

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 87, вып. 3



МОСКВА 2023

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 87. Iss. 3

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,
Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udwalia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko,
A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov,
S.V. Nesterov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian,
I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

May–June

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики <i>А. Г. Петров</i>	343
О критических условиях теплообмена при течении жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры в кольцевом канале <i>В. Н. Киреев, А. А. Мухутдинова, С. Ф. Урманчеев</i>	369
Волновое движение в вязкой однородной жидкости с поверхностным электрическим зарядом <i>А. А. Очиров, Ю. Д. Чашечкин</i>	379
О некоторых закономерностях реализации электростатической неустойчивости заряженной поверхности жидкости в бассейне конечных размеров <i>А. И. Григорьев, С. О. Ширяева, В. А. Коромыслов</i>	392
Необходимые условия развития невязких неустойчивостей в колебательно-возбужденном диссоциирующем газе <i>Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов</i>	409
Моделирование динамики всплывающего пузырька <i>А. Н. Зотова, А. А. Кандауров, Ю. И. Троицкая, Д. А. Сергеев</i>	423
Асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн от импульсного локализованного источника во вращающейся стратифицированной среде <i>В. В. Булатов, И. Ю. Владимиров</i>	432
Прямые и обратные задачи динамики поверхностного волнения, вызванного обтеканием подводного препятствия <i>Д. Ю. Князьков, В. Г. Байдулов, А. С. Савин, А. С. Шамаев</i>	442
Степенные эллиптические тела минимального сопротивления в газовом потоке <i>В. Л. Нгуен</i>	454
Численное исследование массопереноса дисперсных частиц при прохождении ударной волны по моно- и полидисперсной газозвеси <i>Д. А. Губайдуллин, Д. А. Тукмаков</i>	461
Исследование волны термической детонации в смеси капель воды с расплавленным свинцом <i>В. И. Мелихов, О. И. Мелихов, Салех Башар</i>	475
Задача о продольных колебаниях вязкоупругого по модели Максвелла стержня <i>В. И. Корзюк, Я. В. Рудько, В. В. Колячко</i>	489

CONTENTS

High-Accuracy Numerical Schemes for Solving Plane Boundary Problem for a Polyharmonic Equation and Their Application to Problems of Hydrodynamics <i>A. G. Petrov</i>	343
Towards Heat Transfer Critical Conditions for Flow of Fluids with a Nonmonotonic Dependence of Viscosity on the Temperature in Annular Channel <i>V. N. Kireev, A. A. Mukhutdinov, S. F. Urmancheev</i>	369
Wave Motion in a Surface Electric Charged Viscous Homogeneous Liquid <i>A. A. Ochirov, Yu. D. Chashechkin</i>	379
On Some Regularities of Realization of Electrostatic Instability of Charged Surface of Liquid in Basin of Finite Dimensions <i>A. I. Grigor'ev, S. O. Shiryaeva, V. A. Koromyslov</i>	392
Necessary Conditions for Development of Inviscid Instabilities in a Vibrationally Excited Dissociating Gas <i>Yu. N. Grigoryev, I. V. Ershov</i>	409
Simulation of Rising Bubble Dynamics <i>A. N. Zotova, A. A. Kandaurov, Yu. I. Troitskaya, D. A. Sergeev</i>	423
Far Fields Asymptotics of Internal Gravity Waves from a Pulse Localized Source in a Rotating Stratified Medium <i>V. V. Bulatov, I. Yu. Vladimirov</i>	432
Direct and Inverse Problems of Dynamics of Surface Waves Caused by Flow around Underwater Obstacle <i>D. Yu. Knyazkov, V. G. Baydulov, A. S. Savin, A. S. Shamaev</i>	442
Power Elliptic Bodies of Minimum Resistance in the Gas Flow <i>V. L. Nguyen</i>	454
Numerical Investigation of the Mass Transfer of Dispersed Particles during the Passage of a Shockwave in a Mono and Polydisperse Gas Suspension <i>D. A. Gubaidullin, D. A. Tukmakov</i>	461
Investigation of a Thermal Detonation Wave in a Mixture of Water Drops with Molted Lead <i>V. I. Melikhov, O. I. Melikhov, Saleh Bashar</i>	475
Problem of Longitudinal Vibrations of a Viscoelastic Rod of Maxwell Type <i>V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko, V. V. Kolyachko</i>	489

УДК 532.5

**ВЫСОКОТОЧНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ГИДРОДИНАМИКИ**© 2023 г. А. Г. Петров^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлунского РАН, Москва, Россия

*e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 14.12.2022 г.

После доработки 17.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Рассматриваются краевые задачи для гармонического, бигармонического уравнений, а также общего полигармонического уравнения для многосвязных областей на плоскости. Задачи сводятся к решению линейных интегральных уравнений на граничных контурах, которые предполагаются гладкими. Представлен алгоритм вывода аппроксимации интегральных уравнений линейной системой с учетом логарифмических особенностей ядер интегральных операторов, через которые выражаются интегральные уравнения. В алгоритме используется периодичность функций, заданных на замкнутых граничных контурах. С ростом числа точек сетки погрешность аппроксимации убывает быстрее чем шаг сетки в любой фиксированной степени. Рассматриваются приложения к решению задач гидродинамики, фильтрации и другим задачам теоретической физики.

Ключевые слова: линейные операторы, периодические функции, ряды Фурье, гармоническая и бигармоническая функции, краевые задачи, схема без насыщения

DOI: 10.31857/S0032823523030128, **EDN:** ZUMQQK

1. Введение. Одним из распространенных подходов к постановке краевых задач является сведение к системам интегральных уравнений. Преимущества, как правило, объясняют тем, что возможно добиться численной аппроксимации уравнений лучше всякой аппроксимации степенного порядка с любой наперед заданной степенью. Например, этого добиваются за счет использования квадратур Гаусса. Вокруг этого свойства часто выстроены такие алгоритмы, как метод граничных интегральных уравнений (также известный как метод граничных элементов) и метод спектральных элементов (см. [1, 2], также обзор современных работ приведен в [3]). В типичном случае для популярного метода спектральных элементов само уравнение выражается в терминах дифференциального оператора. Интегрирование же вводится уже в процессе построения численного алгоритма его решения. Для этого дифференциальный оператор из исходного уравнения следует рассмотреть как оператор над Гильбертовым пространством со скалярным произведением, имеющим интегральный вид. Тогда сведение к системе линейных уравнений может выполняться, например, по методу Галеркина на основе базисных функций, выражаемых в терминах многочленов Чебышева (точность аппроксимации при этом достигается за счет использования соответствующих квадратур). Для метода граничных интегральных уравнений более характерен иной подход. В этом случае к интегральному виду обычно приводится само исходное уравнение. Например, уравнение Лапласа можно переформулировать в интегральном виде с

использованием операторов простого и двойного слоев. В плоском случае это интегралы по одномерной границе (что позволяет рассматривать функции на границе как периодические). Их аппроксимация однако затруднена тем, что функции ядра могут иметь особенности. По этой причине основной задачей для метода граничных интегральных уравнений является развитие методов построения квадратурных формул для интегральных операторов с ядром. Для построения численных схем решения краевых задач в областях, ограниченных гладкими замкнутыми контурами, в работе учитываются периодичность и аналитичность функций, определенных на этих контурах.

Предлагаемое исследование имеет следующую структуру.

В разд. 2 формулируется основная *Теорема*, которая представляет собой конструктивный алгоритм построения квадратурной формулы линейного интегрального оператора, действующего на периодическую функцию. Для квадратурной формулы доказывается экспоненциальная оценка погрешности.

В разд. 3 приведены три квадратурные формулы для линейных интегральных операторов гармонического и бигармонического уравнений.

В разд. 4 формулируется теорема 2 о квадратурной формуле линейного интегрального оператора системы Векуа для произвольного полигармонического уравнения.

В разд. 5 выводится численная схема с экспоненциальной сходимостью решения краевых задач для уравнения Лапласа.

В разд. 6 выводится численная схема с экспоненциальной сходимостью решения краевых задач для бигармонического уравнения.

В разд. 7 выводится численная схема с экспоненциальной сходимостью решения краевых задач для полигармонического уравнения.

В разд. 8 и 9 приведены численные схемы расчета течения вязкой жидкости в приближении Стокса в многосвязной области. Сходимость метода иллюстрируется на примерах.

2. Основная Теорема. Граничные интегральные уравнения выражаются через линейные операторы вида

$$\Phi(z) = L(F(z)) = \int_0^1 H(z' - z)F(z')dz' \quad (2.1)$$

с ядром, являющимся функцией единичного периода, представимой рядом Фурье

$$H(z) = \frac{h_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n \cos nx + r_n \sin nx); \quad x = 2\pi z \quad (2.2)$$

Коэффициенты ряда Фурье определяются по известным формулам

$$h_n = 2 \int_0^1 H(z) \cos 2\pi n z dz, \quad r_n = 2 \int_0^1 H(z) \sin 2\pi n z dz \quad (2.3)$$

Линейные операторы действуют на функции $F(z)$ единичного периода, и в результате действия получается функция $\Phi(z)$ единичного периода.

Назовем частичной суммой ряда Фурье функции $H(z)$ выражение

$$H_N(z) = \frac{h_0}{2} + \frac{h_M}{2} \cos Mx + \sum_{n=1}^{M-1} (h_n \cos nx + r_n \sin nx) \quad (2.4)$$

$$M = N/2, \quad x = 2\pi z$$

В частичную сумму входят члены ряда Фурье с коэффициентами $h_n, r_n, n = 1, 2, \dots, N/2 - 1$, а коэффициент последнего члена h_M делится на 2.

Формула вычисления интеграла для оператора (2.2)

$$\Phi_i = \int_0^1 H(z - z_i)F(z)dz = \sum_{j=1}^N g_{j-i}F_j, \quad \Phi_i = \Phi(z_i), \quad F_i = F(z_i) \quad (2.5)$$

$$z_j = j/N, \quad j = 1, 2, \dots, N = 2M$$

называется квадратурной формулой, значения g_m — коэффициентами квадратурной формулы, а величина ρ_N

$$\rho_N = \max(|\rho_{Ni}|), \quad \rho_{Ni} = \int_0^1 H(z - z_i)F(z)dz - \sum_{j=1}^N g_{j-i}F_j; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

называется погрешностью квадратурной формулы.

Конструированию квадратурных формул для таких операторов посвящена обширная литература [4–11]. Обычно квадратурные формулы имеют степенной порядок точности. Особый интерес вызывают квадратурные формулы, погрешность которых убывает быстрее любой степени шага сетки. В монографии [4] они называются квадратурными формулами без насыщения и имеют погрешность, убывающую экспоненциально с ростом числа точек сетки.

Алгоритм построения таких формул достаточно сложен [11]. Пользуясь же периодичностью можно получить простую общую формулу для коэффициентов квадратурной формулы g_m .

Предлагаемый алгоритм с экспоненциально малой погрешностью сформулирован в теореме 1, вытекающей из результатов [12, 13].

Теорема 1. Для периодического ядра H (2.2) коэффициенты квадратурной формулы (2.5) выражаются через частичные суммы (2.4) его ряда Фурье (2.2)

$$g_m = \frac{1}{N} H_N(z_m) =$$

$$= \frac{1}{N} \left[\frac{h_0}{2} + \frac{h_M}{2} (-1)^m + \sum_{n=1}^{M-1} (h_n \cos(2\pi nm/N) + r_n \sin(2\pi nm/N)) \right] \quad (2.7)$$

Тогда квадратурная формула (2.5) с коэффициентами g_{j-i} обладает следующими свойствами.

1. В дискретных точках $x_i = 2\pi z_i = 2\pi i/N$; $i = 1, 2, \dots, N$ она определяет точные значения оператора (2.1), действующего на функции

$$F(z) = 1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos(M-1)x, \cos Mx$$

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin(M-1)x; \quad x = 2\pi z, \quad M = N/2 \quad (2.8)$$

2. Если функция $F(z)$ и ядро $H(z)$ периодичны $F(z+1) = F(z)$, $H(z+1) = H(z)$, а интеграл по периоду

$$\int_0^1 H(z - z_i)F(z)dz \leq h \quad \text{и сумма} \quad \sum_{j=1}^N |g_{j-i}| = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |H_N(z_j - z_i)| \leq \sigma \quad (2.8a)$$

ограничены постоянными h и σ , независимыми от N , и, кроме того, $F(z)$ — аналитическая функция, то погрешность квадратурной формулы (2.7) экспоненциально убывает с ростом числа точек сетки N , а именно имеет место оценка

$$\rho_N = \int_0^1 H(z - z_i)F(z)dz - \sum_{j=1}^N g_{j-i}F_j, \quad |\rho_N| < C e^{-sN}, \quad (2.9)$$

где постоянные C и s зависят от функций $H(z)$ и $F(z)$.

Для доказательства свойства 1 теоремы 1 последовательно проверяется точность значений оператора (2.1), действующего на каждую отдельную функцию системы (2.8) (доказательство в приложении).

Экспоненциальная оценка (2.9) (свойство 2) доказывается следующим образом.

Представим функцию суммой частичной суммы ряда Фурье и ее остаточного члена

$$F(z) = F_N(z) + R_N(z)$$

$$F_N(z) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M-1} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) + A_M \cos Mx \quad (2.10)$$

$$R_N(z) = \sum_{n=M+1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) + B_M \sin Mx; \quad x = 2\pi z$$

С помощью оценок коэффициентов Фурье аналитической функции, имеющей единичный период (см. [14], стр. 89)

$$|A_n| \leq C\theta^n, \quad |B_n| \leq C\theta^n; \quad 0 < \theta < 1 \quad (2.11)$$

оценим остаточный член

$$|R_N| < C \left(\theta^M + \sum_{n=M+1}^{\infty} 2\theta^n \right) = C \frac{1+\theta}{1-\theta} \theta^M; \quad 0 < \theta < 1 \quad (2.12)$$

С помощью (2.10) разбиваем погрешность (2.6) на два слагаемых $\rho_{Ni} = \rho_a + \rho_b$

$$\rho_a = \int_0^1 H(z' - z_i) F_N(z') dz' - \sum_{j=1}^N g_{j-i} F_N(z_j)$$

$$\rho_b = \int_0^1 H(z' - z_i) R_N(z') dz' - \sum_{j=1}^N g_{j-i} R_N(z_j) \quad (2.13)$$

Функция $F_N(z)$ является линейной комбинацией функций (2.8) и в силу теоремы 1 квадратурная формула для $F_N(z)$ точна и имеет нулевую погрешность $\rho_a = 0$. Дадим оценку второго слагаемого ρ_b . В силу неравенства (2.12) и условий (2.8а) имеем

$$|\rho_N| = |\rho_b| \leq \left| \int_0^1 H(z' - z_i) R_N(z') dz' \right| + \left| \sum_{j=1}^N g_{j-i} R_N(z_j) \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |H(z' - z_i)| |R_N(z')| dz' + \sum_{j=1}^N |g_{j-i}| |R_N(z_j)| \leq (h + \sigma) C \frac{1+\theta}{1-\theta} \theta^M \quad (2.14)$$

После замен $(h + \sigma) C \frac{1+\theta}{1-\theta} = C_1$, $\theta = e^{-s}$ получаем требуемую оценку.

С помощью теоремы 1 строятся квадратурные формулы с экспоненциальной сходимостью для интегральных операторов с логарифмическими особенностями, а также для операторов дифференцирования и интегрирования. Далее, применяя метод граничных элементов, строятся квадратурные формулы с экспоненциальной сходимостью для линейных операторов граничных интегральных уравнений.

3. Квадратурные формулы для линейных операторов. Приведем с помощью теоремы 1 вывод основных квадратурных формул для метода граничных элементов.

Пример 1. Квадратурная формула для ядра $H = 1$. Находим ряд Фурье $H = 1$ и частичную сумму $F_N(z) = 1$ и по формуле (2.7) получим $g_m = 1/N$. Квадратурная формула примет простейший вид

$$\int_0^1 F(z) dz = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(z_i) \quad (3.1)$$

В монографии [9] доказана экспоненциальная оценка убывания погрешности квадратурной формулы (3.1) для аналитической функции $F(z) = F(z+1)$. Еще раньше в монографии Крылова [8] 1967 г. доказана абсолютная точность квадратурной формулы (3.1) для тригонометрических полиномов (2.8).

Пример 2. Квадратурная формула для ядра с логарифмической особенностью $H = \ln |\sin \pi z|$. Логарифмическая особенность имеет место в функции Грина для уравнения Лапласа. Ядро $H(z) = \ln |\sin \pi z|$ представляется следующим рядом Фурье

$$H(z) = - \left(\ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kx \right); \quad x = 2\pi z \quad (3.2)$$

Составляем частичную сумму (2.4) и по формуле (2.7) теоремы 1 находим коэффициенты g_m

$$H_N(z) = -\ln 2 - \frac{1}{2M} \cos Mx - \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} \cos kx; \quad M = N/2 \quad (3.3)$$

$$\alpha(m) = H_N(z_m), \quad g_m = \frac{1}{N} \alpha(m)$$

Она дает точные значения интеграла для системы функций (2.8) и выведена в [15] и затем в [9].

Пример 3. Квадратурная формула для ядра $H = \frac{1}{2} \sin^2(\pi z) \ln(2 \sin \pi z)^2$. Она имеет место в функции Грина для бигармонического уравнения [16] и выведена впервые в [13]. Более просто она выводится с помощью теоремы 1 следующим образом.

Ядро $H = \frac{1}{2} \sin^2(\pi z) \ln(2 \sin \pi z)^2$ имеет ряд Фурье

$$H(z) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2k(k^2-1)}; \quad x = 2\pi z \quad (3.4)$$

Составляем частичную сумму (2.4) и по формуле (2.7) теоремы 1 находим коэффициенты g_m

$$H_M(z) = \frac{1}{4} + \frac{\cos(Mx)}{4M(M^2-1)} - \frac{3}{8} \cos x + \sum_{k=2}^{M-1} \frac{\cos(kx)}{2k(k^2-1)} \quad (3.5)$$

$$\alpha_1(m) = H_M(z_m), \quad g_m = \frac{1}{N} \alpha_1(m); \quad M = N/2$$

Квадратурная формула

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \sin^2(\pi(z-z_i)) \ln(2 \sin \pi(z-z_i))^2 F(z) dz = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_1(j-i) F_j \quad (3.6)$$

в точках $z_i, i = 1, \dots, N$ дает точные значения интеграла для системы функций (2.8) и по теореме 1 имеет экспоненциально малую погрешность (2.9).

Выведенные формулы (3.3) и (3.5) для коэффициентов $\alpha(m)$ и $\alpha_1(m)$ используются при аппроксимации линейных интегральных уравнений для решения краевых задач гармонического и бигармонического уравнений.

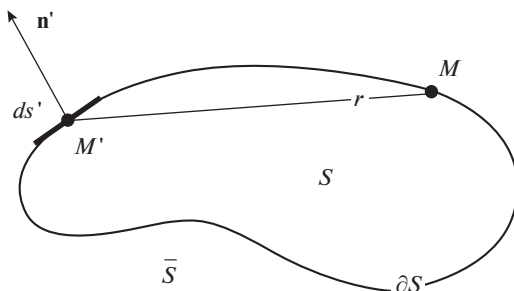


Рис. 1. Граничный контур и направление нормали.

Полезны также квадратурные формулы для операторов дифференцирования и интегрирования. Их можно также получить с помощью теоремы 1, пользуясь рядом Фурье периодической дельта-функции

$$\delta(\sin(2\pi z)) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi k z)$$

и рядов Фурье для ее производной и интеграла.

Представим производную в виде линейного оператора, разложим ядро в ряд Фурье и через его коэффициенты выпишем коэффициенты квадратурной формулы для оператора производной

$$\frac{dF(z)}{dz} = \int_0^1 H(z' - z) F(z') dz', \quad H(z) = -\frac{d}{dz} \delta(\sin(2\pi z)), \quad g_m = \frac{4\pi}{N} \sum_{k=1}^{M-1} k \sin(2\pi k z_m)$$

Аналогично находятся коэффициенты квадратурной формулы для интеграла. Находим

$$H(z) = \int \delta(\sin(2\pi z)) dz, \quad g_m = \frac{1}{\pi N} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} \sin(2\pi k z_m)$$

Квадратурная формула для первообразной, интеграл по периоду которой равен нулю имеет вид $\int F(z) dz = \int_0^1 H(z' - z) F(z') dz' = \sum_{j=1}^N g_{j-i} F_j$.

4. Построение схем для решения полигармонического уравнения.

4.1. Система интегральных уравнений. Систему интегральных уравнений для функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей в области S произвольному полигармоническому уравнению $\Delta^m \Phi = 0$, вывел И.Н. Векуа [14]. Им введены функции Грина $G^{(k)}(r)$, зависящие от расстояния r между двумя точками $M = M(x, y)$ и $M' = M(x', y')$ (рис. 1).

$$r^2(M, M') = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \quad (4.1)$$

Начальная функция Грина определяется формулой $G^{(0)} = G = \ln(r(M, M'))$, а остальные функции Грина $G^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ находятся последовательно из рекуррентных уравнений

$$\Delta G^{(k)} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG^{(k)}}{dr} \right) = G^{(k-1)}(r) \quad (4.2)$$

Откуда получаем

$$G^{(k)} = \frac{r^{2k}}{4^k k^2} \left(\ln r - \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right) \quad (4.3)$$

Приведем выражения для первых трех функций Грина G и $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$

$$\begin{aligned} G(M, M') &= \ln(r(M, M')) \\ G^{(1)}(M, M') &= \frac{r^2(M, M')}{4} (\ln(r(M, M')) - 1) \\ G^{(2)}(M, M') &= \frac{r^4}{64} \left(\ln(r(M, M')) - \frac{3}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Граничный контур области ∂S определяется параметрическим уравнением $x(s)$, $y(s)$, где s — натуральный параметр контура (длина дуги) (рис. 1).

На границе определяются функции Грина $G^{(k)}(s, s') = G^{(k)}(M(s), M(s'))$ и ее нормальная производная

$$G_n^{(k)}(s, s') = \frac{\partial G^{(k)}}{\partial n'} = \frac{\partial G^{(k)}}{\partial x'} n'_x + \frac{\partial G^{(k)}}{\partial y'} n'_y = \frac{\partial G^{(k)}}{\partial x'} \frac{dy'}{ds'} - \frac{\partial G^{(k)}}{\partial y'} \frac{dx'}{ds'} \quad (4.5)$$

как функции двух координат s и s' .

Система граничных уравнений Векуа для полигармонического уравнения имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (A^{i-1} V^{i-1} + B^{i-1} \Phi^{i-1}) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{m-1} (A^{i-2} V^{i-1} + B^{i-2} \Phi^{i-1}) &= 0 \\ &\dots \\ AV^{(m-1)} + B\Phi^{(m-1)} &= 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $A^{(k)}$, $B^{(k)}$ — линейные операторы

$$\begin{aligned} A^{(k)} V^{(k)}(s) &= - \int_0^l G^{(k)}(s, s') V^{(k)}(s') ds' \\ B^{(k)} \Phi^{(k)}(s) &= \int_0^l \frac{\partial G^{(k)}}{\partial n'}(s, s') \Phi^{(k)}(s') ds'; \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \\ \Phi^{(k)}(M') &= \Delta^{(k)} \Phi(M'), \quad V^{(k)}(M') = \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial n'}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

действующие на функцию $\Phi^{(k)}(s')$ и ее нормальную производную $V^{(k)}(s')$, определенные на границе.

4.2. Метод построения схемы с экспоненциальной сходимостью для решения полигармонического уравнения. Аргументом подынтегральных функций операторов $A^{(k)}$ и $B^{(k)}$ является длина дуги s , функции имеют период равный длине дуги l граничного контура (рис. 1).

Координату точки $M(x, y)$ на контуре удобно задавать параметрическими уравнениями $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции параметра z с единичным периодом. Параметр z и координата s связаны дифференциальным соотношением

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = lf(z), \quad \int_0^1 f(z) dz = 1, \quad (4.8)$$

где $f(z)$ — плотность точек на контуре.

Здесь следует обратить внимание на то, что благодаря произвольности функции $f(z)$ сетка на контуре по длине дуги произвольна, а по параметру z — равномерна. По параметру z шаг сетки всегда равен $1/N$, а по параметру s шаг не равномерен и равен $h_i = lf'(z_i)/N$. Точки сетки рекомендуется сгущать в окрестности наибольшей кривизны контура или в окрестности минимального расстояния двух соседних граничных контуров.

Заменой $ds = lf(z)dz$ интегральные операторы (4.7) приводятся к виду

$$A^{(k)}V^{(k)}(z) = -\int_0^1 G^{(k)}(z, z')V^{(k)}(z')lf'(z')dz', \quad (4.9)$$

$$B^{(k)}\Phi^{(k)}(z) = \int_0^1 G_n^{(k)}(z, z')\Phi^{(k)}(z')dz'$$

$$G_n^{(k)}(z, z') = \frac{\partial G^{(k)}}{\partial x'} \frac{dy}{dz'} - \frac{\partial G^{(k)}}{\partial y'} \frac{dx}{dz'} \quad (4.10)$$

Для вывода квадратурных формул операторов (4.9) следует выделить особенность у ядра интегрального оператора и воспользоваться теоремой 2.

Теорема 2. Пусть функция $G(z_i, z)$ имеет в точке $z = z_i$ периодическую особенность и представляется в виде

$$G^{(k)}(z_i, z) = K_i H(z - z_i) + g(z_i, z); \quad z_i = \frac{i}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.11)$$

где функция $H(z)$ представляется рядом Фурье (2.2) с частичной суммой $H_N(z)$ (2.4), функция $g(z_i, z)$ — бесконечно дифференцируема, имеет единичный период $g(z_i, z + 1) = g(z_i, z)$ и в точке $z = z_i$ разложение

$$g(z_i, z) = g(z_i, z_i) + \mathcal{O}(z - z_i)$$

Тогда

$$\int_0^1 F(z)G^{(k)}(z_i, z)dz = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [K_i \beta(|i - j|) + G_{ij}] F(z_j) + R_N; \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$\beta(m) = -H(z_m) + H_N(z_m); \quad m = 1, 2, \dots, N - 1, \quad \beta(0) = H_N(0) \quad (4.12)$$

$$G_{ij} = G(z_i, z_j); \quad i \neq j, \quad G_{ii} = g(z_i, z_i)$$

Остаточный член R_N убывает быстрее любой фиксированной степени n шага сетки $R_N = o(1/N^n)$.

Доказательство. Применяя теорему 1 к первому и второму слагаемым (4.11) функции $G(z_i, z)$, получаем

$$\int_0^1 F(z) K_i H(z - z_i) dz = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_i H_N z_{i-j} F_j + R_{N1}$$

$$\int_0^1 g(z_i, z) dz = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(z_i, z_j) + R_{N2}$$

Вторая формула является квадратурной формулой (3.1) из примера 1. Остаточные члены обеих формул меньше любой степени шага сетки.

Суммируя эти две квадратурные формулы и подставляя $g(z_i, z_j) = G(z_i, z_j) - K_i H(z_j - z_i)$, $g(z_i, z_i) = G_{ii}^{(k)}$, получим квадратурную формулу (4.12) теоремы 2, что и требовалось доказать.

Ниже более подробно описано применение изложенного метода к построению схем с экспоненциальной сходимостью для решений гармонического и бигармонического уравнений.

5. Схема для решения гармонического уравнения.

5.1. Интегральное граничное уравнение. Рассмотрим функцию $\Phi(x, y)$, гармоническую внутри области S , ограниченной гладким замкнутым контуром ∂S (рис. 1).

Для этого случая система уравнений Векуа (4.6) сводится к одному уравнению

$$AV(s) + B\Phi(s) = 0 \quad (5.1)$$

С помощью параметризации $ds = lf(z)dz$ интегральные операторы A и B приводятся к виду (4.9)

$$AV(z) = - \int_0^1 G(z, z') V(z') lf'(z') dz' \quad (5.2)$$

$$B\Phi(z) = \int_0^1 G_n(z, z') (\Phi(z') - \Phi(z)) dz', \quad G_n(z, z') = \frac{\partial G}{\partial x'} \frac{dy'}{dz'} - \frac{\partial G}{\partial y'} \frac{dx'}{dz'}$$

Такая форма интегрального уравнения (5.1) и интегрального оператора B (5.2) приведена в работе [17].

Во всех внутренних точках области S функция $\Phi(M)$ представляется в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев:

$$2\pi\Phi(M) = \int_{\partial S} \left(-G(M, M') \frac{\partial \Phi}{\partial n'}(M') + \Phi(M') \frac{\partial G(M, M')}{\partial n'} \right) ds'; \quad M' \in \partial S \quad (5.3)$$

Эти же уравнения можно получить с помощью теории потенциалов простого и двойного слоев [18].

Ниже с помощью теоремы 2 получены квадратурные формулы для операторов A и B . Граничное интегральное уравнение (5.1) приводится к линейной системе уравнений.

5.2. Квадратурные формулы для оператора A . Для того, чтобы воспользоваться теоремой 2, необходимо выделить в функции $G(z, z')$ логарифмическую особенность при $z' = z$. С помощью асимптотических соотношений

$$r(z', z) = |s' - s|(1 + \mathcal{O}|s - s|) = lf(z)|z' - z|(1 + \mathcal{O}(z' - z)) =$$

$$= \frac{lf(z)}{\pi} |\sin \pi(z - z')| (1 + \mathcal{O}|\sin \pi(z' - z)|) \quad (5.4)$$

найдем представление функции Грина (4.11) теоремы 2

$$G(z, z') = \ln r(z', z) = \ln \frac{lf(z)}{\pi} + \ln |\sin \pi(z' - z)| + \mathcal{O}|\sin \pi(z' - z)| \quad (5.5)$$

В нем $K_i = 1$, $H(z) = \ln|\sin \pi(z)|$, $G_{ii} = \ln \frac{lf(z_i)}{\pi}$. Пользуясь рядом Фурье для функции $H(z)$ (3.3), с помощью теоремы 2 получим квадратурную формулу с экспоненциальной сходимостью для интегрального оператора (5.2). Ее удобно выразить через матрицу A_{ij} размерности $N \times N$

$$\begin{aligned} AV(z_i) &= \sum_{j=1}^N A_{ij} V_j l f_j; \quad A_{ij} = -\frac{1}{N} (\beta(|i-j|) + G_{ij}) \\ \beta(m) &= -\ln \left| \sin \frac{\pi m}{N} \right| + \alpha(m); \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad \beta(0) = \alpha(0) \\ \alpha(m) &= -\left(\ln 2 + \frac{(-1)^m}{N} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{1}{k} \cos \frac{2\pi k m}{N} \right); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $G_{ij} = G(z_i, z_j)$ при $i \neq j$ и $G_{ii} = \ln \frac{lf_i}{\pi}$, $f_i = f(z_i)$.

Одномерный массив $\alpha(m)$ соответствует формуле (3.3) в примере 2.

5.3. *Квадратурные формулы для оператора В.* Покажем, что функция $G_n(z, z')(\Phi(z') - \Phi(z))$ в интегральном операторе B (5.2) не имеет особенностей при $z' = z$.

Для этого выпишем разложения по степеням $\Delta z = z' - z$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x'} &= \frac{x' - x}{r^2(z', z)} = \frac{\frac{\partial x}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \Delta z^2 + \mathcal{O}(\Delta z^3)}{l^2 f^2 \Delta z^2 + \mathcal{O}(\Delta z^3)} \\ \frac{\partial y}{\partial z'} &= \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Delta z + \mathcal{O}(\Delta z^3) \\ \frac{\partial G}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial z'} &= \frac{\frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z} \Delta z + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \frac{\partial y}{\partial z} \right) \Delta z^2 + \mathcal{O}(\Delta z^3)}{l^2 f^2 \Delta z^2 + \mathcal{O}(\Delta z^3)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Переставляя x и y , находим $\frac{\partial G}{\partial y'} \frac{\partial x'}{\partial z'}$. Подставляя эти выражения в формулу (4.10)

для G_n , получим

$$G_n(z, z') = \frac{1}{2l^2 f^2} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta z), \quad (5.8)$$

что и доказывает существование конечного предела $G_n(z, z)$.

Отсюда при $z' \rightarrow z$ для подынтегральной функции оператора B получим

$$G_n(z, z')(\Phi(z') - \Phi(z)) = \mathcal{O}(z' - z), \quad (5.9)$$

что и требовалось показать. Кроме того, в силу периодичности функций на контуре, подынтегральная функция оператора B имеет единичный период по параметру z . Следовательно, интегральный оператор B можно вычислять по квадратурной формуле (3.1) для периодической функции без особенностей и выразить оператор B через квадратную матрицу B_{ij} размерности $N \times N$

$$B\Phi(z_i) = \sum_{j=1}^N B_{ij} \Phi_j; \quad B_{ij} = \frac{1}{N} G_{nij}, \quad i \neq j, \quad B_{ii} = -\sum_{j=1}^N B_{ij}, \quad (5.10)$$

Таблица 1

N	32	48	64	80	96	112	128
ε	4.9×10^{-4}	1.9×10^{-5}	7.4×10^{-7}	2.9×10^{-8}	1.2×10^{-9}	4.7×10^{-11}	1.9×10^{-12}
ε_1	7.2×10^{-3}	3.5×10^{-3}	2.0×10^{-3}	1.3×10^{-3}	9.2×10^{-4}	6.8×10^{-4}	5.2×10^{-4}

где $G_{nij} = G_n(z_i, z_j)$. Функция $G_n(z_i, z_j)$ определяется с помощью формулы (5.2). Подставляя в нее $G = \frac{1}{2} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]$, получим

$$G_n(z_i, z_j) = \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^2} \frac{dy}{dz_j} - \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^2} \frac{dx}{dz_j}; \quad i \neq j \quad (5.11)$$

$$x_i = x(z_i), \quad y_i = y(z_i), \quad r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

5.3. Проверка сходимости. Проверим сходимость аппроксимации интегрального уравнения (5.1) с помощью искусственного точного решения.

Рассмотрим эллипс $x = a \cos 2\pi z$, $y = b \sin 2\pi z$ и функцию $\Phi = x^2 - y^2$, гармоническую внутри эллипса. Вычисляем ее значения и значения нормальной производной Φ_j , V_j на эллипсе в точках z_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

Составляем аппроксимацию левой части интегрального уравнения (5.1)

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^N (A_{ij} V_j f_j + B_{ij} \Phi_j), \quad (5.12)$$

где V_j, Φ_j, f_j — значения функций на эллипсе в точках z_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

Погрешностью аппроксимации интегрального уравнения является величина $\varepsilon = \max |\varepsilon_i|$, $i = 1, 2, \dots, N$.

В табл. 1 приведены значения ε в зависимости от числа точек сетки N для эллипса $a = 1$, $b = 0.1$. В первой строке эти значения вычислены по предложенной схеме, а во второй строке по схеме второго порядка, предложенной в [19].

Число точек сетки по схеме с экспоненциальной сходимостью растет по арифметической прогрессии, а погрешность — по геометрической. Тогда как в схеме второго порядка погрешность в зависимости от числа точек сетки N убывает гораздо медленнее по степенному закону $\sim N^{-2}$.

Значения функции $\Phi(M)$ во внутренних точках области S определяются интегралом (5.3). Подынтегральная функция особенностей не имеет, и квадратурной формулой с экспоненциальной сходимостью является простейшая формула из примера 1 (3.1)

$$2\pi\Phi(M) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [-G(M, M_j)V(M_j) + \Phi(M_j)G_n(M, M_j)]f_j; \quad M \in S, \quad (5.13)$$

где M_j — точка граничной сетки.

Если точка M имеет координаты $(x, 0)$, то ее точное значение равно x^2 . Введем относительную погрешность $\Delta = (\Phi(M) - x^2)/x^2$. Тогда максимальная погрешность равна

$$\max |\Delta| = 6 \times 10^{-6} \quad \text{при} \quad N = 128; \quad \max |\Delta| = 2 \times 10^{-7} \quad \text{при} \quad N = 160$$

$$\max |\Delta| = 1 \times 10^{-8} \quad \text{при} \quad N = 192; \quad \max |\Delta| = 4 \times 10^{-10} \quad \text{при} \quad N = 224$$

Интегральное уравнение внешней задачи выражается через те же самые операторы, что и для внутренней задачи. Быстрота сходимости численной схемы для внешней задачи демонстрируется в [23] сравнением определенных численно значений с точным решением задачи потенциального обтекания эллипса $x = a \cos 2\pi z$, $y = b \sin 2\pi z$, $z \in (0, 1)$ с большим отношением его полуосей.

Заметим, что предложенная численная схема дает абсолютно точные значения для скорости $V^{(\Gamma)}$ чисто циркуляционного обтекания эллипса для любого числа точек сетки $N \geq 4$ и любых значениях полуосей эллипса a и b . Это тем более удивительно, что точные значения получаются для достаточно сложной дробно иррациональной функции

$$V^{(\Gamma)} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos 2\pi z}}$$

6. Схема с экспоненциальной сходимостью для решения бигармонического уравнения.

6.1. Система интегральных уравнений. Системе граничных интегральных уравнений Векуа (4.6) при $n = 2$ соответствует случай бигармонического уравнения $\Delta^2 \Phi(x, y)$. Эта система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} AV(s) + B\Phi(s) + A^{(1)}V^{(1)}(s) + B^{(1)}\Phi^{(1)}(s) &= 0 \\ AV^{(1)}(s) + B\Phi^{(1)}(s) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Линейные операторы A и B определены в (4.9). Они аппроксимируются матрицами A_{ij} (5.6) и B_{ij} (5.10).

Выпишем операторы $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$, определенные в (4.9)

$$A^{(1)}V^{(1)}(s) = -\int_0^l G^{(1)}(s, s')V^{(1)}(s')ds', \quad B^{(1)}\Phi^{(1)}(s) = \int_0^l \frac{\partial G^{(1)}}{\partial n'}(s, s')\Phi^{(1)}(s')ds' \quad (6.2)$$

$$\Phi^{(1)}(M') = \Delta\Phi(M'), \quad V^{(1)}(M') = \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial n'}$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}(M, M') &= \frac{r^2(M, M')}{4}(\ln(r(M, M')) - 1) \\ G_n^{(1)}(z, z') &= \frac{\partial G^{(1)}}{\partial x'} \frac{\partial y'}{\partial z'} - \frac{\partial G^{(1)}}{\partial y'} \frac{\partial x'}{\partial z'} \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial G^{(1)}}{\partial n'}(s, s')ds' = G_n^{(1)}(z, z')dz'$$

$$r^2(M, M') = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

Второе уравнение системы (6.1) является интегральным уравнением (5.1) для гармонической функции $\Phi^{(1)}$.

Значения функции во внутренних точках области S находятся по формуле аналогичной

$$\begin{aligned} 2\pi\Phi(M) &= \oint_S \left[-G(M, M') \frac{\partial\Phi}{\partial n'}(M') + \Phi(M') \frac{\partial G(M, M')}{\partial n'} - \right. \\ &\quad \left. - G^{(1)}(M, M') \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial n'}(M') + \Phi^{(1)}(M') \frac{\partial G^{(1)}(M, M')}{\partial n'} \right] ds'; \quad M \in S \end{aligned} \quad (6.4)$$

6.2. *Квадратурная формула для оператора $A^{(1)}$.* Интегральный оператор (6.2) с помощью параметризации $ds = lf(z)dz$ можно представить в виде

$$A^{(1)}V^{(1)} = -\int_0^1 G^{(1)}(z, z')V^{(1)}(z')lf(z')dz', \quad G^{(1)} = \frac{l^2 f^2(z)}{4\pi^2} H(z' - z) + g(z, z'), \quad (6.5)$$

где выделенная особенность $H(z' - z)$ рассмотрена в примере 3 (3.4)

$$H(z) = \frac{1}{2} \sin^2(\pi z) \ln(2 \sin \pi z)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3 \cos x}{8} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2k(k^2 - 1)}; \quad x = 2\pi z \quad (6.6)$$

Функция $g(z, z')$ — аналитическая функция единичного периода по обоим аргументам и удовлетворяет условию $g(z, z) = 0$.

По теореме 2 для интегрального оператора получаем следующую квадратурную формулу

$$\begin{aligned} A^{(1)}V^{(1)}(z_i) &= \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} V_j^{(1)} lf_j \\ A_{ij}^{(1)} &= -\frac{l^2 f_i^2}{4\pi^2 N} (\beta_1(|i - j|) + G_{ij}^{(1)}) \\ \beta_1(m) &= -H(z_m) + \alpha_1(m); \quad m = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $G_{ij}^{(1)} = G^{(1)}(z_i, z_j)$ при $i \neq j$ и $G_{ii}^{(1)} = 0$.

Одномерный массив значений $\alpha_1(m)$ определяется по коэффициентам ряда Фурье (3.4) с помощью теоремы 1.

$$\begin{aligned} \alpha_1(m) &= \left(\frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4M(M^2 - 1)} - \frac{3 \cos(2\pi m/N)}{8} + \sum_{n=2}^{M-1} \frac{\cos(2\pi nm/N)}{2n(n^2 - 1)} \right) \\ \beta_1(0) &= \alpha_1(0) = \frac{1}{4 - 4M^2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.3. *Квадратурная формула для оператора B_1 .* Преобразуем ядро оператора B_1

$$G_n^{(1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dz'}(x' - x) - \frac{dx}{dz'}(y' - y) \right) \left(\frac{1}{2} \ln((x' - x)^2 + (y' - y)^2) - 1 \right) \quad (6.9)$$

Выделяем логарифмическую особенность

$$G_n^{(1)}(z, z') = K(z)H(z' - z) + g(z, z'); \quad K(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \frac{dx}{dz} - \frac{d^2 x}{dz^2} \frac{dy}{dz} \right) \quad (6.10)$$

По теореме 2 находим матрицу, аппроксимирующую оператор $B^{(1)}$

$$B_{ij}^{(1)} = K(z_i) \beta_1(|i - j|) + G_n^{(1)}(z_i, z_j) \quad (6.11)$$

6.4. *Проверка сходимости.* Сходимость численной схемы для бигармонического уравнения можно проверить на искусственном точном решении также как и для гармонического уравнения в разд. 5. Выбирается бигармоническая функция $\Phi = x^3 - y^3$ и для нее находятся значения в точках граничной сетки значения функции Φ_i , ее нор-

Таблица 2

N	32	48	64	80	96	112
ϵ	7×10^{-4}	2.8×10^{-5}	1.1×10^{-6}	5.6×10^{-8}	1.3×10^{-8}	6×10^{-9}
δ	1.4×10^{-2}	5.5×10^{-4}	2.2×10^{-5}	8.7×10^{-7}	3.5×10^{-8}	1.4×10^{-9}
ϵ_1	9.6×10^{-3}	4.7×10^{-3}	2.7×10^{-3}	1.8×10^{-3}	1.3×10^{-3}	9.3×10^{-4}
δ_1	2.6×10^{-2}	1.2×10^{-2}	6.9×10^{-3}	4.4×10^{-3}	3.1×10^{-3}	2.2×10^{-3}

мальной производной V_i функций $\Phi_i^{(1)}$ и $V_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Погрешности численной схемы для системы уравнений (6.1) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\epsilon_i &= \sum_{j=1}^N \left(A_{ij} V_j l f_j + B_{ij} \Phi_i + A_{ij}^{(1)} V_j^{(1)} l f_j + B_{ij}^{(1)} \Phi_j^{(1)} \right) \\ \delta_i &= \sum_{j=1}^N \left(A_{ij} V_j^{(1)} l f_j + B_{ij} \Phi_i^{(1)} \right)\end{aligned}\quad (6.12)$$

В табл. 2 приведены значения максимальной погрешности $\epsilon = \max |\epsilon_i|$, $\delta = \max |\delta_i|$ в зависимости от числа точек сетки N для эллипса $a = 1$, $b = 0.1$.

В первых двух строках приведены погрешности схемы с экспоненциальной сходимостью ϵ и δ , а в следующих двух строках погрешности схемы второго порядка [22], обозначенные ϵ_1 и δ_1 . Как видно из таблицы, погрешность квадратурных формул при 112 точках сетки на пять порядков меньше погрешности схемы второго порядка, которая обычно используется для решения краевых задач бигармонического уравнения.

Все приведенные таблицы показывают убывание погрешности по геометрической прогрессии при увеличении числа узлов сетки по арифметической прогрессии так, как и должно быть в схеме с экспоненциальной сходимостью.

Сходимость вычислений бигармонической функции $x^3 - y^3$ во внутренних точках проверяем так же, как и сходимость для гармонической функции. Если точка M имеет координаты $(x, 0)$, то ее точное значение равно x^3 . Численные значения находим с помощью аппроксимации интегральной формулы (6.4). Введем относительную погрешность $\delta\Phi = (\Phi(M) - x^3)/x^3$. Максимальная погрешность равна $\max |\delta\Phi| = 8 \times 10^{-6}$ при $N = 128$; $\max |\delta\Phi| = 3.0 \times 10^{-7}$ при $N = 160$; $\max |\delta\Phi| = 1.5 \times 10^{-8}$ при $N = 192$; $\max |\delta\Phi| = 5.5 \times 10^{-10}$ при $N = 224$.

