3–5, в окрестности этой точки графики точного и приближенного решения пересекаются, и точность асимптотического решения резко возрастает до величин  $< 1\%$ . Поэтому использование полученных асимптотических формул при типичных значениях параметров уста-

новки и экспериментальных образцов обеспечивает высокую точность в доли процента для определения их геометрических характеристик.

**Заключение.** Решена задача определения частоты и формы собственных продольных или крутильных колебаний для стержня переменного сечения на основе теории возмущений. В предположении, что упругие свойства и площадь поперечного сечения прямого стержня меняются достаточно медленно и слабо отклоняются от некоторых средних значений по продольной координате, получены аналитические формулы для поправок к собственным частотам и формам стационарных гармонических колебаний стержня. Работоспособность формул проверена сравнением с точными решениями для некоторых зависимостей площади поперечного сечения от продольной координаты. Показано, что приближенные формулы для первой антисимметричной моды хорошо работают даже для стержней, у которых отношение максимального и минимального радиуса сечения достигает 2.5–3.

Проведены численные расчеты геометрических и упругих свойств образцов для проведения экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении на растяжение–сжатие.

Исследование выполнено в рамках госзадания ИАП РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с.
2. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В.* Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 98–107.
3. *Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В.* Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 136–144.
4. *Ватульян А.О., Бочарова О.В.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акуст. ж. 2009. Т. 55. № 3. С. 275–282.
5. *Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р.* Крутильные колебания стержня непостоянного сечения // Вестн. УГАТУ. Машиностр. и технич. науки. 2022. Т. 26. № 1 (95). С. 22–30.
6. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта // Дефектоскопия. 2010. № 6. С. 93–98.
7. *Гусев Б.В., Саурин В.В.* О колебаниях неоднородных балок // Инжен. вестн. Дона. 2017. № 3.
8. *Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р.* Точные решения уравнения, описывающего поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и их применение // Вестн. Башк. ун-та. Машиностр. и технич. науки. 2019. Т. 23. № 4. С. 774–779.
9. *Гусев Б.В., Саурин В.В.* О свободных изгибных колебаниях бетонных балок переменного поперечного сечения // Промышл. и гражд. строит. 2019. № 8. С. 93–98.
10. *Ватульян А.О., Осипов А.В.* Об одном подходе при определении параметров дефекта в балке // Дефектоскопия. 2014. № 11. С. 37–47.
11. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83–89.
12. *Лебедев И.М., Шифрин Е.И.* Идентификация поперечных трещин в стержне по собственным частотам поперечных колебаний // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 50–70.
13. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
14. *Bathias C., Paris P.C.* Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. New York: Marcel Dekker, 2005. 328 p.

## Natural Frequency and Modes of the Longitudinal and Torsional Vibrations in the Bars with Variable Cross Section

I. S. Nikitin<sup>a,#</sup>, N. G. Burago<sup>a,b,##</sup>, and A. D. Nikitin<sup>a,###</sup>

<sup>a</sup>*Institute for Computer Aided Design RAS, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: i\_nikitin@list.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: buragong@yandex.ru*

<sup>###</sup>*e-mail: nikitin\_alex@bk.ru*

The paper is focused on the problem of natural frequencies and modes determination based on perturbation theory for longitudinal and torsional vibrations in bars with variable cross section. The mechanical properties and cross section geometry of the bar are changing small from the average value with regard to longitudinal coordinate. Based on the theory of small perturbations the analytical solution is obtained for natural frequencies and modes of the stationary harmonic vibrations in bars. The efficiency of the proposed method is supported by comparison and good agreement of the obtain results with a sharp solution for a given cross section profiles. It was established that the approximate solution is working good up to the ratio 2.5–3 between maximum and minimum diameter of cross section. The results of numerical simulations are aimed to estimate the geometry and elastic behavior of the metallic specimens for very high cycle fatigue experimental investigation under axial tension-compression and torsion loadings. The piezoelectric fatigue testing system and procedure is based on stationary vibration excitation in the metallic specimen at the first mode natural frequency.