Как видно из приведенных результатов вычислений, погрешности убывают также по геометрической прогрессии.

7. Схема с экспоненциальной сходимостью для решения полигармонического уравнения. Аналогично можно получить квадратурные формулы с экспоненциальной сходимостью для операторов $A^{(k)}$ и $B^{(k)}$ для любого натурального $k = 1, 2, 3, \dots$ в системе уравнений Векуа Φ (4.6). Для этого достаточно заметить, что ядро $G^{(k)}$ (2.2) оператора $A^{(k)}$ с точностью до множителя K имеет периодическую особенность

$$H_k(z) = \frac{1}{2} (\sin(\pi z))^{2k} \ln(2 \sin \pi z)^2$$

Ядро представляется в виде $G^{(k)}(z_i, z) = K_i H_k(z_i - z) + g(z_i, z)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где функция $g(z_i, z)$ аналитична и имеет единичный период по обоим аргументам.

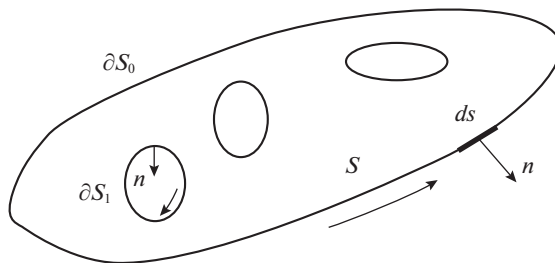


Рис. 2. Граничные контура многосвязной области и направление нормалей.

Периодическую особенность можно разложить в ряд Фурье с помощью следующих формул

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \ln(2 \sin \pi z)^2 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}; \quad x = 2\pi z \\ \sin^2(\pi z) &= -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2}, \quad \sin^4(\pi z) = \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{8} \\ \sin^6(\pi z) &= -\frac{1}{32} \cos 3x + \frac{3}{16} \cos 2x - \frac{15}{32} \cos x + \frac{5}{16}, \dots \\ 2 \cos mx \cos nx &= \cos(m+n)x + \cos(m-n)x\end{aligned}$$

Приведем ряды для H_k , $k = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}H_0 &= -\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kx\right); \quad x = 2\pi z \\ H_1 &= \frac{1}{4} - \frac{3 \cos x}{8} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2k(k^2-1)} \\ H_2 &= \frac{7}{32} - \frac{\cos(x)}{3} + \frac{25 \cos(2x)}{192} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3 \cos(kx)}{2k(k^2-4)(k^2-1)} \\ H_3 &= \frac{37}{192} - \frac{79 \cos(x)}{256} + \frac{97 \cos(2x)}{640} - \frac{49 \cos(3x)}{1280} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{45 \cos(kx)}{4k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)}\end{aligned}$$

Для H_0 и H_1 ряды Фурье приведены в (3.2) и (3.4).

С помощью теоремы 2 можно выписать квадратурные формулы с экспоненциальной сходимостью для операторов $A^{(k)}V^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Особенности ядер $G_n^{(k)}$ (4.10) операторов $B^{(k)}$ отличаются от особенностей ядер $G^{(k)}$ операторов $A^{(k)}$ только множителем и для них квадратурные формулы находятся аналогично.

8. Численная схема для решения задач гидродинамики. Рассмотрим решение плоской задачи течения вязкой жидкости в приближении Стокса в многосвязной области S , ограниченной снаружи контуром ∂S_0 , а изнутри контурами ∂S_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 2).

Краевая задача для функции тока $\Psi(x, y)$ ставится так. В области течения жидкости S функция тока $\Psi(x, y)$ и давление $p(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\mu \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad (x, y) \in S \quad (8.1)$$

Из них следует гармоничность функции давления $\Delta p(x, y) = 0$ и бигармоничность функции тока

$$\Delta^2 \Psi(x, y) = 0$$

На границе области задаются значения функции тока $\Psi(s)$ и ее нормальной производной $\frac{\partial \Psi}{\partial n}(s)$

$$\Psi|_{\partial S} = \psi(s), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n}|_{\partial S} = v(s); \quad (x, y) \in \partial S \quad (8.2)$$

Для многосвязных областей функции $\psi(s)$ на границах ∂S_i , $i = 1, \dots, n$ функции тока $\psi(s)$ определены с точностью до постоянных значений c_i , $i = 1, \dots, n$. Для определения этих постоянных значений требуется еще выполнение условий однозначности давления в области S . Из них следует выполнение следующих условий на каждом контуре ∂S_i , $i = 0, 1, \dots, n$: $\int_{\partial S_i} \frac{\partial p}{\partial s} ds = 0$, где ds — элемент длины.

В силу тождества $\frac{\partial p}{\partial s} = -\mu \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial n}$ условия однозначности давления принимают вид

$$\int_{\partial S_i} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial n} ds = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.3)$$

Задача сводится к решению системы интегральных уравнений (6.1), которая для граничных значений (8.2) функций $\psi(s)$, $v(s)$ и функций $\Psi^1(s)$ и $V^{(1)}(s)$ примет вид

$$\begin{aligned} Av(s) + B\psi(s) + A^{(1)}V^{(1)}(s) + B^{(1)}\Psi^1(s) &= 0 \\ AV^{(1)}(s) + B\Psi^{(1)}(s) &= 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

Из системы уравнений (8.3), (8.4) определяются функции $V^{(1)}(s)$, $\Psi^1(s)$ на границах ∂S_i , $i = 0, 1, \dots, n$ и постоянные c_i на границах ∂S_i , $i = 1, \dots, n$. Значения функции во внутренних точках области S выражаются через контурные граничные интегралы (6.4). Подынтегральные функции на каждом контуре периодичны и не имеют особенностей. Поэтому квадратурные формулы для них имеют вид, аналогичный (5.13) для случая гармонического уравнения в разд. 5.

$$\begin{aligned} 2\pi\Phi(M) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Big[&-G(M, M_j)V(M_j) + \Phi(M_j)G_n(M, M_j) - \\ &-G^1(M, M_j)V^{(1)}(M_j) + \Phi^1(M_j)G_n^{(1)}(M, M_j) \Big] l f_j; \quad M \in S, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где M_j — точка граничной сетки.

9. Примеры решения задач гидродинамики. В качестве примера применения численных схем разд. 8 рассмотрим следующую задачу. Пусть внутри неподвижного эллиптического цилиндра: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с полуосями a и b вращается круговой цилиндр радиуса R : $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$. Полость S между цилиндрами заполнена вязкой жидкостью. Нужно определить функцию тока $\Psi(x, y)$.

Приведем численную схему решения. Граничные точки сетки распределяются следующим образом: на эллипсе N_0 точек с индексами $i = 1, 2, \dots, N_0$, на окружности N_1 точек с индексами $i = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, N_0 + N_1 = N$. Система интегральных уравнений (8.4) аппроксимируется по предложенным квадратурным формулам линейной системой

$$\sum_{j=1}^N (A_{ij} V_j l f_j + B_{ij} \Psi_j + A_{ij}^{(1)} V_j^{(1)} l f_j + B_{ij}^{(1)} \Psi_j^{(1)}) = 0$$

$$\sum_{j=1}^N (A_{ij} V_j^{(1)} l f_j + B_{ij} \Psi_j^{(1)}) = 0$$
(9.1)

К этой системе добавляется аппроксимация уравнения (8.3)

$$\sum_{j=N_0+1}^{N_0+N_1} V_j^{(1)} = 0$$
(9.2)

На эллипсе задаются условия $\Psi_j = V_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, N_0$ и на круге $\Psi_j = q$, $V_j = 1$, $j = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, N$. Из системы $2N + 1$ уравнений определяются $2N + 1$ неизвестных значений: $\Psi_j^{(1)}, V_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, N = N_0 + N_1$ и q . Функция тока во внутренних точках области S определяется по формуле (8.5). Погрешность аппроксимации определяется сравнением с точным решением, а если его нет, то с помощью искусственного точного решения погрешностей ϵ и δ находятся по формулам (6.12). Рассмотрим частные случаи.

Пример 1. Пусть полость между двумя коаксиальными круговыми цилиндрами заполнена вязкой жидкостью. Внешний круг радиуса $R_0 = 2$, а внутренний радиуса R_1 . Внешний круг неподвижен, а внутренний вращается. На границах кругов задаются скорости $v_0 = 0$ и $v_1 = 1$ соответственно. Для функции тока задается значения равное нулю на внешнем круге и q — на внутреннем. Значение q и функция тока в области течения подлежат определению. Эта задача имеет точное решение [20]

$$\Psi(r) = \frac{R_1(-r^2 + R_0^2 + 2R_0^2 \ln(r/R_0))}{2(R_0^2 - R_1^2)}$$

На границах круга выполняются условия

$$v(R_0) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad v(R_1) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 1$$

$$\Psi(R_0) = 0, \quad \Psi(R_1) = q = \frac{R_1(-R_1^2 + R_0^2 + 2R_0^2 \ln(R_1/R_0))}{2(R_0^2 - R_1^2)}$$

Для численного решения этой задачи граничные условия (8.2) имеют вид

$$\Psi|_{\partial S_0} = 0, \quad \Psi|_{\partial S_1} = q, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\partial S_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\partial S_1} = 1$$
(9.3)

Из решения системы уравнений (9.1), (9.2) находятся значения $\Psi_j^{(1)}, V_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, N = N_0 + N_1$ на границе и величина расхода жидкости q . Функция тока внутри области S определяется по найденным граничным значениям по формуле (8.5).

Ниже приведена табл. 3, демонстрирующая зависимость погрешности вычисления расхода δq от числа точек N для радиуса $R_0 = 2$ и радиусов $R_1 = 0.5, 1$ и 1.5 .

Для всех значений радиусов характерна скорость убывания погрешности по геометрической прогрессии с ростом числа точек по арифметической прогрессии. Знамена-

Таблица 3

R_1	N	6	8	10	12	14	16
0.5	δq	1.8×10^{-4}	1.1×10^{-5}	6.9×10^{-7}	4.3×10^{-8}	2.7×10^{-9}	1.7×10^{-10}
	N	12	16	20	24	28	32
1	δq	1.8×10^{-4}	1.1×10^{-5}	6.9×10^{-7}	4.3×10^{-8}	2.7×10^{-9}	1.6×10^{-10}
	N	32	40	48	56	64	72
1.5	δq	4.8×10^{-5}	4.6×10^{-6}	4.6×10^{-7}	4.6×10^{-8}	4.5×10^{-9}	4.5×10^{-10}

Таблица 4

Δx	N	8	12	16	20
0.5	δq	8.2×10^{-4}	5.3×10^{-6}	3.6×10^{-8}	2.3×10^{-10}
	N	16	24	32	40
1	δq	1.3×10^{-3}	1.6×10^{-5}	1.9×10^{-7}	2.1×10^{-9}

тели геометрической прогрессии меньше единицы. Однако с увеличением радиуса знаменатель прогрессии увеличивается.

Пример 2. Полость между двумя круговыми цилиндрами, расположенными эксцентрично, заполнена вязкой жидкостью. Внешний круг радиуса $R_0 = 2$, а внутренний радиуса $R_1 = 0.5$. Краевые условия такие же как в предыдущем примере (9.3). Значение расхода q и функция тока внутри области течения подлежат определению. Задача также имеет точное решение, но гораздо более сложное. Пользуясь точными формулами [21], находим: $q = -0.43157034963$ при расстоянии между центрами кругов $\Delta x = 0.5$ и $q = -0.26752948323$ при $\Delta x = 1$. В табл. 4 приведены погрешности вычисления расхода при различном числе узлов сетки N для расстояний между центрами кругов 0.5 и 1.

На рис. 3, а изображены линии тока для кругового цилиндра, радиуса $R_1 = 0.5$, вращающегося с единичной скоростью внутри неподвижного кругового цилиндра радиуса $R_0 = 2$. Расстояние между центрами кругов равно 1. Функция тока имеет значения 0 на внешнем цилиндре и $q = -0.2675$ на внутреннем. Внутри области линии тока имеют отрицательные значения $(i/5)q$, $i = 0, 1, \dots, 5$ и положительные $0.01i$, $i = 1, 2, \dots, 5$. На внешней окружности 96 точек, а на внутреннем круге 64. Картина линий тока не отличается от построенной на точном решении.

Пример 3. Полость между внешним эллиптическим и внутренним круговым цилиндрами заполнена вязкой жидкостью (рис. 3, б). Эллипс и круг задаются уравнениями

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1, \quad (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Круговой цилиндр вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью, а внешний эллиптический цилиндр покоится. Значения функции тока и скорости жидкости на неподвижной эллиптической границе полагаем нулем. Скорость на границе круга полагаем равной единице, а значение функции тока равным q . Для этой задачи точного решения не существует и точность аппроксимации линейной системы проверяется на искусственном точном решении бигармонической функции $x^3 - y^3$.

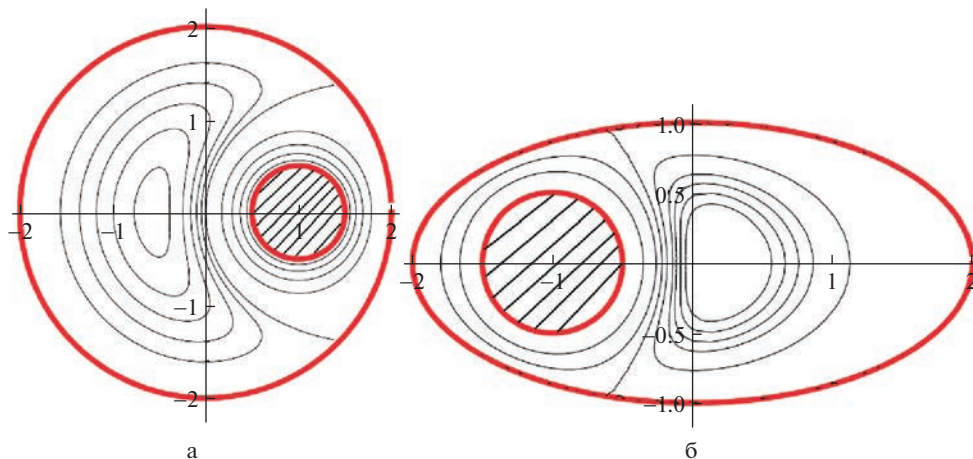


Рис. 3. Линии тока вязкой жидкости внутри эллиптической области, создаваемые а) вращением двух круговых цилиндров а) в одинаковом направлении, б) в противоположном направлении.

В табл. 5 приводятся невязки ϵ и δ , а также погрешности во внутренних точках: в точке $M_1(1.9, 0)$ погрешность $\Psi(1.9, 0) - (1.9^3)$ и в точке $M_2(0, 0.08)$ погрешность $\Psi(0, 0.8) + (0.8^3)$ при различных значениях числа точек на контурах N_0 и N_1 .

Полагая $N_1 = N_2 = 64$, из решения линейной системы уравнений находим $q = 0.1698$ и неизвестные $\Psi_i^{(1)}, V_i^{(1)}, i = 1, 2, \dots, N_1 + N_2$, а функцию тока $\Psi(x, y)$ внутри области вычисляем по аппроксимации (5.3). На рис. 3,б приведены линии тока $\Psi(x, y) = \text{const}$. Два замкнутых семейства линий тока разделяет линия $\Psi(x, y) = 0$, примыкающая к границе эллипса. Из первого семейства выбраны три замкнутые линии тока $\Psi = q/3, 2q/3$ и линия $\Psi = q$, совпадающая с границей круга. Для второго семейства выбраны линии с отрицательными значениями функции тока $\Psi = -0.05i, i = 1, 2, \dots, 5$.

Пример 4. Полость между эллиптическим и двумя круговыми цилиндрами заполнена вязкой жидкостью (рис. 4). Эллипс и круги задаются уравнениями $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, $(x \pm 1)^2 + y^2 = 1/4$.

Круговые цилиндры вращаются вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью в одном направлении (рис. 1,а) и в противоположных направлениях (рис. 1,б). Внешний цилиндр покоится. Значение функции тока и скорость жидкости на неподвижной эллиптической границе полагаем равными нулю. Скорость на границе каждого круга полагаем равной единице, а значение функции тока равным q . Это значение подлежит определению.

Таблица 5

N_0, N_1	32.64	48.96	64.128
ϵ	2.2×10^{-5}	9.4×10^{-8}	2.2×10^{-8}
δ	3.8×10^{-5}	6.0×10^{-8}	9.5×10^{-11}
M_1	6.2×10^{-3}	1.7×10^{-4}	4.6×10^{-6}
M_2	1.5×10^{-3}	5.7×10^{-5}	2.1×10^{-6}

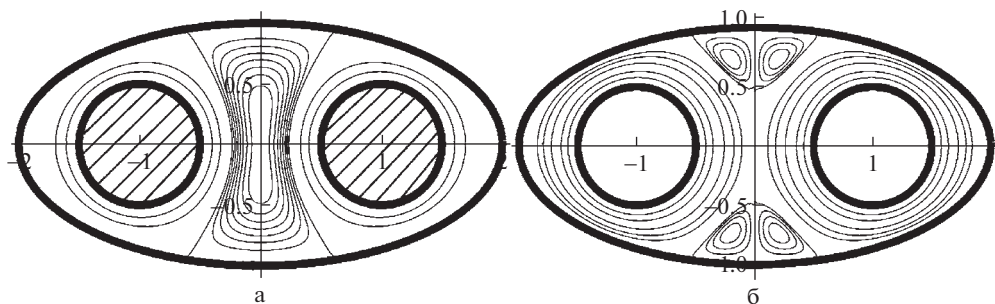


Рис. 4. Линии тока вязкой жидкости внутри эллиптической области, создаваемые а) вращением двух круговых цилиндров а) в одинаковом направлении, б) в противоположном направлении.

Задача сводится к решению системы уравнений (9.1) с двумя дополнительными условиями (8.3) равенство нулю циркуляций на каждой окружности. Они следуют из требования однозначности функции давления и с помощью квадратурной формулы (3.1) аппроксимируются следующим образом

$$\sum_{i=N_0+1}^{N_0+N_1} \Psi_i^{(1)} = 0, \quad \sum_{i=N_0+N_1+1}^{N_0+N_1+N_2} \Psi_i^{(1)} = 0$$

Пример 5. Предложенная схема удобна также для расчета обтеканий периодических структур. Для учета этой периодичности надо учесть периодичность в функции Грина и решить задачу обтекания в периодической ячейке. Покажем это на решении задачи потенциального обтекания периодической решетки круговых цилиндров между двумя плоскостями. Задача ставится следующим образом. Между двумя пластинами расположенными на уровнях $y = \pm b$ помещена периодическая цепочка круговых цилиндров радиуса R с центрами в точках $y = y_0$, $x = kL$, $k = \dots -1, 0, 1, 2, \dots$. Тогда периодическая функция тока $\Psi(x + L, y) = \Psi(x, y)$ потенциального обтекания найдется из решения следующей краевой задачи. В области течения функция тока должна удовлетворять уравнению Лапласа, на пластинах она должна принимать постоянные значения ψ_1 и ψ_2 , а на круговом цилиндре ψ_3 .

Для такой задачи доказывается теорема единственности также как для внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа. Предполагая, что существуют два решения Ψ_1 и Ψ_2 , получаем, что разность $\delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$ удовлетворяет уравнению Лапласа и нулевым краевым условиям. Тогда в прямоугольнике $S = x \in (-L/2, L/2)$, $y \in (-b, b)$ (ячейка периодичности): интеграл $\int_S (\text{grad } \delta\Psi)^2 dx dy$ приводится к интегралу по границе ячейки $\int_S \left(\delta\Psi \frac{\partial \delta\Psi}{\partial n} \right) ds$. Он, очевидно, равен нулю, так как, на пластинах и на круге $\delta\Psi = 0$, а на сторонах $x = \pm L/2$ интегралы в силу периодичности сокращаются. $\int_S (\text{grad } \delta\Psi)^2 dx dy = 0$. Отсюда получаем: $\text{grad } \delta\Psi = 0 \Rightarrow \delta\Psi = \text{const} = 0$.

Решение задачи сводится к интегральному уравнению (5.1) $AV(s) + B\Psi(s) = 0$, где $\Psi(x, y)$ — функция тока, а $V(s) = \partial\Psi/\partial n$ — скорость на границе. В интегральных операторах A и B — функцию Грина $G(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ нужно заменить на периодическую функцию Грина

$$G(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{4}{\lambda^2} \left((\text{sh}(\lambda y/2))^2 + (\sin(\lambda x/2))^2 \right) \right]$$

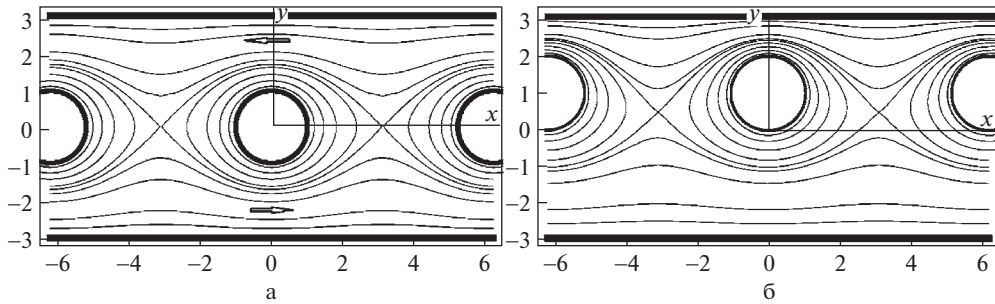


Рис. 5. Линии тока потенциального циркуляционного обтекания решетки круговых цилиндров между двумя плоскостями: а) симметричное обтекание, б) асимметричное обтекание.

Далее нужно воспользоваться квадратурными формулами (5.6) для оператора A и (5.10) для оператора B .

На рис. 5 изображены линии тока для обтекания периодической системы кругов радиуса $R = 1$ с центрами в точках $y = y_0$, $x = k2\pi$, $k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ между двумя пластинами, расположенными на уровнях $y = \pm\pi$. На пластинах задаются нулевые значения функции тока, а на окружности $\Psi = 1$. Значения функций тока на изображенных линиях меняются от нуля до единицы с шагом 0.1. Кроме того изображены критические линии тока, разделяющие направление скорости на них. На рис. 5,а центры кругов расположены на средней линии $y_0 = 0$ между пластинами. В этом случае картина линий тока симметрична относительно линии центров. Критической линии тока соответствует значение функции тока 0.5576. В критической точке, расположенной на средней линии, критическая линия тока разделяется на две ветви нижнюю и верхнюю. Между нижней пластиной и нижней ветвью критической линии тока жидкость течет слева направо с расходом $Q = 0.5576$, а между верхней ветвью и верхней пластиной жидкость течет справа налево с отрицательным расходом $Q = -0.5576$. Между окружностью и двумя ветвями критической линии тока жидкость движется по замкнутым линиям тока против часовой стрелки.

На рис. 5,б центры кругов расположены выше средней линии, т.е. $y_0 = 1$. При этом течение не симметрично, но также как и в симметричном случае имеется критическая линия тока с иным значением функции тока 0.5365. Между нижней пластиной и нижней ветвью критической линии тока жидкость течет слева направо с расходом $Q = 0.5365$, а между верхней ветвью и верхней пластиной жидкость течет справа налево с отрицательным расходом $Q = -0.5365$.

Заключение. Предложен конструктивный алгоритм получения численных схем с экспоненциальной сходимостью для решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольных многосвязных областях, ограниченных гладкими контурами. Матрицы A_{ij} , B_{ij} квадратурных формул интегральных операторов A и B легко находятся с помощью выписанных рядов Фурье для функций Грина и применения теорем 1 и 2. По сравнению с известными, предложенный алгоритм проще программируется, так как все квадратурные формулы имеют явную и простую форму. Области, в которых решается краевая задача, могут быть самыми разнообразными, в том числе многосвязными. Достаточно задать границу области двумя параметрическими функциями или даже в оцифрованном табличном виде. Предложенный алгоритм позволяет решать как внутренние, так и внешние задачи без усложнения схем.

Если же сравнивать предложенную численную схему с экспоненциальной скоростью сходимости с другими разностными или с известными схемами второго порядка метода граничных элементов [22], то она существенно экономичнее, и позволяет достигать машинной точности при сравнительно малом числе элементов сетки (около сотни). Решение линейной системы с того порядка решается практически мгновенно. Схема также удобна для расчета периодических структур. Для этого достаточно решить интегральное уравнение на одной ячейке периодичности и заменить функцию Грина на периодическую функцию Грина с сохранением ее особенности в нуле. Заметим, что в силу сохранения особенности коэффициенты квадратурных формул не меняются, а периодическая структура в численной схеме учитывается за счет периодичности функции Грина. Предлагаемые численные схемы можно применять не только в гидродинамике, но и для решения других задач математической физики, сводящихся к краевым задачам для эллиптических уравнений.

Например, краевые задачи для решения широкого класса теории упругости изложены в монографии [24]. В ней используется метод конформных отображений, достижимый для ограниченного класса задач, тогда как представленная численная схема применима для произвольных геометрических областей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00833).

Приложение

Доказательство первого свойства теоремы 1. Последовательно проверяем тождественность квадратурной формулы (2.7) в дискретных точках z_j , $j = 1, 2, \dots, N$ для каждой функции системы (2.8).

П1. Проверка точности формулы для $F(z) = 1$. Приведем точное значение интегрального оператора (3.1) с ядром (3.2)

$$\int_0^1 H(z' - z) F(z') dz' = \int_0^1 \frac{h_0}{2} dz' = \frac{h_0}{2} \quad (\text{П1})$$

Значение по квадратурной формуле теоремы 1 таково

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N g_{j-i} F_j = \sum_{j=1}^N g_{j-i} \quad (\text{П2})$$

Формулу (3.7) для коэффициентов g_{j-i} представляем в виде

$$g_{j-i} = \frac{h_0}{2N} + \dots \sum_{j=1}^N \cos 2\pi n(j-i)/N + \dots \sum_{j=1}^N \sin 2\pi n(j-i)/N$$

Здесь вместо несущественных множителей поставлены точки.

Покажем, что

$$\sum_{j=1}^N \cos 2\pi n(j-i)/N = \sum_{j=1}^N \sin 2\pi n(j-i)/N = 0; \quad n = 1, \dots, M-1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{П3})$$

и тогда очевидно формулы (П1) и (П2) определяют равные значения.

Воспользуемся тождеством

$$\sum_{j=1}^N z^j = \frac{z(-1 + z^N)}{-1 + z}$$

Подставляя в него комплексное число $z = e^{i2\pi n/N} = \cos 2\pi n/N + i \sin 2\pi n/N$, получим $z^N = e^{i2\pi n} = 1$ и $z^{-i} \sum_{j=1}^N z^j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \cos 2\pi n(j-i)/N + i2\pi n(j-i)/N = 0$, что и доказывает формулу (ПЗ). Таким образом, квадратурная формула является точной.

П2. Проверка точности формулы для $F(z) = \cos(2\pi kz)$, $k = 1, \dots, M-1$.

Точное значение интегрального оператора выражается через его коэффициенты Фурье

$$\int_0^1 H(z' - z) \cos(2\pi kz') dz' = \frac{1}{2} h_k \cos(2\pi kz) - \frac{1}{2} r_k \sin(2\pi kz)$$

Вычислим это значение по квадратурной формуле теоремы 1 для g_{j-i}

$$\sum_{j=1}^N g_{j-i} \cos(2\pi kz_j) = \sum_{j=1}^N g_{j-i} \cos kx_j$$

Разбиваем g_m на три слагаемые $g_m = g_m' + g_m'' + g_m'''$

$$g_m' = \frac{1}{N} \left[\frac{h_0}{2} + \frac{h_M}{2} \cos Mx_m \right], \quad g_m'' = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M-1} h_n \cos(2\pi nm/N),$$

$$g_m''' = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M-1} r_n \sin(2\pi nm/N)$$

Вычислим с помощью формул ортогональности [25]

$$\sum_{j=1}^N \cos kx_j \sin nx_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N \cos kx_j \cos nx_j = M\delta_{kn};$$

$$k = 0, 1, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, M-1$$

$$\sum_{j=1}^N \sin kx_j \sin nx_j = M\delta_{kn}; \quad n, k = 1, 2, \dots, M-1$$

$$\delta_{kn} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq n \quad \text{и} \quad \delta_{kn} = 1 \quad \text{при} \quad k = n$$

вклады в квадратурную формулу слагаемого g_m'

$$\sum_{j=1}^N g_{j-i}' \cos kx_j = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \left[\frac{h_0}{2} + \frac{h_M}{2} \cos M(x_j - x_i) \right] \cos kx_j = 0$$

слагаемого g_m''

$$\sum_{j=1}^N g_{j-i}'' \cos kx_j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M-1} h_n \left(\sum_{j=1}^N \cos(n(x_j - x_i)) \cos kx_j \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M-1} h_n \left(\sum_{j=1}^N \cos nx_i \cos nx_j \cos kx_j \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M-1} h_n (\cos nx_i M\delta_{nk}) = \frac{h_k}{2} \cos kx_i$$

Вклады слагаемого g_m'''

$$\sum_{j=1}^N g_{j-i}''' \cos kx_j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M-1} r_n \left(\sum_{j=1}^N \sin(n(x_j - x_i)) \cos kx_j \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M-1} r_n \left(\sum_{j=1}^N \sin nx_i \cos nx_j \cos kx_j \right) = \\
&= -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M-1} r_n (\sin nx_i M \delta_{nk}) = -\frac{r_k}{2} \sin kx_i
\end{aligned}$$

Суммируя все вклады, получим

$$\sum_{j=1}^N g_{j-i} \cos kx_j = \frac{h_k}{2} \cos kx_i - \frac{r_k}{2} \sin kx_i$$

Таким образом, квадратурная формула в точках $x_i = 2\pi z_i$ дает точные значения.

Проверка точности формулы для $F(z) = \sin(2\pi kz)$, $k = 1, \dots, M-1$ проводится аналогично.

Таким образом, свойство 1) теоремы 1 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boyd J.P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Dover: Mineola, 2001.
2. *Orszag S.A., Gotlib D.* Numerical Analysis of Spectral Methods. Theory and Applications. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania: 19103, 1977. 169 p.
3. *Hafeez M.B., Krawczuk M.A.* Review: applications of the spectral finite element method // Arch. Comput. Meths in Engng. 2023. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1007/s11831-023-09911-2>
4. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. 848 с.
5. *Бабенко К.И.* Несколько замечаний о дискретизации эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 1. С. 1114.
6. *Алгазин С.Д.* h-матрица, новый математический аппарат для дискретизации многомерных уравнений математической физики. М.: URSS, 2017. 246 с.
7. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы без насыщения для уравнения Шрёдингера атома водорода // Вычисл. методы и програм. 2018. Т. 19. С. 215–218.
8. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
9. *Kress R.* Linear Integral Equation. Springer, 1999. 380 p.
10. *Калиткин Н.Н., Колганов С.А.* Функции Ферми–Дирака. Прямое вычисление функций // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. 235 с.
11. *Белых В.Н.* К проблеме конструирования ненасыщаемых квадратурных формул на отрезке // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 1. С. 27–62.
12. *Петров А.Г.* Численные схемы без насыщения для периодических функций // Докл. РАН. 2018. Т. 481. № 4. С. 362–366.
13. *Петров А.Г.* Алгоритм построения квадратурных формул с экспоненциальной сходимостью для линейных операторов, действующих на периодические функции // Изв. вузов. Математика. 2021. № 2. С. 86–92.
14. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961. 936 с.
15. *Петров А.Г., Смолянин В.Г.* Расчет профиля капиллярно-гравитационной волны на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Вестн. МГУ. № 2. 1991. С. 92–96.
16. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: Физматлит, 1948.
17. *Воинов О.В., Воинов В.В.* Численный расчет нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 559–562.
18. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1966.
19. *Казакова А.О., Терентьев А.Г.* Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // ЖВММФ. 2012. Т. 52. № 11. С. 2050–2059.
20. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

21. Казакова А.О., Петров А.Г. О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 3. С. 16–25.
22. Казакова А.О., Петров А.Г. Расчет течения вязкой жидкости между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения // ЖВММФ. 2019. Т. 59. № 6. С. 10631082.
23. Петров А.Г. Схема без насыщения для обтекания решетки профилей и вычисление точек отрыва в вязкой жидкости // ЖВММФ. 2011. Т. 51. № 7. С. 13261338.
24. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, М.: Наука, 1966.
25. Hamming R.W. Numerical Methods for Scientists and Engineers. New York: McGraw-Hill, 1962.

High-Accuracy Numerical Schemes for Solving Plane Boundary Problem for a Polyharmonic Equation and Their Application to Problems of Hydrodynamics

A.G. Petrov^{a,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: petrovipmech@gmail.com*

Boundary value problems are considered for harmonic, biharmonic equations, as well as the general polyharmonic equation for multiply connected domains on the plane. The problems are reduced to solving linear integral equations on boundary contours, which are assumed to be smooth. An algorithm for deriving an approximation of integral equations by a linear system is presented, taking into account the logarithmic singularities of the kernels of integral operators, through which integral equations are expressed. The algorithm uses the periodicity of functions defined on closed boundary contours. As the number of grid points increases, the approximation error decreases faster than the grid spacing to any fixed degree. Applications to solving problems of hydrodynamics, filtration and other problems of theoretical physics are considered.

Keywords: Linear operators, periodic functions, Fourier series, harmonic and biharmonic functions, boundary value problems, scheme without saturation

REFERENCES

1. Boyd J.P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Dover: Mineola, 2001.
2. Orszag S.A., Gottlieb D. Numerical Analysis of Spectral Methods. Theory and Applications. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania: 19103, 1977. 169 p.
3. Hafeez M.B., Krawczuk M.A. Review: Applications of the spectral finite element method // Arch. Comput. Methods in Engng., 2023, pp. 1–13. doi: 10.1007/s11831-023-09911-2
4. Babenko K.I. Fundamentals of Numerical Analysis. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2002. (in Russian)
5. Babenko K.I. Some remarks on the discretization of elliptic problems // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1975, vol. 221, pp. 11–14. (in Russian)
6. Algazin S.D. h-Matrix, a New Mathematical Apparatus for Discretization of Multidimensional Equations of Mathematical Physics. Moscow: URSS, 2017. 246 p. (in Russian)
7. Algazin S.D. Numerical algorithms without saturation for the Schrödinger equation of hydrogen atom // Num. Meth. Prog., 2018, vol. 19, pp. 215–218. (in Russian)
8. Krylov V.I. Approximate Calculation of Integrals. Moscow: Fizmatlit, 1967. (in Russian)
9. Kress R. Linear Integral Equation. Springer, 1999. 380 p.
10. Kalitkin N.N., Kolganov S.A. The Fermi–Dirac functions. Direct calculation of the functions // Preprint no. 235, Moscow: Keldysh Inst., 2018. 29 p. (in Russian)
11. Belykh V.N. The problem of constructing unsaturated quadrature formulae on an interval // Sb.: Mathematics, 2019, vol. 210, iss. 1, pp. 24–58.
12. Petrov A.G. Numerical schemes without saturation for periodic functions // Dokl. Math., 2018, vol. 98, no. 1, pp. 348–352.

13. *Petrov A.G.* Algorithm for construction of quadrature formulas with exponential convergence for linear operators acting on periodic functions // *Rus. Math.*, 2021, vol. 65, no. 2, pp. 75–80.
14. *Bari N.K.* Trigonometric Series. Moscow: Fizmatlit, 1961. (in Russian)
15. *Petrov A.G., Smolyanin V.G.* Calculation of a capillary-gravity wave profile on a surface of a heavy liquid of a finite depth // *MSU Bull.*, 1991, no. 2, pp. 92–96. (in Russian)
16. *Vekua I.N.* New Methods for Solving Elliptic Equations. Moscow: Fizmatlit, 1948. (in Russian)
17. *Voinov O.V., Voinov V.V.* Numerical method for calculating unsteady motions of an incompressible ideal fluid with free surfaces // *Dokl. AN SSSR*, 1975, vol. 221, no. 3, pp. 559–562.
18. *Sobolev S.L.* Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Oxford: Pergamon, 1964.
19. *Kazakova A.O., Terent'ev A.G.* Numerical solution of boundary value problems for the polyharmonic equations // *Vychisl. Mat.&Mat. Fiz.*, 2012, vol. 52, no. 11, pp. 2050–2059.
20. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Dynamics. Oxford: Pergamon, 1987.
21. *Kazakova A.O., Petrov A.G.* Viscous fluid velocity field between two cylinders which rotate and move translationally // *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 3, pp. 311–320.
22. *Kazakova A.O., Petrov A.G.* Computation of viscous flow between two arbitrarily moving cylinders of arbitrary cross section // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 1030–1048.
23. *Petrov A.G.* Saturation-free numerical scheme for computing the flow past a lattice of airfoils and the determination of separation points in a viscous fluid // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 7, pp. 1239–1250.
24. *Muskhelishvili N.I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Dordrecht: Springer, 2010. 732 p.
25. *Hamming R.W.* Numerical Methods for Scientists and Engineers. N.Y.: McGraw-Hill, 1962. 411 p.

УДК 532.5

О КРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ С НЕМОНОТОННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

© 2023 г. В. Н. Киреев^{1,*}, А. А. Мухутдинова^{2,**}, С. Ф. Урманчиев^{2,***}

¹Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

²Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: kireev@anrb.ru

**e-mail: muhutdinova18@gmail.com

***e-mail: said@anrb.ru

Поступила в редакцию 07.03.2023 г.

После доработки 08.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Работа посвящена математическому моделированию особенностей течения жидкостей с немонотонной зависимостью вязкости от температуры, которая присуща некоторым растворам и расплавам полимеров, а также ряду жидких металлических сплавов. Для заданного перепада давления обнаружены критические условия теплообмена на стенках канала, определяющие расход жидкости в процессе установления потока, связанного с формированием локализованной высоковязкой области.

Ключевые слова: аномально термовязкая жидкость, кольцевой канал, критические условия теплообмена, расход

DOI: 10.31857/S0032823523030062, EDN: ZTIVUQ

1. Введение. Решение задач гидродинамики с учётом теплопроводности и процессов теплообмена приводит к необходимости учёта теплофизических свойств жидкостей и в первую очередь зависимости вязкости от температуры. В подавляющем большинстве исследований эти зависимости сводятся к формуле Аррениуса для константы скорости реакции от температуры или к её аппроксимациям [1, 2], которые отражают экспоненциальное убывание вязкости с ростом температуры, характерное для любых капельных жидкостей. Пристальное внимание к вопросам математического моделирования современных технологий в области энергетики, нефтехимии, металлургии, а также медико-биологических исследований требует рассмотрения влияния более сложных зависимостей вязкости от температуры на процесс течения жидкостей. Известно, например, что в жидкой сере в определённом диапазоне температур происходят процессы полимеризации и распада полимерных цепочек, что приводит к формированию чётко выраженной немонотонной зависимости вязкости от температуры [3]. Весьма интересен и важен для металлообработки факт немонотонной зависимости вязкости в аморфных металлических сплавах, проявляющийся при быстрой закалке [4]. В качестве потокоотклоняющих реагентов при добыче жидких углеводородов применяют термообратимые жидкие реагенты, в основе своей содержащие водный раствор метилцеллюлозы [5]. В этих случаях образования пиковых значений вязкости используются для блокирования высокопроницаемых пропластков для предотвращения прорыва нагнетаемой жидкости.

Можно, также, привести один из первых немногочисленных примеров гидродинамического расчёта течения жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры — это работа [6], посвящённая растеканию серосодержащей лавы по поверхности спутника Юпитера Ио. Далее, в работах авторов настоящей статьи были проведены численные исследования по детальному изучению различных аспектов течения аномально термовязких жидкостей в плоских каналах [7–10]. При этом были установлены закономерности распределения гидродинамических параметров потока и температуры, изменения расхода при различных значениях интенсивности теплообмена, влияния теплообмена на гидравлическое сопротивление, а также влияние зависимости вязкости от температуры на изменение критического числа Рейнольдса.

В настоящей работе рассмотрены критические параметры теплообмена, влияющие на скачкообразное изменение расхода аномально термовязкой жидкости.

2. Постановка задачи. Рассматривается неизотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости в кольцевом канале длины L , образованном двумя соосными цилиндрами радиусов r_0 и R , соответственно ($r_0 < R$). Течение происходит под действием постоянного перепада давления. Уравнения математической модели в цилиндрической системе координат (ось z направлена по оси канала) с учетом осевой симметрии и зависимости вязкости от температуры в безразмерном виде имеют вид:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} u_r \right] \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2.4)$$

где u_r и u_z — радиальная и осевая компоненты скорости, p — давление, T — температура.

Безразмерные критерии Рейнольдса Re и Пекле Pe вычисляются по формулам:

$$\text{Re} = \frac{\rho u_0 R}{\mu_{\max}}, \quad \text{Pe} = \frac{u_0 R}{a},$$

где ρ — плотность, $u_0 = \sqrt{\Delta p / \rho}$ — характерная скорость, $\mu_{\max}$ — максимальная вязкость жидкости на рассматриваемом температурном интервале, a — коэффициент температуропроводности.

В качестве характерного размера выбран радиус R внешнего цилиндра кольцевого канала, поэтому решение систем уравнений (2.1)–(2.4) ищется внутри прямоугольной области (рис. 1)

$$\Omega = \{(r, z) : r_0/R \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq L/R\} \quad (2.5)$$

Во входном ($z = 0$) и выходном ($z = L/R$) сечениях кольцевого канала задаются фиксированные значения давления, а на стенках ($r = r_0/R$, $r = 1$) — условия прилипания для скорости, так что граничные условия для давления и компонент вектора скорости имеют вид:

$$p(r, 0, t) = 1, \quad p(r, L/R, t) = 0 \quad (2.6)$$

$$u_r(r_0/R, z, t) = u_r(1, z, t) = u_z(r_0/R, z, t) = u_z(1, z, t) = 0 \quad (2.7)$$

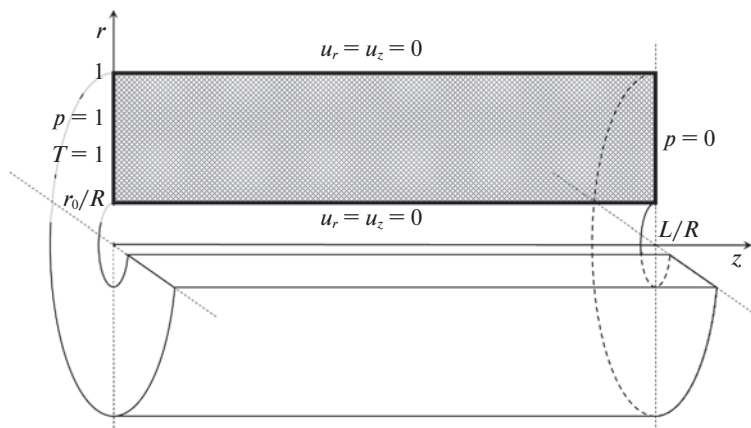


Рис. 1. Схема расчетной области и граничные условия.

Предполагается, что в канал втекает горячая жидкость, которая затем охлаждается за счет конвективного теплообмена на стенках канала. Температура на входе в канал задается постоянной,

$$T(r, 0, t) = 1, \quad (2.8)$$

а на стенках канала рассматриваются различные виды граничных условий — первого, второго и третьего рода (Ньютона—Рихмана):

$$\begin{aligned} T(r_0/R, z, t) = T(1, z, t) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0/R} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0 \\ \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0/R} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \alpha T, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где α — безразмерный коэффициент теплоотдачи (критерий Нуссельта).

В начальный момент времени жидкость в канале покоится и имеет постоянную температуру:

$$u_r(r, z, 0) = u_z(r, z, 0) = 0, \quad p(r, z, 0) = 0, \quad T(r, z, 0) = 0 \quad (2.10)$$

Для замыкания математической модели необходимо задать функцию зависимости вязкости от температуры, которая в настоящей работе принимается в виде следующей немонотонной зависимости (рис. 2):

$$\mu(T) = \exp\left(-\beta(T - 1/2)^2\right), \quad (2.11)$$

где $\beta > 0$ — параметр, характеризующий ширину температурного диапазона, на котором происходит увеличение вязкости.

Таким образом, система дифференциальных уравнений в частных производных (2.1)–(2.4), граничные условия (2.6)–(2.9), начальные условия (2.10) и функция зависимости вязкости от температуры (2.11) представляют собой математическую модель рассматриваемого процесса.

3. Результаты численного моделирования. Поставленная задача решается путем прямого численного моделирования с использованием оригинального компьютерного кода, основанного на методе контрольного объема и алгоритме SIMPLE [11]. Валидация компьютерного кода была проведена путем сравнения результатов численного

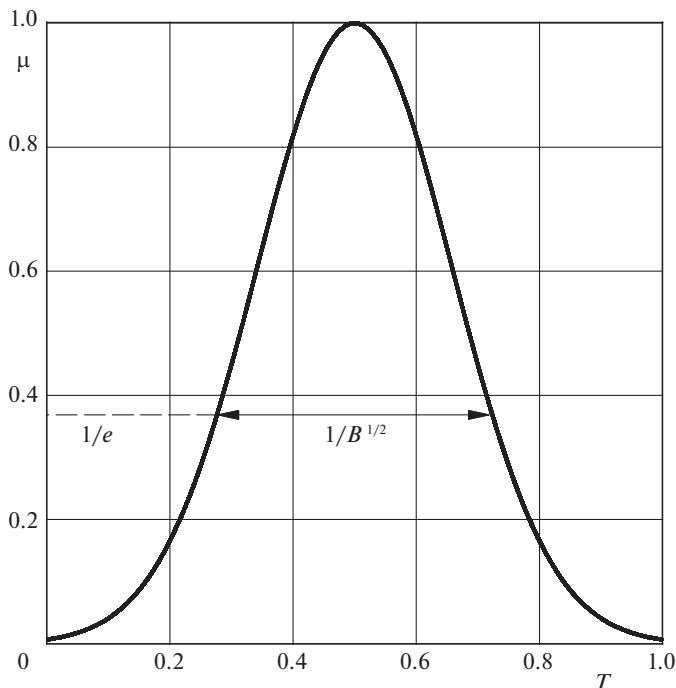


Рис. 2. Немонотонная зависимость вязкости от температуры.

моделирования с известными аналитическими решениями для задачи о течении жидкости с постоянной вязкостью в кольцевом канале.

При проведении численных экспериментов были зафиксированы безразмерные критерии Рейнольдса ($Re = 104$) и Пекле ($Pe = 940$), а также вид функциональной зависимости вязкости от температуры ($\beta = 20$). Отношение длины кольцевого канала к радиусу внешнего цилиндра принято равным $L/R = 60$. В качестве изменяемых параметров задачи использовались безразмерный геометрический параметр кольцевого канала $\delta = (R - r_0)/r_0$ (т.е. отношение величины кольцевого зазора к радиусу внутреннего канала) и безразмерный коэффициент теплоотдачи α .

Основной целью численного моделирования в данной работе является определение расхода (мгновенного и установившегося) термовязкой жидкости, вычисляемого по формуле:

$$Q(t) = \int_{r_0/R}^1 u_z(r, L/R, t) dr \quad (3.1)$$

Гидродинамические характеристики течения жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры определяются динамикой образующегося в канале сложного неоднородного распределения вязкости. Характерные распределения вязкости в кольцевом канале при различных видах граничных условий для температуры для кольцевого канала с параметром $\delta = 1$ показаны на рис. 3. Для удобства представления результатов введены новые переменные r' и z' , принимающие значения от 0 до 1 и связанные с исходными пространственными переменными соотношениями:

$$r' = \frac{Rr - r_0}{R - r_0}, \quad z' = \frac{Rz}{L} \quad (3.2)$$

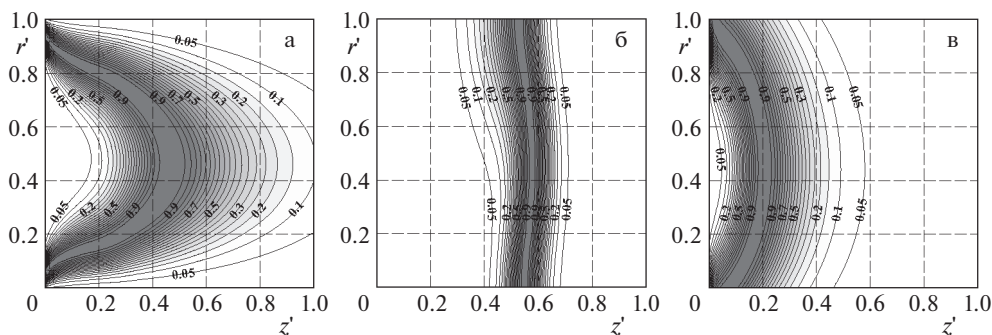


Рис. 3. Характерные распределения вязкости в кольцевом канале при граничных условиях для температуры первого (а), второго (б) и третьего (в) рода.

На каждом из графиков на рис. 3 можно выделить залитую более темным цветом область, в которой вязкость жидкости имеет наибольшее значение, получившая в предыдущих работах авторов название “вязкий барьер”.

Формирование вязкого барьера и его эволюция происходят следующим образом. После начала процесса втекания нагретой жидкости в кольцевой канал, заполненный жидкостью с температурой окружающей среды, в зоне контакта благодаря кондуктивной теплопроводности и, в соответствии с принятой зависимостью вязкости от температуры, формируется высоковязкая локализованная область – вязкий барьер. Однако увеличение вязкого барьера приводит к росту вязкого трения в жидкости, вследствие чего средняя скорость потока снижается, соответственно, снижается и расход жидкости. Дальнейшая эволюция вязкого барьера связана с конкуренцией следующих факторов: теплообменом через стенки канала, кондуктивной теплопроводностью и скоростью конвективного переноса жидкости.

В случае, когда температура стенок канала поддерживается при постоянной температуре (граничные условия первого рода), вязкий барьер имеет подковообразную форму и все изолинии вязкости начинаются вблизи угловых точек входного сечения канала, в которых температура и вязкость изменяются скачкообразно (рис. 3,а). При задании на стенках канала нулевого потока тепла (граничные условия второго рода) вязкий барьер выглядит практически как вертикальная полоса, пересекающая все поперечное сечение канала, а изолинии вязкости пересекают стенки канала под прямым углом (рис. 3,б). Если на стенках канала задается теплообмен по закону Ньютона–Рихмана (граничное условие третьего рода) форма и расположение вязкого барьера зависят от значения коэффициента теплоотдачи и изолинии вязкости в этом случае пересекают стенки канала под некоторым углом (рис. 3,в). Следует отметить, что на рис. 3,а и рис. 3,в показаны установившиеся распределения вязкости, тогда как на рис. 3,б показано положение вязкого барьера в некоторый момент времени, поскольку в канале с теплоизолированными стенками стабилизации вязкого барьера не происходит.

С эволюцией вязкого барьера тесно связана динамика установления расхода аномально-термовязкой жидкости, представленная на рис. 4 для двух значений геометрического параметра ($\delta = 1$ и $\delta = 4$) при различных видах температурных граничных условий и интенсивностях теплообмена. Из рисунка видно, что перед выходом расхода на стационарное значение происходит достаточно сложное его изменение. Так, например, кривые изменения расхода, соответствующие граничным условиям второго и третьего рода, характеризуются наличием локального максимума и минимума.

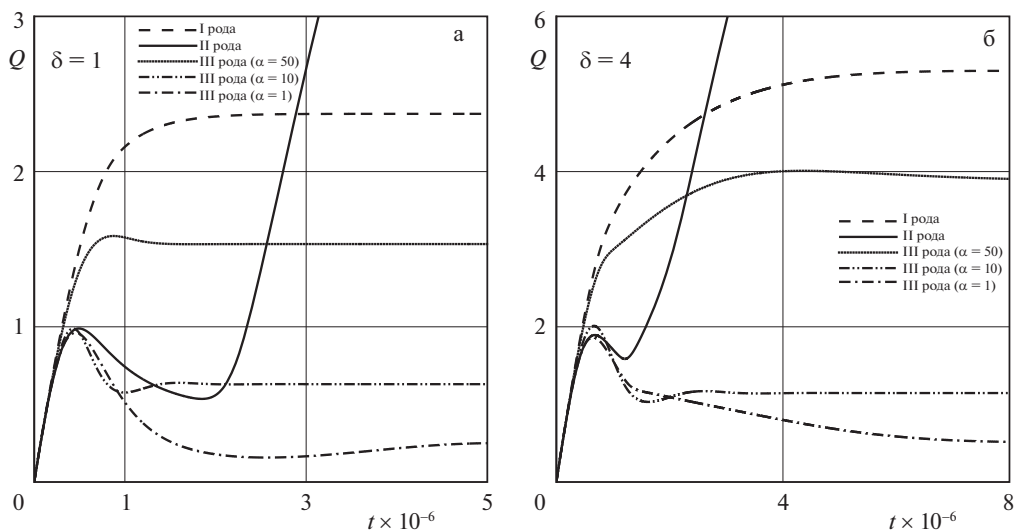


Рис. 4. Динамика установления расхода anomalно-термовязкой жидкости: (а) $\delta = 1$, (б) $\delta = 4$.

Наиболее простой вид имеют кривые установления расхода при задании на стенках канала граничного условия первого рода (пунктирные кривые на рис. 4). В этом случае вязкий барьер подковообразной формы образуется вблизи входа в канал и затем, по мере протекания процесса конвективного теплообмена, вязкий барьер движется поступательно вдоль канала, область высокой вязкости увеличивается в размере и через некоторое время вязкий барьер занимает установившееся положение (см. также рис. 3,а). Расход при этом монотонно увеличивается и устанавливается на некотором постоянном уровне.

При задании нулевого теплового потока на стенках канала (граничное условие второго рода, сплошные кривые на рис. 4) происходит “поршневое” вытеснение холодной жидкости, заполняющей канал в начальный момент времени, горячей жидкостью, поступающей в канал через входное сечение. Вязкий барьер, характерный вид которого показан на рис. 3,б, формируется на границе областей холодной и горячей жидкости и движется поступательно вместе с потоком вдоль канала. На начальном этапе расход возрастает по мере удаления вязкого барьера от входа в канал. Размер высоковязкой области при этом увеличивается за счет кондуктивной теплопроводности, создается дополнительное гидравлическое сопротивление в результате чего расход, достигнув локального максимума, начинает уменьшаться. Резкое увеличение расхода начинается в момент, когда вязкий барьер достигает выходное сечение канала и устанавливается на высоком уровне после того, как вязкий барьер полностью покидает канал. Таким образом, в стационарном режиме реализуется фактически изотермическое течение маловязкой жидкости, а найденные в результате численного моделирования значения расхода ($Q = 9.56$ для $\delta = 1$ и $Q = 29.42$ для $\delta = 4$) совпадают с вычисленными по известным формулам для кольцевого канала.

При использовании граничных условий третьего рода динамика изменения расхода в основном аналогична описанной выше для случая граничных условий второго рода (три кривые с точками на рис. 4). Кривые расхода также имеют локальные максимум и минимум, объясняемые динамикой вязкого барьера, причем их значения зависят от значения коэффициента теплообмена. Отличие заключается в том, что при наличии конечного теплообмена на стенках канала вязкий барьер стабилизируется внутри ка-

нала и поэтому установившееся значение расхода гораздо меньше, чем при отсутствии теплообмена: чем меньше безразмерный коэффициент теплоотдачи, тем меньше стационарное значение расхода.

Сравнение результатов для кольцевых каналов, характеризующихся различным геометрическим параметром δ ($\delta = 1$ на рис. 4,а и $\delta = 4$ на рис. 4,б), показывает качественное совпадение кривых установления расхода. Количественные различия заключаются в том, что для канала с $\delta = 4$ (более “широкий” кольцевой зазор) установившиеся значения расхода примерно в два раза больше соответствующих расходов для канала с $\delta = 1$ и требуется более длительный период времени для достижения стационарного состояния.

На рис. 5 показаны зависимости установившегося расхода при течении аномально-термовязкой жидкости от коэффициента теплоотдачи при различных значениях геометрического параметра кольцевого канала. Точки соответствуют результатам численных экспериментов, а кривые — интерполяции сплайнами. Видно, что при некотором значении коэффициента теплоотдачи α_{cr} на каждой из представленных кривых наблюдается скачкообразное уменьшение расхода, которое соответствует явлению стабилизации вязкого барьера внутри канала. При значениях коэффициента теплоотдачи $\alpha < \alpha_{cr}$ кондуктивный теплообмен со стенок канала гораздо меньше конвективного теплообмена вдоль канала. Поступающая в канал нагретая жидкость практически не охлаждается и незначительное повышение вязкости наблюдается в тонком слое вблизи стенок канала. Толщина этого слоя увеличивается с ростом коэффициента теплоотдачи, что приводит к постепенному уменьшению расхода, наиболее значительно для “широкого” кольцевого зазора с $\delta = 4$.

При $\alpha = \alpha_{cr}$ кондуктивный теплообмен со стенок канала становится сравнимым по величине с конвективным теплообменом вдоль канала, жидкость успевает достаточно охладиться и вблизи выхода из канала формируется вязкий барьер (характерный вид вязкого барьера аналогичен изображенному на рис. 3,б). Расход при этом принимает минимальное значение. При дальнейшем увеличении коэффициента теплоотдачи происходит монотонное увеличение расхода, так как геометрические размеры вязкого барьера уменьшаются, и он постепенно принимает подковообразную форму (см. рис. 3,а). Следует заметить, что при всех значениях геометрического параметра δ на кривой изменения расхода можно выделить практически линейный участок увеличения расхода, который сменяется нелинейным. Это происходит в тот момент, когда центральная часть подковообразного вязкого барьера выходит за пределы канала и вместо одной высоковязкой области образуются две, расположенные параллельно стенкам канала.

При задании достаточно интенсивного теплообмена на стенках канала ($\alpha \rightarrow \infty$) все кривые изменения расхода выходят на стационарное значение, которое несколько меньше, чем расход при малом теплообмене ($\alpha \rightarrow 0$), вследствие наличия в первом случае пристеночных слоев с высокой вязкостью.

Из рис. 5 можно также обнаружить следующие закономерности изменения расхода для различных значений геометрического параметра δ при стремлении коэффициента теплообмена к критическому значению слева и справа: точки на кривых изменения расхода слева от α_{cr} хорошо аппроксимируются полиномом третьей степени, тогда как справа от α_{cr} соответствующие точки лежат практически на одной прямой, т.е.

$$\begin{aligned} \lg Q_{cr}^- &\approx c_3 (\lg \alpha)^3 + c_2 (\lg \alpha)^2 + c_1 \lg \alpha + c_0, \quad \text{при } \alpha \rightarrow \alpha_{cr} - 0 \\ \lg Q_{cr}^+ &\approx a_1 \lg \alpha + a_2, \quad \text{при } \alpha \rightarrow \alpha_{cr} + 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Справедливость зависимостей (3.3) подтверждается также результатами численного моделирования для других значений геометрического параметра δ , не показанных на рис. 5, чтобы не загромождать рисунок. Полученные полином третьей степени и пря-

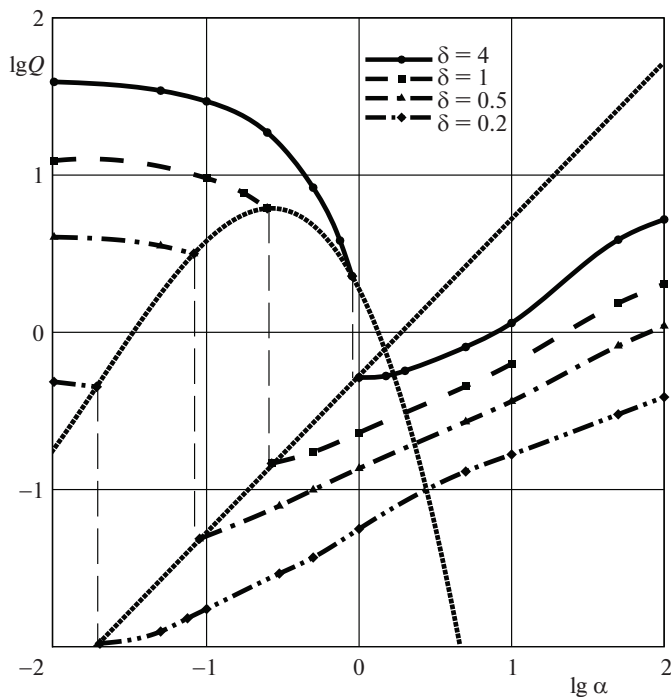


Рис. 5. Зависимость установившегося расхода при течении аномально-термовязкой жидкости от коэффициента теплоотдачи при различных значениях геометрического параметра кольцевого канала.

мая пересекаются, что дает возможность сделать вывод о том, что для кольцевых каналов с достаточно широким зазором ($\delta > 4$) скачок расхода наблюдаться не будет. Этот теоретически установленный факт также нашел свое подтверждение в вычислительных экспериментах.

Наиболее ясное представление о закономерностях скачкообразного изменения расхода дает рис. 6, на котором показаны зависимости критического коэффициента теплоотдачи и относительного изменения расхода от геометрического параметра кольцевого канала.

Рис. 6,а свидетельствует о том, что существует квадратичная зависимость между критическим коэффициентом теплообмена и геометрическим параметром кольцевого канала. Квадратичной зависимостью описывается также связь между относительным изменением расхода в точке разрыва, вычисляемым по формуле $\frac{Q_{cr}^- - Q_{cr}^+}{Q_{cr}^-}$, и геометри-

ческим параметром δ (рис. 6,б). Интерполируя полученную зависимость, можно сделать вывод, что скачок расхода исчезнет (относительное изменение расхода станет равным нулю) при $\delta \approx 8.3$. Таким образом, для кольцевого канала заданной геометрии можно определить как критический коэффициент теплообмена, так и соответствующую величину относительного изменения расхода.

Заключение. Выполненный цикл расчётов по математической модели течения аномально термовязкой жидкости в кольцевом канале позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, обнаружено не только влияние условий теплообмена на закономерности течения жидкости и установление итогового расхода жидкости, аналогично

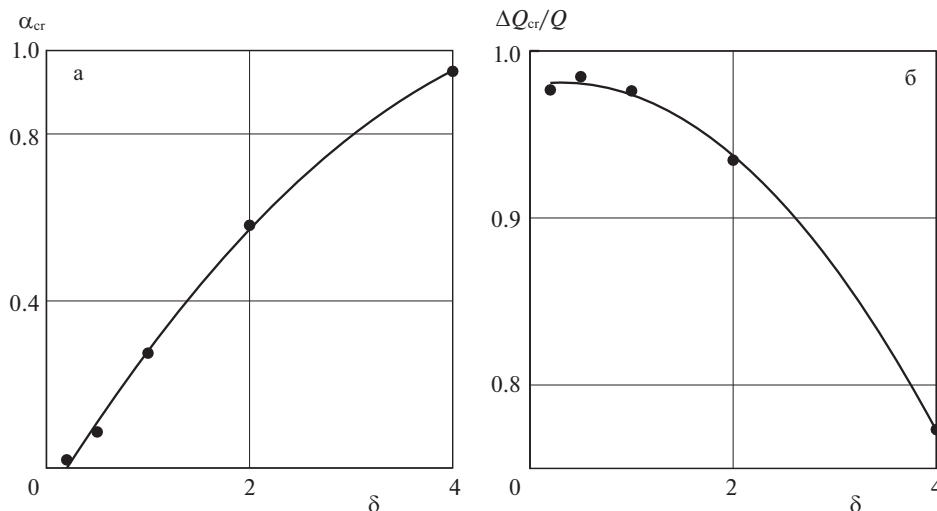


Рис. 6. Зависимость критического коэффициента теплоотдачи (а) и относительного изменения расхода (б) от геометрического параметра кольцевого канала.

случаю плоского канала, но и влияние отношения зазора кольцевого канала к радиусу внутреннего цилиндра, т.е. геометрического параметра. Во-вторых, при увеличении интенсивности теплообмена в области его малых значений, расход плавно снижается до некоторых критических значений коэффициента теплоотдачи, когда происходит резкий скачок в сторону уменьшения расхода. При дальнейшем увеличении интенсивности теплообмена расход также увеличивается при всех значениях геометрического параметра.

Следует отметить, что логарифм предельных значений расхода слева от точки критической величины теплоотдачи для всей совокупности значений геометрического параметра можно аппроксимировать некоторой кубической параболой в зависимости от логарифма коэффициента теплоотдачи. А справа от критической точки — линейной зависимостью этих параметров. Точка пересечения этих линий свидетельствует об отсутствии скачка расхода и, соответственно, критической величины теплообмена для каналов с достаточно большим значением геометрического параметра, в том числе и для полого цилиндра.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00915).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
2. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 438 с.
3. Bacon R.F., Fanelli R. The viscosity of sulfur // J. Am. Chem. Soc. 1943. V. 65. P. 639–648.
4. Tabachnikova E.D., Bengus V.Z., Egorov D.V., Tsepelev V.S., Ocelik V. Mechanical properties of amorphous alloys ribbons prepared by rapid quenching of the melt after different thermal treatments before quenching // Mater. Sci. Eng. A, 1997. V. 226–228. P. 887–890.
5. Алтунина Л.К., Кувшинов В.А., Кувшинов И.В., Стасьева Л.А., Чертенков М.В., Андреев Д.В., Карманов А.Ю. Увеличение нефтеотдачи пермо-карбоновой залежи высоковязкой нефти Усинского месторождения физико-химическими и комплексными технологиями (обзор) // СФУ ж. Химия. 2018. Т. 11. № 3. С. 462–476.

6. Fink J.H., Park S.O., Greeley R. Cooling and deformation of cooling sulfur flow // *Icarus*. 1983. V. 56. № 1. P. 38–50.
7. Урманчиев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 2. С. 204–207.
8. Urmanceev S., Kireev V. The transient flow of liquid with non-monotonous temperature dependent viscosity in a plane channel // *AIP Conf. Proc.* 2017. V. 1906. № 1. P. 200009.
9. Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmanceev S.F. The hydraulic resistance of thermoviscous liquid flow in a plane channel with a variable cross-section // *J. Phys. Conf. Ser.* 2019. V. 1158. № 3. P. 032014.
10. Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчиев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости термовязкой жидкости в плоском канале // *ПММ*. 2019. № 3. С. 454–459.
11. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

Towards Heat Transfer Critical Conditions for Flow of Fluids with a Nonmonotonic Dependence of Viscosity on the Temperature in Annular Channel

V. N. Kireev^{a,#}, A. A. Mukhutdinova^{b,##}, and S. F. Urmanceev^{b,###}

^a*Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia*

^b*Mavlutov Institute of Mechanics UFRS RAS, Ufa, Russia*

[#]*e-mail: kireev@anrb.ru*

^{##}*e-mail: mukhutdinova18@gmail.com*

^{###}*e-mail: said@anrb.ru*

The present work is devoted to mathematical modeling of the features of the flow of fluids with a nonmonotonic dependence of viscosity on temperature, which is inherent in some solutions and melts of polymers, as well as in a number of liquid metal alloys. For a given pressure drop, the critical conditions of heat transfer on the channel walls are found, which determine the fluid flow rate in the process of establishing a flow associated with the formation of a localized high-viscosity region.

Keywords: anomalous thermoviscous liquid, annular channel, critical heat transfer conditions, flow rate

REFERENCES

1. Frenkel J. Kinetic Theory of Liquids. Oxford: Clarendon, 1946. 488 p.
2. Vinogradov G.V., Malkin A.Y. Rheology of Polymers. Berlin; Heidelberg: Springer, 1980. 468 p.
3. Bacon R.F., Fanelli R. The viscosity of sulfur // *J. Am. Chem. Soc.*, 1943, vol. 65, pp. 639–648.
4. Tabachnikova E.D., Bengus V.Z., Egorov D.V., Tsepelev V.S., Ocelik V. Mechanical properties of amorphous alloys ribbons prepared by rapid quenching of the melt after different thermal treatments before quenching // *Mater. Sci. Eng. A*, 1997, vol. 226–228, pp. 887–890.
5. Altunina L.K., Kuvshinov V.A., Kuvshinov I.V., Stasyeva L.A., Chertenkov M.V., Andreev D.V., Karmantov A.Yu. Enhanced oil recovery from permian-carboniferous deposit of high-viscosity oil in the Usinsk oilfield with physicochemical and complex technologies // *J. Sib. Fed. Univ. Chem.*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 462–476.
6. Fink J.H., Park S.O., Greeley R. Cooling and deformation of cooling sulfur flow // *Icarus*, 1983, vol. 56, no. 1, pp. 38–50.
7. Urmanceev S.F., Kireev V.N. Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity // *Dokl. Phys.*, 2004, vol. 49, no. 5, pp. 328–331.
8. Urmanceev S., Kireev V. The transient flow of liquid with non-monotonous temperature dependent viscosity in a plane channel // *AIP Conf. Proc.*, 2017, vol. 1906, no. 1, pp. 200009.
9. Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmanceev S.F. The hydraulic resistance of thermoviscous liquid flow in a plane channel with a variable cross-section // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, no. 3, pp. 032014.
10. Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmanceev S.F. Some features of hydrodynamic instability of a plane channel flow of a thermoviscous fluid // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 978–982.
11. Patankar S. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. N.Y.: Hemisphere, 1980. 214 p.

УДК 532.59+537.29

ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ В ВЯЗКОЙ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ С ПОВЕРХНОСТНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ

© 2023 г. А. А. Очиров^{1,*}, Ю. Д. Чашечкин^{1,**}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: otchirov@mail.ru

**e-mail: yulidch@gmail.com

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.

После доработки 15.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Аналитическими асимптотическими методами исследовано влияние поверхностного электрического заряда на характер и свойства волнового движения свободной поверхности вязкой однородной жидкости. Получены выражения, описывающие дисперсионные зависимости компонент волнового движения. Определены фазовые и групповые скорости структур, формирующих волновое движение.

Ключевые слова: жидкость, вязкость, поверхностный электрический заряд

DOI: 10.31857/S0032823523030116, EDN: ZUJTOQ

1. Введение. Теоретическим исследованиям волновых движений на свободной поверхности жидкости посвящено множество работ. В качестве примера можно привести классические публикации [1–3], обобщающие монографии [4–7] и трактаты [8–10]. Не ослабевает интерес к изучению поверхностных волн и в XXI веке. Поверхностные волны исследуются в различных теоретических подходах и в приложениях, среди которых можно выделить изучение волнового массопереноса [11, 12], перераспределения газовых пузырьков [13], стоячих гравитационных волн [14–16], общих свойств решений и компонент течений в идеальных [17, 18] или вязких [19] стратифицированных жидкостях. Внимание уделяется описанию поверхностных океанических волн, взаимодействующих с ледовым покрытием [20] и ветром [21]. Активно изучаются капиллярные и гравитационно-капиллярные волновые процессы, возникающие на многих этапах эволюции картины течения, порождаемого в принимающей жидкости падающей каплей [22–25].

Практический интерес представляет изучение влияния электрического заряда на процессы, происходящие на поверхности жидкости. В большинстве исследований внимание уделяется определению критерия устойчивости [26, 27] — условия возникновения на поверхности заряженной жидкости конусообразных выступов (конусов Тейлора), с вершин которых происходит эмиссия заряженных электрических капель [28]. Интерес к изучению влияния электрического заряда на процессы на поверхности жидкости не угасает [29–31]. Актуальными становятся исследования, в которых производится учет трансформации поверхностной энергии [32], включающей дополнительную электрическую энергию заряженной поверхности. В настоящей работе исследуется влияние поверхностного электрического заряда на поверхностные волны в вязкой однородной жидкости и присоединенные к ним лигаменты, возникающие в вязких жидкостях.

2. Математическая формулировка задачи. Рассматривается полубесконечная неограниченная вязкая жидкость с кинематической вязкостью ν , заполняющая нижнее полупространство $z < 0$. Расчеты проводятся в декартовой системе координат $Oxyz$, в которой плоскость Oxy совпадает с равновесным положением поверхности жидкости, а ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия поля сил тяжести $\vec{g}$. Жидкость полагается идеально проводящей и считается, что вдоль свободной поверхности распределен поверхностный электрический заряд с равновесной поверхностной плотностью κ_0 . Поверхностная энергия характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения σ или его нормированным на плотность жидкости ρ значением $\gamma = \sigma/\rho$. Ставится задача об оценке влияния поверхностного электрического заряда на дисперсионные зависимости распространяющейся вдоль свободной заряженной поверхности жидкости синусоидального плоского периодического движения $\zeta = \zeta(x, t)$ с частотой ω , при этом считается, что движение жидкости не зависит от поперечной горизонтальной координаты y .

Математическая формулировка задачи состоит из уравнения Навье—Стокса и уравнения неразрывности, которое упрощается, если однородная жидкость несжимаема:

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.2)$$

Здесь $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_z$ — поле скоростей жидкости, а P — давление, которое представляется в виде суммы атмосферного P_0 , электрического, гидростатического и волнового $\tilde{P}$ давлений:

$$P = P_0 + \frac{E_0^2}{8\pi} + \rho g(\zeta - z) + \tilde{P} \quad (2.3)$$

Символом $E_0 = 4\pi\kappa_0$ обозначен модуль вектора напряженности однородного электрического поля, возникающего над невозмущенной равномерно заряженной плоскостью.

В плоской постановке для несжимаемой жидкости можно ввести функцию тока ψ , производные которой задают компоненты скорости жидкости:

$$u = \partial_z \psi, \quad v = -\partial_x \psi \quad (2.4)$$

После линеаризации уравнений (2.1)–(2.2) и подстановки (2.3)–(2.4) получим, что уравнение несжимаемости выполняется автоматически, а уравнение Навье—Стокса примет вид:

$$z < 0: \quad \begin{cases} g\partial_x \zeta + \partial_{xt} \psi + \frac{\partial_x \tilde{P}}{\rho} - \nu \partial_z \Delta \psi = 0 \\ \frac{\partial_z \tilde{P}}{\rho} - \partial_{xt} \psi + \nu \partial_x \Delta \psi = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Избавляясь в (2.5) от волновой части давления получим уравнение на функцию тока:

$$z < 0: \quad \Delta(\partial_t - \nu \Delta) \psi = 0 \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) описывает периодическое течение в толще жидкости, связанное с распространением поверхностной волны. Помимо возмущения поля скоростей и давления происходит возмущение электрического поля и появляется добавка Φ к электрическому потенциалу $\Phi_0 = -E_0 z$ над свободной поверхностью:

$$z > 0: \quad \Delta \Phi = 0 \quad (2.7)$$

Уравнения необходимо дополнить граничными условиями на свободной поверхности, а также условиями затухания движения жидкости с глубиной и постоянства напряженности электрического поля в бесконечно удаленной от заряженной поверхности точке. Граничные условия после линеаризации и процедуры снесения на равновесную поверхность $z = 0$ [33] выглядят следующим образом:

$$z = 0: \begin{cases} \tilde{P} + 2\rho v \partial_{zx} \Psi + \sigma \partial_{xx} \zeta - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi = 0 \\ \partial_t \zeta + \partial_x \Psi = 0 \\ \partial_{zz} \Psi - \partial_{xx} \Psi = 0 \\ \Phi - E_0 \zeta = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \partial_z \Psi \rightarrow 0, \quad \partial_x \Psi \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

Стоит отметить, что в такой постановке поверхностный электрический заряд оказывает влияние на дисперсионные соотношения только через динамическое граничное условие на давление.

3. Решение. Будем искать решение линеаризованной задачи для инфинитезимальных отклонений свободной поверхности (2.6)–(2.10) в виде периодических возмущений с положительно определенной частотой и комплексным волновым числом:

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \zeta \\ \Phi \\ \tilde{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \exp(k_z z) \\ B \\ F \exp(k_z \Phi z) \\ C \exp(k_z z) \end{pmatrix} \exp(ik_x x - i\omega t) \quad (3.1)$$

Погружение задачи в алгебру комплексных чисел приводит к увеличению числа корней. Дополнительные корни традиционно отбраковываются применением физических соображений – в частности, условия затухания решений с удалением от свободной поверхности [8]. Подставляя (3.1) в (2.6)–(2.7) получим дисперсионные соотношения, связывающие компоненты волновых векторов:

$$(k_x^2 - k_z^2)(v(k_x^2 - k_z^2) - i\omega) = 0 \quad (3.2)$$

и для добавки к электрическому потенциалу:

$$k_{z\Phi}^2 = k_x^2 \quad (3.3)$$

Полный набор решений алгебраического уравнения четвертой степени (3.2) включает корни двух видов:

$$k_z = \pm k_x, \quad k_l = \pm \sqrt{k_x^2 - i \frac{\omega}{v}} \quad (3.4)$$

Первые из них описывают волновое движение (обозначены k_z). Вторые определяют присоединенный к волновому движению лигамент – тонкую компоненту течения, проявляющуюся в виде тонких струек, сопровождающих волну. Здесь введено обозначение k_l для различия корней.

Математически лигаментные компоненты описываются корнями дисперсионных уравнений, для которых справедливо соотношение $\text{Re } k_l \sim \text{Im } k_l$, тогда как волновые компоненты течения характеризуются корнями, которым свойственно $\text{Re } k_z \gg \text{Im } k_z$.

Вид решения для функции тока с учетом (3.4) запишется следующим образом:

$$\Psi = A(\exp(k_z z) + \beta \exp(k_l z)) \exp(ik_x x - i\omega t) \quad (3.5)$$

Ротор поля скоростей с учетом (2.4) и (3.5) определяется

$$\operatorname{rot} \vec{u} = A \exp(ik_x x - i\omega t) \left(k_x^2 (e^{k_z z} + \beta e^{k_l z}) - (k_z^2 e^{k_z z} + \beta k_l^2 e^{k_l z}) \right) \quad (3.6)$$

И с учетом (3.4) преобразуется в выражение

$$\operatorname{rot} \vec{u} = A\beta \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_l z) (k_x^2 - k_l^2) \quad (3.7)$$

Из (3.7) видно, что волновая компонента течения k_z , в отличие от лигаментной компоненты k_l , не участвует в описании вихревой составляющей периодического течения.

Решение уравнения (3.3) записывается в виде:

$$k_{z\Phi} = \pm k_x \quad (3.8)$$

Выбор корней в (3.4), (3.8) определяется условиями физической реализации (2.9)–(2.10):

$$\operatorname{Re} k_{z,l} > 0, \quad \operatorname{Re} k_{z\Phi} < 0 \quad (3.9)$$

Условие (3.9) дополняется условием действительности частоты волнового движения $\operatorname{Im} \omega = 0$.

Подставим решение (3.1) с учетом (3.4) в граничные условия (2.8) и получим связь между константами, определяющими физические поля (функцию тока, отклонение свободной поверхности и добавку к электрическому потенциалу):

$$\begin{aligned} B &= A \frac{k_x}{\omega} (1 + \beta), \quad \beta = -\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} = -\frac{2k_x^2}{2k_x^2 - i\omega/\nu} \\ F &= E_0 B = E_0 A \frac{k_x}{\omega} (1 + \beta), \quad C = Ak_x \rho \left(\frac{k_x^2 \gamma}{\omega} - \frac{2i(k_z + k_l \beta)\nu}{1 + \beta} + \frac{k_{z\Phi} E_0}{4\pi \rho \omega} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя (3.10), динамическое граничное условие на давление (2.8) и уравнение Навье–Стокса (2.5) получим уравнение:

$$-\partial_{zll}\Psi + \nu \partial_{lzz}\Delta\Psi + (g - k_x W \sqrt{g\gamma}) \partial_{xx}\Psi + 2\nu \partial_{xxzl}\Psi - \gamma \partial_{xxxx}\Psi = 0, \quad (3.11)$$

которое при подстановке (3.1) и (3.4) приводит к дисперсионному соотношению:

$$gk_x - 4k_x^2 \nu^2 - k_x^2 W \sqrt{g\gamma} - \omega^2 + k_x^3 \left(\gamma + 4\nu^2 \sqrt{k_x^2 - \frac{i\omega}{\nu}} \right) = 0; \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi \sqrt{\rho g \sigma}} \quad (3.12)$$

Здесь символом W обозначено отношение плотности энергии поля и потенциальной поверхностной энергии (параметр Тонкса–Френкеля). Анализ дисперсионного уравнения (3.12) проведем в безразмерных переменных. В качестве параметров безразмеривания выберем собственные масштабы задачи: временной – $\tau_v^l = \gamma/(\nu g)$ и пространственный – $\delta_g^v = \sqrt[3]{\nu^2/g}$. При выбранных параметрах естественным образом возникает малый параметр $\varepsilon = \sqrt[6]{g\nu^4/\gamma^3}$ и с точностью до слагаемых, порядка $o(\varepsilon^6)$ дисперсионное уравнение, связывающее безразмерную компоненту волнового вектора k_{x*} и частоту ω_* , принимает вид:

$$k_{x*}^3 + \varepsilon^2 k_{x*} - \frac{\varepsilon^6 \omega_*}{2} - \varepsilon k_{x*}^2 (W + 2i\varepsilon^3 \omega_*) = 0 \quad (3.13)$$

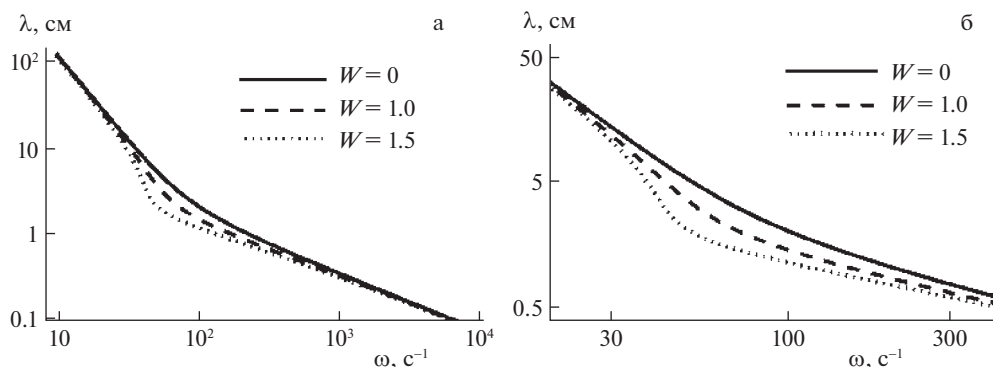


Рис. 1. Зависимость длины волны от частоты волнового движения в жидкости с параметрами воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 72 \text{ дин/см}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$) при различных значениях параметра Тонкса–Френкеля ($W = 0; 1.0; 1.5$) в диапазоне частот а: $\omega = 10\text{--}10^4 \text{ с}^{-1}$, б: $\omega = 20\text{--}400 \text{ с}^{-1}$.

Дисперсионное уравнение (3.11) имеет три корня:

$$\begin{aligned} k_{1x*} &= \frac{\epsilon \alpha^{1/3}}{3 \times 2^{1/3}} + \frac{1}{3} (\epsilon W + 2i\epsilon^4 \omega_*) - \frac{2^{1/3}}{3\epsilon \alpha^{1/3}} \left(3\epsilon^2 - (\epsilon W + 2i\epsilon^4 \omega_*)^2 \right) \\ k_{2,3x*} &= \frac{(1 \mp i\sqrt{3})\epsilon}{6 \times 2^{1/3}} \left[\alpha^{1/3} + \frac{2^{2/3}}{\alpha^{1/3}} \left(3 - (W + 2i\epsilon^3 \omega_*)^2 \right) \right] + \frac{\epsilon}{3} (W + 2i\epsilon^3 \omega_*), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= -9W + 2W^3 - 18i\epsilon^3 \omega_* + 12i\epsilon^3 W^2 \omega_* + \frac{27}{2} \epsilon^3 \omega_*^2 - 24\epsilon^6 W \omega_*^2 - 16i\epsilon^9 \omega_*^3 + \\ &+ \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{16 + 8\epsilon^3 W^3 \omega_*^2 + W^2 (-4 + 48i\epsilon^6 \omega_*^3) - 4\epsilon^3 W \omega_* (4i + 9\omega_* + 24\epsilon^6 \omega_*^3) +} \\ &+ \epsilon^6 \omega_*^2 (16 + \omega_* (-72i + \omega_* (27 - 64i\epsilon^6 \omega_*))) \end{aligned}$$

Анализ корней дисперсионного уравнения (3.14) показывает, что условиям физической реализации (3.9) и определению частоты, как действительной положительной величины, с учетом соотношений (3.4) удовлетворяет только решение k_{1x*} .

Исследуем дисперсионные соотношения. Определим зависимость длины волны λ от частоты волнового движения для волнового решения и аналогичную зависимость линейного масштаба лигамента δ_l от частоты для тонкого неволнового решения:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_z)^2}}, \quad \delta_l = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_l)^2}} \quad (3.15)$$

На рис. 1,а представлены зависимости длины волны от частоты волнового движения при разных значениях параметра Тонкса–Френкеля для жидкости с параметрами воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 72 \text{ дин/см}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$). На рис. 1,б в более крупном масштабе изображена область, в которой выражено влияние поверхностного электрического заряда.

Анализ показывает, что поверхностный электрический заряд оказывает заметное влияние в области частот, соответствующих капиллярно-гравитационным волнам: увеличение поверхностного заряда, приводит к уменьшению длины волны волновой компоненты движения при выбранной частоте.

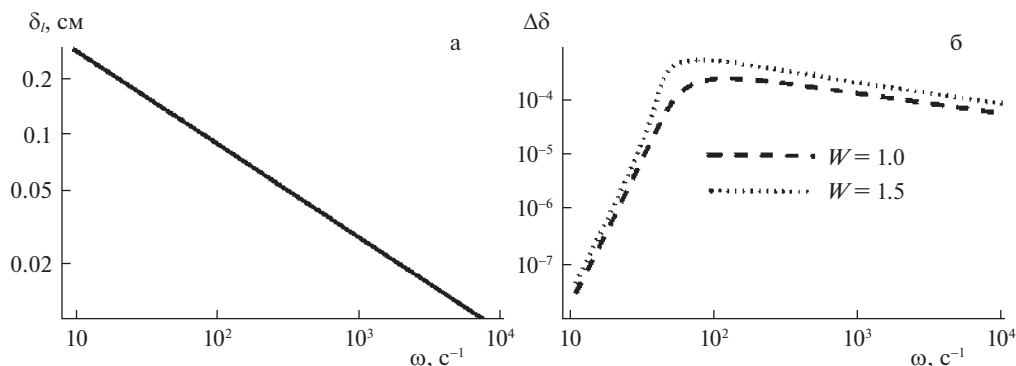


Рис. 2. а: Зависимость линейного размера лигаментной компоненты от частоты в жидкости с параметрами воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 72 \text{ дин/см}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$) при различных значениях параметра Тонкса–Френкеля ($W = 0; 1.0; 1.5$) в диапазоне частот $\omega = 10\text{--}10^4 \text{ с}^{-1}$; б: зависимость отношения разности масштабов лигаментов в заряженной δ_{lch} и незаряженной δ_l жидкости, к их сумме $\Delta\delta$ от частоты волнового движения при различных значениях параметра Тонкса–Френкеля ($W = 1; 1.5$) в диапазоне частот $\omega = 10\text{--}10^4 \text{ с}^{-1}$.

Построим аналогичные зависимости для неволновой компоненты движения. На рис. 2,а представлены зависимости линейного масштаба присоединенного лигамента от частоты волнового движения при разных значениях параметра Тонкса–Френкеля для жидкости с параметрами воды. Из рис. 2 видно, что поверхностный заряд практически не оказывает влияния на лигамент, присоединенный к поверхностной волне (толщина линий на графике не позволяет разрешить разницу между компонентами течения в незаряженной и заряженной жидкости). Из рассмотрения графика зависимости отношения разности масштабов лигаментов в заряженной δ_{lch} и незаряженной δ_l жидкости, к их сумме

$$\Delta\delta(\omega) = \frac{\delta_{lch}(\omega) - \delta_l(\omega)}{\delta_{lch}(\omega) + \delta_l(\omega)}$$

от частоты, приведенного на рис. 2б, следует, что значение $\Delta\delta$ для жидкости с параметрами воды и Тонкса–Френкеля $W = 1.0, 1.5$ максимально в окрестности частоты $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$, монотонно убывает с отклонением от этого значения и не превышает 0.1%.