*Keywords:* very high cycle fatigue, vibrations in bars, variable cross section, tension-compression, perturbation theory, analytical solution, high frequency tests, piezoelectric fatigue testing system

### REFERENCES

1. Babakov I.M. Oscillation Theory. Moscow: Nauka, 1965. 560 p.
2. Akulenko L.D., Gavrikov A.A., Nesterov S.V. Identification of defects in the cross section of the rod by natural frequencies and features of the form of longitudinal vibrations // Mech. Solids, 2019, no. 6, pp. 98–107.
3. Akulenko L.D., Baydulov V.G., Georgievskiy D.V., Nesterov S.V. Evolution of natural frequencies of longitudinal vibrations of a rod with increasing cross-sectional defect // Mech. Solids, 2017, no. 6, pp. 136–144.
4. Vatulyan A.O., Bocharova O.B. On the reconstruction of the density and Young's modulus for an inhomogeneous rod // Acoust. Phys., 2009, vol. 55, no. 3, pp. 275–282.
5. Pavlov V.P., Nusratullina L.R. Torsional vibrations of a rod of non-constant section // Bull. USATU. Mech. Engng.&Engng. Sci., 2022, vol. 26, no. 1 (95), pp. 22–30.
6. Khakimov A.G. On natural oscillations of a shaft with a model of an artificial defect // Defectoscopy, 2010, no. 6, pp. 93–98.
7. Gusev B.V., Saurin V.V. On vibrations of inhomogeneous beams // Don Engng. Gazette, 2017, no. 3.
8. Pavlov V.P., Nusratullina L.R. Exact solutions of the equation describing transverse vibrations of a bar with variable cross section and their application // Bull. USATU. Mech. Engng.&Engng. Sci., 2019, vol. 23, no. 4, pp. 774–779.
9. Gusev B.V., Saurin V.V. On free bending vibrations of concrete beams of variable cross section // Industrial&Civil Constr., 2019, no. 8, pp. 93–98.
10. Vatulian A.O., Osipov A.V. On one approach to determining the parameters of a defect in a beam // Defectoscopy, 2014, no. 11, pp. 37–47.
11. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Diagnosis of damage to a notched cantilever beam // Defectoscopy, 2009, no. 6, pp. 83–89.
12. Lebedev I.M., Shifrin E.I. Identification of transverse cracks in a bar by natural frequencies of transverse vibrations // Mech. Solids, 2020, no. 4, pp. 50–70.
13. Naiphe A.Kh. Introduction to Perturbation Methods. Moscow: Mir, 1984. 535 p.
14. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. N.Y.: Marcel Dekker, 2005. 328 p.

---

---

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. В журнале публикуются результаты в области механики, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях, по следующим направлениям:

- общая механика, или механика систем, включая проблемы управления механическими системами;
- механика жидкости и газа;
- механика деформируемого твердого тела;
- вычислительная механика.

По согласованию с редколлегией в журнале печатаются также обзорные статьи по указанным направлениям. Авторы обязаны предъявлять повышенные требования к изложению и языку рукописи. Рекомендуется безличная форма изложения.

2. Фамилии авторов статьи располагаются в алфавитном порядке, инициалы ставятся перед фамилией. Сведения об авторах с указанием имени, отчества, почтового домашнего адреса, места работы и телефонов (каждого из соавторов), а также адреса электронной почты, по которому будет выслана корректура, помещаются дополнительно на отдельной странице после текста статьи и фигур.

3. Статья должна быть представлена в электронном виде (Word – шрифт № 14 Times New Roman), формулы должны быть отделены от текста большим интервалом и напечатаны более свободно, чем основной текст.

4. “Шапка” статьи и ее перевод в конце статьи должны быть оформлены по единому стандарту. Вся информация об авторах размещается в “шапке” статьи.

а) Ссылки на места работы латинскими буквами: <sup>a</sup>, <sup>b</sup>, <sup>c</sup> и т.д.;

б) Ссылки на электронные адреса: \*, \*\* и т.д.

Образец оформления шапки приведен ниже:

*УДК 531.36*

### О СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ СПУТНИКА ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ УПРУГИХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

© 2018 г. А. Б. Иванов<sup>a,\*</sup>, В. Г. Петров<sup>b,\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Московский физико-технический институт*

<sup>b</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

\* *e-mail: ivanov@mail.ru*

\*\**e-mail: petrov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 14.07.2016 г.