Проследим за линиями тока вблизи свободной поверхности жидкости. Подставим полученные дисперсионные соотношения в решение (3.1) и построим линии тока для жидкости при различных значениях поверхностного электрического заряда. На рис. 3а построены линии тока для незаряженной поверхности воды возникающие при распространении волны с частотой $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ с учетом (выражения (3.5), кривые изображены сплошными линиями) и без учета (пунктирные линии) лигаментных компонент течения на масштабах нескольких длин волн. Выражение без учета лигаментных компонент построено для функции тока:

$$\psi = A \exp(k_z z) \exp(ik_x x - i\omega t)$$

На рис. 3,б изображены те же зависимости, но на масштабах нескольких лигаментов. На рис. 4 и рис. 5 изображены аналогичные зависимости при значении параметра

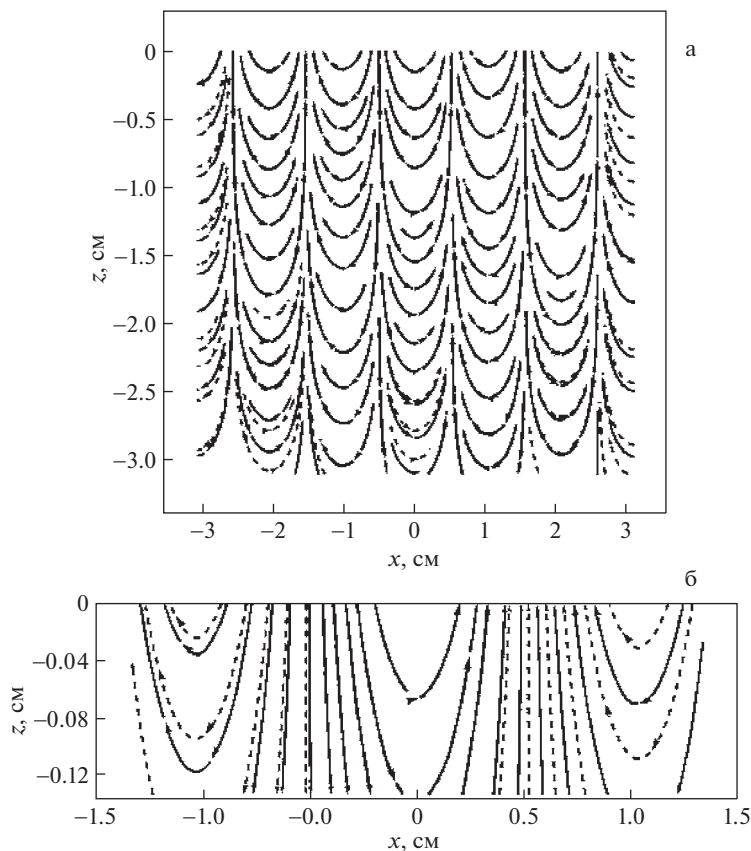


Рис. 3. Линии тока в жидкости с параметрами воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 72 \text{ дин/см}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$) в начальный момент времени $t = 0 \text{ с}$, возникающие при волновом возмущении поверхности с частотой $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ при отсутствии поверхностного электрического заряда ($W = 0$) с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктирные линии) лигаментной компоненты волнового движения на характерных масштабах длины волны — а; и лигамента — б.

Тонкса—Френкеля $W = 1.0$ и $W = 1.5$ соответственно. Из рисунков видно, что поверхностный электрический заряд оказывает влияние на волновую компоненту течения: его увеличение приводит к уменьшению длины волны — характерного размера волновой компоненты течения. Даже на масштабах длин волн видно, что линии тока, построенные без учета лигаментной компоненты, отличаются от линий тока, построенные с учетом всех компонент течения. Еще более ярко отличия проявляются на малых масштабах, сравнимых с характерными размерами лигаментов δ_l . Учет тонких компонент позволяет строить более точную картину течения. Несмотря на малость абсолютных величин, тонкие течения вносят весомый вклад на малых масштабах за счет большой плотности переносимой энергии.

Рассмотрим влияние поверхностного электрического заряда на групповые c_{gr} и фазовые c_{ph} скорости волнового и их аналогов c_{grl} , c_{phl} лигаментной компоненты течения. На рис. 6, а представлены искомые зависимости для волновой компоненты течения от частоты при разных значениях параметра Тонкса—Френкеля для жидкости

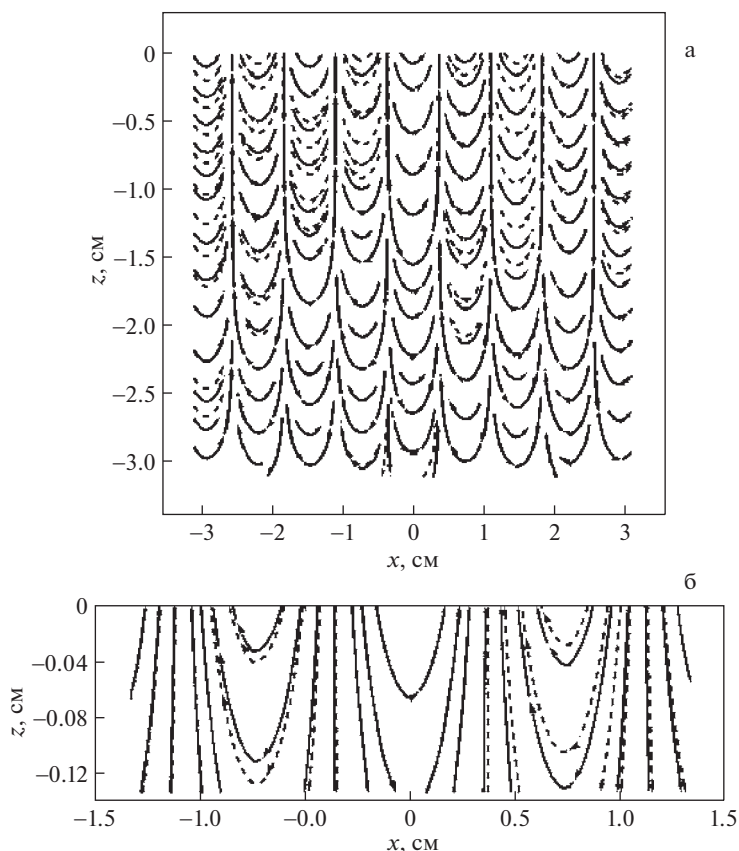


Рис. 4. Линии тока в жидкости с параметрами воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 72 \text{ дин/см}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$) в начальный момент времени $t = 0 \text{ с}$, возникающие при волновом возмущении поверхности с частотой $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ при значении параметра Тонкса–Френкеля $W = 1.0$ с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктирные линии) лигаментной компоненты волнового движения на характерных масштабах длины волны – а; и лигамента – б.

с параметрами воды, построенные с использованием решений (3.4), (3.14). На рис. 6, б изображена область в диапазоне частот, в котором влияние поверхностного электрического заряда оказывается заметным. На рис. 7, а, б изображены аналогичные зависимости от длины волны.

Влияние поверхностного электрического заряда на волновую компоненту течения сказывается в области капиллярно-гравитационных волн. Увеличение поверхностного электрического заряда приводит к уменьшению минимальных значений групповой и фазовой скоростей и смещению экстремумов в область более низких частот (больших длин волн). Аналогичным образом ведет себя значение частоты, при которой происходит резонанс фазовой и групповой скоростей. Анализ показывает, что поверхностный электрический заряд не оказывает значимого влияния на лигаментная компонента течения. На рис. 8, а, б приведены зависимости аналогов групповой и фазовой скоростей лигаментную компоненту от частоты и пространственного масштаба соответственно для незаряженной жидкости ($W = 0$).

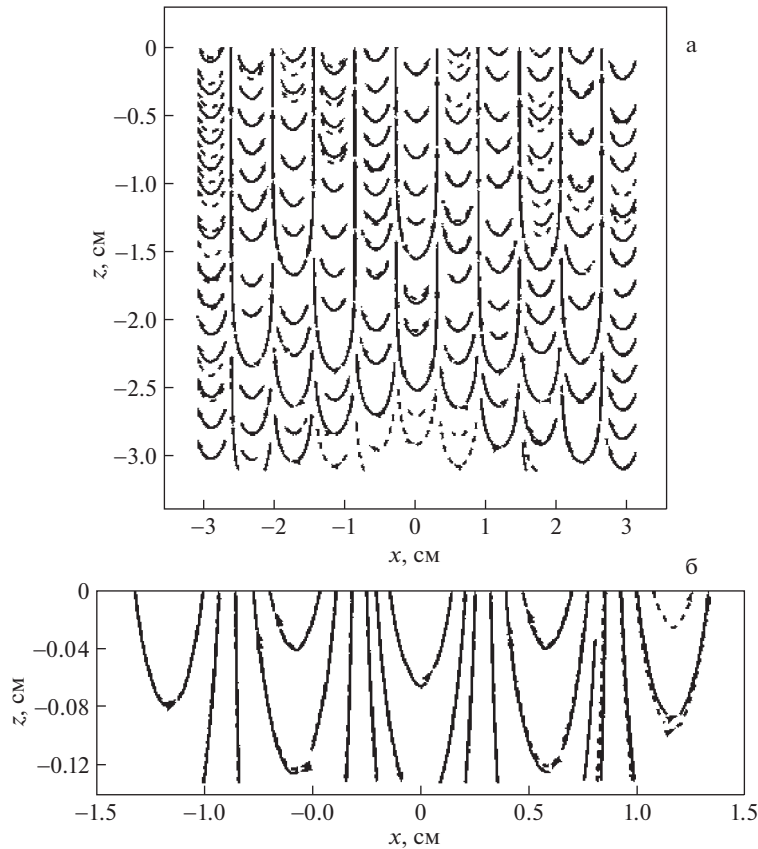


Рис. 5. Линии тока в жидкости с параметрами воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 72 \text{ дин/см}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$) в начальный момент времени $t = 0 \text{ с}$, возникающие при волновом возмущении поверхности с частотой $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ при значении параметра Тонкса–Френкеля $W = 1.5$ с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктирные линии) лигаментной компоненты волнового движения на характерных масштабах длины волны – а; и лигамента – б.

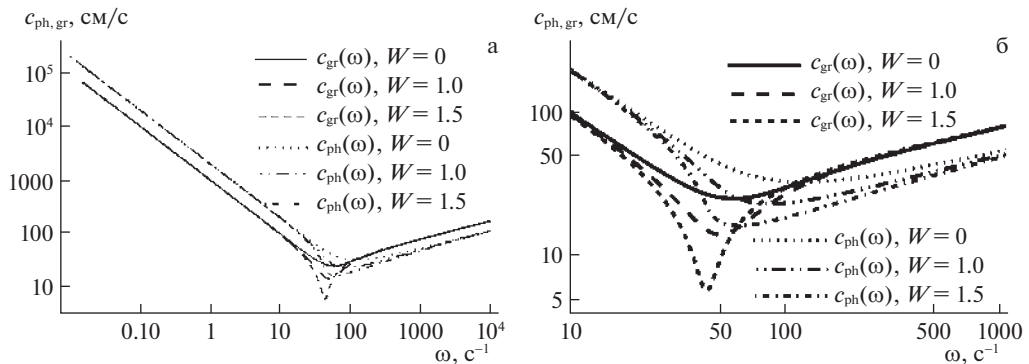


Рис. 6. Зависимость фазовой и групповой скорости от частоты в жидкости с параметрами воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 72 \text{ дин/см}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$) при различных значениях параметра Тонкса–Френкеля ($W = 0; 1.0; 1.5$) – а; в более крупном масштабе – б.

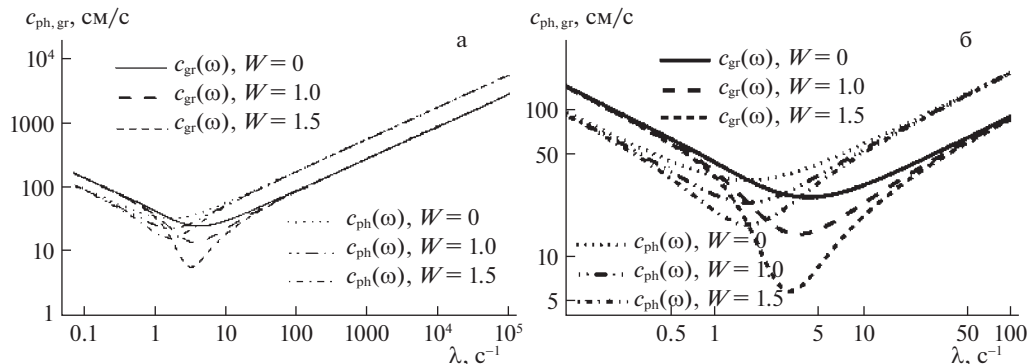


Рис. 7. Зависимость фазовой и групповой скорости от длины волны в жидкости с параметрами воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 72 \text{ дин/см}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$) при различных значениях параметра Тонкса–Френкеля ($W = 0; 1.0; 1.5$) – а; в более крупном масштабе – б.

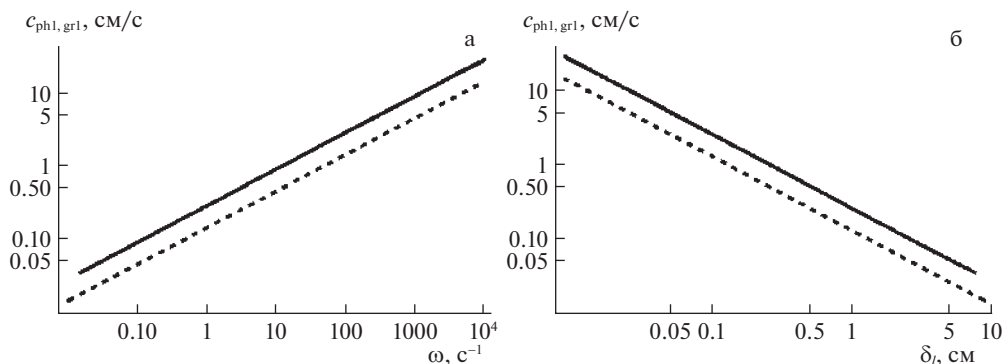


Рис. 8. Зависимость фазовой (пунктирная линия) и групповой (сплошная линия) скорости лигаментной компоненты течения в незаряженной жидкости с параметрами воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 72 \text{ дин/см}$, $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$, $W = 0$) от частоты – а; линейного размера – б.

Заключение. Поверхностный электрический заряд оказывает заметное влияние на волновую компоненту течения в области капиллярно-гравитационных волн. Увеличение поверхностного электрического заряда приводит к уменьшению минимальных значений групповой и фазовой скоростей, при этом наблюдается сдвиг этих значений в область более низких частот. В вязкой жидкости помимо волновой компоненты течения существует неволновая компонента – лигамент, отвечающая за тонкие присоединенные течения. Влияние поверхностного электрического заряда на эту компоненту поверхностного волнового движения незначительно. Учет всех компонент волнового движения позволяет строить корректные картины течения, в частности линии тока.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rayleigh On waves // Phil. Mag. 1876. V. 1. P. 257–259.
2. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Trans. Cam. Philos. Soc. 1847. V. 8. P. 441–455.
3. Сметенский Л.Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1941. № 541. С. 1–34.

4. Лэмб Г. Гидродинамика. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. С. 928.
5. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
6. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях М.: Мир, 1981. 598 с.
7. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Int. Ser. Monographs on Physics. Oxford: Clarendon, 1961. 685 p.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М.: ГИФМЛ, 1963. 585 с.
10. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959. 700 с.
11. Чашечкин Ю.Д. Перенос вещества окрашенной капли в слое жидкости с бегущими плоскими гравитационно-капиллярными волнами // Изв. РАН. ФАО. 2022. Т. 58. № 2. С. 218–229.
12. Grzonka L., Cieřlikiewicz W. Mass transport induced by nonlinear surface gravity waves // Copernicus Meetings. 2023. № EGU23-16788.
13. Druzhinin O.A., Tsai W.T. Numerical simulation of micro-bubbles dispersion by surface waves // Algorithms. 2022. Т. 15. № 4. С. 110.
14. Калинин В.А. Регуляризация гравитационных баротропных волн в двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 6. С. 25–37.
15. Калинин В.А. Стоячие гравитационные волны на поверхности вязкой жидкости // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 3. С. 370–380.
16. Абрашкин А.А., Бодунова Ю.П. Пространственные стоячие волны на поверхности вязкой жидкости // Тр. НГТУ им. Р.Е. Алексеева. МЖГ. 2011. № 2 (87). С. 49–54.
17. Руденко А.И. Два типа волн в двухслойной стратифицированной жидкости // Акт. пробл. прикл. матем., информ. и мех. 2022. С. 1450–1456.
18. Чашечкин Ю.Д., Очиров А.А., Лапина К.Ю. Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // Физ.-хим. кин. в газ. дин. 2022. Т. 23. Вып. 6.
19. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11. № 8. P. 402.
20. Roach L.A. et al. Advances in modeling interactions between sea ice and ocean surface waves // J. Adv. in Modeling Earth Syst. 2019. V. 11. № 12. P. 4167–4181.
21. Buckley M.P., Veron F. The turbulent airflow over wind generated surface waves // Eur. J. Mech.-B/Fluids. 2019. V. 73. P. 132–143.
22. Ersoy N.E., Eslamian M. Capillary surface wave formation and mixing of miscible liquids during droplet impact onto a liquid film // Phys. Fluids. 2019. Т. 31. № 1. С. 012107.
23. Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Тонкая структура картины растекания свободно падающей капли в покоящейся жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 3–8.
24. Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // Вестн. НГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2021. № 1 (94). С. 73–91.
25. Чашечкин Ю.Д. Эволюция тонкой структуры распределения вещества свободно падающей капли в смешивающихся жидкостях // Изв. РАН. ФАО. 2019. Т. 55. № 3. С. 67–77.
26. Tonks L. A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // Phys. Rev. 1935. Т. 48. № 6. С. 562.
27. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
28. Taylor G.I. Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. London. 1964. V. A280. P. 383–397.
29. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Нелинейные монопольное и дипольное акустические излучения слабо заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 938–957.
30. Журавлева Е.Н. и др. Новый класс точных решений в плоской нестационарной задаче о движении жидкости со свободной границей // ТМФ. 2020. Т. 202. № 3. С. 393–402.
31. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности глубокой маловязкой электропроводной жидкости // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 3. С. 5–13.
32. Chashechkin Yu.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. Т. 10. № 4. С. 286.
33. Найфэ А. Введение в методы возмущений М.: Мир, 1984. 535 с.

Wave Motion in a Surface Electric Charged Viscous Homogeneous Liquid

A.A. Ochirov^{a,#} and Yu. D. Chashechkin^{a,##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: otchirov@mail.ru*

^{##}*e-mail: yulidch@gmail.com*

The influence of the surface electric charge on the character and properties of wave motion along the free surface of a viscous homogeneous liquid has been investigated by analytical asymptotic methods. Expressions describing the dispersion dependences of the wave motion components are obtained. The phase and group velocities of the structures forming the wave motion are determined.

Keywords: liquid, viscosity, surface electric charge

REFERENCES

1. Rayleigh On waves // *Phil. Mag.*, 1876, vol. 1, pp. 257–259.
2. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // *Trans. Cam. Philos. Soc.*, 1847, vol. 8. pp. 441–455.
3. Sretenskii L.N. On waves on the surface of a viscous fluid // *Tr. TsAGI*, 1941, no. 541, pp. 1–34. (in Russian)
4. Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge: Univ. Press, 1924.
5. Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. N.Y.: Wiley, 1999. 660 p.
6. Lighthill J. *Waves in Fluids*. Cambridge: Univ. Press, 1978. 524 p.
7. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Int. Ser. of Monographs on Physics. Oxford: Clarendon, 1961 685 p.
8. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics. V. 6. Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon, 1987; 560 p.
9. Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Theoretical Hydromechanics*. Intersci. Pub., 1964, vol. 1.
10. Levich V.G. *Physicochemical Hydrodynamics*, Englewood Cliffs. N.Y.: Prentice-Hall, 1962.
11. Chashechkin Yu.D. Transfer of the substance of a colored drop in a liquid layer with travelling plane gravity-capillary waves // *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2022, vol. 58, pp. 188–197. <https://doi.org/10.1134/S0001433822020037>
12. Grzonka L., Cieřlikiewicz W. Mass transport induced by nonlinear surface gravity waves // *Copernicus Meetings*, 2023, no. EGU23-16788.
13. Druzhinin O.A., Tsai W.T. Numerical simulation of micro-bubbles dispersion by surface waves // *Algorithms*, 2022, vol. 15, no. 4, pp. 110.
14. Kalinichenko V.A. Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 6, pp. 761–773.
15. Kalinichenko V.A. Standing gravity waves on the surface of a viscous liquid // *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 891–899.
16. Abrashkin A.A., Bodunova Yu.P. Spatial standing waves on the surface of viscous fluid // *Tr. Nizhegorod. Gos. Tekh. Univ. im. R.E. Alekseeva, Mekh. Zhidk. Gaza*, 2011, no. 2 (87), pp. 49–54.
17. Rudenko A.I. Two types of waves in a two-layer stratified liquid // *Act. Probl. of Appl. Math., Comput. Sci.&Mech.*, 2022, pp. 1450–1456.
18. Chashechkin Yu., Ochirov A., Lapshina K.Y. Surface waves along the interface of stably stratified liquids // *Phys.-Chem. Kin. in Gas Dyn.*, 2022, vol. 23, iss. 6.
19. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 8, pp. 402.
20. Roach L.A. et al. Advances in modeling interactions between sea ice and ocean surface waves // *J. Adv. in Modeling Earth Syst.*, 2019, vol. 11, no. 12, pp. 4167–4181.
21. Buckley M.P., Veron F. The turbulent airflow over wind generated surface waves // *Eur. J. Mech.-B/Fluids*, 2019, vol. 73, pp. 132–143.

22. Ersoy N.E., Eslamian M. Capillary surface wave formation and mixing of miscible liquids during droplet impact onto a liquid film // *Phys. Fluids*, 2019, vol. 31, no. 1, pp. 012107.
23. Il'inykh A.Y., Chashechkin Yu.D. Fine structure of the spreading pattern of a freely falling droplet in a fluid at rest // *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 4, pp. 445–450.
24. Chashechkin Yu.D. Packages of capillary and acoustic waves of the impact of a drop // *Bull. of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.*, 2021, no. 1 (94), pp. 73–91.
25. Chashechkin Yu.D. Evolution of the fine structure of the matter distribution of a free-falling droplet in mixing liquids // *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2019, vol. 55, pp. 285–294.
<https://doi.org/10.1134/S0001433819020026>
26. Tonks L. A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // *Phys. Rev.*, 1935, vol. 48, no. 6, pp. 562.
27. Frenkel Ya.I. The Tonks theory on disruption of liquid surface by constant electric field in vacuum // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 348–350. (in Russian)
28. Taylor G.I. Disintegration of water drops in an electric field // *Proc. Roy. Soc. London*, 1964, vol. A280, pp. 383–397.
29. Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Y., Shiryayeva S.O. Nonlinear monopole and dipole acoustic radiation of a weakly charged droplet oscillating in a uniform electrostatic field // *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 982–997.
30. Zhuravleva E.N. *et al.* A new class of exact solutions in the planar nonstationary problem of motion of a fluid with a free boundary // *Theor. & Math. Phys.*, 2020, vol. 202, no. 3, pp. 344–351.
31. Belonozhko D.F., Grigor'ev A.I. Nonlinear periodic waves on the charged surface of a deep low-viscosity conducting liquid // *Tech. Phys.*, 2004, vol. 49, no. 3, pp. 287–295.
32. Chashechkin Yu.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 286.
33. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Technique*. N.Y.: John Wiley & Sons, 1993. 536 p.

УДК 53.043:532.6:537.29

**О НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ РЕАЛИЗАЦИИ
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ
ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В БАССЕЙНЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ**

© 2023 г. А. И. Григорьев^{1,*}, С. О. Ширяева^{2,**}, В. А. Коромыслов^{3,***}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

³Петербургский государственный университет путей сообщений Императора Александра I.
Ярославский филиал, Ярославль, Россия

*e-mail: grigorai@mail.ru

**e-mail: shir@uniyar.ac.ru

***e-mail: s_myslov@mail.ru

Поступила в редакцию 31.10.2022 г.

После доработки 01.02.2023 г.

Принята к публикации 15.03.2023 г.

Рассмотрены физические закономерности реализации электростатической неустойчивости плоской заряженной поверхности несжимаемой вязкой проводящей жидкости в бассейне конечных размеров, где спектр появляющихся капиллярных волн дискретен. Показано, что критические условия начала электростатической неустойчивости несжимаемой вязкой проводящей жидкости в бассейне конечных размеров, совпадают с таковыми для безграничной поверхности бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости (совпадают с условиями реализации неустойчивости Тонкса—Френкеля). Это позволяет при экспериментальной проверке критерия реализации неустойчивости Тонкса—Френкеля пользоваться бассейнами конечных размеров, не допуская принципиальных ошибок.

Ключевые слова: плоская поверхность жидкости, электростатическое и гравитационное поля, электростатическая неустойчивость

DOI: 10.31857/S0032823523030037, EDN: ZSLXLQ

1. Введение. Исследование электростатических неустойчивостей жидкостных объектов, обладающих собственным или индуцированным электрическим зарядом, началось еще в конце XIX века, когда Рэлей [1, 2] строго теоретически показал, что максимальный заряд Q , который может нести капля идеальной идеально проводящей жидкости радиуса R , определяется критерием:

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3} = 1,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. При значениях параметра $W \geq 1$, удовлетворяющих записанному выше неравенству, реализуется электростатическая неустойчивость поверхности капли, вследствие чего она распадается на более мелкие сильно заряженные дочерние капельки.

Аналогичная ситуация складывается и для незаряженной капли электропроводной жидкости, помещенной в однородное электростатическое поле напряженностью E_0 , а критерий неустойчивости согласно Тейлору [3], имеет вид:

$$w \equiv \frac{E_0^2 R}{16\pi\sigma} \geq 0.052$$

В начале прошлого века экспериментально показано [4, 5], что так же ведет себя и мениск жидкости на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему.

Все упомянутые критерии электростатических неустойчивостей неоднократно проверялись экспериментально [3, 6–9].

Поверхность сильно заряженной струи идеальной электропроводной жидкости радиуса R становится электростатически неустойчивой и распадается на отдельные капельки при выполнении критерия [10]:

$$W_j \equiv \frac{\mu^2}{\pi R \sigma} \geq 2.905,$$

где μ — заряд, приходящийся на единицу длины струи. При выполнении указанного критерия с конца струи выбрасываются на два порядка более мелкие струйки, (так, что конец струи становится похожим на разветвленную веточку, как показано в экспериментах [11, 12]), и они-то распадаются на капельки.

Если взять неограниченную плоскую поверхность идеальной бесконечно глубокой несжимаемой электропроводной жидкости в суперпозиции перпендикулярных ей электростатическом E_0 и гравитационном g коллинеарных полях, то получим еще один объект, который может претерпевать электростатическую неустойчивость. Эта неустойчивость получила название неустойчивости Тонкса—Френкеля по именам ее первых исследователей [13, 14]. В начале прошлого века ее теоретически исследовали независимо друг от друга Тонкс и Френкель. Тонкс [13] первым провел свое исследование и вывел на качественном уровне критерий реализации электростатической неустойчивости. Френкель [14] для той же идеализированной модели решил эту задачу строго математически. Он в линейном приближении по амплитуде капиллярно-гравитационной волны на заряженной поверхности жидкости решил задачу определения устойчивости капиллярно-гравитационных волн строго и вывел критерий реализации неустойчивости в виде:

$$W_{\text{tf}} \equiv \left(\frac{E_0^2 \sqrt{\rho \sigma g}}{4\pi} \right) \geq 2,$$

где ρ — плотность жидкости, W_{tf} — безразмерный параметр Тонкса—Френкеля. Он характеризует устойчивость плоской поверхности жидкости по отношению к равномерно распределенному по ней электрическому заряду. При выполнении этого критерия поверхность жидкости покрывается эмиттирующими выступами, с вершин которых отрываются маленькие капельки, см. рис. 1. Экспериментальная проверка этого критерия была проведена в [15, 16], (см., например, рис. 1,а). Но она проводилась для реальных жидкостей в бассейнах конечных размеров тогда, как и Тонкс, и Френкель свои теоретические построения проводили на модели неограниченной поверхности бесконечно глубокой несжимаемой электропроводной идеальной жидкости. Здесь и возникает тема настоящего исследования: могут ли эксперименты, выполненные для реальной жидкости в бассейнах конечных по всем осям размеров, служить обоснованием теорий, построенных для идеализированных математических моделей для бесконечного пространства?

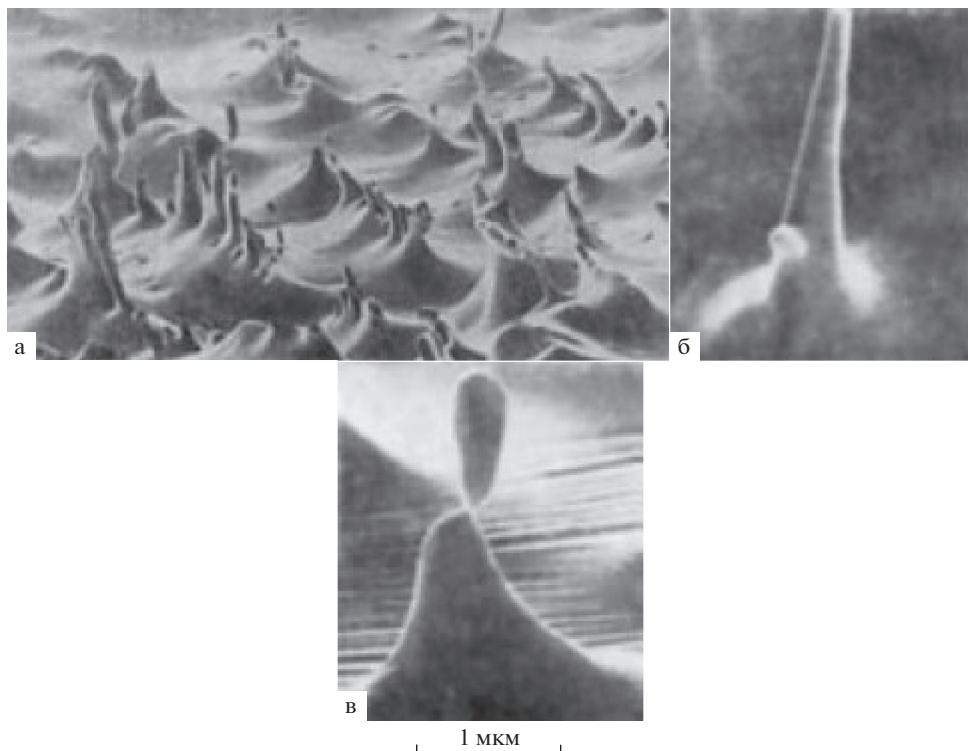


Рис. 1. Фотографии а: неустойчивой поверхности жидкой меди по отношению к индуцированному внешним электростатическим полем поверхностному заряду из [16] (Неустойчивая поверхность расплавленного металла в бассейне конечных размеров была зафиксирована мгновенным охлаждением с помощью жидкого газа); б: единичного эмиттирующего выступа и в: капельки, отрывающейся от эмиттирующего выступа из [16].

2. Краткий вывод критерия неустойчивости Тонкса—Френкеля. Френкель в идеализированной модели однородно заряженной безграничной плоской поверхности идеальной, несжимаемой, идеально проводящей, бесконечно глубокой жидкости строго теоретически решил задачу реализации электростатической неустойчивости и вывел критерий начала реализации неустойчивости. В декартовой системе координат с осью OZ , направленной вертикально вверх перпендикулярно поверхности жидкости и коллинеарно ускорению свободного падения $\mathbf{g}$ и напряженности однородного электростатического поля, и плоскостью OXY , совпадающей с равновесной плоской поверхностью жидкости, он сформулировал задачу [14]:

$$z > 0 : \Delta\Phi(x, z, t) = 0, \quad z \leq 0 : \Delta\psi(x, z, t) = 0, \quad z = 0 : \frac{\partial\xi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi(x, z, t)}{\partial z}$$

$$-\rho g \xi(x, t) - \rho \frac{\partial\psi(x, z, t)}{\partial t} - \kappa_0 \frac{\partial\Phi(x, z, t)}{\partial z} + \sigma \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\Phi(x, z, t) - 4\pi\kappa_0 \xi(x, t) = 0$$

$$z \rightarrow \infty : |\nabla\Phi(x, z, t)| \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty : |\nabla\psi(x, z, t)| \rightarrow 0$$

Здесь t — время; $\xi = \xi(x, t)$ — отклонение свободной поверхности жидкости от плоской равновесной формы; $\kappa_0 = E_0/4\pi$ — поверхностная плотность электрического заряда в равновесном состоянии; $\psi = \psi(x, z, t)$ — гидродинамический потенциал поля скоростей в жидкости, обусловленный возмущением ее свободной поверхности; $\Phi = \Phi(x, z, t)$ — добавка к величине электрического потенциала над поверхностью жидкости, вызванная отклонением формы этой поверхности от равновесной плоской. Для простоты, движение жидкости примем не зависящим от координаты y . С целью дальнейшего упрощения перейдем к безразмерным переменным, в которых $\rho = g = \sigma = 1$. За всеми физическими величинами ставим прежние обозначения. Параметром обезразмеривания единицы длины станет капиллярная постоянная жидкости [17], которую определим как $\alpha \equiv \sqrt{\sigma/\rho g}$.

Общим решением задачи является суперпозиция частных решений, полученных при всевозможных начальных условиях. В качестве одного такого условия Френкель принимал, что по поверхности заряженной жидкости в положительном направлении оси Ox распространяется плоская бегущая синусоидальная волна с волновым числом k : $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны. Тогда выражение для профиля свободной поверхности жидкости в комплексной форме следует записать в виде:

$$\xi(x, t) = \zeta \exp(i(kx - \omega t)), \quad (2.1)$$

где ω — частота волны, а ζ — ее амплитуда.

Исходя из вида гидродинамических граничных условий: кинематического, динамического, а также равенства нулю электрического потенциала на свободной поверхности идеально проводящей жидкости, выражения для потенциалов скорости $\psi(x, z, t)$ и электрического поля $\Phi(x, z, t)$ следует искать в виде, аналогичном (2.1), то есть

$$\psi(x, z, t) = A(z) \exp(i(kx - \omega t)), \quad \Phi(x, z, t) = B(z) \exp(i(kx - \omega t)),$$

где $A(z)$, $B(z)$ — неизвестные функции, определяемые из сформулированной задачи, решая которую стандартными методами [14, 17] найдем их в виде:

$$A(z) = -\frac{i\omega}{k} \zeta \exp(kz), \quad B(z) = 4\pi\kappa_0 \zeta \exp(-kz)$$

Таким образом, искомые выражения для потенциалов будут иметь вид:

$$\psi(x, z, t) = -\frac{i\omega}{k} \zeta \exp(i(kx - \omega t) + kz), \quad \Phi(x, z, t) = 4\pi\kappa_0 \zeta \exp(i(kx - \omega t) - kz)$$

Если подставить эти выражения в динамическое граничное условие и сократить на $\exp(i(kx - \omega t))$, то получим:

$$\left(-1 + \frac{\omega^2}{k} + 4\pi\kappa_0^2 k - k^2\right) \zeta = 0$$

Выражая квадрат частоты волны из последнего выражения, легко получить дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = k + k^3 - 4\pi\kappa_0^2 k^2 \quad (2.2)$$

Таким образом, решение задачи Френкеля имеет вид [14, 17]:

$$\xi = \zeta \exp(i(kx - \omega t)), \quad \omega = \sqrt{k(1 + k^2 - kW_{\text{if}})}$$

Критерий реализации электростатической неустойчивости Тонкса–Френкеля получим из дисперсионного уравнения (2.2) потребовав, положительности квадрата частоты при любых значениях волнового числа k [18]. Тогда критическое значение ω^2 будет

равно нулю. В случаях, когда квадрат частоты ω^2 становится отрицательным, сама частота ω оказывается чисто мнимой. При этом амплитуда волны будет экспоненциально нарастать со временем, а инкремент неустойчивости Тонкса–Френкеля γ определится как модуль мнимой части частоты: $\gamma \equiv |\operatorname{Im} \omega|$.

Положим в (2.2) $\omega^2 = 0$, тогда останется квадратное уравнение по волновому числу k . Потребуем, чтобы дискриминант этого квадратного уравнения был всегда положителен при любом k . В итоге критическое условие наступления неустойчивости Тонкса–Френкеля в безразмерной форме запишется в виде:

$$W_{\text{tf}} \equiv 4\pi\kappa_0^2 \geq 2,$$

или

$$W_{\text{tf}} \equiv (E_0^2/4\pi) \geq 2$$

Если задаться вопросами: как W_{tf} зависит от k и при каком значении волнового числа достигается минимальное значение W_{tf} , то несложно получить зависимость:

$$W_{\text{tf}} = \frac{1}{k} + k, \quad (2.3)$$

или в размерном виде

$$W_{\text{tf}} = \frac{1}{k\alpha} + k\alpha,$$

минимум которой, достигается при $k\alpha = 1$, или $\lambda = 2\pi\alpha$, поскольку волновое число k обезразмерено умножением на капиллярную постоянную жидкости α .

Чтобы найти волновое число соответствующее волне с максимальным инкрементом, продифференцируем $\gamma \equiv |\operatorname{Im} \omega|$ по k и приравняем нулю. Получим $k = 1$. Если взять вторую производную по k , то эта производная будет меньше нуля. Значит при $k = 1$ будет действительно максимум инкремента.

Итак, волна с $k = 1$ при наступлении неустойчивости начнет неконтролируемо расти. Значит характерный поперечный размер эмиссионного выступа при реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля в размерном виде порядка величины длины волны. Величина инкремента неустойчивости Тонкса–Френкеля γ при волновом числе $k = 1$, соответствующем максимальному значению инкремента, при котором реализуется неустойчивость, определится, как: $\gamma \equiv \sqrt{2 - W_{\text{tf}}}$.

3. Об устойчивости по отношению к электрическому заряду поверхности жидкости в цилиндрическом бассейне конечной глубины. Как указывалось выше, критерий неустойчивости Тонкса–Френкеля выведен для модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости безграничной в плоскости ее свободной поверхности. Вопрос в том, как реальность жидкости, обладающей вязкостью, и помещенной в бассейн конечных размеров скажется на критических условиях реализации электростатической неустойчивости поверхности жидкости?

Физическая и математическая постановка задачи. Пусть между двумя параллельными электродами существует однородное электростатическое поле $\mathbf{E}_0$, как показано на рис. 2. Примем, что в нижнем электроде имеется цилиндрический бассейн радиусом R и глубиной h (где $R \sim h$), ось симметрии которого совпадает с осью оси OZ цилиндрической системы координат: $\mathbf{e}_z \parallel -\mathbf{g}$, здесь $\mathbf{e}_z$ — орт оси OZ ; $\mathbf{g}$ — ускорение поля сил тяжести. Примем, что плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью нижнего электрода и поверхностью бассейна (см. рис. 2), а бассейн заполнен вязкой несжимаемой идеально проводящей жидкостью плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и коэффици-

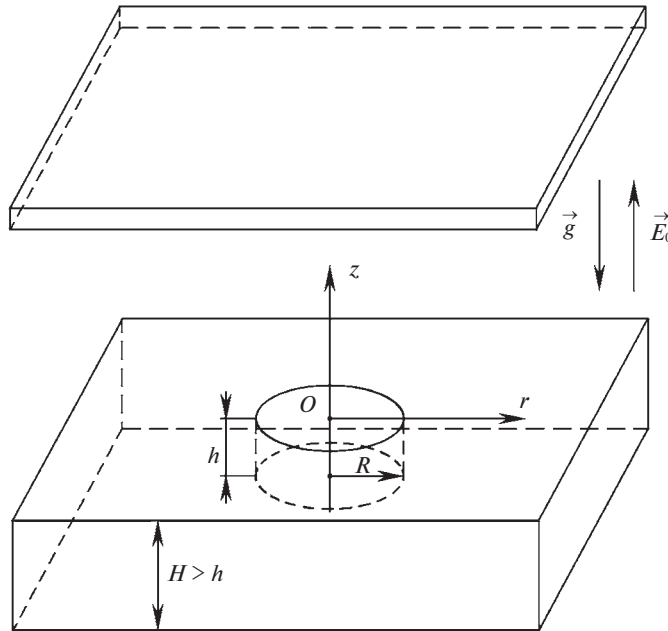


Рис. 2. Схематическое изображение установки для проверки критерия неустойчивости Тонкса–Френкеля.

ентом поверхностного натяжения σ . Зададимся целью исследовать на устойчивость свободную поверхность жидкости в бассейне по отношению к действию на нее электростатического поля и поля силы тяжести.

Уравнение поверхности бассейна, возмущенной капиллярным волновым движением тепловой природы весьма малой амплитуды [14]: $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$ (κ — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура), запишется в виде:

$$z = \xi(r, \varphi, t); \quad \xi \ll R, \quad (3.1)$$

$\xi(r, \varphi, t)$ — возмущение поверхности бассейна. Следует отметить, что тепловая амплитуда капиллярных волн не превышает одного ангстрема для всех жидкостей, включая жидкие металлы.

В качестве малого параметра задачи ε примем отношение максимума амплитуды капиллярных волн на поверхности бассейна к капиллярной постоянной жидкости $\alpha \equiv \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha} \equiv \sqrt{\sigma / \rho g}$: $\varepsilon \equiv \max |\xi(r, \varphi, t)| / \alpha$.

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений гидродинамики вязкой жидкости и электростатики:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{U} - \nabla(gz), \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \Delta \Phi = 0$$

$$z = \xi(r, \varphi, t) : \Phi \equiv \text{const}, \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad F(r, \varphi, t) = z - \xi(r, \varphi, t) = 0$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0$$

$$-(P - P_*) + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \sigma \cdot \operatorname{div} \mathbf{n} - \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = 0$$

$$z = 0, \quad r = R : \xi(r, \varphi, t) = 0; \quad z \rightarrow \infty : -\nabla \Phi \rightarrow \mathbf{E}_0; \quad r \rightarrow 0 : |\mathbf{U}| < \infty$$

$$z = -h : \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

где $\mathbf{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — орты касательной и нормали к поверхности бассейна (3.1); P_* — постоянное давление в окружающей среде; $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей, поле давлений в жидкости и поле электрического потенциала в окружающей среде.

В нулевом приближении по малой амплитуде возмущения $\xi(r, \varphi, t)$ равновесную поверхность бассейна, в пренебрежении эффектом смачивания на стенке бассейна, будем считать совпадающей с плоскостью $z = 0$; гидродинамическое давление и поле скоростей течения жидкости будет тождественно равно нулю, а потенциал электростатического поля будет иметь вид: $\Phi_0 = -E_0 z$.

Для упрощения записи и последующих вычислений перейдем к безразмерным переменным, в которых $g = \rho = \sigma = 1$. Оставим за всеми переменными прежние обозначения и перепишем математическую формулировку задачи в линейном по безразмерной амплитуде возмущения свободной поверхности бассейна приближении. При линеаризации задачи учтем, что поля скоростей и давлений в жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P_1(\mathbf{r}, t)$, а также поправка к электростатическому полю $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$, связанные с волновым возмущением поверхности (3.1), имеют первый порядок малости. Граничное условие на дне бассейна $z = -h$ в том же порядке приближений заменим на граничное условие при $z = -\infty$. Отметим, что понятие “бесконечности” здесь используется в физическом смысле.

В итоге, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\nabla P_1 + \nu \Delta \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) - \nabla z, \quad \operatorname{div} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta \Phi_1(\mathbf{r}, t) = 0 \\ z = 0 : \quad \Phi_1(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \xi(r, \varphi, t), \quad \frac{\partial \xi(r, \varphi, t)}{\partial t} = U_z(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} = 0, \quad -P_1 - 2\nu \frac{\partial U_z}{\partial z} + \hat{L} \xi + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right\} = 0 \quad (3.2) \\ z = 0, \quad r = R : \quad \xi(r, \varphi, t) &= 0 \\ z \rightarrow \infty : \quad \Phi_1(\mathbf{r}, t) &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 : \quad |\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)| < \infty, \quad z = -\infty : \quad \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Скаляризация задачи. Для упрощения нижеследующих рассуждений проведем скаляризацию задачи по методике, описанной в [19], другими словами от одной векторной задачи (3.2) перейдем к нескольким скалярным.

Из общих соображений, очевидно, что произвольное векторное поле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ может быть разложено на сумму трех ортогональных векторных полей. Это, в частности можно сделать при помощи векторных дифференциальных операторов $\hat{\mathbf{N}}_j$:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \psi_j(\mathbf{r}, t), \quad (3.3)$$

где $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ – скалярные функции, а операторы $\hat{\mathbf{N}}_j$ ($j = 1; 2; 3$) в цилиндрической системе координат удобно выбрать в виде:

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{e}_z, \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z) \quad (3.4)$$

В цилиндрической системе координат векторные поля $\hat{\mathbf{N}}_j \psi_j(\mathbf{r}, t)$ в соотношении (3.3) будут иметь следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}_1 \psi_1(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \\ \hat{\mathbf{N}}_2 \psi_2(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{e}_z \psi_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial \varphi} - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial r} \\ \hat{\mathbf{N}}_3 \psi_3(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z) \psi_3(\mathbf{r}, t) = \\ &= \mathbf{e}_r \frac{\partial^2 \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial r \partial z} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial \varphi \partial z} - \mathbf{e}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial \varphi^2} \right], \end{aligned}$$

$\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$ – орты координатных осей.

Несложно убедиться, что операторы (3.4) удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_i = \delta_{ij} \hat{\mathbf{N}}_j^2 \quad (3.5)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа:

$$\Delta \hat{\mathbf{N}}_j = \hat{\mathbf{N}}_j \Delta,$$

где $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ – операторы, эрмитовосопряженные к операторам $\hat{\mathbf{N}}_j$.

Подставим разложение (3.3) в линейаризованное уравнение Навье–Стокса (3.2) и, пользуясь свойствами коммутативности операторов $\hat{\mathbf{N}}_j$ с оператором Лапласа, запишем (3.2) в виде:

$$\sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \left\{ \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (P_1(\mathbf{r}, t) - z) \delta_{1j} - \nu \Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) \right\} = 0$$

Последовательно умножая слева полученное равенство скалярным образом на операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$, где $j = 1; 2; 3$, и пользуясь их ортогональностью (см. (3.4)), вместо одного векторного линейаризованного уравнения Навье–Стокса (3.2) получим систему

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j \left\{ \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (P_1(\mathbf{r}, t) - z) \delta_{1j} - \nu \Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) \right\} = 0; \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

Поскольку операторы $\hat{\mathbf{N}}_j$ коммутируют с оператором Лапласа (см. (3.6)), то в силу самосопряженности последнего, операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ также будут с ним коммутировать. Но сказанное означает, что и операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j$ будут коммутировать с оператором Лапласа и, следовательно, будут иметь общую систему собственных функций $\{\phi_j\}$:

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j \phi_k = \mu_k \phi_k, \quad \Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k,$$

где $\{\lambda_k\}$ – собственные числа.

Разложим по бесконечному набору собственных функций $\{\phi_j\}$ функции $\psi_j(\mathbf{r}, t)$, $P_1(\mathbf{r}, t) - z$, входящие в выражение, стоящее в (3.6) в фигурных скобках:

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = \sum_k G_k^{(j)} \phi_k, \quad P_1(\mathbf{r}, t) - z = \sum_k D_k \phi_k$$

Теперь подставим эти разложения в (3.6) и после несложных преобразований получим:

$$\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial t} G_k^{(j)} + D_k \delta_{1j} - v G_k^{(j)} \lambda_k \right\} \hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j \phi_k = 0,$$

или

$$\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial t} G_k^{(j)} + D_k \delta_{1j} - v G_k^{(j)} \lambda_k \right\} \mu_k \phi_k = 0$$

Поскольку система собственных функций $\{\phi_j\}$ в общем случае не нулевая, то полученное равенство может выполняться в двух случаях: либо равны нулю все собственные значения $\{\mu_k\}$, что в общем случае неверно, либо выражения в фигурных скобках:

$$\frac{\partial}{\partial t} G_k^{(j)} + D_k \delta_{1j} - v G_k^{(j)} \lambda_k = 0$$

Умножим теперь каждую скобку на собственную функцию ϕ_k с тем же номером и суммируя по k , получим три скалярных уравнения для отыскания неизвестных функций $\psi_j(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (P_1(\mathbf{r}, t) - z) \delta_{1j} - v \Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) = 0; \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

Уравнение неразрывности (3.2) после подстановки в него разложения (3.3) и учета свойств ортогональности (3.4) приводится к виду:

$$\Delta \psi_1(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.8)$$

Первое уравнение системы (3.7) при учете (3.8) позволяет получить выражение гидродинамического давления внутри жидкости, связанного с волновым движением:

$$P_1(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + z \quad (3.9)$$

Тогда (3.7)–(3.8) можно переписать в виде:

$$(1 - \delta_{1j}) \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - v \Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) = 0; \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

Проекция поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на орты цилиндрической системы координат, выраженные через скалярные функции $\psi_j(\mathbf{r}, t)$, имеют вид:

$$\begin{aligned} U_r(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial z \partial r} \\ U_\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial \phi} - \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial z \partial \phi} \\ U_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial \phi^2} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Используя выписанные выражения, переформулируем кинематическое и динамические граничные условия задачи первого порядка малости через неизвестные функции $\psi_j(\mathbf{r}, t)$:

$$z = 0 \quad \frac{\partial \xi(r, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} - \hat{L}\psi_3(\mathbf{r}, t) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} f_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_2 = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_1 - \frac{\partial}{\partial r} f_2 = 0 \quad (3.13)$$

$$f_1(\mathbf{r}, t) \equiv 2 \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} - \hat{L}\psi_3(\mathbf{r}, t), \quad f_2(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \xi(r, \varphi, t) + 2v \left\{ \frac{\partial^2 \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} - \hat{L} \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \right\} +$$

$$+ \hat{L}\xi(r, \varphi, t) + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \right\} = 0 \quad (3.14)$$

Скаляризация динамических граничных условий. Умножим первое граничное условие (3.13) на координату r и продифференцируем один раз по r , затем сложим со вторым граничным условием (3.13) продифференцированным по углу φ , а результат разделим на r , и в итоге получим соотношение:

$$\hat{L}f_1(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.15)$$

Умножим теперь второе граничное условие (3.13) на координату r и продифференцируем один раз по r , затем сложим с первым граничным условием (3.13) продифференцированным по углу φ , а результат разделим на r , и в итоге получим соотношение:

$$\hat{L}f_2(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.16)$$

Рассмотрим детальнее выражение (3.16). Учтем, что $f_2(\mathbf{r}, t) \equiv \partial \psi_2(\mathbf{r}, t) / \partial z$, и то обстоятельство, что операторы $\hat{L}$ и $\partial / \partial z$ коммутируют друг с другом, тогда (3.16) можно переписать в виде:

$$\hat{L} \frac{\partial}{\partial z} \psi_2(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial z} \hat{L} \psi_2(\mathbf{r}, t) \equiv 0 \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует, что либо $\hat{L}\psi_2(\mathbf{r}, t) = 0$, либо $\frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial z} = 0$. Первое из выписанных соотношений в общем случае не может выполняться в силу соотношения (3.7) для $\psi_2(\mathbf{r}, t)$, значит, верно второе:

$$f_2(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial z} = 0 \quad (3.18)$$

Учитывая, что

$$\hat{L} \equiv -\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j$$

Покажем это, принимая во внимание, что $\hat{\mathbf{N}}_2 \nabla \mathbf{e}_z$ и $\hat{\mathbf{N}}_2^+ \equiv \mathbf{e}_z \times \nabla \equiv -\nabla \times \mathbf{e}_z \equiv -\hat{\mathbf{N}}_2$. В итоге:

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j \equiv -(\nabla \times \mathbf{e}_z) \cdot (\nabla \times \mathbf{e}_z) \equiv -(\nabla \times \mathbf{e}_z \times \nabla) \cdot \mathbf{e}_z \equiv$$

$$\equiv -(\mathbf{e}_z \Delta - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{e}_z)) \cdot \mathbf{e}_z \equiv -\Delta + (\mathbf{e}_z \cdot \nabla)(\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \equiv -\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv -\hat{L}$$

Преобразуем теперь (3.15), учитывая, что согласно принятому выше

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j \phi_k = \mu_k \phi_k, \quad \psi_j(\mathbf{r}, t) = \sum_k G_k^{(j)} \phi_k \quad (3.19)$$

В итоге получим:

$$\begin{aligned} \hat{L}f_1(\mathbf{r}, t) &\equiv -\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j \left\{ 2 \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} - \hat{L}\psi_3(\mathbf{r}, t) \right\} \equiv \\ &\equiv -\sum_k \left\{ 2G_k^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} + G_k^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G_k^{(3)} \mu_k \right\} \mu_k \phi_k = 0 \end{aligned}$$

Последнее равенство при $\{\mu_k\} \neq 0$ выполняется только при условии равенства нулю выражений, стоящих в фигурных скобках:

$$2G_k^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} + G_k^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G_k^{(3)} \mu_k = 0$$

Умножим теперь каждую скобку на собственную функцию ϕ_k с тем же номером и, суммируя по k , найдем:

$$f_1(\mathbf{r}, t) \equiv 2 \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} - \hat{L}\psi_3(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.20)$$

В итоге соотношения (3.18) и (3.20) заменяют собой пару динамических граничных условий для касательных компонент тензора напряжений (3.13).

Из системы гидродинамических граничных условий (3.12), (3.14) и (3.19) видно, что функция $\psi_2(\mathbf{r}, t)$, не зависящая согласно (3.18) от координаты z и характеризующая согласно общей идеологии метода скаляризации плоские вихревые движения в жидкости перпендикулярные оси симметрии системы, при исследовании устойчивости мениска может быть опущена, т.к. она не входит ни в одно из граничных условий (3.12), (3.14), (3.19).

Дисперсионное уравнение. Решения уравнений (3.7)–(3.8) в цилиндрической системе координат, ограниченные на оси симметрии, будем искать в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=0, j=1}^{\infty} A_{nj} J_n(k_j r) \exp(in\phi) \exp(k_j z) \exp(-s_j t) \\ \psi_3(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=0, j=1}^{\infty} B_{nj} J_n(k_j r) \exp(in\phi) \exp(q_j z) \exp(-s_j t), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $q_j^2 = k_j^2 + s_j/v$; s_j – комплексная частота; k_j – волновое число; $J_n(k_j r)$ – функция Бесселя первого рода; n – целое число, порядок функции Бесселя; j – порядковый номер дискретного волнового числа.

Решение уравнения Лапласа (3.2) для отыскания потенциала электростатического поля $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$, также как и функцию $\psi_1(\mathbf{r}, t)$, имеющую смысл гидродинамического потенциала и также являющуюся решением уравнения Лапласа (3.8) будем искать в виде:

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0, j=1}^{\infty} C_{nj} J_n(k_j r) \exp(in\phi) \exp(k_j z) \exp(-s_j t), \quad (3.22)$$

Также как и выражение для волнового возмущения поверхности жидкости в бассейне:

$$\xi(r, \varphi, t) = \sum_{n=0, j=1}^{\infty} D_{nj} J_n(k_j r) \exp(in\varphi) \exp(-s_j t) \quad (3.23)$$

Из граничного условия задачи (3.2) для электростатического потенциала $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$ легко найти связь между коэффициентами C_{nj} и D_{nj} в виде:

$$C_{nj} = E_0 D_{nj}$$

Теперь, подставляя в граничные условия (3.12), (3.14), (3.20) проекты решений (3.21)–(3.23), получим систему трех однородных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов разложений A_{nj} , B_{nj} , D_{nj} , которая имеет решения только при условии обращения в ноль определителя, составленного из множителей при искомым коэффициентах A_{nj} , B_{nj} , D_{nj} . Это требование и даст нам дисперсионное уравнение задачи:

$$\begin{aligned} (s_j + 2\nu k_j^2)^2 + \omega_j^2 &= 4\nu^2 k_j^4 \sqrt{1 + \frac{s_j}{\nu k_j^2}} \\ \omega_j^2 &\equiv k_j^3 + k_j - W k_j^2; \quad W \equiv E_0^2 / 4\pi \end{aligned} \quad (3.24)$$

Как можно видеть, что дисперсионное уравнение формально имеет такой же вид, как и для плоских капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности безграничной идеальной жидкости (см. (2.3)). Отличие в том, что теперь иначе определена частота ω_j , величина волнового числа изменяется не непрерывно, как было для безграничной поверхности, но должна удовлетворять условиям закрепления поверхности жидкости на стенках бассейна: $z = 0$, $r = R$: $\xi(r, \varphi, t) = 0$. Подставляя сюда (3.23), несложно найти, что спектр допустимых волновых чисел определяется корнями функций Бесселя:

$$J_n(\mu_{nj}) = 0; \quad \mu_{nj} \equiv k_{nj} R \quad (3.25)$$

Несколько первых корней системы (3.24) имеют величины:

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad & \mu_{01} = 2.405, \quad \mu_{02} = 5.520, \quad \mu_{03} = 8.654, \quad \mu_{04} = 11.792 \\ n = 1 : \quad & \mu_{11} = 3.832, \quad \mu_{12} = 7.016, \quad \mu_{13} = 10.174, \quad \mu_{14} = 13.324 \\ n = 2 : \quad & \mu_{21} = 5.136, \quad \mu_{22} = 8.417, \quad \mu_{23} = 11.620, \quad \mu_{24} = 14.796 \end{aligned}$$

В асимптотике малой вязкости, когда безразмерный коэффициент кинематической вязкости много меньше единицы $\nu \ll 1$ дисперсионное уравнение (3.24) можно записать в линейном приближении по безразмерной вязкости:

$$s_{nj}^2 + 4\nu k_{nj}^2 s_{nj} + \omega_{nj}^2 = 0, \quad (3.26)$$

а его решения в том же приближении легко выписываются в виде:

$$\begin{aligned} s_{nj(1;2)} &= -\gamma_{nj} \pm i\omega_0 \equiv -2\nu k_{nj}^2 \pm \sqrt{(2\nu k_{nj}^2)^2 - \omega_{nj}^2} \cong -2\nu k_{nj}^2 \pm \sqrt{-\omega_{nj}^2} \equiv \\ &\equiv -2\nu k_{nj}^2 \pm \sqrt{-(k_{nj}^3 + k_{nj} - W k_{nj}^2)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Следует сразу отметить, что условие малости вязкости жидкости: $\nu \ll 1$, оставляет весьма широкий простор для использования упрощенного и наглядного соотношения (3.27). В самом деле, величина характерного масштаба измерения кинематической вязкости жидкости при принятом обезразмеривании на $\sqrt[4]{\sigma^3/\rho^3 g}$ для большинства используемых в технических приложениях жидкостей измеряется единицами

стоксов ($\text{см}^2 \text{с}^{-1}$). Так, например, для воды характерный масштаб измерения кинематической вязкости равен $\approx 4.4 \text{ см}^2 \text{с}^{-1}$, тогда как величина размерной кинематической вязкости для воды равна $0.01 \text{ см}^2 \text{с}^{-1}$. Таким образом, область применимости соотношений (3.27) в технических и технологических приложениях достаточно велика.

Об электростатической неустойчивости жидкости на поверхности бассейна. Условием реализации электростатической неустойчивости является прохождение через нуль подкоренного выражения в (3.27):

$$k_{nj}^3 + k_{nj} - Wk_{nj}^2 = 0,$$

или

$$W = \frac{1}{k_{nj}} + k_{nj} \quad (3.28)$$

Это условие с точностью до определения волновых чисел совпадает с критическим условием реализации неустойчивости Тонкса—Френкеля (2.3). Минимальное значение параметра W , при котором реализуется неустойчивость поверхности бассейна, определится равенством нулю первой производной от W по волновому числу k_{nj} , но оно изменяется дискретно. В *Приложении* показано, что минимум (3.28) достигается при $k_{nj} = 1$, как и при неустойчивости Тонкса—Френкеля. Другими словами, результаты экспериментов, проведенных в бассейнах конечных размеров с реальной жидкостью, обладающей вязкостью и проводимостью, могут служить подтверждением теории, построенной для идеализированной теории безграничной поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости.

Заключение. Для подтверждения справедливости теоретически выведенного критерия неустойчивости Тонкса—Френкеля можно проводить его экспериментальную проверку в бассейнах конечных размеров, заполненных реальной жидкостью, обладающей вязкостью.

Работа, выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690131).

Приложение. Первая производная от критического параметра W по волновому числу при дискретном изменении последнего

Критические условия электростатической неустойчивости, проводящей жидкости в бассейне имеют вид:

$$W_* = k_{nj} + \frac{1}{k_{nj}} \quad (\text{П.1})$$

Чтобы найти минимальное значение параметра W_* необходимо приравнять нулю первую производную от W_* по k_{nj} и из полученного выражения найти k_{nj} , при котором полученное при дифференцировании соотношение выполняется. При этом k_{nj} изменяется дискретно в силу ограниченности размеров бассейна.

Зафиксируем n постоянным, а j пусть будет изменяющимся. Примем, что k_{nj} изменилось на Δk_{nj} . Выпишем соответствующее изменение ΔW_* , используя (П.1):

$$\begin{aligned} \Delta W_* &= k_{nj} + \Delta k_{nj} + \frac{1}{k_j + \Delta k_{nj}} - k_{nj} - \frac{1}{k_j} = \Delta k_{nj} + \left(\frac{1}{k_{nj} + \Delta k_{nj}} - \frac{1}{k_{nj}} \right) = \\ &= \Delta k_{nj} + \left(\frac{-\Delta k_{nj}}{k_{nj}(k_{nj} + \Delta k_{nj})} \right) = \Delta k_{nj} - \Delta k_{nj} \left(\frac{1}{k_{nj}(k_{nj} + \Delta k_{nj})} \right) = \Delta k_{nj} \left[1 - \frac{1}{k_{nj}(k_{nj} + \Delta k_{nj})} \right] \end{aligned}$$

Найдем теперь предел отношения ΔW_* к Δk_{nj} при $\Delta k_{nj} \rightarrow 0$ или $j \rightarrow \infty$ и потребуем, чтобы оно равнялось нулю:

$$\lim_{\substack{\Delta k_{nj} \rightarrow 0 \\ j \rightarrow \infty}} \frac{\Delta W_*}{\Delta k_{nj}} = \lim_{\substack{\Delta k_{nj} \rightarrow 0 \\ j \rightarrow \infty}} \left[1 - \frac{1}{k_{nj}(k_{nj} + \Delta k_{nj})} \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{k_{nj}^2} \right] = \left[1 - \frac{1}{k_{\infty}^2} \right] = 0,$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta k_j \rightarrow 0 \\ j \rightarrow \infty}} \frac{\Delta W_*}{\Delta k_j} = k_{nj} - \frac{1}{k_{nj}} = 0 \quad (\text{П.2})$$

Это равенство может выполняться только при $k = 1$.

Вспомним, что номер j хоть и дискретен, но принимает бесконечное количество значений и учтем, что при $j \rightarrow \infty$ и $\Delta k_j \rightarrow 0$. То есть приращение аргумента стремится к нулю с ростом j , может и не непрерывно, но неизбежно.

С другой стороны, вспомним, про математический и физический подходы. В данной ситуации сравним строгое равенство нулю (математическое) и приближенное (физическое), когда равенство нулю выполняется в рамках допустимой погрешности, с использованием знаков $\gg$, $\ll$ или символа порядка $O(\varepsilon)$, здесь $\varepsilon = \frac{\Delta k_{nj}}{k_{nj}}$ – малый параметр, из теории погрешностей [20]. С учетом сказанного о критерии неустойчивости можно говорить, что он выполняется с необходимой точностью в каком-то порядке малости по малому параметру:

$$W_* = k_{nj} + \frac{1}{k_{nj}}$$

В линейном приближении по Δk_{nj} соотношение (П.2) можно переписать в виде:

$$k_{nj}(k_{nj} + \Delta k_j) - 1 \approx 0, \quad \text{или} \quad k_{nj}^2 \left(1 + \frac{\Delta k_{nj}}{k_{nj}} \right) - 1 \approx 0,$$

$$\text{или} \quad k_{nj}^2 \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta k_{nj}}{k_{nj}} \right)} \approx 1 - \frac{\Delta k_{nj}}{k_{nj}} + \dots$$

Учтем, что $\frac{\Delta k_{nj}}{k_{nj}} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и получим $k_{nj} = 1$.

Это выражение можно переписать в виде $\frac{\Delta \mu_{nj}}{\mu_{nj}} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

Можно также учесть, что $k_{nj} = \frac{\mu_{nj}}{R}$ и записать

$$\Delta k_{nj} = k_{nj} - k_{n(j-1)} \equiv \frac{\mu_{nj} - \mu_{n(j-1)}}{R}$$

В размерном виде это соотношение запишется как

$$\Delta k_{nj} = \frac{\alpha}{R} (\mu_{nj} - \mu_{n(j-1)}),$$

где α – капиллярная постоянная жидкости.

Отсюда видно, что дискретность волновых чисел k_{nj} зависит от размеров бассейна: уменьшается с увеличением его радиуса, а точность выполнения условия (П.1) увеличивается с увеличением радиуса бассейна. Следовательно, изменяя размер бассейна можно регулировать степень дискретности и получить результат с заранее заданной точностью.

Отметим также, что физика преимущественно имеет дело с дискретными объектами (все вещество дискретно), а математика (по крайней мере, классическая математическая физика) — с непрерывными. Но в физике дискретностью вещества, как правило, пренебрегают ради возможности использования хорошо разработанного математического аппарата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh (Strutt J.W.)* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // *Phil. Mag.* 1882. V. 14. P. 184–186.
2. *Hendrics C.D., Schneider J.M.* Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces // *J. Amer. Phys.* 1963. V. 1. № 6. P. 450–453.
3. *Taylor G.I.* Disintegration of water drops in an electric field // *Proc. Roy Soc. London.* 1964. V. A280. P. 383–397.
4. *Zeleny J.* On the conditions of instability of electrified drops, with application to the electrical discharge from liquid points // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1914. V. 18. Pt. 1. P. 71–83.
5. *Zeleny J.* Instability of electrified liquid surfaces // *The Phys. Rev.* 1917. V. 10. № 1. P. 1–6.
6. *Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B.* Behavior of evaporating electrically charged droplets // *J. Coll. Sci.* 1964. V. 19. P. 136–143.
7. *Hunter H.C., Ray Asit K.* On progeny droplets emitted during Coulombic fission of charged micro-drops // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2009. V. 11. № 29. P. 6156–6165.
8. *Inculet I.I., Floryan J.M., Haywood R.J.* Dynamics of water droplets breakup in electric fields // *IEEE Trans. on Industry Appl.* 1992. V. 28. № 5. P. 1203–1209.
9. *Karyappa R.B., Deshmukh S.D., Thakkar R.M.* Breakup of a conducting drop in a uniform electric field // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 754. P. 550–589.
10. *Григорьев А.И.* Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости // *ЖТФ.* 2009. Т. 79. № 4. С. 36–45.
11. *Cloupeau M., Prunet Foch B.* Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review // *J. Aerosol Sci.* 1994. V. 25. № 6. P. 1021–1035.
12. *Jaworek A., Krupa A.* Classification of the modes of EHD spraying // *J Aerosol Sci.* 1999. V. 30. № 7. P. 873–893.
13. *Tonks L.* A Theory of liquid surface rupture by uniform electric field // *Phys. Rev.* 1935. № 48. P. 562–568.
14. *Френкель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // *ЖЭТФ.* 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
15. *Taylor G.I., McEwan A.D.* The stability of horizontal fluid interface in a vertical electric field // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 22. № 1. P. 1–15.
16. *Габович М.Д., Порицкий В.Я.* Исследование нелинейных волн на поверхности жидкого металла, находящегося в электрическом поле // *Письма в ЖЭТФ.* 1981. Т. 33. № 6. С. 320–324.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1982. 620 с.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
19. *Лазарянц А.Э., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Скаляризация векторных краевых задач. М.: Русайнс, 2020. 142 с.
20. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

On Some Regularities of Realization of Electrostatic Instability of Charged Surface of Liquid in Basin of Finite Dimensions

A. I. Grigor'ev^{a, #}, S. O. Shiryayeva^{b, ##}, and V. A. Koromyslov^{c, ###}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia*

^c*Emperor Alexander the 1st Petersburg State Transport University, Yaroslavl branch, Yaroslavl, Russia*

[#]*e-mail: grigorai@mail.ru*

^{##}*e-mail: shir@uniyar.ac.ru*

^{###}*e-mail: s_myslov@mail.ru*

Physical regularities of realization of electrostatic instability of flat charged surface of non-compressible viscous conducting liquid are considered, in pool of finite dimensions, where spectrum of emerging capillary waves is discrete. It has been shown that the critical conditions for the onset of electrostatic instability of an incompressible viscous conductive liquid, in a basin of finite dimensions, coincide with those for a limitless surface of an infinitely deep ideal incompressible liquid (coincide with the conditions for realizing Tonks–Frenkel instability). This allows the experimental verification of the criterion for realizing Tonks–Frenkel instability to use basins of finite dimensions, avoiding fundamental errors.

Keywords: flat liquid surface, electrostatic and gravitational fields, electrostatic instability

REFERENCES

1. Rayleigh (*Strutt J.W.*) On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // *Phil. Mag.*, 1882, vol. 14, pp. 184–186.
2. Hendrics C.D., Schneider J.M. Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces // *J. Amer. Phys.*, 1963, vol. 1, no. 6, pp. 450–453.
3. Taylor G.I. Disintegration of water drops in an electric field // *Proc. Roy. Soc. London*, 1964, vol. A280, pp. 383–397.
4. Zeleny J. On the conditions of instability of electrified drops, with application to the electrical discharge from liquid points // *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1914, vol. 18, pt. 1, pp. 71–83.
5. Zeleny J. Instability of electrified liquid surfaces // *The Phys. Rev.*, 1917, vol. 10, no. 1, pp. 1–6.
6. Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. Behavior of evaporating electrically charged droplets. // *J. Coll. Sci.*, 1964, vol. 19, pp. 136–143.
7. Hunter H.C., Ray Asit K. On progeny droplets emitted during Coulombic fission of charged micro-drops // *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2009, vol. 11, no. 29, pp. 6156–6165.
8. Inculet I.I., Floryan J.M., Haywood R.J. Dynamics of water droplets breakup in electric fields // *IEEE Trans. on Industry Appl.*, 1992, vol. 28, no. 5, pp. 1203–1209.
9. Karyappa R.B., Deshmukh S.D., Thaokar R.M. Breakup of a conducting drop in a uniform electric field // *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 754, pp. 550–589.
10. Grigor'ev A.I. Electrostatic instability of a heavily charged conducting liquid jet // *Techn. Phys.*, 2009, vol. 54, no. 4, pp. 482–490.
11. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review // *J. Aerosol Sci.*, 1994, vol. 25, no. 6, pp. 1021–1035.
12. Jaworek A., Krupa A. Classification of the Modes of EHD Spraying // *J. Aerosol Sci.*, 1999, vol. 30, no. 7, pp. 873–893.
13. Tonks L. A Theory of liquid surface rupture by uniform electric field // *Phys. Rev.*, 1935, no. 48, pp. 562–568.
14. Frenkel Ya.I. To the theory of Tonks on the discontinuity of the surface of a liquid by a constant electric field in vacuum // *JETP*, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 348–350.

-
15. *Taylor G.I., McEwan A.D.* The stability of horizontal fluid interface in a vertical electric field // J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, no. 1, pp. 1–15.
 16. *Gabovich M.D., Poritskii V.Ya.* Nonlinear waves at the surface of a liquid metal in an electric field // JETP Lett., 1981, vol. 33, iss. 6, pp. 304–307.
 17. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1982. (in Russian)
 18. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Electrodynamics of Continuous Media. Moscow: Nauka, 1982. (in Russian)
 19. *Lazaryants A.E., Shiryayeva S.O., Grigoriev A.I.* Scalarization of Vector Boundary Value Problems. Moscow: Rusains, 2020. 142 p. (in Russian)
 20. *Nayfeh A.* Perturbation Methods. N.Y.: Wiley, 1973.

УДК 532.5

**НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ РАЗВИТИЯ НЕВЯЗКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ
В КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОМ ДИССОЦИИРУЮЩЕМ ГАЗЕ**© 2023 г. Ю. Н. Григорьев^{1,*}, И. В. Ершов^{2,**}¹*Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,
Новосибирск, Россия*²*Новосибирский государственный аграрный университет, Новосибирск, Россия***e-mail: grigor@ict.nsc.ru****e-mail: ivershov1969@gmail.com*

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.

После доработки 15.03.2023 г.

Принята к публикации 24.03.2023 г.

Для плоского течения колебательно-возбужденного диссоциирующего двухатомного газа получены необходимые условия существования растущих (нейтральных) невязких возмущений, аналогичные условию Рэлея “обобщенной” точки перегиба. Представлены соответствующие формулы для случаев, имеющих определенную физическую трактовку. В частности, рассмотрена модель колебательно-возбужденного однокомпонентного газа, как начальная стадия термической диссоциации, а также распространенная модель с одной реакцией диссоциации–рекомбинации. В качестве промежуточного рассмотрен случай бинарной молекулярно-атомной смеси с колебательно-возбужденной молекулярной компонентой и “замороженной” газофазной реакцией диссоциации–рекомбинации. Проведены сравнительные численные расчеты, показавшие, в частности, что в условиях развитой диссоциации использование условия “обобщенной” точки перегиба не учитывает специфику процесса. Волновые числа и фазовые скорости I и II невязких мод, рассчитанные на его основе, могут существенно отличаться от результатов, полученных с использованием нового необходимого условия.

Ключевые слова: невязкие возмущения, критерий Рэлея “обобщенная” точка перегиба, колебательное возбуждение, реакция диссоциации–рекомбинации, I и II невязкие моды Мэка

DOI: 10.31857/S0032823523030049, EDN: ZSWUBU

1. Введение. Проблема нахождения растущих (нейтральных) невязких возмущений является частью общей задачи линейной теории устойчивости течений. Из спектра невязких возмущений выделяются наиболее растущие моды, которые воспроизводятся в вязкой задаче. Для параллельных течений идеальной несжимаемой жидкости необходимое условие существования таких возмущений, требующее наличия точки перегиба на профиле скорости стационарного течения, было получено Рэлеем [1]. Известно его уточнение, данное Фьертотом [2]. В дальнейшем Толлмином [1] было доказано, что для сдвиговых течений типа пограничного слоя условие Рэлея является также достаточным. Проявление реальных свойств газа, таких как сжимаемость, колебательное возбуждение, диссоциация–рекомбинация, другие физико-химические процессы, влияет на физическую картину возникновения и развития возмущений.

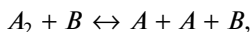
При этом последовательный учет процесса развития невязких возмущений должен был приводить к дальнейшим обобщениям этих условий.

Для пограничного слоя идеального (невязкого, нетеплопроводного) газа необходимое и достаточное условие развития невязких возмущений, известное как критерий “обобщенной” точки перегиба, было получено в работе Лиза [3]. После обнаружения в сверхзвуковых пограничных слоях при числах Маха $M > 2.2$ более неустойчивых высокочастотных мод [4] в область применения этого критерия были включены так называемые моды Мэка. В [5] необходимое условие “обобщенной” точки перегиба выведено для плоского течения Куэтта сжимаемого невязкого газа.

С математической точки зрения учет физико-химических процессов, приводит к определенным сложностям при выводе соответствующих условий развития невязких возмущений. Это связано с появлением источников в уравнениях неразрывности и энергий исходного стационарного течения и соответствующих уравнениях для возмущений линейной теории устойчивости. Была сделана попытка [6] вывести необходимое условие развития невязких неустойчивостей для плоских течений сжимаемого колебательно-возбужденного газа. Но существенным ограничением было использование постоянных профилей термодинамических параметров стационарного течения. Кроме того, полученное условие было громоздким и трудно проверяемым. Получено [7] обобщение условия “обобщенной” точки перегиба для плоского течения Куэтта невязкого колебательно-возбужденного газа.

Представлено [8] необходимое условие роста невязких возмущений для модели газа с простой химической реакцией первого порядка. Однако при выводе в уравнении энергии для амплитуд возмущений было опущено слагаемое, соответствующее работе сил давления при объемной деформации среды. Такое неоправданное упрощение ставит под сомнение адекватность полученного результата, тем более не подтвержденного числовыми расчетами. Впоследствии [9] был дан контрпример, по крайней мере, ограничивающий область применения данного условия.

В статье рассматриваются необходимые условия существования нейтральных (роста) невязких возмущений в колебательно-возбужденном диссоциирующем газе для случая одномодовой колебательной релаксации и диссоциации–рекомбинации двухатомного газа по схеме



где A_2 означает молекулу, A – атом, а B – партнер по соударению (третье тело при рекомбинации), которым может быть либо молекула, либо атом. Таким образом, рассматривается бинарная реагирующая газовая смесь.

Чтобы избежать громоздких вычислений, рассмотрение было ограничено частными случаями, имеющими определенную физическую трактовку. В частности, рассмотрена модель колебательно-возбужденного однокомпонентного газа, как начальная стадия термической диссоциации, когда концентрация атомов незначительна, кроме того представляющая самостоятельный интерес. В качестве другого приближения разобран случай бинарной молекулярно-атомной смеси с колебательно-возбужденной молекулярной компонентой и “замороженной” (в отсутствие объемной) газофазной реакцией диссоциации–рекомбинации, что соответствует условиям эксперимента в высокоэнтропийной аэродинамической трубе. Практический интерес представляет условие существования нейтральных (растущих) невязких возмущений, полученное для широко используемой модели диссоциирующего газа без учета колебательного возбуждения, обоснованием которой служит существенное различие характерных времен двух процессов. Для проверки значимости полученных критериев выполнены численные расчеты для условий развитой диссоциации.

2. Основные уравнения. В качестве исходной рассматривается система уравнений плоского сверхзвукового течения двухатомного газа с учетом колебательной релакса-

ции и реакции диссоциации–рекомбинации [10]. Пусть (x, y) и (u, v) – декартовы координаты и скорости реагирующей смеси соответственно вдоль и поперек потока. Система гидродинамических переменных включает плотность смеси ρ , массовую концентрацию свободных атомов c , массовую плотность внутренней энергии E_i , массовую плотность колебательной энергии E_v , статическую (поступательную) температуру T и колебательную температуру T_v .

Для рассмотрения течения в пограничном слое на пластине в качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны текущее расстояние $x = L$ вдоль пластины, параметры невозмущенного потока вне пограничного слоя, отмеченные индексом “ ∞ ”, скорость U_∞ , плотность ρ_∞ и температура T_∞ , коэффициенты сдвиговой η_∞ и объемной вязкости $\eta_{b\infty}$, коэффициент теплопроводности, обусловленный переносом энергии в поступательных и вращательных степенях свободы, $\lambda_\infty = \lambda_{t\infty} + \lambda_{r\infty}$, коэффициент теплопроводности, описывающий диффузионный перенос энергии колебательных квантов, $\lambda_{v\infty}$. Для обезразмеривания давления и времени используются комбинированные величины $\rho_\infty U_\infty^2$ и L/U_∞ соответственно. Энергии и энтальпии обезразмериваются на комплекс $\rho_\infty T_\infty R/(2M_1)$, где R – универсальная газовая постоянная, M_1 – молекулярный вес атома. Скорость производства (гибели) атомарной компоненты $\dot{w}$ масштабируется на комплекс $k_{d\infty}\rho_\infty^2/(2M_1)$, $k_{d\infty}$ – константа диссоциации. При этом задача характеризуется безразмерными критериями – числом Рейнольдса $Re_\infty = \rho_\infty L U_\infty / \eta_\infty$, числом Маха $M_\infty = U_\infty / \sqrt{\gamma T_\infty R/(2M_1)}$, числом Дамкелера $Da_d = k_{d\infty}\rho_\infty^2 L / (2M_1 U_\infty)$, числом Шмидта $Sc = \eta_\infty / (\rho_\infty D_{12\infty})$ и другими. Здесь $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты и $D_{12\infty}$ – коэффициент взаимодиффузии.

В невязком приближении, которое будет рассматриваться, принимается, что в исходных уравнениях диффузионные члены малы по сравнению с конвективными. Как следствие, в пределе $Re_\infty \rightarrow \infty$ из исходной системы исключаются слагаемые, описывающие процессы диффузионного переноса импульса, тепла и массы.

В результате такого перехода система уравнений плоского сверхзвукового течения двухатомного газа [10] принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \quad \rho \frac{\partial c}{\partial t} + \rho u \frac{\partial c}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c}{\partial y} = Da_d \dot{w} \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial e_i}{\partial t} + \rho u \frac{\partial e_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e_i}{\partial y} + \gamma M_\infty^2 p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= Da_d \left(J - \frac{1}{2} e_v \dot{w} \right) - Q_{t-v} \\ \rho \frac{\partial (1-c)e_v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial (1-c)e_v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial (1-c)e_v}{\partial y} &= \frac{1}{2} Da_d e_v \dot{w} + Q_{t-v} \\ \gamma M_\infty^2 p &= (1+c) \rho T \end{aligned} \quad (2.1)$$

В уравнениях системы (2.1)

$$e_i = (c+5)T/2, \quad e_v = \theta_h (\exp(\theta_h/T_v) - 1)^{-1},$$

θ_h – характеристическая температура молекул рассматриваемого газа; безразмерный тепловой эффект реакций диссоциации–рекомбинации $J = h_1^0 \dot{w}$, h_1^0 – безразмерная энтальпия образования атомов;

$$Q_{t-v} = (1-c)\rho \frac{e_v(T) - e_v(T_v)}{\tau},$$

τ – время релаксации. Размерная скорость производства атомов в соответствии с [10] рассчитывается по формуле

$$\dot{w} = k_d^{(1)} \frac{(1-c)^2 \rho^2}{4M_1} - k_r^{(1)} \frac{(1-c)c^2 \rho^3}{2M_1^2}, \quad k_d^{(1)} = a_1 T^{-1/2} \exp\left(-\frac{\theta_d}{T}\right), \quad k_r^{(1)} = b_1 T^{-1/2},$$

где θ_d – энергия диссоциации молекулы газа. В безразмерной скорости производства атомов сохраняются исходные обозначения.

Для рассмотрения двумерных возмущений система (2.1) линеаризовалась на стационарном решении уравнений пограничного слоя для пластины. При выводе линеаризованных уравнений для возмущений мгновенные значения газодинамических переменных представлялись в виде

$$u = U_s + u', \quad v = v', \quad \rho = \rho_s + \rho', \quad c = c_s + c'$$

$$T = T_s + T', \quad T_v = T_{vs} + T'_v, \quad p = p_s + p'$$

Здесь индексом “s” обозначены значения переменных, относящиеся к стационарному течению, а штрихованные величины – возмущения этих переменных. Возмущения величин, функционально зависящих от основных переменных, выражались через их полные дифференциалы первого порядка. При этом входящие в них производные вычислялись на стационарном решении. Имеем следующие выражения:

$$e_i = e_{is} + e'_i = e_{is} + e_{iT}T' + e_{ic}c', \quad e_v = e_{vs} + e'_v = e_{vs} + e_{vT_v}T'_v \quad (2.2)$$

$$\dot{w} = \dot{w}_s + \dot{w}' = \dot{w}_s + \dot{w}_\rho \rho' + \dot{w}_T T' + \dot{w}_c c'$$

Здесь

$$e_{iT} = \frac{c_s + 5}{2}, \quad e_{ic} = \frac{T_s}{2}, \quad e_{vT_v} = \left(\frac{\theta_h}{T_{vs}}\right)^2 \exp\left(\frac{\theta_h}{T_{vs}}\right) \left(\exp\left(\frac{\theta_h}{T_{vs}}\right) - 1\right)^{-2}$$

$$\dot{w}_\rho = k_{ds}^{(1)} \frac{(1-c_s)^2 \rho_s}{2M_1} - k_{rs}^{(1)} \frac{3(1-c_s)c_s^2 \rho_s^2}{2M_1^2}, \quad \dot{w}_c = -\left(k_{ds}^{(1)} \frac{(1-c_s)\rho_s}{M_1} - k_{rs}^{(1)} \frac{(2c_s - 3c_s^2)\rho_s^3}{2M_1^2}\right)$$

$$\dot{w}_T = \frac{a_1}{T_s^{3/2}} \exp\left(-\frac{\theta_d}{T_s}\right) \left(\frac{\theta_d}{T_s} - \frac{1}{2}\right) \frac{(1-c_s)^2 \rho_s^2}{4M_1} + \frac{3b_1}{2T_s^{3/2}} \frac{(1-c_s)c_s^2 \rho_s^2}{2M_1^2}$$

Рассматривалась устойчивость периодических по продольной координате x возмущений в форме бегущих плоских волн

$$\mathbf{q}'(x, y, t) = \mathbf{q}(y) \exp(i\alpha(x - Vt))$$

$$\mathbf{q}'(x, y, t) = (u', v', \rho', T', T'_v, p', c', \dot{w}'), \quad \mathbf{q}(y) = (u, \alpha, v, \rho, \theta, \theta_v, p, C, \Omega),$$

где α – волновое число вдоль периодической переменной x , $V = V_r + iV_i$ – комплексная фазовая скорость, i – мнимая единица. Здесь для части амплитудных функций использованы обозначения соответствующих исходных переменных.

Подстановка $\mathbf{q}'(x, y, t)$ в систему уравнений для возмущений дает систему уравнений для их амплитуд:

$$D\rho + \alpha\rho_s\sigma + \alpha v \frac{d\rho_s}{dy} = 0, \quad D\rho_s C + \rho_s \alpha v \frac{dc_s}{dy} = \text{Da}_d \Omega'$$

$$D\rho_s u + \rho_s \alpha v \frac{dU_s}{dy} = -i\alpha p, \quad D\rho_s \alpha v = -\frac{dp}{dy}$$

$$D\rho_s e'_{ia} + \rho_s \alpha v \frac{de'_{is}}{dy} + \gamma M_\infty^2 \rho_s \alpha \sigma = \text{Da}_d \left(J'_a - \frac{1}{2} \left(e'_{va} \dot{w}_s + e_{vs} \Omega' \right) \right) - Q'_{l-v,a} \quad (2.3)$$

$$(1 - c_s) D\rho_s e'_{va} - \rho_s e_{vs} DC + \rho_s \alpha v \frac{d(1 - c_s) e_{vs}}{dy} = \frac{\text{Da}_d}{2} \left(e'_{va} \dot{w}_s + e_{vs} \Omega' \right) + Q'_{l-v,a}$$

$$p = p_s \left(\frac{C}{1 + c_s} + \frac{\rho}{\rho_s} + \frac{\theta}{T_s} \right), \quad p_s = \frac{\rho_s T_s (1 + c_s)}{\gamma M_\infty^2},$$

где введены следующие обозначения

$$D = i\alpha W, \quad W = U_s - V, \quad \sigma = iu + \frac{du}{dy}, \quad \Omega' = \dot{w}_\rho \rho + \dot{w}_T \theta + \dot{w}_c C$$

В уравнениях (2.3) дополнительные индексы “ a ” в выражениях возмущений означают, что в формулах (2.2) подставлены значения соответствующих амплитуд, например:

$$e'_{ia} = e_{iT} \theta + e_{ic} C$$

$$Q'_{l-v,a} = (1 - c_s) \rho_s \frac{e'_v(\theta) - e'_v(\theta_v)}{\tau} - (C\rho_s - (1 - c_s)\rho) \frac{e_{vs}(T_s) - e_{vs}(T_{vs})}{\tau}$$

Как известно [3, 4, 7, 9], система (2.3) с исключенными вторыми производными является переопределенной и сводится к двум уравнениям первого порядка для пары функций (v, p) или к уравнению второго порядка для одной из них.

3. Критерии невязкой неустойчивости. Чтобы избежать громоздких вычислений, мы ограничились частными случаями, имеющими определенную физическую трактовку. Во всех рассмотренных случаях вывод условий невязкой неустойчивости производится в рамках единой схемы вычислений, обобщающей подход [5]. На первом этапе система (2.3) сводится к уравнению второго порядка для амплитуды возмущения поперечной скорости v . Уравнение можно записать в следующем универсальном виде

$$\frac{1}{W} \frac{d}{dy} \left(\frac{v' W - v U'_s}{\chi} + v W S \right) = \alpha^2 \rho_s v, \quad v = v_r + i v_i \quad (3.1)$$

Здесь и далее штрихи означают производные по координате y , функции χ и S определяются в каждом конкретном случае.

К уравнению (3.1) присоединяются однородные граничные условия

$$v(0) = v(\delta) = 0, \quad (3.2)$$

где δ — условная верхняя граница пограничного слоя.

Чтобы перейти в (3.1), (3.2) к корректно поставленной спектральной задаче и при выводе условий, входящие сложным образом в выражения для χ и S комплексы D , содержащие спектральный параметр α , опускаются в предположении его малости.

Уравнение (3.1) умножается на комплексно сопряженную функцию v^* и из полученного уравнения вычитается комплексно сопряженное ему. После ряда преобразований приходим к дифференциальному тождеству:

$$\frac{v^* W^*}{|W|^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{v' W - v U'_s}{\chi} + v W S \right) = \frac{v W}{|W|^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{v'^* W^* - v^* U'_s}{\chi^*} + v^* W^* S^* \right) \quad (3.3)$$

Перегруппировав слагаемые в (3.3), получаем выражение

$$\begin{aligned} v^* \frac{d}{dy} \left(\frac{v'}{\chi} \right) - v \frac{d}{dy} \left(\frac{v'^*}{\chi^*} \right) = \frac{vv^*}{|W|^2} \left[W \frac{d}{dy} \left(\frac{U'_s}{\chi^*} \right) - W^* \frac{d}{dy} \left(\frac{U'_s}{\chi} \right) + \left(\frac{W}{\chi^*} - \frac{W^*}{\chi} \right) \frac{dU_s}{dy} + \right. \\ \left. + \left(WS^* \frac{dW^*}{dy} - W^* S \frac{dW}{dy} \right) + |W|^2 \frac{d(S^* - S)}{dy} \right] + (vv'^* S^* - v^* v' S) \end{aligned}$$

Для возмущений, близких к нейтральным, можно положить

$$|V_i| \ll |V_r|, |U_s|$$

и пренебречь мнимой составляющей в W . В результате получаем $W = W^*$, $\chi = \chi^*$, $S = S^*$. После этого выражение преобразуется к виду

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\chi} \frac{dv_r v_i}{dy} - v_r v_i S \right) = \frac{|v|^2 V_i}{|W|^2} \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\chi} \frac{dU_s}{dy} \right) + S \frac{dU_s}{dy} \right) - v_r v_i \frac{dS}{dy}, \quad (3.4)$$

где выражения в обеих сторонах тождества чисто вещественные.