После доработки 20.10.2016 г.

Принята к публикации 25.12.2016 г.

Для изучения влияния внутренних сил на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле используется модель М.А. Лаврентьева (спутник моделируется твердой оболочкой с шаровым демпфером) в предположении, что при относительных перемещениях демпфера возникают как диссипативные, так и упругие внутренние силы. В рамках этой модели для динамически симметричного спутника на круговой орбите определены все стационарные вращения и исследована их устойчивость в зависимости от значений коэффициентов демпфирования и жесткости.

*Ключевые слова:* стационарные вращения, спутник, центр масс, устойчивость

*DOI:*

5. Все материалы статьи – текст, подстрочные примечания, литература печатаются через два интервала. Там, где впервые в тексте встречается ссылка на рисунок, необходимо написать на полях рукописи ее номер (рис. 1, рис. 2 и т.д.). Нумерация рисунков последовательная цифровая, независимо от их количества в тексте. На поля рукописи выносятся также ссылки на таблицы. В заголовках таблиц следует пользоваться обозначениями. Таблицы и список цитируемой литературы следует печатать на отдельных от текста страницах. В левом верхнем углу первой страницы необходимо указать индекс УДК.

Для редакции отдельно от статьи прилагаются: фамилии авторов и название статьи на английском языке, список принятых обозначений.

При пересылке статьи в редакцию обычной почтой не использовать ценную почту и уведомления.

6. Необходимо соблюдать строгое различие в начертании строчных (малых) и прописных (больших) латинских букв: например, *V* и *v*, *S* и *s*, *O* и *o*, *U* и *u*, *K* и *k*, *P* и *p* и т.п., а также букв, похожих одна на другую: например, *g* и *q*, *l* и *e*, *u* и *n* и др. Латинскую букву *I* следует писать как римскую единицу *I*, в отличие от *J* – буква “жи”. Следует делать различие между *O* и *o* (буквами) и 0 (нулем). Индексы и степени должны быть написаны строго выше символов, к которым они относятся; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а в нижних индексах – единицу от запятой.

Для математических обозначений рекомендуется употреблять наиболее простые символы и индексы. Не следует применять индексы из заглавных букв и букв русского алфавита. Для критических значений рекомендуется в качестве индекса звездочка внизу ( $a^*$ ), для индексов вверху – градус ( $a^\circ$ ) и т.п.

7. При нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой, первая цифра – раздел, вторая цифра после точки – номер формулы в этом разделе ((1.1), (1.2) и т.д.). Номер формулы ставить с правой стороны в конце формулы, а для группы формул – в средней части.

8. Литература приводится по порядку цитирования в конце статьи с указанием фамилии и инициалов автора, полного названия книги (статьи), издательства, названия журнала полностью (год, том, номер, номера страниц) в соответствии с новыми правилами ГОСТ; в тексте должны быть ссылки в квадратных скобках: [1], [2, 3] и т.д.

*Ссылки на иностранные источники даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются, в случае перевода на русский язык, указанием на перевод.*

Ссылки на препринты, депонированные рукописи, диссертации и авторефераты даются в подстрочных примечаниях.

9. В случае переработки статьи датой поступления считается дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией.

10. Автору следует переоформить принятую к печати статью после научного редактирования в кратчайший срок и вернуть первоначальный вариант вместе с переоформленным; к переоформленному варианту приложить диск или переслать электронный вариант статьи на почту редакции. Если статья находится на переоформлении более 30 дней, датой поступления считается дата получения редакцией переоформленного варианта.

11. Редколлегия не сообщает мотивов отказа в публикации работы и оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр.

### Технические требования к изготовлению иллюстративных материалов.

1. Иллюстрационный материал прилагается *на отдельных страницах*. Графики должны быть пригодными для прямого воспроизведения; графики выполняются с обязательным нанесением квадратной сетки (не более трех-четырех квадратов по горизонтали и вертикали). Размер графиков по ширине рекомендуется не более 15–17 см. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках.

2. Иллюстрации должны иметь размеры, соответствующие их информативности, и иметь ширину, равную полосе набора,  $2/3$ ,  $1/2$ ,  $1/3$  полосы набора.