Необходимое условие существования растущих невязких возмущений при $V_i > 0$ получается из (3.4) на основе следующих рассуждений. В левой части (3.4) стоит производная дифференцируемой функции

$$F(y) = \frac{1}{\chi} \frac{dv_r v_i}{dy} - v_r v_i S,$$

в силу (3.2) обращающейся в нуль на концах интервала $[0, \delta]$. Гладкость $F(y)$ следует из дифференцируемости решений уравнения (3.1). Если уравнение (3.1) переписать в не-самосопряженной форме, то непосредственно можно установить, что во всех рассматриваемых ниже случаях оно имеет вид

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + p_1(y) \frac{dv}{dy} + p_2(y) v = 0$$

При этом коэффициент $p_1(y)$ имеет полюс первого порядка в точке $y = y_{cr}$, где $W = 0$, а коэффициент $p_2(y)$ в данном случае не имеет особенностей. При этом из теоремы Фукса [11] следует, что точка $y = y_{cr}$ является устранимой особенностью, а уравнение имеет два линейно независимых дифференцируемых решения, представляемых обобщенными степенными рядами. Для случая колебательно-возбужденного однокомпонентного газа такие решения были построены в явном виде [12].

По известной теореме Ролля [13] производная функции $F(y)$ должна обращаться в нуль хотя бы в одной внутренней точке интервала. В частности, в силу структуры правой части одной из таких точек должна быть координата критического слоя $y = y_{cr}$. Действительно, в этой точке первое слагаемое содержит сингулярность, которая должна быть скомпенсирована, чтобы сохранить ограниченность производной дифференцируемой функции $F(y)$ в левой части. При положительных инкрементах $V_i > 0$ это возможно, если и только если выражение в квадратных скобках обращается в нуль

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\chi} \frac{dU_s}{dy} \right) + S \frac{dU_s}{dy} = 0$$

Чтобы эта точка была нулем производной $F(y)$, необходимо также потребовать

$$\frac{dS}{dy} = 0$$

Таким образом, условием невязкой неустойчивости, определяющим координату критического слоя, может служить система уравнений

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\chi_1} \frac{dU_s}{dy} \right) + S_1 \frac{dU_s}{dy} = 0, \quad \frac{dS_1}{dy} = 0, \quad (3.5)$$

где χ_1 , S_1 — выражения функций χ , S при $W = 0$, совместное решение которых определяет координату y_{cr} .

Полученная система (3.5) сложна для практического использования в качестве критерия, в частности, в случае учета объемной диссоциации—рекомбинации. В предположении ведущей роли первого уравнения, компенсирующего сингулярность $(U_s - V_r) = 0$, были рассмотрены возможные упрощения. В результате оценочных расчетов выбрано приближение в виде уравнения

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\chi_1} \frac{dU_s}{dy} \right) + \left(\max_y S_1 \right) \frac{dU_s}{dy} = 0, \quad (3.6)$$

первые корни которого отличаются от корней системы (3.5) не более, чем в третьем знаке после запятой.

3.1. Колебательно-возбужденный газ без учета реакции диссоциации—рекомбинации. Этот случай соответствует начальному этапу термической диссоциации, которой всегда предшествует колебательное возбуждение, но концентрация атомов пренебрежимо мала и газ остается однокомпонентным. В этом случае при выводе уравнения (3.1) в системе (2.3) следует обратить в нуль все величины, связанные с диссоциацией—рекомбинацией, и использовать уравнение состояния для пограничного слоя идеального газа [10]

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{\rho_s} + \frac{\theta}{T_s} \right), \quad \rho_s T_s = 1$$

Уравнения энергий удобно переписать в терминах возмущений температур:

$$D\theta + \alpha v T_s'' + \frac{\alpha \sigma}{\rho_s c_{V, tr}} = -\gamma_v \frac{\theta - \theta_v}{\tau}, \quad D\theta_v + \alpha v T_s''' = \frac{\theta - \theta_v}{\tau}$$

$$\gamma_v = \frac{c_{V, v}}{c_{V, tr}}, \quad c_{V, tr} = \frac{de_i}{dT} = \frac{5}{2}, \quad c_{V, v} = \frac{de_v}{dT_v} = \left(\frac{\theta_h}{T_v} \right)^2 \exp \left(\frac{\theta_h}{T_v} \right) \left(\exp \left(\frac{\theta_h}{T_v} \right) - 1 \right)^{-2}$$

После преобразований полученной таким образом системы приходим к уравнению вида (3.1) для возмущения поперечной скорости v , в котором коэффициентные функции определены как

$$\chi = T_s - m^2 M_\infty^2 W^2, \quad S = \frac{1}{\chi} \frac{\gamma_v (T_s' - T_{vs}')}{\gamma_v + \gamma (1 - \tau D)}, \quad m^2 = m_r^2 + i m_i^2, \quad (3.7)$$

где

$$m_r^2 = \frac{R_1 (1 + \gamma_v + \alpha \tau V_i) + \Delta^2}{R_1^2 + \Delta^2}, \quad m_i^2 = -\frac{\gamma_v (\gamma - 1) \Delta}{\gamma R_1^2 + \Delta^2}$$

$$R_1 = 1 + \frac{\gamma_v}{\gamma} + \alpha \tau V_i, \quad \Delta = \alpha \tau V_r$$

В соответствии с определением (3.7) при $W = 0$ получаем

$$\chi_1 = T_s, \quad S_1 = \frac{1}{T_s} \frac{\gamma_v (T_s' - T_{vs}')}{\gamma_v + \gamma}$$

В результате согласно (3.6) условие невязкой неустойчивости для колебательно-возбужденного газа выражается как

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{T_s} \frac{dU_s}{dy} \right) + \max_y \left(\frac{1}{T_s} \frac{\gamma_v(T'_s - T'_{vs})}{\gamma_v + \gamma} \right) \frac{dU_s}{dy} = 0 \quad (3.8)$$

Непосредственно видно, что в отсутствии колебательного возбуждения условие (3.8) переходит в известное условие “обобщенной” точки перегиба [2]

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{T_s} \frac{dU_s}{dy} \right) = 0 \quad (3.9)$$

3.2. “Замороженная” реакция диссоциации–рекомбинации с учетом колебательного возбуждения. В данном случае принимается, что газофазная реакция диссоциации–рекомбинации “заморожена” в объеме, что соответствует $\dot{w} = 0$ в (2.1) и $\Omega' = 0$ в (2.3), и остается гетерогенная реакция на твердой поверхности. В сверхзвуковых потоках такая модель соответствует быстрому расширению термически диссоциированного газа, когда рекомбинация замедляется [9]. При этом фактически имеет место смесь двух не реагирующих газов, одна компонента в котором колебательно возбуждена. Для каждой из компонент удобно рассматривать отдельные уравнения неразрывности и уравнения энергий, записанные через температуры. При этом система уравнений для амплитуд возмущений (2.3) в двухкомпонентном газе переписывается в виде

$$\begin{aligned} D\rho_1 + \alpha\rho_{1s}\sigma + \alpha v \frac{d\rho_{1s}}{dy} &= 0, & D\rho_2 + \alpha\rho_{2s}\sigma + \alpha v \frac{d\rho_{2s}}{dy} &= 0 \\ D\rho_s u + \rho_s \alpha v \frac{dU_s}{dy} &= -i\alpha p, & D\rho_s \alpha v &= -\frac{dp}{dy} \\ D\rho_{1s}\theta + \alpha v \rho_{1s} T_s'' + \frac{\alpha \sigma \rho_{1s}}{\rho_s c_{v1, tr}} &= 0 \\ D\rho_{2s}\theta + \alpha v \rho_{2s} T_s'' + \frac{\alpha \sigma \rho_{2s}}{\rho_s c_{v2, tr}} &= -\gamma_v \rho_{2s} \frac{\theta - \theta_v}{\tau}, & D\rho_{2s}\theta_v + \alpha v \rho_{2s} T_s'' &= \rho_{2s} \frac{\theta - \theta_v}{\tau} \\ p &= \frac{1}{\gamma M_\infty^2} ((2\rho_{1s} + \rho_{2s})\theta + (2\rho_1 + \rho_2)T_s), & \rho_s &= \rho_{1s} + \rho_{2s} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как давление постоянно поперек слоя, то $\rho_s T_s (1 + c_s) = 1 + c_{s\infty}$, где $c_{s\infty}$ – значение массовой концентрации атомов на верхней границе пограничного слоя.

Здесь

$$\gamma_v = \frac{c_{v2,v}}{c_{v2, tr}}, \quad c_{v1, tr} = \frac{3}{2}, \quad c_{v2, tr} = \frac{5}{2}, \quad c_{v2,v} = \left(\frac{\theta_h}{T_v} \right)^2 \exp\left(\frac{\theta_h}{T_v} \right) \left(\exp\left(\frac{\theta_h}{T_v} \right) - 1 \right)^{-2}$$

Исключив из системы (3.10) все зависимые переменные, кроме возмущения поперечной скорости v , переходим к уравнению второго порядка вида (3.1), в котором коэффициентные функции имеют вид

$$\chi = T_s \left(\frac{1 + c_s}{1 + c_{s\infty}} \right) \left(1 - \frac{\gamma M_\infty^2 W^2}{(1 + c_s) T_s A} \right), \quad A = \frac{\gamma_v + \gamma(1 + \tau D)}{1 + \gamma_v + \tau D}, \quad S = \frac{1}{\chi} \frac{\gamma_v(T'_s - T'_{vs})}{\gamma_v + \gamma(1 - \tau D)} \quad (3.11)$$

При $W = 0$ выражения (3.11) принимают вид

$$\chi_1 = T_s \left(\frac{1 + c_s}{1 + c_{s\infty}} \right), \quad S_1 = \frac{1}{\chi_1} \frac{\gamma_v(T'_s - T'_{vs})}{(\gamma + \gamma_v)}$$

В результате согласно условию (3.6) критерий невязкой неустойчивости для колебательно возбужденного газа с “замороженной” реакцией диссоциации–рекомбинации дается формулой

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{T_s} \left(\frac{1 + c_{s\infty}}{1 + c_s} \right) \frac{dU_s}{dy} \right) + \max_y \left(\left(\frac{1 + c_{s\infty}}{1 + c_s} \right) \frac{\gamma_v (T'_s - T'_{vs})}{(\gamma + \gamma_v) T_s} \right) \frac{dU_s}{dy} = 0 \quad (3.12)$$

Если пренебречь колебательным возбуждением в (3.12), то можно получить критерий невязкой неустойчивости для газа с “замороженной” обменной реакцией в виде

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{T_s} \left(\frac{1 + c_{s\infty}}{1 + c_s} \right) \frac{dU_s}{dy} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Переход от формул (3.12) и (3.13) к критерию “обобщенной” точки перегиба (3.9) очевиден.

3.3. Диссоциирующий газ без учета колебательного возбуждения. Колебательное возбуждение в этом случае косвенно учитывается в константах диссоциации. Здесь из системы (2.3) исключается уравнение для колебательной энергии и полагается $\gamma_v = 0$. Из-за громоздкости выражений коэффициентные функции в уравнении вида (3.1) для возмущения поперечной скорости v здесь не приводятся. При $W = 0$ они имеют вид

$$\chi_1 = \frac{1}{\rho_s}, \quad S_1 = \Lambda \left(\rho_s \left(h_1^0 \frac{dc_s}{dy} - \frac{de_{is}}{dy} \right) + N \frac{d\rho_s}{dy} \right), \quad \Lambda = \frac{\rho_s}{\rho_s N - \gamma M_\infty^2 p_s} \quad (3.14)$$

$$N = (1 + c_s)(h_1^0 - e_{is}) + (e_{is} T_s + (1 + c_s)(h_1^0 - e_{is})) \frac{(1 + c_s)\dot{w}_c - \rho_s \dot{w}_p}{(1 + c_s)\dot{w}_c - T_s \dot{w}_T}$$

Используя условие (3.6) и равенства (3.14), получаем, что необходимое условие роста невязких возмущений дается выражением

$$\frac{d}{dy} \left(\rho_s \frac{dU_s}{dy} \right) + \max_y \left(\Lambda \left(\rho_s \left(h_1^0 \frac{dc_s}{dy} - \frac{de_{is}}{dy} \right) + N \frac{d\rho_s}{dy} \right) \right) \frac{dU_s}{dy} = 0 \quad (3.15)$$

Без учета диссоциации–рекомбинации критерий (3.15) переходит в классическое условие (3.9). Действительно, дробное выражение в (3.14), преобразованное к виду

$$-e_{is} \frac{(1 + c_s) - \rho_s \dot{w}_p / \dot{w}_c}{(1 + c_s) - T_s \dot{w}_T / \dot{w}_c},$$

при переходе к идеальному газу превращается в $-T_s$. Соответственно, содержимое квадратных скобок в (3.14) переходит в выражение

$$-\rho_s \frac{dT_s}{dy} - T_s \frac{d\rho_s}{dy} = -\frac{d}{dy}(\rho_s T_s),$$

которое в силу условия $\rho_s T_s = 1$ обращается в нуль, что и дает требуемый переход. Аналогично в случае “замороженной” реакции условие (3.15) переходит в соответствующее условие (3.13).

4. Численные расчеты. Для предварительной оценки значимости полученных условий при выделении наиболее растущих невязких мод был выбран режим гиперзвукового полета в невозмущенной атмосфере. Рассматривался пограничный слой на пластине. В расчетах все физические характеристики газа брались по данным для азота. В качестве граничных условий на верхней границе пограничного слоя использовались параметры потока за косым скачком уплотнения [14] на заостренной головной части тела, летящего в верхних слоях атмосферы:

$$M_\infty = 6.337, \quad T_\infty = T_{v\infty} = 1986.3 \text{ K}, \quad p_\infty = 57688.2 \text{ Па}$$

Профили газодинамических величин в стационарном потоке рассчитывались на основе локально автомодельных уравнений [10]. На верхней границе пограничного слоя обезразмеренные граничные условия имели вид

$$U_s(\delta) = 1, \quad T_s(\delta) = T_{vs}(\delta) = 1, \quad c_s(\delta) = c_\infty = 0.01$$

Верхняя граница пограничного слоя δ выбиралась из условия $\left| \frac{U_\infty - u(\delta)}{U_\infty} \right| \leq 10^{-6}$.

На поверхности пластины ставились граничные условия, соответствующие адиабатической абсолютно некаталитической стенке [10]

$$U_s(0) = 0, \quad T'_s(0) = 0, \quad T_{vs}(0) = T_s(0), \quad c'_s(0) = 0$$

Выбранное условие на колебательную температуру связано с тем, что при гиперзвуковых числах Маха температура адиабатической стенки достаточна для возбуждения колебательных степеней свободы.

Рассчитанные профили параметров стационарного течения приведены на рис. 1,

где $Y = \frac{1}{2\delta\sqrt{x}} \int_0^y \rho(z) dz$.

Используя полученные распределения, на основе формул (3.8), (3.9), (3.12), (3.15) были вычислены координаты критического слоя y_{cr} , где фазовые скорости возмущения равны скорости стационарного потока $V_r = U_s(y_{cr})$. Затем для каждого значения фазовой скорости при $M_\infty = 6.337$ на основе уравнения (3.1) с однородными граничными условиями (3.2) были получены вещественные волновые числа $\alpha_k^{(j)}$ для первых четырех невязких мод Мэка [4], где $k = I, \dots, IV$, а верхний индекс j фиксирует критерий, используя который они рассчитывались. Далее для каждого волнового числа $\alpha_k^{(j)}$ решалась спектральная задача (3.1), (3.2), собственными значениями которой являются комплексные фазовые скорости $V_k^{(j)} = V_{rk}^{(j)} + iV_{ik}^{(j)}$, и вычислялись частоты возмущений $\omega_k^{(j)} = \alpha_k^{(j)} V_{ik}^{(j)}$. Все спектральные задачи решались методом “стрельбы”. Для этого задача (3.1), (3.2) заменялась нормальной системой уравнений первого порядка с однородными граничными условиями. Полученная таким образом система интегрировалась численно с помощью процедуры Рунге–Кутты четвертого порядка на интервалах $y = (0, 0.5\delta)$ и $y = (0.5\delta, \delta)$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$. Точкой “прицеливания” служила середина пограничного слоя $y = 0.5\delta$, в которой требовалось, чтобы вычисленные “слева” и “справа” в точке $y = 0.5\delta$ значения решения совпадали с точностью до 10^{-6} .

Расчетные данные для первых четырех невязких мод Мэка сведены в табл. 1. Как следует из таблицы, для всех выведенных условий I и II моды являются растущими. Это важно с той точки зрения, что в отличие от классического критерия (3.9), полученные условия по логике вывода являются только необходимыми и формально не гарантируют роста выделяемых на их основе возмущений. Все условия определяют II моду как наиболее растущую, что также подтверждает их физичность. Результаты, рассчитанные на одних и тех же профилях газодинамических переменных с учетом совместного колебательного возбуждения и реакций диссоциации–рекомбинации, имеют относительный характер. Они дают возможность оценить погрешность, связанную с использованием критерия “обобщенной” точки перегиба (3.9), в условиях, отличных от идеального газа. Сравнивая данные, полученные по условиям (3.8) и (3.9), можно видеть, что в рассчитанном режиме колебательное возбуждение практически не влияет на волновые числа невязких растущих мод. Сделанный вывод косвенно подтверждается сравнением соответствующих результатов, полученных на основе условий (3.12) и (3.15). Это позволяет предположить, что если колебательное возбуж-

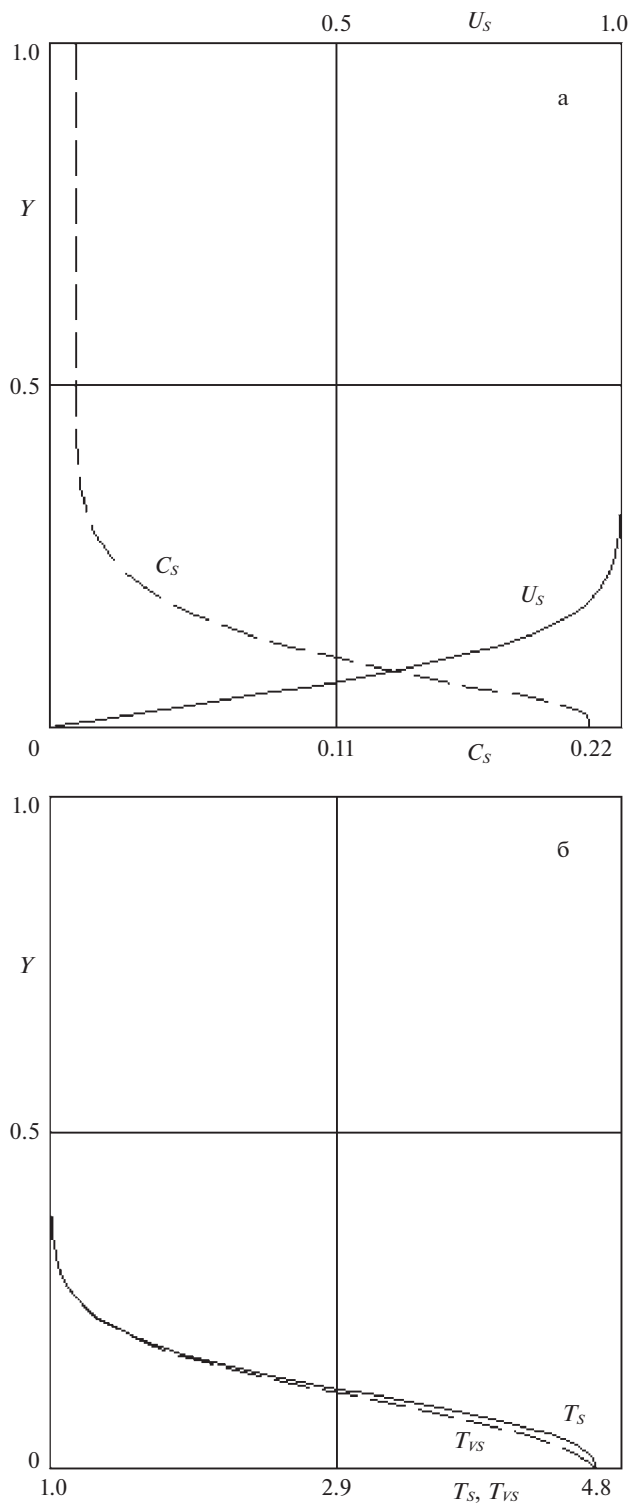


Рис. 1. Профили газодинамических переменных стационарного течения.

Таблица 1. Волновые числа $\alpha_k^{(j)}$ и частоты возмущений $\omega_k^{(j)}$ первых четырех невязких мод Мэка

Критерий	$\alpha_k^{(j)}$				$\omega_k^{(j)} \times 10^3$			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
(3.9)	0.0959	0.2726	0.3233	0.5548	0.9452	3.8041	0.8199	−0.3999
(3.8)	0.0957	0.2721	0.3226	0.5537	0.8309	3.3474	0.7209	−0.3515
(3.12)	0.0843	0.2392	0.2849	0.4878	0.7329	2.9424	0.6366	−0.3104
(3.15)	0.0821	0.2329	0.2773	0.4748	0.7136	2.8641	0.6198	−0.3022

дение, далекое от начала диссоциации, является единственным отклонением от идеального газа, можно ограничиться использованием условия “обобщенной” точки перегиба, как это было сделано в [15]. Относительное отклонение волновых чисел I и II мод, рассчитанных по критерию (3.9) для идеального газа и условию (3.15) для диссоциирующего газа без учета колебательного возбуждения, составляет порядка 14.5%. В то же время относительное отклонение мнимых частот (инкрементов нарастания) лежит в пределах 24–25%, которое является существенным. При этом условие (3.15) дает меньшие инкременты нарастания, что прямо соответствует демпфирующему эффекту процесса диссоциации [9]. Проведенный анализ показывает, что полученные условия, в частности, (3.15) для диссоциирующего газа, позволяют учесть влияние реальных свойств газа на характеристики растущих невязких возмущений, а через них на результаты расчетов устойчивости соответствующих течений.

Заключение. Для плоского течения колебательно-возбужденного диссоциирующего двухатомного газа в пограничном слое найдены необходимые условия существования растущих (нейтральных) невязких возмущений, обобщающие невязкий критерий “обобщенной” точки перегиба на профиле скорости невозмущенного потока. В качестве исходных использованы уравнения для амплитуд синусоидальных возмущений. Вывод соответствующих зависимостей является естественным обобщением известных выкладок для получения критерия “обобщенной” точки перегиба в сжимаемом газе. Получены условия для колебательно-возбужденного однокомпонентного газа, как начальной стадии термической диссоциации, а также для газа с одной реакцией диссоциации–рекомбинации. В качестве промежуточного рассмотрен случай бинарной молекулярно-атомной смеси с колебательно-возбужденной молекулярной компонентой и “замороженной” газофазной реакцией диссоциации–рекомбинации. Показано, что все соотношения при пренебрежении колебательным возбуждением и диссоциацией переходят в классическое условие “обобщенной” точки перегиба. Проведенные сравнительные численные расчеты для условий развитой диссоциации показали, что использование критерия “обобщенной” точки перегиба не учитывает специфику процесса. Волновые числа и фазовые скорости I и II невязких мод, рассчитанные на его основе, могут существенно отличаться от результатов, полученных с использованием нового необходимого условия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-01-00168а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
2. Drasin P.G., Reid G.H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 2004. 605 p.
3. Lees L. The Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid. NACA Technical note, No. 1360. Washington: NACA, 1947. 169 p.

4. Mack L.M. Boundary Layer Stability Theory. JPL Technical Rep., Document 900–277. Pasadena: California Instit. Technology, 1969. 272 p.
5. Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 131–165.
6. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно возбужденного двухатомного газа // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 581–593.
7. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 1. Невязкая задача // ПМТФ. 2014. Т. 55. № 2. С. 80–93.
8. Shen S.F. Effect of chemical reaction on the inviscid criterion for laminar stability of parallel flows // Proc. 5-th Midwest. Conf. Fluid Mech. Ann Arbor. 1957. P. 11–20.
9. Гапонов С.А., Петров Г.В. Устойчивость пограничного слоя неравновесного диссоциирующего газа. Новосибирск: Наука, 2013. 95 с.
10. Григорьев Ю.Н., Горобчук А.Г., Ершов И.В. Модель пограничного слоя колебательно-возбужденного диссоциирующего газа // Теплофиз. и аэромех. 2021. Т. 28. № 5. С. 667–689.
11. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Изд. иностр. лит., 1962. 351 с.
12. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Асимптотическая теория кривой нейтральной устойчивости течения Куэтта сжимаемого и колебательно-возбужденного газа // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 1. С. 3–21.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 680 с.
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 676 с.
15. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость сверхзвукового пограничного слоя релаксирующего газа на пластине // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 3. С. 3–15.

Necessary Conditions for Development of Inviscid Instabilities in a Vibrationally Excited Dissociating Gas

Yu. N. Grigoryev^{a, #} and I. V. Ershov^{b, ##}

^aFederal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia

^bNovosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, Russia

[#]e-mail: grigor@ict.nsc.ru

^{##}e-mail: ivershov1969@gmail.com

For a plane flow of a vibrationally excited dissociating diatomic gas the necessary conditions of the existence of growing (neutral) inviscid perturbations, similar to the Rayleigh criterion of a “generalized” inflection point, are obtained. The corresponding formulas are presented for cases with a certain physical interpretation. In particular, the model of a vibrationally excited one-component gas is considered as the initial stage of thermal dissociation, as well as a wide spread model with one dissociation-recombination reaction. The case of a binary molecular-atomic mixture with a vibrationally excited molecular component and a “frozen” gas-phase dissociation-recombination reaction is considered as an intermediate one. Comparative numerical calculations were carried out, which showed, in particular, that under conditions of developed dissociation, the use of the criterion of the “generalized” inflection point does not take into account the specifics of the process. The wave numbers and phase velocities of the I and II inviscid modes calculated on its basis may differ significantly from the results obtained using the new necessary condition.

Keywords: inviscid perturbations, Rayleigh criterion, “generalized” inflection point, vibrational excitation, dissociation-recombination reaction, I and II inviscid modes

REFERENCES

1. Lin C.C. The Theory of Hydrodynamics Stability. Cambridge: Univ. Press, 1955. 155 p.
2. Drasin P.G., Reid G.H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 2004. 605 p.

3. *Lees L.* The Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid. NACA Technical note, No. 1360. Washington: NACA, 1947. 169 p.
4. *Mack L.M.* Boundary Layer Stability Theory. JPL Technical Rep., Document 900–277. Pasadena: California Instit. Technology, 1969. 272 p.
5. *Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y.* On the linear stability of compressible plane Couette flow // *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 258, pp. 131–165.
6. *Grigoryev Yu.N., Ershov I.V.* The linear stability of inviscid shear flow of vibrationally excited diatomic gas // *JAMM*, 2011, vol. 75, iss. 4, pp. 410–418.
7. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Linear stability of the Couette flow of a vibrationally excited gas. 1. Inviscid problem // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 258–269.
8. *Shen S.F.* Effect of chemical reaction on the inviscid criterion for laminar stability of parallel flows // *Proc. 5-th Midwest. Conf. Fluid Mech. Ann Arbor.*, 1957, pp. 11–20.
9. *Gaponov S.A., Petrov G.V.* Stability of the Boundary Layer of a Nonequilibrium Dissociating Gas. Novosibirsk: Nauka, 2013. 95 p. (in Russian)
10. *Grigoryev Yu.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V.* Model of the boundary layer of a vibrationally excited dissociating gas // *Thermophys. Aeromech.*, 2021, vol. 28, no. 5, pp. 635–647.
11. *Tricomi F.* Differential Equations. Blackie & Son Limited, 1961. 326 p.
12. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Asymptotic theory of neutral stability curve of the Couette flow of a vibrationally excited gas // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 1–16.
13. *Fikhtengolts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 1. Moscow: Fizmatlit, 2003. 680 p. (in Russian)
14. *Loitsyanskii L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Oxford: Pergamon, 1966. 804 p.
15. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Linear stability of the boundary layer of relaxing gas on a plate // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 3, pp. 295–307.

УДК 532.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВСПЛЫВАЮЩЕГО ПУЗЫРЬКА

© 2023 г. А. Н. Зотова^{1,*}, А. А. Кандауров¹, Ю. И. Троицкая¹, Д. А. Сергеев¹¹Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

*e-mail: aniazotova@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.02.2023 г.

После доработки 19.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Проведено прямое численное моделирование всплывания изначально покоившегося пузырька воздуха в воде без течения. Для сравнения с экспериментом взята усложненная начальная форма пузырька, соответствующая экспериментальной. Изменения формы пузырька в процессе всплывания, полученные в результате численного моделирования, близки к экспериментальным изменениям формы пузырька. Для сравнения с результатами численного моделирования, имеющимися в литературе, проведено моделирование всплывающего пузырька, имеющего изначально сферическую форму. Получено, что в процессе всплывания форма пузырька сначала близка к эллиптической и испытывает колебания, но далее усложняется — в нижней части пузырька появляется “хвост”. Данный режим динамики всплывающего пузырька подтверждается опубликованными в литературе результатами численного моделирования.

Ключевые слова: всплывающий пузырек, прямое численное моделирование

DOI: 10.31857/S003282352303013X, EDN: ZUPAJW

1. Введение. Пузырьки воздуха играют важную роль при взаимодействии океана и атмосферы. Они усиливают газообмен между атмосферой и океаном, вносят существенный вклад в потоки аэрозольных частиц, создают окружающий шум и поглощают биологические поверхностно-активные вещества. Одним из параметров, характеризующих эти процессы, является время жизни пузырька до его достижения поверхности воды и разрыва. Можно предположить, что наличие в жидкости сдвигового течения, может повлиять на этот параметр, и поэтому конечной целью наших исследований будет именно моделирование всплывания пузырька газа в жидкости со сдвиговым течением. Но в данной работе речь пойдет о начальном этапе исследования — моделировании динамики пузырька в жидкости без течения для сравнения с экспериментом и результатами моделирования, приведенными в литературе.

Экспериментально динамика всплывающего пузырька была исследована во множестве работ, например в [1, 2], кроме того эксперимент по всплыванию пузырька воздуха в воде в отсутствие и в присутствии сдвигового течения проводился авторами данной работы. На рис. 1,а можно увидеть последовательность кадров съемки всплывающего пузырька в воде без сдвигового течения для различных моментов времени, моменты времени выбраны из соображений наглядности демонстрации изменения формы пузырька. Численные трехмерные исследования всплывающего в жидкости пузырька проводились, например, в [3–9], в части исследований моделировалась динамика ансамбля пузырьков в жидкости [3, 4, 10, 11]. Траектории всплывающих пузырьков исследовались в работах [12–14]. Результаты данного численного моделиро-

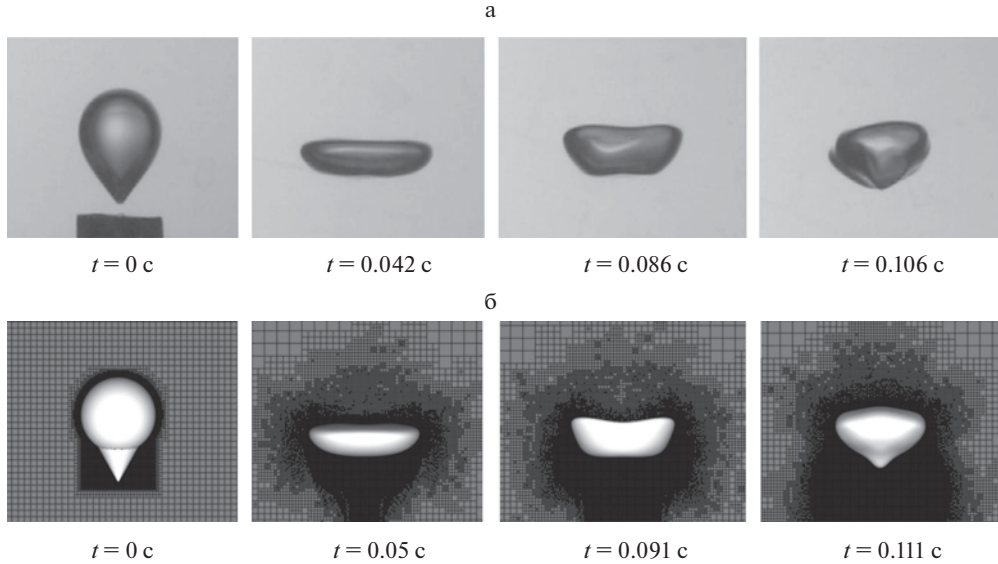


Рис. 1. а: Кадры высокоскоростной съемки всплывающего пузырька, полученные в предварительном эксперименте, с использованием оборудования УНУ ККГС; б: результат численного эксперимента (MAXLEVEL = 10, $u_{\text{err}} > 10^{-2}$, $f_{\text{err}} > 10^{-3}$, $\omega_{\text{err}} > 10^{-1}$): форма пузырька в различные моменты в процессе всплывания.

вания в конце работы будут сопоставлены с результатами проведенного авторами эксперимента и результатами [9].

2. Моделирование. Для прямого численного моделирования всплывания воздушно-го пузырька в воде был использован программный пакет Basilisk [15]. В Basilisk реализован численный алгоритм, решающий уравнения Навье–Стокса для несжимаемых сред с переменной плотностью и поверхностным натяжением [16]:

$$\begin{aligned}\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) &= -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \sigma \kappa \delta_s \mathbf{n} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость среды, ρ — плотность среды, μ — динамическая вязкость и $\mathbf{D}$ — тензор деформации, определяемый как $D_{ij} \equiv (\partial_j u_i + \partial_i u_j)/2$. Функция распределения Дирака δ_s выражает тот факт, что член поверхностного натяжения сосредоточен на границе раздела сред; σ — коэффициент поверхностного натяжения, κ и $\mathbf{n}$ — кривизна и нормаль к границе раздела. Для двухфазных потоков вводится объемная доля c первой жидкости, а плотность и вязкость определяются как

$$\begin{aligned}\rho &\equiv c\rho_1 + (1-c)\rho_2 \\ \mu &\equiv c\mu_1 + (1-c)\mu_2,\end{aligned}$$

где ρ_1 , ρ_2 и μ_1 , μ_2 — плотности и вязкости первой и второй сред соответственно.

В расчетах используется метод адаптивной сетки — размер ячейки дискретизации может варьироваться в разных областях домена с использованием метода вейвлет-адаптации. Минимальный размер ячейки задается максимальным уровнем дискретизации — MAXLEVEL. Линейный размер ячейки, соответствующий максимальному уровню дискретизации может быть получен делением размера домена L_0 на 2 в степени, равной значению MAXLEVEL. Алгоритм дробления сетки вызывается каждый

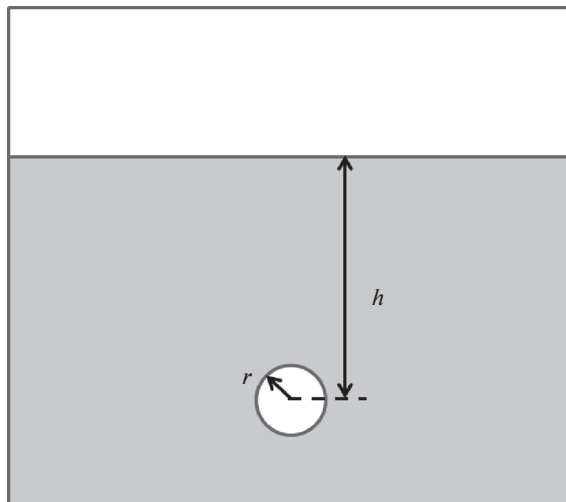


Рис. 2. Схема численного эксперимента: в начальный момент времени пузырек находится в жидкости на глубине h , радиус пузырька r .

временной шаг, сетка дробится, когда оцененная по вейвлету ошибка превышает $u_{\text{егг}}$, $f_{\text{егг}}$ или $\omega_{\text{егг}}$ (в некоторых расчетах) для полей скорости, объемной доли первой жидкости или завихренности поля скорости соответственно.

Была рассмотрена задача следующей конфигурации (рис. 2): в верхней части области моделирования (использовались ее линейные размеры $L_0 = 50, 60$ мм) воздух, нижняя ее часть заполнена водой, толщина слоя воды – 40 или 50 мм. В начальный момент времени пузырек газа находится в жидкости на глубине h (30 или 41 мм), радиус пузырька $r = 2.8$ или 3 мм. Параметры сред соответствуют воде и воздуху. Начальная форма пузырька сферическая или более сложная, соответствующая начальной форме пузырька в проведенном авторами предварительном эксперименте (см. рис. 1, а).

В работе [9] отмечается, что динамика всплывающего пузырька может быть описана с помощью четырех безразмерных чисел: Галилея $Ga = \rho_w \sqrt{g} r^{3/2} / \mu_w$, характеризующего соотношение гравитационных и вязких сил, Этвёша $Eo = \rho_w g r^2 / \sigma$, характеризующего соотношение гравитационных сил и сил поверхностного натяжения, соотношения плотностей $\rho_r = \rho_a / \rho_w$ и вязкостей $\mu_r = \mu_a / \mu_w$ сред. Здесь g , r и σ – ускорение свободного падения, начальный радиус пузырька и коэффициент поверхностного натяжения для рассматриваемых сред, соответственно, ρ_a и μ_a – плотность и вязкость воздуха, ρ_w и μ_w – плотность и вязкость воды. Параметры нашей задачи при моделировании сферического пузырька соответствуют следующим значениям этих чисел: $Ga = 514$, $Eo = 1.2$, $\rho_r = 10^{-3}$, $\mu_r = 10^{-2}$, что соответствует IV режиму всплывания пузырька из работы [9].

3. Результаты. Расчеты проводились с использованием различных значений параметров MAXLEVEL, $u_{\text{егг}}$, $f_{\text{егг}}$ и $\omega_{\text{егг}}$. В начальный момент времени для интерфейса пузырька задавался максимальный уровень дискретизации MAXLEVEL, в то время как остальная часть домена оставалась на начальном уровне дискретизации равном семи.

Для сравнения с нашим экспериментом было проведено моделирование всплывающего пузырька, начальная форма которого совпадала с начальной формой пузырька в эксперименте в момент отрыва его от сопла. Радиус сферической части пузырька был

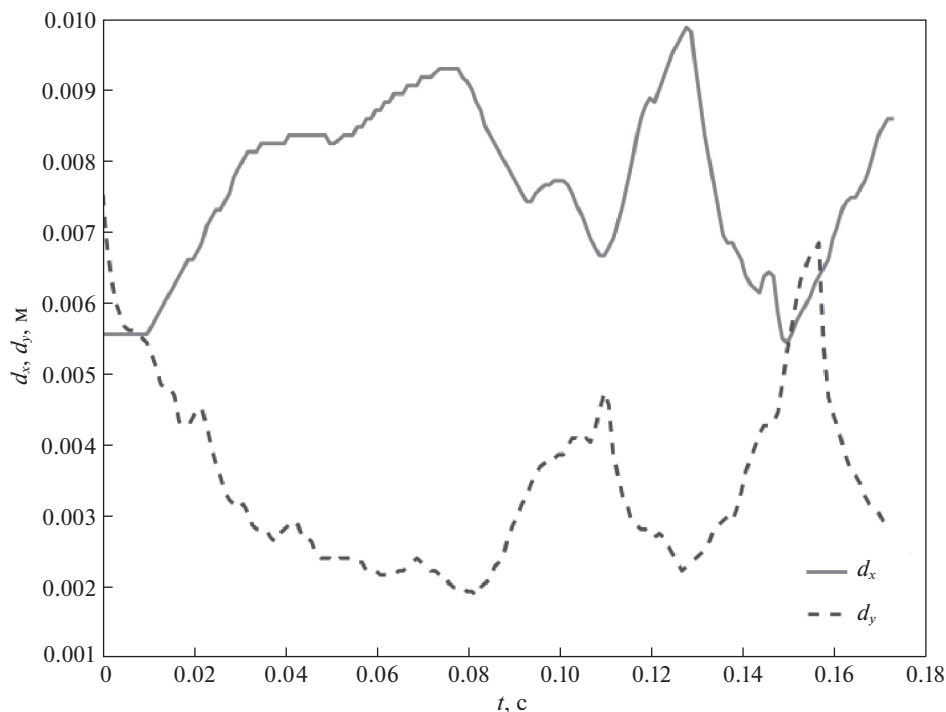


Рис. 3. Зависимость вертикального — сплошная кривая — (d_y) и горизонтального — пунктирная кривая — (d_x) размеров пузырька от времени.

равен $r = 2.8$ мм, нижняя часть пузырька была вытянута в конус (см. рис. 1). Значения максимального уровня дискретизации сетки и параметров дробления сетки определялись следующими соотношениями: $\text{MAXLEVEL} = 10$, $u_{\text{err}} > 10^{-2}$, $f_{\text{err}} > 10^{-3}$, $\omega_{\text{err}} > 10^{-1}$. Получены некоторые различия в характерных временах деформации пузырька между экспериментом и численным моделированием, это может объясняться как неточностями в задании начальной формы пузырька, так и недостаточным разрешением сетки. Но изменения формы пузырька в процессе всплывания, полученные в результате численного моделирования, в основных деталях повторяют изменения формы пузырька, полученные в эксперименте (см. рис. 1).

В момент отрыва от сопла возникают возмущения формы поверхности, которые приводят к возбуждению объемных колебаний пузырька. На рис. 3 представлены зависимости вертикального (сплошная кривая) и горизонтального (пунктирная кривая) размеров пузырька от времени. Можно заметить, что за время, которое требуется пузырьку, чтобы достигнуть поверхности жидкости, происходит приблизительно 2.5 цикла изменения его формы; вертикальный и горизонтальный размеры пузырька ожидаемо колеблются в противофазе.

Также было проведено несколько численных экспериментов по всплыванию пузырька со сферической начальной формой. Это позволило провести сравнение полученных результатов с результатами работы [9]. В первом численном эксперименте было использовано значение параметра $\text{MAXLEVEL} = 12$. Для взятого в данном исследовании размера домена $L_0 = 0.05$ м получим минимальный линейный размер ячейки $\Delta l = 0.05/2^{12} = 1.2 \times 10^{-5}$ м (иными словами $\Delta l = 0.004r$). Сетка дробилась при

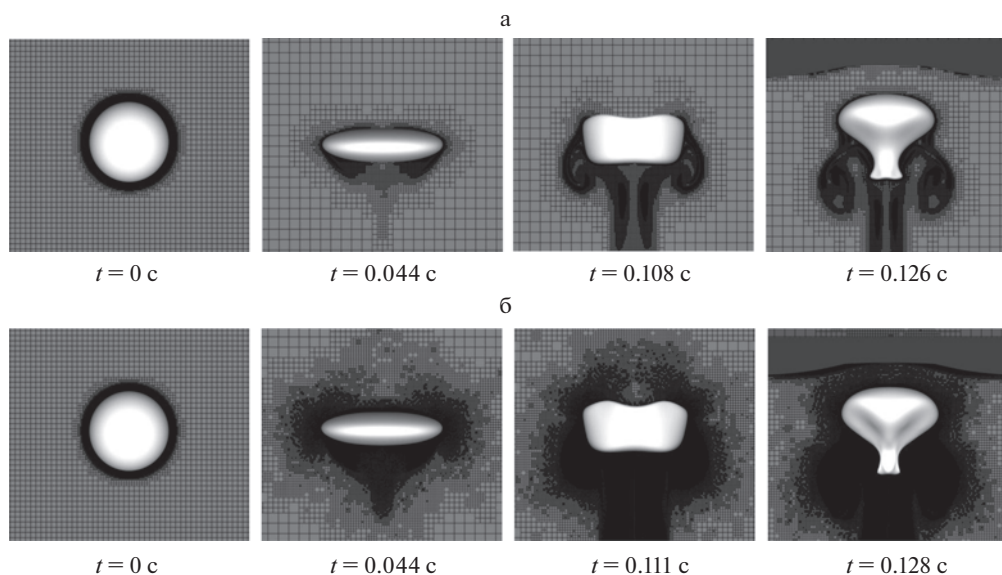


Рис. 4. Результат численного эксперимента – форма пузырька в различные моменты в процессе всплывания: (а) $\text{MAXLEVEL} = 12$, $u_{\text{err}} > 10^{-3}$, $f_{\text{err}} > 10^{-2}$; (б) $\text{MAXLEVEL} = 11$, $u_{\text{err}} > 10^{-2}$, $f_{\text{err}} > 10^{-2}$, $\omega_{\text{err}} > 10^{-1}$.