3. В случае изменения размера иллюстрации на процессе внесения редакционной правки, текст уменьшается пропорционально всему изображению.

4. Толщина рамки, шкал графиков и засечек – 0.5 pt; толщина сетки – 0.25 pt; длина засечек – 1.2 мм, промежуточные – 0.8 мм. Засечки по возможности должны быть направлены внутрь графиков.

5. Толщина основных линий графиков – 1 pt (в случае высокой информационной загрузки иллюстрации допускается уменьшение толщины основных линий до 0.5 pt).

6. Масштабные линейки (по возможности) наносятся в нижнем правом углу изображения справа, толщина линии масштабной линейки 0.5 pt.

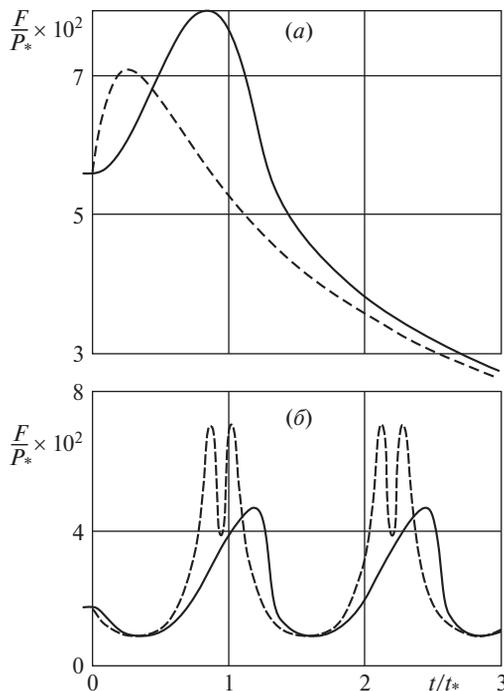
7. Если иллюстрация состоит из нескольких изображений (графиков), то каждое из этих изображений (графиков) обозначается буквами кириллического алфавита, заключенными в скобки – (а), (б), и т.д., шрифтом 10 pt, по центру каждого изображения (графика).

8. Символы греческого алфавита в иллюстрациях должны быть набраны прямым шрифтом Symbol.

9. Авторские рисунки, предоставленные в цвете, изготавливаются цветными (в цветовой модели RGB), если это имеет смысловое (цвет одиночного графика всегда черный).

10. Точка не ставится после размерностей (с – секунда, г – грамм, мин – минута, сут – сутки, град – градус) и некоторых числительных (млн – миллион, млрд – миллиард, трлн – триллион).

Пример оформления рисунка приведен ниже.



11. К статье должны прилагаться файлы с рисунками в одном из форматах: eps, tiff, jpg, bmp, ppt, png.

## Правила оформления библиографических ссылок

### I. Книга

*Сагомонян А.Я.* (1974) Проникание, Изд-во МГУ, Москва.

*Whittaker E.T.* (1927) *Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press, Cambridge = Уиттекер Е.Т. (1937) Аналитическая динамика, ОНТИ, Москва.

### II. Журнал

*Вильке В.Г.* (2002) Условия качения колеса с армированной шиной без проскальзывания, Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика. Вып. 5, 38.

*Stewartson K.* (1968) On the flow near the trailing edge of a plate, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 306 (1486), 275.

*Rohde S.M.* (1972) The optimum slider bearing in terms of friction, J. Lubr. Technol., 94(3), 275 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки, 94 (3), 82.

### III. Препринт

*Чашечкин Ю.Д., Байдулов В.Г.* (2017) Исследование тонкой структуры периодических течений в неоднородных жидкостях, Препринт № 1155, ИПМ им. А.Ю. Ишлинского, Москва.

### IV. Диссертация, автореферат

*Чиж Г.К.* (1972) Диссертация на соискание ученой степени канд. хим. наук, Химико-технологический институт, Днепропетровск.

### Примечания

1. Если авторов более четырех, необходимо давать первые три фамилии и др. (*Иванов Р.И., Семенов Г.П., Терехов П.И.* и др.).

2. Если составителей, редакторов, переводчиков три и более, то оставляют только первую фамилию и др. (Земля / Под ред. Иванова Р.И. и др.).

3. Рус. перев.— эти слова заменяются знаком = (равно).