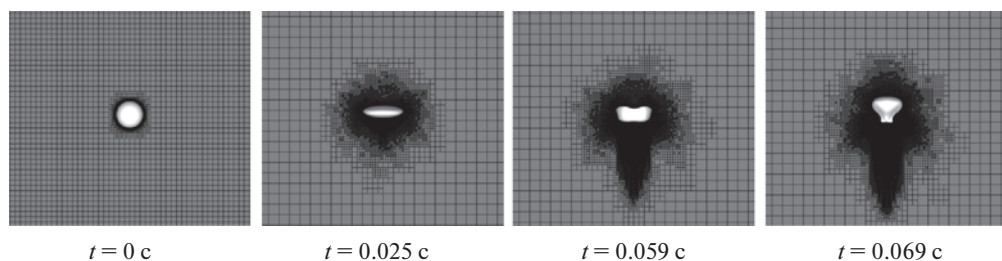


Рис. 5. Результат численного эксперимента ($r = 0.001$ м, $\text{Ga} = 514$, $\text{Eo} = 1.2$, $\text{MAXLEVEL} = 11$, $u_{\text{err}} > 10^{-2}$, $f_{\text{err}} > 10^{-2}$, $\omega_{\text{err}} > 10^{-1}$): форма пузырька в различные моменты в процессе всплывания.

условиях $u_{\text{err}} > 10^{-3}$, $f_{\text{err}} > 10^{-2}$, ω_{err} как критерий дискретизации в данном случае мы не использовали. Изменение формы пузырька в процессе всплывания, полученное в результате численного моделирования, показано на рис. 4,а, также на рисунке отображена сетка для вертикальной плоскости, проходящей в начальный момент времени через центр пузырька. Для второго расчета было взято значение параметра $\text{MAXLEVEL} = 11$ (минимальный линейный размер ячейки $\Delta l = 2.4 \times 10^{-5}$ м), условия дробления сетки: $u_{\text{err}} > 10^{-2}$, $f_{\text{err}} > 10^{-2}$, кроме того было добавлено еще условие дробления сетки по ошибке поля завихренности $\omega_{\text{err}} > 10^{-1}$. Результаты моделирования приведены на рис. 4,б. На рисунке видно, что изменение параметров счета существенным образом повлияло на вид сетки. Для второго случая дробление сетки происходит в значительно большем объеме вокруг пузырька, что, по-видимому, связано с добавленным критерием дробления по ω_{err} . Результаты для двух расчетов очень близки, есть небольшое различие в характерных временах деформации пузырька. В обоих случаях сначала изменения формы пузырька больше похожи на отклонения от эллиптической

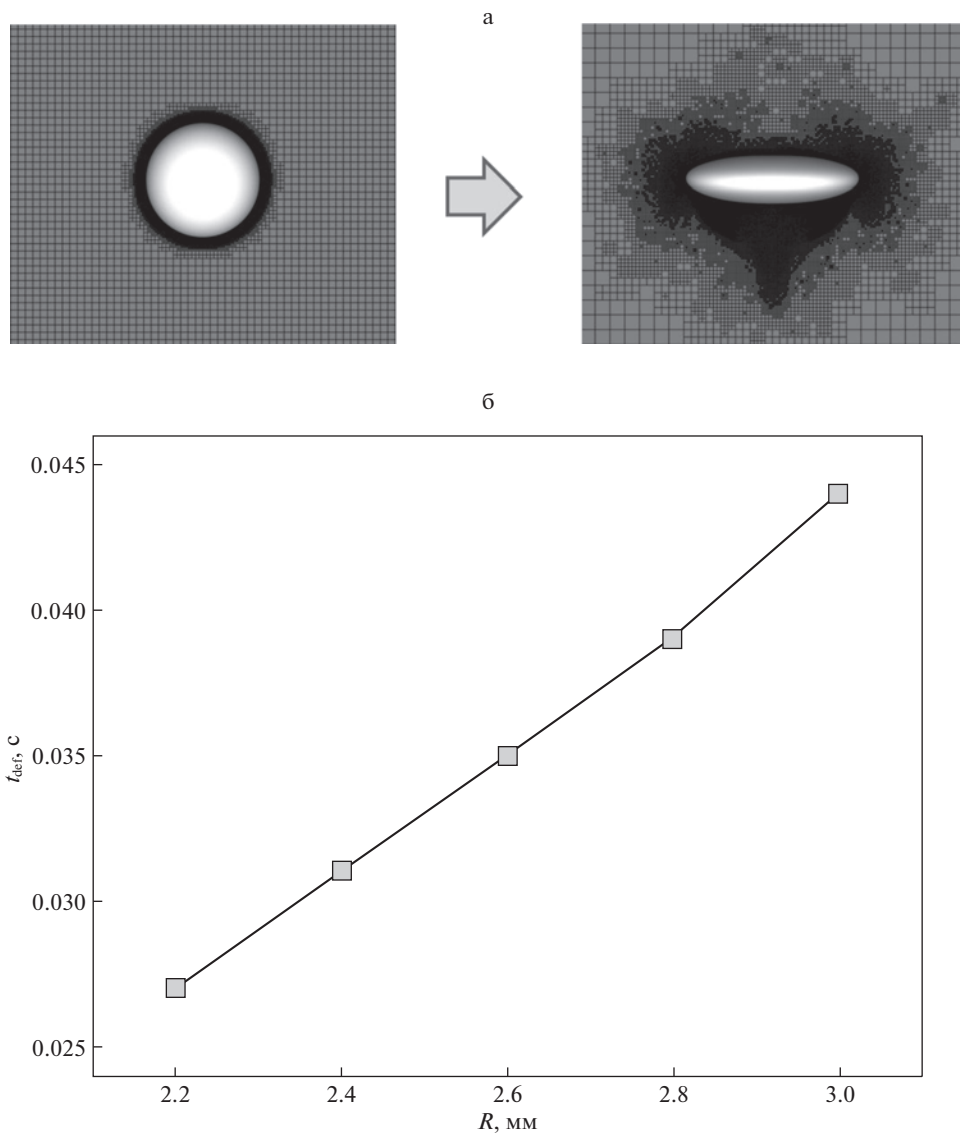


Рис. 6. а: Пример деформации сферического пузырька до эллипсоидальной формы для $r = 0.003$ м; б: зависимость времени деформации сферического пузырька до эллипсоидальной формы в зависимости от радиуса пузырька, параметры соответствуют воде и воздуху.

формы, но с некоторого момента времени пузырек уже далек от эллиптической формы, и в итоге у него образуется резко выдающийся “хвост” (на рис. 4. а: $t = 0.126$ с; б: $t = 0.128$ с). Примечательно, что такое причудливое изменение формы пузырька находится в хорошем соответствии с результатами, полученными в [9] (см. [9], рис. 8). Отметим, что в [9] минимальный линейный размер ячейки относительно радиуса пузырька $\Delta l = 0.029r$ больше, чем в данной работе, значит, в нашем случае пузырек моделируется с лучшим разрешением.

Также был проведен численный эксперимент для пузырька радиусом $r = 1$ мм, но таких же как в предыдущих экспериментах безразмерных чисел $Ga = 514$, $Eu = 1.2$

(значения чисел Ga и Eo сохранились неизменными за счет изменения вязкости воды и поверхностного натяжения). На рис. 5 видно, что изменения формы пузырька повторяют изменения его формы в двух предыдущих численных экспериментах, но процессы деформации происходят существенно быстрее, таким образом, полученный в численном счете режим деформации действительно определяется именно безразмерными числами Ga и Eo .

Далее были проведены расчеты для пузырьков различных радиусов меньших $r = 3$ мм — $r = 2.8, 2.6, 2.4, 2.2$ мм, но остальные параметры задачи при этом оставались неизменными (соответствующими воде и воздуху), т.е. безразмерные числа Ga и Eo изменялись от эксперимента к эксперименту. Было также замечено, что при изменении радиуса пузырька меняются характерные времена его деформации. На рис. 6,а приведен пример начальной деформации пузырька из сферической формы в эллипсоидальную, рис. 6,б демонстрирует зависимость времени такой деформации от радиуса пузырька. Видно, что при увеличении радиуса время деформации также увеличивается.

Заключение. С использованием программного пакета Basilisk проведено численное моделирование всплывания газообразного пузырька в жидкости. Для сравнения с проведенным лабораторным экспериментом при моделировании учитывалась сложная начальная форма пузырька. Полученные в результате численного расчета деформации пузырька в основных деталях совпадают с деформациями пузырька в эксперименте.

Проведено моделирование всплывания пузырька со сферической начальной формой. Получен режим деформации, для соответствующих безразмерных чисел Ga и Eo совпадающий с режимом деформации, обнаруженным в работе [9]. Проведено моделирование всплывания пузырьков различных радиусов, получено, что при увеличении радиуса пузырька характерное время его деформации увеличивается.

Работа по прямому численному моделированию поддержана проектом РНФ № 19-17-00209, экспериментальная часть исследования поддержана проектом РФФИ № 21-55-52005, работа Зотовой А.Н. поддержана в рамках проекта по гос. заданию № 0030-2022-0005, результаты получены с использованием оборудования Уникальной научной установки “Комплекс крупномасштабных геофизических стендов” ИПФ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haberman W.L., Morton R.K.* An Experimental Investigation of the Drag and Shape of Air Bubbles Rising in Various Liquids. Washington (DC): David Taylor Model Basin, 1953.
2. *Tagawa Y., Takagi S., Matsumoto Y.* Surfactant effect on path instability of a rising bubble // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 738. P. 124–142.
3. *Bunner B., Tryggvason G.* Direct numerical simulations of three-dimensional bubbly flows // *Phys. Fluids*. 1999. V. 11. P. 1967–1969.
4. *Lu J., Tryggvason G.* Effect of bubble deformability in turbulent bubbly upflow in a vertical channel // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20. P. 040701.
5. *Sussman M., Puckett E.G.* A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows // *J. Comput. Phys.* 2000. V. 162. P. 301–337.
6. *Shin S., Juric D.* Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity // *J. Comput. Phys.* 2002. V. 180. P. 427–470.
7. *Hua J., Stene J.F., Lin P.* Numerical simulation of 3D bubbles rising in viscous liquids using a front tracking method // *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227. P. 3358–3382.
8. *Pivello M., Villar M., Serfaty R. et al.* A fully adaptive front tracking method for the simulation of two phase flows // *Int. J. Multiphase Flow*. 2014. V. 58. P. 72–82.
9. *Tripathi M.K., Sahu K.C., Govindarajan R.* Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid // *Nature Commun.* 2015. V. 6. № 1. P. 1–9.
10. *Bonometti T., Magnaudet J., Gardin P.* On the dispersion of solid particles in a liquid agitated by a bubble swarm // *Metall Mater Trans. B*. 2007. V. 38. P. 739–750.

11. Roghair I., Van Sint Annaland M., Kuipers H.J.A.M. Drag force and clustering in bubble swarms // *AIChE J.* 2013. V. 59. Iss. 5. P. 1791–1800.
12. Roghair I., Sint Annaland M., Kuipers H.J. Drag force and clustering in bubble swarms // *AIChE J.* 2013. V. 59. P. 1791–1800.
13. Magnaudet J., Mougin G. Wake instability of a fixed spheroidal bubble // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 572. P. 311–337.
14. Shew W.L., Pinton J. Dynamical model of bubble path instability // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 97. P. 144508.
15. Wichterle K., Vecer M., Ruzicka M.C. Asymmetric deformation of bubble shape: cause or effect of vortex-shedding? // *Chem. Papers.* 2014. V. 68. P. 74–79.
16. Popinet S. The Basilisk code: <http://basilisk.fr>
17. Popinet S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows // *J. Comput. Phys.* 2009. V. 228 (16). P. 5838–5866.

Simulation of Rising Bubble Dynamics

A. N. Zotova^{a, #}, A. A. Kandaurov^a, Yu. I. Troitskaya^a, and D. A. Sergeev^a

^a*Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, Russia*

[#]*e-mail: aniazotova@yandex.ru*

A direct numerical simulation of the rising of an initially quiescent air bubble in water without flow has been carried out. For comparison with the experiment, a complicated initial shape of the bubble, corresponding to the experimental one, was taken. The changes in the shape of the bubble during rising, obtained as the result of numerical simulation, are close to the experimental deformations of the bubble. For comparison with the results of numerical simulations available in the literature, we simulated rising bubble, which initially had a spherical shape. It was found that during rising, the shape of the bubble is first close to elliptical and oscillates, but then it becomes more complicated — a “tail” appears in the lower part of the bubble. This regime of the rising bubble dynamics is confirmed by the results of numerical simulation published in the literature.

Keywords: rising bubble, direct numerical simulation

REFERENCES

1. Haberman W.L., Morton R.K. An Experimental Investigation of the Drag and Shape of Air Bubbles Rising in Various Liquids. Washington (DC): David Taylor Model Basin, 1953.
2. Tagawa Y., Takagi S., Matsumoto Y. Surfactant effect on path instability of a rising bubble // *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 738, pp. 124–142.
3. Bunner B., Tryggvason G. Direct numerical simulations of three-dimensional bubbly flows // *Phys. Fluids*, 1999, vol. 11, pp. 1967–1969.
4. Lu J., Tryggvason G. Effect of bubble deformability in turbulent bubbly upflow in a vertical channel // *Phys. Fluids*, 2008, vol. 20, pp. 040701.
5. Sussman M., Puckett E.G. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows // *J. Comput. Phys.*, 2000, vol. 162, pp. 301–337.
6. Shin S., Juric D. Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity // *J. Comput. Phys.*, 2002, vol. 180, pp. 427–470.
7. Hua J., Stene J.F., Lin P. Numerical simulation of 3D bubbles rising in viscous liquids using a front tracking method // *J. Comput. Phys.*, 2008, vol. 227, pp. 3358–3382.
8. Pivello M., Villar M., Serfaty R. *et al.* A fully adaptive front tracking method for the simulation of two phase flows // *Int. J. Multiphase Flow*, 2014, vol. 58, pp. 72–82.
9. Tripathi M.K., Sahu K.C., Govindarajan R. Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid // *Nature Commun.*, 2015, vol. 6, no. 1, pp. 1–9.
10. Bonometti T., Magnaudet J., Gardin P. On the dispersion of solid particles in a liquid agitated by a bubble swarm // *Metall Mater Trans. B*, 2007, vol. 38, pp. 739–750.

-
11. *Roghair I., Van Sint Annaland M., Kuipers H.J.A.M.* Drag force and clustering in bubble swarms // *AIChE J.*, 2013, vol. 59, iss. 5, pp. 1791–1800.
 12. *Roghair I., Sint Annaland M., Kuipers H.J.* Drag force and clustering in bubble swarms // *AIChE J.*, 2013, vol. 59, pp. 1791–1800.
 13. *Magnaudet J., Mougin G.* Wake instability of a fixed spheroidal bubble // *J. Fluid Mech.*, 2007, vol. 572, pp. 311–337.
 14. *Shew W.L., Pinton J.* Dynamical model of bubble path instability // *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 97, pp. 144508.
 15. *Wichterle K., Vecer M., Ruzicka M.C.* Asymmetric deformation of bubble shape: cause or effect of vortex-shedding? // *Chem. Papers*, 2014, vol. 68, pp. 74–79.
 16. *Popinet S.* The Basilisk code: <http://basilisk.fr>
 17. *Popinet S.* An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows // *J. Comput. Phys.*, 2009, vol. 228 (16), pp. 5838–5866.

УДК 532.59:534.1

АСИМПТОТИКИ ДАЛЬНИХ ПОЛЕЙ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ИМПУЛЬСНОГО ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИСТОЧНИКА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. В. В. Булатов^{1,*}, И. Ю. Владимиров^{2,**}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия²Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

*e-mail: internalwave@mail.ru

**e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

Поступила в редакцию 13.01.2023 г.

После доработки 08.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Решена задача о построении асимптотик дальних полей внутренних гравитационных волн, возникающих от импульсного локализованного источника возмущений в стратифицированной вращающейся как целое жидкости конечной глубины. В приближении постоянства частоты плавучести построены равномерные и неравномерные асимптотики решений для описания дальних волновых полей, которые выражаются через функцию Эйри и ее производную. Проведено сравнение точных и асимптотических результатов, и показано, что на временах, больших нескольких периодов плавучести, и на расстояниях порядка толщины слоя жидкости, полученные асимптотики позволяют описать амплитудно-фазовую структуру дальних волновых полей.

Ключевые слова: вращающаяся стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, дальние поля, волновой фронт, асимптотики

DOI: 10.31857/S0032823523030025, EDN: ZSIELU

1. Введение. Геофизическая гидродинамика предлагает большой ряд задач распространения волн в среде, анизотропия которой связана с эффектами вращения и стратификации [1–4]. В этих задачах корректное применение асимптотических методов дает возможность исследовать ряд физически интересных эффектов, определяемых свойствами гидрофизических сред. Импульсные источники возмущений являются одним из механизмов генерации достаточно интенсивных внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах [5–9]. Такие источники ВГВ могут иметь как природный (схлопывание области турбулентного перемешивания, быстрая подвижка океанического дна), так и антропогенный (подводные и надземные взрывы) характеры [10–13].

В природных стратифицированных средах вращение среды как целого влияет на основные характеристики полей ВГВ. В линейном приближении волновая картина может быть описана многомерными интегралами Фурье или с помощью геометрического подхода в рамках кинематической теории диспергирующих волн, на основе которой возможно получить аналитическое представление только для фазовых поверхностей (линий), огибающих и волновых фронтов [4, 14, 15]. Более сложной в математическом плане является задача построения равномерных асимптотик интегральных представлений, позволяющих рассчитать амплитудно-фазовую структуру волновых

полей. В общем случае интегральные представления аналитически не вычисляемы, и для их анализа эффективно могут быть использованы только различные асимптотические методы. В современной литературе математический аппарат асимптотических методов изложен достаточно полно: многомерный метод стационарной фазы, метод эталонных интегралов, метод канонического оператора Маслова [16–20]. Асимптотики интегральных представлений позволяют качественно анализировать волновые поля, в том числе, и от нелокальных источников возмущений различной физической природы, что актуально, в частности, для решения задач оперативной океанологии.

В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натурных условиях волновым картинам, что позволяет оценить физические параметры реальных импульсных источников возбуждения ВГВ в природных стратифицированных средах [5, 6, 8, 9]. Поэтому полученные асимптотические результаты дают возможность определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров. Таким образом, математические модели волновой генерации от импульсного источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде могут быть верифицированы, а также использованы для проведения прогнозных оценок.

Была рассмотрена [21] задача о дальних полях ВГВ при стационарном движении источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде. Исследовались [22] дальние поля ВГВ от начального радиально симметричного возмущения без учета вращения среды. Целью настоящей работы является решение ранее не рассматриваемой задачи построения равномерных асимптотик дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованным импульсным источником возмущений во вращающейся стратифицированной среде конечной глубины.

2. Постановка задач, интегральные формы решений. Рассматривается слой $-H < z < 0$ вращающейся как целое с частотой Ω стратифицированной жидкости с постоянной частотой Брента–Вайсяля $N(z) = N = \text{const}$. В момент времени $t = 0$ точечный источник, находящийся в точке $(0, 0, z_0)$, $z_0 < 0$ мгновенно выбрасывает объем жидкости q . Тогда возвышение изопикн (линий равной плотности) $\xi = \xi(x, y, z, z_0, t)$ в приближении Буссинеска определяется из уравнения [1, 4, 21]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \xi + f^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + N^2 \Delta \xi = q \delta'(t) \delta(\xi) \delta(y) \delta'(z - z_0)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad f = 2\Omega$$

В качестве граничных условий используется приближение “твердой крышки”: $\xi = 0$, $z = 0, -H$. Начальное условие берется в виде: $\xi \equiv 0$, $t < 0$. В безразмерных переменных $x^* = \pi x/H$, $y^* = \pi y/H$, $z^* = \pi z/H$, $z_0^* = \pi z_0/H$, $f^* = f/N$, $t^* = Nt$, $q^* = \pi^3 q/H^3$, задача формулируется следующим образом (индекс “*” далее опускается)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \xi + f^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \Delta \xi = q \delta'(t) \delta(\xi) \delta(y) \delta'(z - z_0)$$

$$\xi = 0, \quad z = 0, -\pi, \quad \xi \equiv 0, \quad t < 0$$

Фурье образ возвышения изопикн

$$\Phi(\mu, \nu, z, z_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(i(\omega t + \nu y + \mu x)) \xi(x, y, z, z_0, t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \frac{1 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} \varphi = iq \frac{\omega}{\omega^2 - f^2} \delta'(z - z_0) \quad (2.1)$$

$$\varphi = 0, \quad z = 0, -\pi; \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2 \quad (2.2)$$

Решение (2.1)–(2.2) ищется в виде ряда по собственным функциям $\varphi_n = \varphi_n(z, k)$ соответствующей однородной спектральной задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + k^2 \frac{1 - \omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2} \varphi_n = 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi_n = 0; \quad z = 0, -\pi \quad (2.4)$$

Задача (2.3)–(2.4) имеет на отрезке $[-\pi, 0]$ полную ортонормированную с весом $(1 - f^2)$ систему собственных функций $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin nz}{\sqrt{1 - f^2}}$ и собственных значений $\omega_n(k) = \sqrt{\frac{k^2 + f^2 n^2}{f^2 + n^2}}$. Тогда, используя соотношение

$$\delta'(z - z_0) = -\left(1 - f^2\right) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \frac{\partial \varphi_n(z_0)}{\partial z_0}$$

можно получить выражение для возвышения изопоки в виде

$$\xi(x, y, z, z_0, t) = \frac{iq}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i(\nu y + \mu x + \omega t)) T_n(k) D_n(z, z_0) d\omega$$

$$T_n(k) = \frac{\omega(\omega_n^2(k) - f^2)}{k^2(\omega^2 - \omega_n^2(k))}, \quad D_n(z, z_0) = \varphi_n(z) \frac{\partial \varphi_n(z_0)}{\partial z_0}$$

Внутренний интеграл по переменной ω вычисляется с помощью теоремы о вычетах, при этом контур интегрирования необходимо сместить в область $\text{Im } \omega > 0$. Тогда, замыкая его в нижнюю полуплоскость, и учитывая полюса $\omega = \pm \omega_n(k)$, получаем при $t > 0$ следующее выражение в виде суммы мод

$$\xi(x, y, z, z_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x, y, z, z_0, t)$$

$$I_n(x, y, z, z_0, t) = \frac{q}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_n^2(k) - f^2}{k^2} \exp(-i(\nu y + \mu x)) \cos(\omega_n(k)t) D_n(z, z_0) d\mu \quad (2.5)$$

3. Асимптотики решений. Далее будет рассматриваться отдельная волновая мода, индекс n опускается. Перейдем к полярным координатам: $\nu = k \sin \psi$, $\mu = x \cos \psi$, $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, и проинтегрируем (2.5) по переменной ψ

$$I(r, z, z_0, t) = \frac{q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2(k) - f^2}{k} \cos(\omega(k)t) D(z, z_0) J_0(kr) dk \quad (3.1)$$

Заменяем в выражении (3.1) функцию Бесселя $J_0(kr)$ на ее асимптотику при $kr \gg 1$:

$J_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)$. В результате можно получить

$$I(r, z, z_0, t) = I^+ + I^-$$

$$I^\pm = \int_0^\infty F(k) \cos\left(t(kV \pm \omega(k)) - \frac{\pi}{4}\right) dk; \quad V = \frac{r}{t} \quad (3.2)$$

$$F(k) = \frac{q(\omega^2(k) - f^2)D(z, z_0)}{(2\pi)^{3/2} k \sqrt{kr}}$$

Далее будем рассматривать асимптотику слагаемых $I^\pm$ при больших значениях t и $V = \text{const}$, то есть в точке, движущейся в радиальном направлении со скоростью V . Поскольку $\omega(k)$ — монотонно возрастающая функция, то фазовая функция $kV + \omega(k)$ не имеет стационарных точек на действительной оси, следовательно интеграл I^+ экспоненциально мал при $t \rightarrow \infty$. Обозначим далее: $\gamma(k) = kV - \omega(k)$, $K = f \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 3f^{-2}}}{3}}$ — значение волнового числа, при котором достигается максимум групповой скорости отдельной волновой моды, и через $V_* = \omega'(k)$ — величину этого максимума. Тогда фазовая функция $\gamma(k)$ интеграла I^- при $0 < V < V_*$ имеет две стационарные точки на действительной оси: $k_2 < K < k_1$. Главный член асимптотики I^- определяется вкладом этих точек, и может быть вычислен с помощью метода стационарной фазы. В результате можно получить

$$I^- \approx J^1 + J^2, \quad J^1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t\gamma''(k_1)}} F(k_1) \cos(\gamma(k_1)t), \quad J^2 = \frac{\sqrt{-2\pi}}{\sqrt{t\gamma''(k_2)}} F(k_2) \sin(\gamma(k_2)t) \quad (3.3)$$

Асимптотики (3.3) становятся непригодными при $V \rightarrow V_*$, то есть вблизи фронта каждой волновой моды, где стационарные точки сливаются друг с другом, и, соответственно, $\gamma''(k) \rightarrow 0$. Для нахождения асимптотики интеграла I^- в окрестности волнового фронта (локальной асимптотики) отдельной волновой моды необходимо разложить амплитудную и фазовую функции в ряды вблизи при $k \approx K$, ограничиваясь для амплитуды одним членом, и для фазы — тремя

$$F(k) = F(K) + \dots, \quad \gamma(k) = \gamma(K) + \gamma'(K)(k - K) + \frac{\gamma'''(K)}{6}(k - K)^3 + \dots \quad (3.4)$$

В результате, заменяя в (3.2) нижний предел интегрирования на $-\infty$, можно получить

$$I^- \approx \int_{-\infty}^\infty F(K) \cos\left(t\left(\gamma(K) + \gamma'(K)(k - K) + \frac{\gamma'''(K)}{6}(k - K)^3\right) - \frac{\pi}{4}\right) dk \quad (3.5)$$

Интеграл (3.5) выражается через функцию Эйри [18, 19]

$$\text{Ai}(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \cos(\Theta u + u^3/3) du$$

В результате выражение для локальной асимптотики отдельной моды возвышения изопикн имеет вид

$$I^- \approx 2\pi F(K) \sqrt[3]{\frac{2}{t\gamma'''(K)}} \cos\left(t\gamma(K) - \frac{\pi}{4}\right) \text{Ai}\left(\gamma'(K) \sqrt[3]{\frac{2t^2}{\gamma'''(K)}}\right) \quad (3.6)$$

Таким образом, при больших временах поле отдельной моды вблизи волнового фронта (переходной зоны), имеет порядок малости $O(t^{-1/3})$, то есть в $t^{1/6}$ раз больше, чем за фронтом. Ширина (временной интервал) волнового фронта (переходной зоны) каждой моды T определяется условием, чтобы аргумент функции Эйри в (3.6) имел порядок единицы: $T \approx \sqrt{\gamma'''(K)} (\gamma'(K))^{-3/2}$. Асимптотика (3.6) непригодна вдали от волнового фронта отдельной моды.

Построим асимптотику, которая в окрестности фронта совпадает с (3.6), а вдали от волнового фронта с выражением (3.3). Для этого необходимо выполнить регулярную замену переменных $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $\gamma(k) = kV - \omega(k)$ интеграла I^- в новую функцию $\tau(s) = C - \sigma s + s^3/3$, имеющую, как и $\gamma(k)$, две стационарные точки. Таким образом

$$\gamma(k(s)) = C - \sigma s + \frac{s^3}{3} \quad (3.7)$$

При этом стационарной точке k_1 будет отвечать точка $s_1 = \sqrt{\sigma}$, а стационарной точке k_2 — точка $s_2 = -\sqrt{\sigma}$. Тогда из (3.7) находим

$$\sigma = \left(\frac{3}{4}(\gamma(k_2) - \gamma(k_1))\right)^{2/3}, \quad C = \frac{\gamma(k_2) + \gamma(k_1)}{2}$$

В результате подстановки (3.7) интеграл I^- преобразуется к виду

$$I^- = \int_P^\infty G(s) \cos\left(t\left(C - \sigma s + \frac{s^3}{3}\right) - \frac{\pi}{4}\right) ds \quad (3.8)$$

$$G(s) = F(k(s)) \frac{dk}{ds}, \quad \frac{dk}{ds} = \frac{s^2 - \sigma}{\gamma'(k)}, \quad k = k(s),$$

где P — образ точки $k = 0$ при отображении, обратном к $k = k(s)$. Далее, следуя общим принципам построения равномерных асимптотик, функцию $G(s)$ разложим по степеням $(s^2 - \sigma)$ [17, 20]

$$G(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m + B_m s) (s^2 - \sigma)^m$$

Ограничиваясь главными членами разложения, можно получить

$$A_0 = \frac{G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma})}{2}, \quad B_0 = \frac{G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma})}{2\sqrt{\sigma}}$$

Тогда при $s = \pm\sqrt{\sigma}$ имеем

$$G(\sqrt{\sigma}) = F(k_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma}}{\gamma''(k_1)}}, \quad G(-\sqrt{\sigma}) = F(k_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma}}{\gamma''(k_2)}}$$

Подставляя главные члены разложения в (3.7) и заменяя нижний предел интегрирования P на $-\infty$ можно получить

$$I^- \approx \int_{-\infty}^{\infty} (A_0 + B_0 s) \cos \left(t \left(C - \sigma s + \frac{s^3}{3} \right) - \frac{\pi}{4} \right) ds \quad (3.9)$$

Интеграл (3.9) выражается через функцию Эйри и ее производную [18, 19]

$$\begin{aligned} I^- \approx & \frac{\pi (G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma}))}{\sqrt[3]{t}} \cos \left(tC - \frac{\pi}{4} \right) \text{Ai}(-\sigma t^{2/3}) + \\ & + \frac{\pi (G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma}))}{\sqrt{\sigma} \sqrt[3]{t^2}} \sin \left(tC - \frac{\pi}{4} \right) \text{Ai}'(-\sigma t^{2/3}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Асимптотика (3.10) является равномерной по параметру V при $t \rightarrow \infty$. Чтобы показать, что равномерная асимптотика (3.10) переходит в окрестности волнового фронта в локальную (3.6) необходимо решить уравнение $\gamma'(k) = 0$ в приближении (3.4). В результате можно получить

$$k_{1,2} - K = \pm \sqrt{\frac{-2\gamma'(K)}{\gamma'''(K)}}$$

При малых значениях $k_{1,2} - K$ имеем: $C = \gamma(K)$, $\sigma = -\gamma'(K) \left(\frac{2}{\gamma'''(K)} \right)^{1/3}$, $G(\sqrt{\sigma}) -$

$-G(-\sqrt{\sigma}) = 2G(0) = F(K) \left(\frac{2}{\gamma'''(K)} \right)^{1/3}$. Подставляя эти выражения в (3.10) и пренебре-

гая слагаемыми, содержащими производную функции Эйри (поскольку вблизи фронта эти слагаемые имеют более высокий порядок малости) получим в итоге локальную асимптотику (3.6). Равномерная асимптотика (3.10) при больших значениях t и σ , то есть при $\sigma t^{2/3} \rightarrow \infty$ переходит в неравномерную асимптотику стационарной фазы (3.3).

Действительно, воспользовавшись соответствующими асимптотическими разложениями функции Эйри и ее производной при больших отрицательных значениях аргу-

мента в виде: $\text{Ai}(-x) \approx \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin \left(\frac{3}{2} x^{2/3} + \frac{\pi}{4} \right)$, $\text{Ai}'(-x) \approx -\frac{x^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos \left(\frac{3}{2} x^{2/3} + \frac{\pi}{4} \right)$, можно по-

казать, что оба слагаемых в (2.10) имеют один порядок малости $O(t^{1/2})$. Таким образом локальная асимптотика (3.6) и неравномерная асимптотика (3.3) являются частными случаями равномерной асимптотики (3.10), что является основным результатом работы.

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов первой моды возвышения ξ для следующих значений безразмерных параметров: $q = 1$, $f = 0.2$, $z = -2$, $z_0 = -1$. Сплошная линия на всех рисунках — точное решение, точка — положение волнового фронта. Штриховая линия на рис. 1 — равномерная асимптотика (3.10). На рис. 2 штриховая линия — приближение стационарной фазы (3.3), пунктирная линия — локальная асимптотика (3.6). Численные расчеты показывают, что на расстояниях порядка толщины слоя жидкости и на временах порядка нескольких периодов Брента–Вайсяля равномерная асимптотика с достаточной степенью точности описывает точное решение. Локальная асимптотика совпадает с точным решением на масштабах не более первой полуволны Эйри. Вдали от волнового фронта приближение стационарной фазы хорошо описывает точное решение.

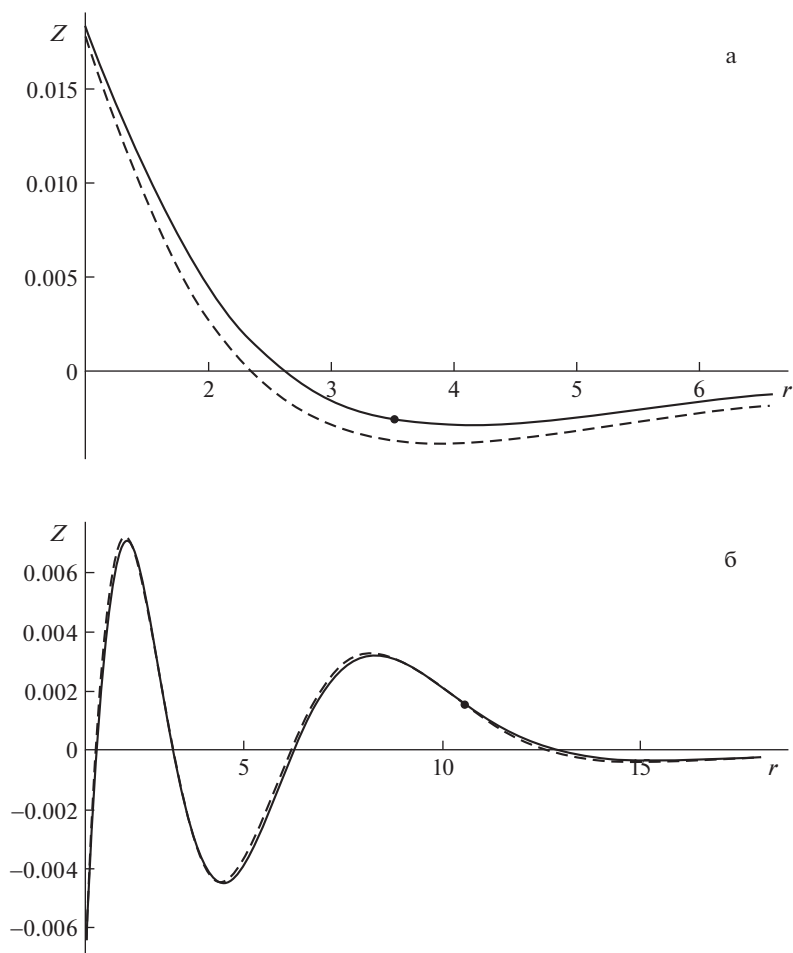


Рис. 1. Возвышение изопикн при $t = 5$ (а) и $t = 15$ (б).

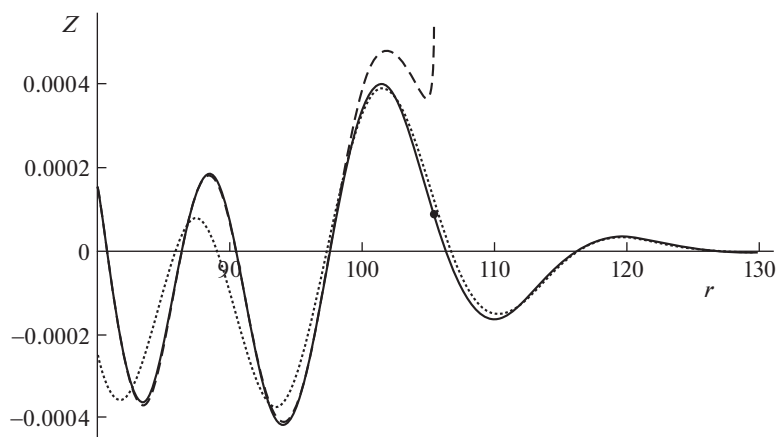


Рис. 2. Возвышение изопикн при $t = 150$.

Заключение. Построенные в работе равномерные асимптотические решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики дальних полей внутренних гравитационных волн от импульсного локализованного источника возмущений во вращающейся как целое стратифицированной среде конечной толщины как вблизи, так и вдали от волновых фронтов отдельной волновой моды. Полученные результаты описывают характер асимптотического поведения волновых пакетов при больших временах и на большом удалении от источника волн. В частности, асимптотический анализ показывает затухание амплитуды волны как корня квадратного от времени за исключением особых случаев вырождения дисперсионного соотношения — обращения в нуль второй производной дисперсионной зависимости. Естественное решение проблемы вырождения, включение в анализ высших дифференциалов дисперсионной зависимости приводит к решению в терминах функции Эйри и ее производной, а также к более медленному дисперсионному затуханию амплитуды волны как корня третьей степени от времени.

Наибольший выигрыш при использовании данного подхода можно получить при исследовании эволюции волновых пакетов, возбуждаемых распределенными в пространстве возмущениями, так как, используя операцию свертки, построенные в работе асимптотики позволяют аналитически рассчитывать дальние волновые поля от нелокальных источников возмущений различной физической природы в стратифицированных вращающихся средах. Полученные асимптотики дальних полей дают возможность не только эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, но и проводить качественный анализ получаемых решений. Асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик пакетов внутренних гравитационных волн, наблюдаемых в реальных океанических условиях. Такие волновые картины полей могут наблюдаться при дистанционном зондировании, наблюдении и измерениях внутренних гравитационных волн, возбуждаемых различными источниками возмущений в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных вращающихся стратифицированных средах.

Работа выполнена за счет гранта РФФИ № 23-21-00194.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean. Boston: Kluwer Acad. Pub., 2001. 406 p.
2. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal Gravity Waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Ozsoy E.* Geophysical Fluid Dynamics II. Stratified Rotating Fluid Dynamics of the Atmosphere—Ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. AG Cham: Springer Nature, 2021. 323 p.
5. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
6. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.).* The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer Int. Pub. AG, 2018. 625 p.
7. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dyn. Atm. Oceans. 2019. V. 86. P. 116—133.
8. *Сидняев Н.И.* Теоретические исследования гидродинамики при подводном взрыве точечного источника // Инж. ж.: наука и инновации. 2013. № 2.
<https://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/614.html>
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-2-614>
9. *Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Крикалев С.К., Кумакшев С.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Идентификация системы океанских волн по фотоснимкам из космоса // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 1. С. 117—127.

10. Матюшин П.В. Процесс формирования внутренних волн, инициированных начальным движением тела в стратифицированной вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 3. С. 83–97.
11. Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z. Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // Ocean Engng. 2022. V. 266. P. 112840.
12. Ulloa H.N., Fuente A., Nino Y. An experimental study of the free evolution of rotating, nonlinear internal gravity waves in a two-layer stratified fluid // J. Fluid Mech. 2014. V. 742. P. 308–339.
13. Li T., Wan M., Wang J., Chen S. Flow structures and kinetic-potential exchange in forced rotating stratified turbulence // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. P. 014802.
14. Свиркунов П.Н., Калашник М.В. Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
15. Gnevyshev V., Badulin S. Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // Fluids. 2020. V. 5. P. 219.
16. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
17. Бреховских Л.М., Гордин О.А. Акустика неоднородных сред. в 2 тт. Т. 1: Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007. 443 с. Т. 2: Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. М.: Наука, 2009. 426 с.
18. Kravtsov Y., Orlov Y. Caustics, Catastrophes, and Wave Fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
19. Froman N., Froman P. Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
20. Babich V.M., Buldyrev V.S. Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory. Oxford: Alpha Sci., 2007. 480 p.
21. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 5. С. 57–63.
22. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Равномерные асимптотики полей внутренних гравитационных волн от начального радиально симметричного возмущения // ПММ. 2022. Т. 86. № 2. С. 206–215.

Far Fields Asymptotics of Internal Gravity Waves from a Pulse Localized Source in a Rotating Stratified Medium

V. V. Bulatov^{a,#} and I. Yu. Vladimirov^{b,##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b*Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: internalwave@mail.ru*

^{##}*e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

The problem of constructing asymptotics of the internal gravity waves far fields arising from an impulsive localized source of perturbations in a stratified fluid of finite depth rotating as a whole is solved. In the approximation of constant buoyancy frequency, uniform and nonuniform asymptotics of solutions are constructed to describe far wave fields, which are expressed in terms of the Airy function and its derivative. The exact and asymptotic results are compared, and it is shown that at times longer than several buoyancy periods and at distances of the order of the liquid layer thickness, the obtained asymptotics allow one to describe the amplitude-phase structure of far wave fields.

Keywords: rotating stratified medium, internal gravity waves, far fields, wave fronts, asymptotics

REFERENCES

1. Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V. Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean. Boston: Kluwer Acad. Pub., 2001. 406 p.

2. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal Gravity Waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Ozsoy E.* Geophysical Fluid Dynamics II. Stratified Rotating Fluid Dynamics of the Atmosphere-Ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. Cham: Springer Nature, 2021. 323 p.
5. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
6. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.).* The Ocean in Motion. Springer Oceanogr. Springer Int. Pub. AG, 2018. 625 p.
7. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // *Dyn. Atm. Oceans*, 2019, vol. 86, pp. 116–133.
8. *Sidnjaev N.I.* Theoretical studies of hydrodynamics in an underwater explosion of a point source // *Inzh. zh.: Nauka i Innovastii*, 2013, vol. 2.
<https://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/614.html> (in Russian)
9. *Belyaev M.Y., Desinov L.V., Krikalev S.K. et al.* Identification of a system of oceanic waves based on space imagery // *J. Comp. Syst. Sci. Int.*, 2009, vol. 48, pp. 110–120.
10. *Matyushin P.V.* Process of the formation of internal waves initiated by the start of motion of a body in a stratified viscous fluid // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54 (3), pp. 374–388.
11. *Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z.* Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // *Ocean Engng.*, 2022, vol. 266, pp. 112840.
12. *Ulloa H.N., Fuente A., Nino Y.* An experimental study of the free evolution of rotating, nonlinear internal gravity waves in a two-layer stratified fluid // *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 742, pp. 308–339.
13. *Li T., Wan M., Wang J., Chen S.* Flow structures and kinetic-potential exchange in forced rotating stratified turbulence // *Phys. Rev. Fluids*, 2020, vol. 5, pp. 014802.
14. *Svirkunov P.N., Kalashnik M.V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources // *Phys. Uspekhi*, 2014, vol. 57, pp. 80–91.
15. *Gnevyshev V., Badulin S.* Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // *Fluids*, 2020, vol. 5, pp. 219.
16. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Waves in Stratified Medium. Moscow: Nauka, 2015. 735 p. (in Russian)
17. *Brehovskih L.M., Godin O.A.* Acoustic of Inhomogeneous Medium. Vol. 1: Fundamentals of the Theory of Sound Reflection and Propagation. Moscow: Nauka, 2007. 443 p. Vol. 2: Sound Fields in Layered and Three-Dimensionally Inhomogeneous Medium. Moscow: Nauka, 2009. 426 p. (in Russian)
18. *Kravtsov Y., Orlov Y.* Caustics, Catastrophes, and Wave Fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
19. *Froman N., Froman P.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
20. *Babich V.M., Buldyrev V.S.* Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory. Oxford: Alpha Sci., 2007. 480 p.
21. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Far fields of internal gravity waves generated by a perturbation source in a stratified rotating medium // *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51 (5), pp. 633–638.
22. *Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu.* Uniform asymptotics of internal gravitational wave fields from an initial radially symmetric perturbation // *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 8 (8), pp. 1112–1118.

УДК 532.2

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПОВЕРХНОСТНОГО ВОЛНЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ОБТЕКАНИЕМ ПОДВОДНОГО ПРЕПЯТСТВИЯ© 2023 г. Д. Ю. Князьков^{1,*}, В. Г. Байдулов^{1,**}, А. С. Савин^{2,***}, А. С. Шамаев^{1,****}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: dmitri.knyazkov@gmail.com

**e-mail: bayd@ipmnet.ru

***e-mail: assavin@list.ru

****e-mail: sham@rambler.ru

Поступила в редакцию 01.03.2023 г.

После доработки 15.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

В работе представлены алгоритмы и результаты расчетов динамики поверхностного слоя жидкости под действием вышедших из глубины течений. Исследуются несколько подходов к моделированию поля скоростей при обтекании горизонтальным потоком неподвижного подводного препятствия. Предложены формулы для расчета поля скоростей на свободной поверхности идеальной однородной жидкости. Разработана компьютерная программа, позволяющая моделировать взаимодействие потока стратифицированной жидкости с подводным препятствием. Исследована возможность применения асимптотических формул приближения дальней зоны для расчета поля скоростей в равномерно стратифицированной жидкости.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, идеальная жидкость, обтекание, поле скоростей, поверхностные волны

DOI: 10.31857/S0032823523030074, EDN: ZTOFFW

1. Введение. Важным элементом в решении задачи томографии океана [1, 2] является разработка и реализация численных методов моделирования обтекания подводного препятствия. В настоящей работе представлены результаты численного моделирования распространения возмущений в жидкости, возникающих при взаимодействии течения с подводным препятствием, например, элементом рельефа дна или трубопроводом. Возмущения распространяются в толще жидкости вплоть до поверхности океана, где взаимодействуют с ветровой рябью, причем картина этого взаимодействия может быть зафиксирована средствами радиозондирования [3, 4]. Возможны два подхода к решению обратной задачи идентификации параметров течения и препятствия [5]. В первом — эта задача решается на основе данных, полученных средствами активной или пассивной радиометрии океана [6–8]. Во втором — величина и направление скорости течения, размер препятствия определяются на основе анализа показания датчиков, расположенных в толще океана [5, 9].

2. Обтекание подводного препятствия. Рассмотрим задачу моделирования обтекания подводного препятствия потоком идеальной жидкости. Необходимо определить поле скоростей в горизонтальной плоскости, находящейся над препятствием либо на свободной поверхности, находящейся на том же расстоянии от препятствия по вертика-

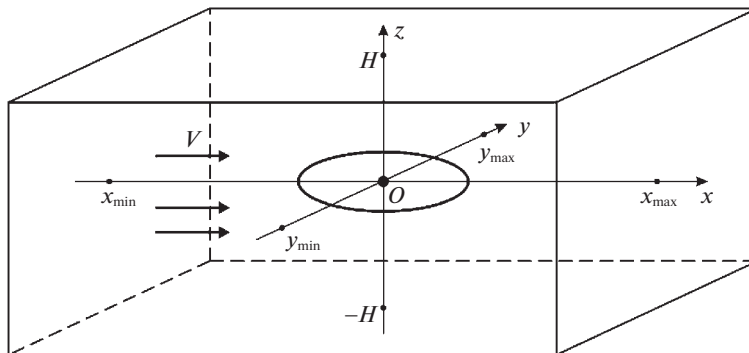


Рис. 1. Геометрия задачи.

ли. Подводное препятствие моделируется точечным источником, расположенным в начале координат — точке $(0, 0, 0)$ (рис. 1). Скорость потока на бесконечности равна по величине V и направлена в положительном направлении оси Ox ,

$$\mathbf{V} = (V, 0, 0)$$

Горизонтальная плоскость, в которой рассчитывается поле скоростей находится на расстоянии h от источника по вертикали. В работе сравниваются результаты расчетов по четырем моделям: аналитические выражения для поля скоростей в толще или на поверхности идеальной однородной жидкости, приближение дальнего поля и численный расчет поля скоростей в толще идеальной стратифицированной жидкости. Последний подход, в отличие от известных решений (напр., [10]) позволяет моделировать обтекание подводного препятствия течением, имеющим непостоянную скорость и произвольно заданную (вообще говоря, переменную как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении) стратификацию. В случае, когда жидкость равномерно стратифицирована, а скорость течения постоянна, для моделирования обтекания подводного препятствия можно применить асимптотические подходы [11–14]. В настоящей работе исследуется возможность использования асимптотики, предложенной в [11].

2.1. Поверхностное волнение при обтекании препятствия потоком однородной жидкости. В первых двух из рассмотренных моделей считается, что жидкость является однородной. При этом в первом случае жидкость считается неограниченной по вертикали, и поле скоростей рассчитывается в толще такой жидкости. Во втором случае жидкость имеет неограниченную глубину, а поле скоростей рассчитывается на свободной поверхности.

Поле скоростей в толще жидкости (в неограниченной области). Запишем сумму потенциалов горизонтального невозмущенного течения идеальной однородной жидкости, имеющего скорость V , и точечного источника мощности Q в сферической системе координат (r, θ, ϵ) [15]:

$$\varphi = \varphi_V + \varphi_Q = Vr \cos(\theta) - \frac{Q}{4\pi r}$$

Компоненты скорости жидкости могут быть найдены как

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Отсюда

$$v_r = V \cos \theta + \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad v_\theta = -V \sin \theta$$

и компоненты скорости v_x , v_y и v_z в декартовой системе координат записываются как

$$v_x = V + \frac{Q}{4\pi r^2} \cos \theta, \quad v_y = \frac{Q}{4\pi r^2} \sin \theta \cos \varepsilon, \quad v_z = \frac{Q}{4\pi r^2} \sin \theta \sin \varepsilon,$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{x}{r}\right), \quad \varepsilon = \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right)$$

Таким образом, в декартовой системе координат в плоскости $z = h$, то есть на расстоянии h от источника по вертикали, имеем:

$$v_x = V + \frac{Qx}{4\pi r^3}, \quad v_y = \frac{Qy}{4\pi r^3}, \quad v_z = \frac{Qz}{4\pi r^3}, \quad (2.1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$.

Поле скоростей на свободной поверхности. Пусть поток однородной идеальной жидкости движется со скоростью V вдоль оси Ох, а на глубине h в начале координат находится препятствие, моделируемое точечным источником интенсивности Q . Потенциал скорости потока может быть записан следующим образом [16, 17]:

$$\Phi(x, y, z) = -Vx + \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2h)^2}} + \varphi(x, y, z) \right), \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= -\frac{gQ}{\pi^2 V^2} \operatorname{Im} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda y) e^{i\sigma(z-2h) + x\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}} \sigma}{(\sigma^2 + i\nu\sigma + \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}} d\sigma d\lambda; \quad x < 0 \\ \varphi(x, y, z) &= \frac{gQ}{\pi^2 V^2} \operatorname{Im} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda y) e^{-i\sigma(z-2h) - x\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}} \sigma}{(\sigma^2 - i\nu\sigma + \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}} d\sigma d\lambda + \\ &+ \frac{Q}{\pi} \int_v^\infty \frac{\gamma(z-2h)}{\sqrt{\gamma v^{-1} - 1}} \sin(x\sqrt{\gamma v}) \cos(y\sqrt{\gamma^2 - \gamma v}) d\gamma; \quad x > 0 \end{aligned}$$

Здесь используется обозначение $\nu = g/V^2$. Горизонтальные компоненты скорости жидкости могут быть найдены как

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Тогда поле скоростей $(v_x(x, y, h), v_y(x, y, h))$ на свободной поверхности жидкости можно рассчитать по формулам

$$v_x(x, y) = \begin{cases} V - \alpha I(x, y), & x < 0 \\ V + \alpha I(x, y) - \beta J(x, y), & x > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$v_y(x, y) = \begin{cases} \alpha K(x, y), & x < 0 \\ \alpha K(x, y) + \frac{Q}{\pi} M(x, y), & x > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$I(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda y) e^{-|\lambda| \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}} \left(v \sigma \cos(\sigma h) + (\sigma^2 + \lambda^2) \sin(\sigma h) \right) \sigma}{(\sigma^2 + \lambda^2)^2 + v \sigma} d\sigma d\lambda \quad (2.5)$$

$$J(x, y) = \int_v^\infty \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - v}} e^{-\gamma h} \cos(x \sqrt{\gamma}) \cos(y \sqrt{\gamma(\gamma - v)}) d\gamma \quad (2.6)$$

$$K(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda y) e^{-|\lambda| \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}} \left(v \sigma \cos(\sigma h) + (\sigma^2 + \lambda^2) \sin(\sigma h) \right) \sigma \lambda}{((\sigma^2 + \lambda^2)^2 + (v \sigma^2)) \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}} d\sigma d\lambda \quad (2.7)$$

$$M(x, y) = \int_v^\infty \sqrt{v \gamma} e^{-\gamma h} \sin(x \sqrt{\gamma}) \sin(y \sqrt{\gamma(\gamma - v)}) d\gamma \quad (2.8)$$

$$\alpha = \frac{gQ}{\pi^2 V^2}, \quad \beta = \frac{gQ}{\pi V^2}, \quad v = \frac{g}{V^2}$$

2.2. Моделирование поля присоединенных внутренних волн. Рассмотрим задачу моделирования пространственного распространения внутренних гравитационных волн, порожденных обтеканием точечного массового источника потоком идеальной стратифицированной жидкости. Поскольку изменения плотности жидкости по отношению к базовой стратификации малы, уравнения движения записываются в приближении Буссинеска. Искомое поле скоростей в некоторой области вблизи подводного препятствия может быть найдено в результате решения уравнения [11, 18]

$$\Delta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + N(z)^2 \Delta_{xy} \Psi = f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}t); \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.9)$$

в области $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [-H, H]$ с граничным условием

$$\Psi = 0; \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.10)$$

где $\Psi(\mathbf{x}, t)$ – внутренний потенциал, $\mathbf{V} = (a, b, c)$ – скорость течения на бесконечности, N – частота плавучести, $\Delta_{xy} = \partial_x^2 + \partial_y^2$. В начальный момент времени

$$\Psi|_{t=0} = 0 \quad (2.11)$$

Скорость жидкости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ может быть найдена как

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla + N^2 \nabla_{xy} \right) \Psi, \quad (2.12)$$

где $\nabla_{xy} = (\partial_x, \partial_y, 0)$. В случае равномерно стратифицированной жидкости (когда $N(z) \equiv \text{const}$), для скорости жидкости, полученной в результате решения уравнения (2.9) с правой частью

$$f(x, y, z) = Q \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

в неограниченной области, можно выписать асимптотические формулы. А именно, в приближении дальнего поля, $R \gg V/N$ скорость (2.12) при $x > 0$ может быть найдена как [11]

$$\mathbf{v}(x, y, z) = H(x) \frac{NQ}{2\pi Vr} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}}{\sin \theta} \frac{\mathbf{W}}{|\mathbf{W}|} \cos\left(\frac{N}{V} r |\sin \varphi|\right), \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (-r \operatorname{tg} \theta \sin \theta, r \operatorname{tg} \theta \cos \theta \cos \varphi, r \operatorname{tg} \theta \cos \theta \sin \varphi) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{x}{R}\right), \quad \varphi = \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right) \\ H(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу (2.9)–(2.11) в случае, когда функция f , определяющая массовый источник в правой части (2.9) задана следующим образом:

$$f(x, y, z) = \frac{BA^3}{\sqrt{\pi^3}} e^{-A^2(x^2+y^2+z^2)} \quad (2.14)$$

Заметим, что $\int_{R^3} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = B$. Для решения задачи (2.9)–(2.11), (2.14) на языке программирования C++ была написана компьютерная программа, позволяющая рассчитывать изменение во времени скорости жидкости, вертикального смещения, давления, формы свободной поверхности. В программе используется неявная разностная схема на равномерной по всем трем пространственным переменным сетке. На каждом шаге s по времени решается система

$$Mu_s = w, \quad (2.15)$$

где M – разреженная матрица. Для осуществления элементарных операций с такой матрицей и решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в программе используется пакет GNU Scientific Library [19]. Для решения системы (2.15) используется обобщенный метод минимальной невязки (Generalized minimal residual method, GMRES). Это итерационный проекционный метод решения СЛАУ был предложен в [20]. Результаты расчетов качественно согласуются с результатами экспериментов по обтеканию сферы потоком равномерно стратифицированной жидкости [21]. Исходный код программы доступен в интернете по адресу <https://bitbucket.org/Jclash/inwaves>.

Для написания и отладки программы, для проведения пробных (с увеличенными шагами по пространству и по времени) расчетов использовались персональные компьютеры. Представленные ниже в настоящей работе результаты решения задачи (2.9)–(2.11), (2.14) были получены на суперкомпьютерных кластерах МВС-100К, МВС-10П Broadwell Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН), г. Москва и суперкомпьютере Говорун Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований (ЛИТ ОИЯИ), г. Дубна.

3. Анализ поля течения. Используя описанные выше подходы, исследовалось обтекание подводного препятствия горизонтальным потоком жидкости. Поток имел на бесконечности скорость $V = 3.13$ м/с, направленную вдоль положительного направления оси Ox . Поле скоростей жидкости рассчитывалось в области $\Omega_a = [-30 \text{ м}, 30 \text{ м}] \times [-30 \text{ м}, 30 \text{ м}]$, находящейся в горизонтальной плоскости $z = h$ на расстоянии $h = 4 \text{ м}$

над препятствием. При этом подводное препятствие моделировалось массовым источником с интенсивностью $Q = 9.84$. Ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с². В расчетах по моделям (2.9)–(2.11), (2.14) и (2.13) считалось, что жидкость является равномерно стратифицированной, частота плавучести $N = 1$ с⁻¹.

При таких значениях параметров V , h , Q в случае обтекания потоком однородной жидкости (2.2), размер подводного препятствия (в данном случае — “радиус” полубесконечного тела) был равен

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\pi V}} = 1 \text{ м} \quad (3.1)$$

Для расчета поля скоростей на свободной поверхности идеальной жидкости (2.3), (2.4) по формулам (2.5)–(2.8), была написана программа на языке программирования Python. Бесконечный интервал интегрирования в этих формулах заменялся конечным, $[0, M]$. Например, для интеграла $I(x, y)$:

$$I(x, y) = \int_0^M \int_0^M \frac{\cos(\lambda y) e^{-|x|\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}} \left(v\sigma \cos(\sigma h) + (\sigma^2 + \lambda^2) \sin(\sigma h) \right) \sigma}{(\sigma^2 + \lambda^2)^2 + v\sigma} d\sigma d\lambda \quad (3.2)$$

Суммирование велось на равномерной сетке с шагом $h_2 = 0.01$ для интегралов (2.5), (2.7) и с шагом $h_1 = 0.0001$ для интегралов (2.6), (2.8). Точность расчета контролировалась сравнением с результатами расчета интегралов в программах компьютерной алгебры (Maple, Wolfram Mathematica) и была приемлемой при достаточном удалении от начала координат (шаги суммирования $h_1 = 0.0001$, $h_2 = 0.01$, длина отрезка интегрирования $M = 10$). Вблизи начала координат точность расчета по формуле (3.2) ухудшается. В качестве значения скорости в точке $(0, 0)$ был взят результат расчета в среде Wolfram Mathematica, где интеграл $I(x, y)$ рассчитывался по преобразованной формуле

$$I(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^M A(\rho, \varphi) \cos(y\rho \sin \varphi) e^{-|x|\rho} \rho d\rho d\varphi,$$

на отрезке интегрирования $[0, 1000]$, $M = 1000$. Расчет поля скоростей на свободной поверхности по формулам (2.5)–(2.8) на сетке 61×61 , то есть в 3721 точке занял 2 часа на персональном компьютере.

При моделировании стратифицированной жидкости задача (2.9)–(2.11), (2.14) численно решалась в области Ω , заданной значениями параметров $x_{\min} = y_{\min} = -50$ м, $x_{\max} = y_{\max} = 50$ м, $H = 50$ м. Таким образом, область Ω имела размеры $100 \text{ м} \times 100 \text{ м} \times 100 \text{ м}$. Размеры расчетной сетки составляли $250 \times 250 \times 250$ точек, использовался шаг по пространству $s = 0.4$ м и шаг по времени $q = 0.4$ с. Подводное препятствие моделировалось задающей источник функцией (2.14) с параметрами $A = 5$, $B = 9.84$. Как показал анализ линий тока, получающихся в результате моделирования, такие значения параметров A , B определяют подводное препятствие с размером аналогичным (3.1). Расчет одного шага по времени занимал примерно 31 минуту на одном вычислительном узле суперкомпьютера МВС10-П Торнадо МСЦ РАН (Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2690 @2.9GHz, 64Gb ОЗУ), время всего расчета составило более 20 часов. При этом на каждом шаге по времени для решения системы (14) осуществлялось 50 итераций метода минимальной невязки. Расчеты выполнялись на одном ядре процессора, параллелизация не применялась.

Результаты расчетов приведены на рис. 2–4. На рис. 2 и 3 показано поле скоростей $\tilde{\mathbf{v}} = (v_x, v_y)$ при набегании потока на подводное препятствие. На рис. 2 показана ком-

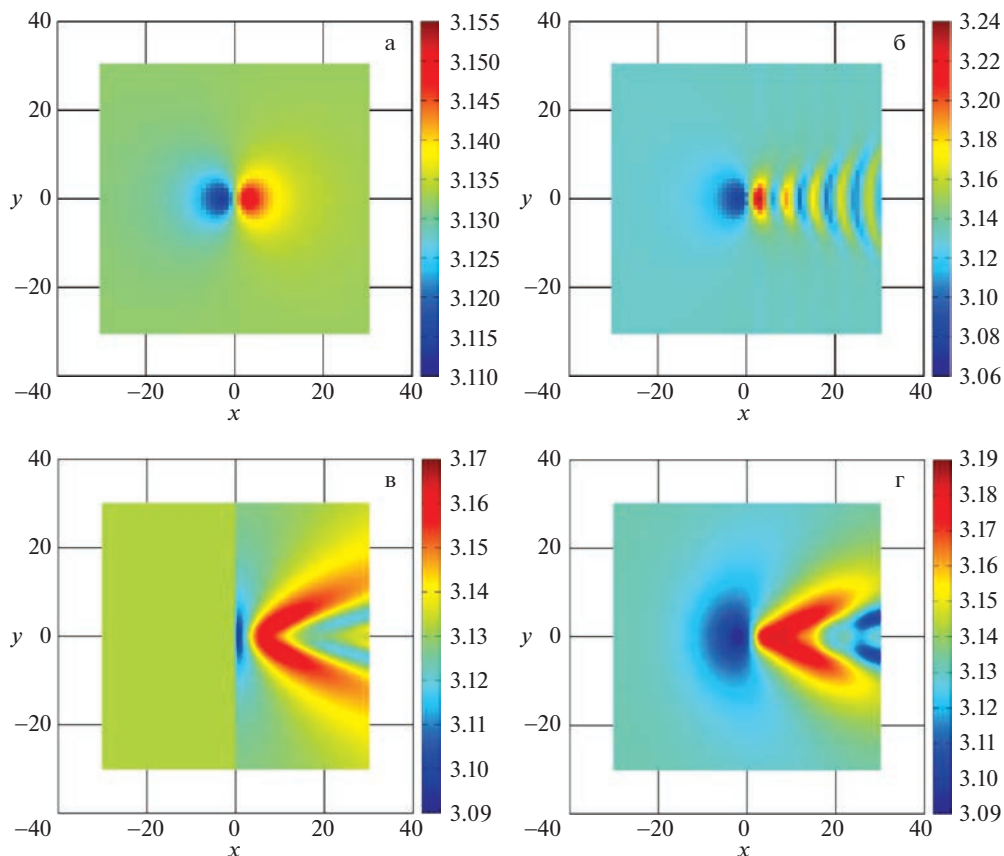


Рис. 2. Компонента $v_x(x, y)$ скорости жидкости на расстоянии h от подводного препятствия по вертикали в толще идеальной однородной жидкости (а), на свободной поверхности (б), в толще идеальной стратифицированной жидкости, полученная при использовании асимптотики дальнего поля (в) и в результате численного моделирования (г).

понента $v_x(x, y, h)$ этого поля скоростей. На рис. 2,а показана x -компонента векторного поля $\tilde{v}$ в толще идеальной однородной жидкости, рассчитанная по формулам (2.1). Векторное поле на свободной поверхности идеальной однородной жидкости, рассчитанное по формулам (2.3), (2.4) показано на рис. 2,б. Поле в толще идеальной стратифицированной жидкости показано на рис. 2,в и 2г; на рис. 2,в — результаты расчета по асимптотической формуле (2.13) приближения дальнего поля из [11] и на рис. 2,г — численное решение задачи (2.9)–(2.11), (2.14). Во всех случаях рис. 2,а–г поле $\tilde{v}$ рассчитывалось на расстоянии h над подводным препятствием. На рис. 3 приведены карты компоненты скорости $v_y(x, y, h)$.

На рис. 4 показано изменение x -компоненты скорости, изображенной на рис. 2,а–в вдоль центрального сечения (прямой $z = h, y = 0$), то есть $v_x(x, 0, h)$, $x \in [-30, 30]$. Амплитуда колебаний изменения скорости течения в стратифицированной жидкости схожа с амплитудой изменения скорости в толще однородной жидкости. Максимум этой амплитуды в 2–3 раза меньше максимума амплитуды для случая изменения поля

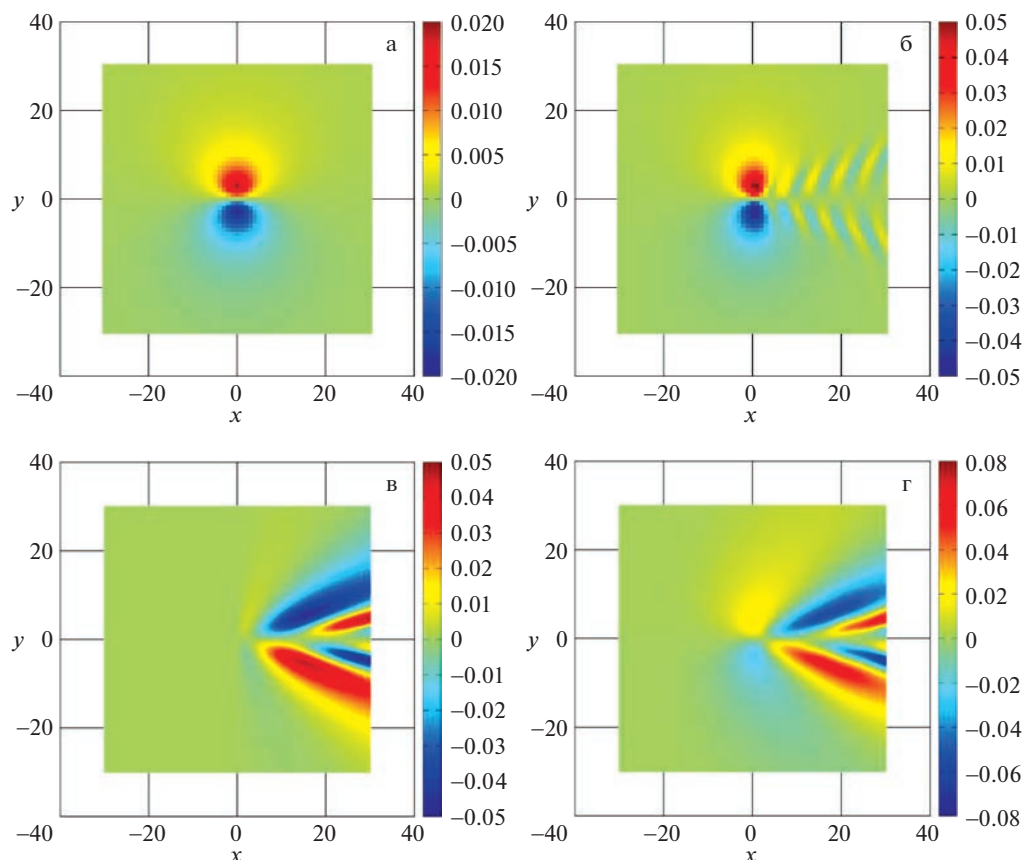


Рис. 3. Компонента $v_y(x, y)$ скорости жидкости на расстоянии h от источника по вертикали в толще идеальной однородной жидкости (а), на свободной поверхности (б), в толще идеальной стратифицированной жидкости, полученная при использовании асимптотики дальнего поля (в) и в результате численного моделирования (г).

скоростей на свободной поверхности однородной жидкости. Величина отклонения скорости жидкости от скорости потока на бесконечности монотонно убывает при удалении от начала координат в случае расчета в толще однородной жидкости (кривая 1) и осциллирует для случаев расчета на свободной поверхности (кривая 2) или по модели стратифицированной жидкости (кривая 3). При этом период этих осцилляций в последнем случае примерно в три раза больше.

Поле скоростей, рассчитанное в толще океана по модели однородной жидкости (см. рис. 2 и 3,а) имеет ярко выраженную неоднородность в области, находящейся непосредственно над подводным препятствием, около точки $(0, 0, h)$. Такая неоднородность может быть обнаружена в случае непосредственной фиксации поля скоростей в соответствующей горизонтальной плоскости. Однако в поле скоростей, рассчитанном по этой модели отсутствуют осцилляции в области за препятствием (при $x > 0$) в отличие от результатов расчетов на свободной поверхности (см. рис. 2 и 3,б) или по модели стратифицированной жидкости (см. рис. 2 и 3,в и г). Именно осциллирующий характер поля скоростей течения, после взаимодействия с ветровой рябью формирует

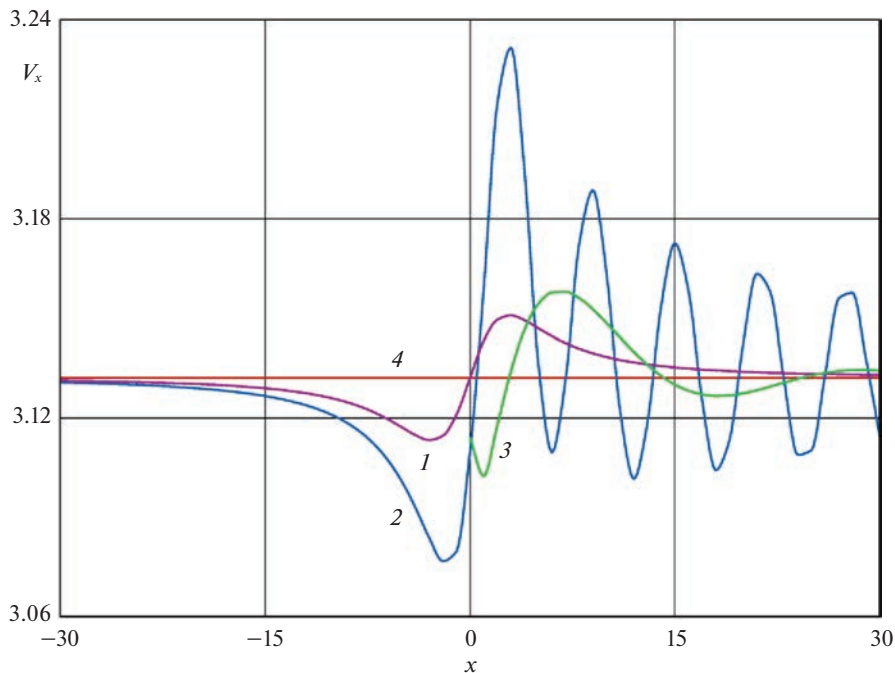


Рис. 4. Показана компонента скорости жидкости v_x вдоль прямой $z = h$, $y = 0$ в толще неограниченной однородной жидкости (кривая 1), на свободной поверхности однородной жидкости (кривая 2), в стратифицированной жидкости при расчете с использованием асимптотических формул (кривая 3). Скорость невозмущенного потока V показана прямой 4.

характерную картину неоднородностей морской поверхности, которая может быть идентифицирована средствами радиозондирования.

В случае, когда жидкость является равномерно стратифицированной ($N = \text{const}$), сравнение результатов расчетов по асимптотическим формулам (см. рис. 2 и 3, в) и результатов, полученных в ходе численного моделирования распространения внутренних гравитационных волн в жидкости (см. рис. 2 и 3, г) показало, что расчет по асимптотическим формулам имеет приемлемую точность и может быть использован для определения поля скоростей жидкости в области, где эти асимптотические формулы определены, то есть при $x > 0$. Заметим, что асимптотические формулы неприменимы в случае, если частота плавучести N зависит от вертикальной координаты или изменяется со временем.

Заключение. Рассмотрена задача определения поля скоростей при обтекании потоком идеальной жидкости подводного препятствия. Предложено несколько подходов к определению поля скоростей жидкости в горизонтальной плоскости, находящейся на некотором расстоянии от подводного препятствия. Предложены формулы для точного определения поля скоростей на свободной поверхности однородной жидкости, показано, что рассчитанное по этим формулам поле существенно отличается от поля скоростей в неограниченной области, рассчитанного по классическим формулам. Таким образом, для моделирования поля скоростей следует пользоваться предложенными формулами, несмотря на их существенно более высокую вычислительную сложность.

Проведено моделирование набегания потока стратифицированной жидкости на подводное препятствие с помощью разработанной компьютерной программы и по асимптотическим формулам приближения дальней зоны. Показано, что в случае равномерной стратификации (при постоянной частоте плавучести), при постоянной скорости потока поле скоростей может быть с приемлемой точностью рассчитано по асимптотическим формулам. В прикладных расчетах использование асимптотических формул предпочтительно, так как точное решение трехмерной динамической задачи требует больших вычислительных мощностей, и для вычислений даже с использованием сравнительно небольших расчетных сеток приходится использовать суперкомпьютерные ресурсы.

Рассчитанные в работе поля скоростей жидкости иллюстрируют существенное усложнение картины течений при обтекании подводного препятствия в случае, когда жидкость равномерно стратифицирована по сравнению со случаем отсутствия стратификации. Более того, при моделировании океанических течений следует учитывать неравномерность стратификации жидкости. Частота плавучести меняется с глубиной, эта зависимость частоты плавучести от глубины уникальна для каждого водного объекта, может меняться от сезона к сезону. Применение асимптотических методов для моделирования течений с произвольным профилем стратификации невозможно, тогда как предложенный в настоящей статье подход и разработанная компьютерная программа позволяют моделировать обтекание подводного препятствия потоком, вообще говоря, неравномерно стратифицированной жидкости. При этом возможно моделирование сложного режима обтекания, когда скорость потока непостоянна.

Для повышения точности расчетов требуется усовершенствовать моделирование распространения возмущений в стратифицированной жидкости. Планируется реализовать возможность задания препятствия сложной формы, возможность задания граничных условий свободной поверхности на соответствующей части расчетной области. Для ускорения расчетов и увеличения размеров расчетной области планируется адаптировать компьютерный алгоритм к архитектуре используемых кластерных вычислителей. Рассчитанное поле скоростей на поверхности жидкости может быть использовано для моделирования взаимодействия внутренних волн с ветровой рябью.

Работа выполнена с использованием суперкомпьютерных ресурсов МСЦ РАН и ЛИТ ОИЯИ. Авторы выражают глубокую признательность руководству и сотрудникам МСЦ РАН и ЛИТ ОИЯИ за предоставленную возможность и техническую поддержку расчетов на вычислительных кластерах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00151), <https://rscf.ru/project/21-11-00151/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нестеров С.В., Шамаев А.С., Шамаев С.И. Методы, алгоритмы и средства аэрокосмической компьютерной томографии приповерхностного слоя Земли. М.: Научный мир, 1996. 272 с.
2. Гавриков А.А., Князьков Д.Ю., Романова А.В. и др. Моделирование влияния волнения поверхности на спектр собственного излучения океана // Прогр. системы: теория и прил. 2016. Т. 7. Вып. 2 (29). С. 73–84.
3. Булатов М.Г., Кравцов Ю.А., Лаврова О.Ю. и др. Физические механизмы формирования аэрокосмических радиолокационных изображений океана // УФН. 2003. Т. 173. № 1. С. 69–87.
4. Jackson C.R., da Silva J.C.B., Jeans G. et al. Nonlinear internal waves in synthetic aperture radar imagery // Oceanogr. 2013. V. 26. № 2. P. 68–79.
5. Baydulov V.G., Knyazkov D., Shamaev A.S. Motion of mass source in stratified fluid // J. Phys.: Conf. Ser. V. 2224. 2021 2nd Int. Symp. on Automation, Information and Computing (ISAIC 2021) 03/12/2021–06/12/2021 Online. P. 012038. 2022.
6. Ulaby F.T., Moore R.K., Fung A.K. Microwave Remote Sensing. Active and Passive. Massachusetts: Addison-Wesley Pub., 1981. 456 p.

7. *Knyazkov D.* Web-interface for HPC computation of a plane wave diffraction on a periodic layer // *Lobachevskii J. Math.* 2017. V. 38. № 5. P. 936–939.
8. *Knyazkov D.* Diffraction of plane wave at 3-dimensional periodic layer // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 1978. P. 470075-1-4.
<https://doi.org/10.1063/1.5044145>
9. *Байдулов В.Г.* О решении обратной задачи движения источника в стратифицированной жидкости // *Волны и вихри в сложных средах: 12-я межд. конф. — школа молодых ученых; 01–03 декабря 2021 г. М.: ООО ИСПОпринт, 2021. С. 31–35.*
10. *Матюшин П.В.* Процесс формирования внутренних волн, инициированный началом движения тела в стратифицированной вязкой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2019. № 3. С. 83–97.
11. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Pt. 2. Moving point sources // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 261. P. 333–374.
12. *Voisin B.* Lee waves from a sphere in a stratified flow // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 574. P. 273–315.
13. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 498. P. 289–313.
14. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields generated by a translating body in a stratified fluid: an experimental comparison // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 564. P. 305–331.
15. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
16. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
17. *Горелов А.М., Носов В.Н., Савин А.С., Савина Е.О.* Метод расчета поверхностных возмущений над точечным источником и диполем // *Изв. РАН. МЖГ.* 2009. № 1. С. 203–207.
18. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* A General Approach to Ocean Wave Dynamics Research: Modelling, Asymptotics, Measurements. M.: OntoPrint, 2019. 587 p.
19. *Galassi M., Davies J., Theiler J. et al.* GNU Scientific Library Reference Manual (3rd Ed.). Network Theory Ltd., 2009. 592 p.
20. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems // *SIAM J. on Sci.&Statist. Comput.* 1986. V. 7. № 3. P. 856–869.
21. *Чашечкин Ю.Д., Гуменник Е.В., Сысоева Е.Я.* Трансформация плотностного поля трехмерным телом, движущимся в непрерывно стратифицированной жидкости // *ПМТФ.* 1995. № 1. С. 20–32.

Direct and Inverse Problems of Dynamics of Surface Waves Caused by Flow around Underwater Obstacle

D. Yu. Knyazkov^{a,#}, V. G. Baydulov^{a,##}, A. S. Savin^{b,###}, and A. S. Shamaev^{a,####}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

^b*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: dmitri.knyazkov@gmail.com*

^{##}*e-mail: bayd@ipmnet.ru*

^{###}*e-mail: assavin@list.ru*

^{####}*e-mail: sham@rambler.ru*

The paper presents algorithms and results of calculations of the dynamics of the surface layer of a liquid under the action of currents that have emerged from the depth. Several approaches to modeling the velocity field in a horizontal flow round a fixed underwater obstacle are investigated. Formulas for calculating the velocity field on the free surface of an ideal homogeneous liquid are proposed. A computer program has been developed that makes it possible to simulate the interaction of a stratified fluid flow with an underwater obstacle. The possibility of using asymptotic formulas for the far-field approximation to calculate the velocity field in a uniformly stratified fluid is studied.

Keywords: stratified fluid, ideal fluid, flow around, velocity field, surface wave

REFERENCES

1. *Nesterov S.V., Shamaev A.S., Shamaev S.I.* Methods, Algorithms and Means of Aerospace Computed Tomography of the Near-Surface Layer of the Earth. Moscow: Nauchnyi Mir, 1996. 272 p. (in Russian)
2. *Gavrikov A., Knyazkov D., Romanova A., Chernik V., Shamaev A.* Simulation of influence of the surface disturbance on the ocean self radiation spectrum // *Progr. Syst.: Theory&Appl.*, 2016, vol. 7, iss. 2. pp. 73–84. <https://doi.org/10.25209/2079-3316-2016-7-2-73-84>
3. *Bulatov M.G., Kravtsov Yu.A., Lavrova O.Yu. et al.* Physical mechanisms of aerospace radar imaging of the ocean // *Phys. Usp.*, 2003, vol. 46, no. 1, pp. 63–79.
4. *Jackson C.R., da Silva J.C.B., Jeans G. et al.* Nonlinear internal waves in synthetic aperture radar imagery // *Oceanogr.*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 68–79.
5. *Baydulov V.G., Knyazkov D., Shamaev A.S.* Motion of mass source in stratified fluid // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2224, 2nd Int. Symp. on Automation, Information and Computing (ISAIC 2021) 03/12/2021–06/12/2021 Online. pp. 012038.
6. *Ulaby F.T., Moore R.K., Fung A.K.* Microwave Remote Sensing. Active and Passive. Massachusetts: Addison-Wesley Pub., 1981. 456 p.
7. *Knyazkov D.* Web-interface for HPC computation of a plane wave diffraction on a periodic layer // *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 936–939.
8. *Knyazkov D.* Diffraction of plane wave at 3-dimensional periodic layer // *AIP Conf. Proc.*, 2018, vol. 1978, pp. 470075-1-4. <https://doi.org/10.1063/1.5044145>
9. *Baydulov V.G.* On the solution of the inverse problem of the motion of a source in a stratified fluid // in: *Proc. 12th Int. Conf. — School of Young Sci. Waves and Vortices in Complex Media*. Moscow, Dec. 01–03, 2021. Moscow: ISPOPrint, 2021. S. 31–35.
10. *Matyushin P.V.* Process of the formation of internal waves initiated by the start of motion of a body in a stratified viscous fluid // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 3, pp. 374–388. <https://doi.org/10.1134/S0015462819020095>
11. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Pt. 2. Moving point sources // *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 261, pp. 333–374.
12. *Voisin B.* Lee waves from a sphere in a stratified flow // *J. Fluid Mech.*, 2007, vol. 574, pp. 273–315.
13. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.*, 2004, vol. 498, pp. 289–313.
14. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields generated by a translating body in a stratified fluid: an experimental comparison // *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 564, pp. 305–331.
15. *Loitsyanskii L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Oxford: Pergamon, 1966. 803 p.
16. *Sretenskii L.N.* Theory of Wave Motions in a Fluid. Moscow: Nauka, 1977. 816 p. (in Russian)
17. *Gorelov A.M., Nosov V.N., Savin A.S. et al.* Method of calculating surface disturbances over a point source and a dipole // *Fluid Dyn.*, 2009, vol. 44, no. 1, pp. 170–174. <https://doi.org/10.1134/S0015462809010177>
18. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* A General Approach to Ocean Wave Dynamics Research: Modelling, Asymptotics, Measurements. Moscow: OntoPrint, 2019. 587 p.
19. *Galassi M., Davies J., Theiler J. et al.* GNU Scientific Library Reference Manual (3rd Ed.). Network Theory Ltd., 2009. 592 p.
20. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems // *SIAM J. on Sci.&Statist. Comput.*, 1986, vol. 7, no. 3, pp. 856–869.
21. *Chashechkin Y., Gumennik E., Sysoeva E.* Transformation of a density field by a three-dimensional body moving in a continuously stratified fluid // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1995, vol. 36, pp. 19–29.

УДК 533.6.011.8

**СТЕПЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО
СОПРОТИВЛЕНИЯ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ**© 2023 г. В. Л. Нгуен^{1,*}¹Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный, Россия

*e-mail: lamvqtc1990@gmail.com

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.

После доработки 13.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Для степенного эллиптического тела вычисляется сила сопротивления в высокоскоростном потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей. Решением вариационной задачи определяется показатель степени в образующей тела минимального сопротивления разного удлинения в зависимости от коэффициента эллиптичности.

Ключевые слова: эллиптические тела, гипергеометрическая функция, коэффициент сопротивления, коэффициент эллиптичности

DOI: 10.31857/S0032823523030104, EDN: ZTTJJR

1. Введение. Проблема оптимального сопротивления в высокоскоростном потоке разреженного газа летательного аппарата до сих пор остается одним из самых важных вопросов в авиационно-космической промышленности и ракетной технике. Существует несколько подходов к решению таких задач. Для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе, широкое распространение получили формулы, найденные из локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения. Классическая задача построения тела минимального сопротивления с использованием формулы Ньютона решалась во многих работах [1–3]. В связи с развитием космической техники появился интерес к оптимальным задачам высокоскоростной аэродинамики на больших высотах в разреженном газе [4]. Дальнейшее упрощение таких задач связано с использованием целевых функций разного вида зависящих от некоторого количества параметров, по которым и осуществляется оптимизация [5, 6]. В частности, широкое распространение получила степенная целевая функция [7, 8].

В настоящей работе строится форма эллиптического тела минимального сопротивления со степенной образующей в высокоскоростном потоке разреженного газа на основе модели Ньютона и свободномолекулярной модели газа.

2. Уравнение эллиптического тела со степенной функцией. С использованием коэффициента эллиптичности уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.1)$$

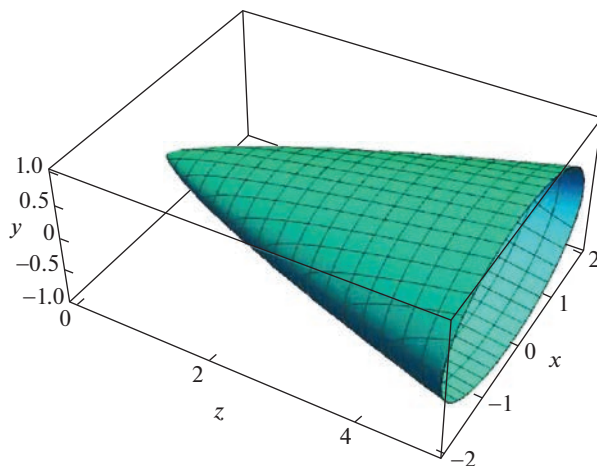


Рис. 1. Геометрия тела ($k = 2$, $\alpha = 3/4$, $\lambda = 5$).

имеет вид ($a = kb$, k — коэффициент эллиптичности):

$$\frac{x^2}{k^2} + y^2 = b^2 \quad (2.2)$$

Пусть b — степенная функция $b = R(z/L)^\alpha$, R — размер посадочного узла, L — длина тела, α — показатель степени. Уравнение такого эллиптического тела будет (рис. 1)

$$\frac{x^2}{k^2} + y^2 = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2\alpha}, \quad (2.3)$$

где $\lambda = L/R$ — удлинение эллиптического тела.

Уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$z = \lambda \left(\frac{x^2}{k^2} + y^2 \right)^{\frac{1}{2\alpha}}; \quad -k \leq x \leq k, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad 0 < z \leq \lambda \quad (2.4)$$

Ставится задача: найти такую величину α при которой достигается минимальное сопротивление эллиптического тела (2.4) при заданном значении удлинения λ и фиксированном коэффициенте эллиптичности k в случае “редкого” газа Ньютона и в свободномолекулярном случае.

3. Степенные эллиптические тела минимального сопротивления. Формула Ньютона. Эллиптическое тело обтекается газом плотностью ρ и скоростью V . Коэффициент лобового сопротивления, действующий на степенные эллиптические тела (2.4) вдоль оси Oz , запишется [8]

$$c_z = \iint_{(S)} (c_p \cos \theta + c_\tau \sin \theta) \frac{dS}{S_b}, \quad (3.1)$$

где c_p, c_τ — нормальная и касательная силы действующие на элемент поверхности dS , деленные на площадь этого элемента и величину скоростного напора $\rho V^2/2$, θ — угол между внутренней нормалью к поверхности и вектором скорости газа, $S_b = \pi R^2$ — площадь посадочного узла.

Таблица 1.

$k = 1$			$k = 1.5$		$k = 2$		$k = 2.5$		$k = 3$	
λ	α	c_z	α	c_z	α	c_z	α	c_z	α	c_z
1	0.462427	0.802824	0.4021	1.41773	0.371661	2.05021	0.355773	2.68638	0.34745	3.32169
2	0.649528	0.330489	0.60852	0.66124	0.577199	1.03863	0.555555	1.43864	0.54125	1.84922
3	0.701653	0.166968	0.678587	0.352722	0.656538	0.581961	0.637858	0.839475	0.623089	1.11469
4	0.72157	0.0986344	0.707131	0.213577	0.691684	0.361847	0.676932	0.535341	0.663828	0.727205
5	0.731228	0.0646288	0.721355	0.141747	0.710103	0.243783	0.698557	0.366374	0.687499	0.505357
6	0.736651	0.04547	0.729465	0.100466	0.720948	0.174367	0.711801	0.264703	0.702591	0.368927
7	0.74000	0.0336733	0.734536	0.074745	0.727877	0.130491	0.720503	0.199433	0.712819	0.27997
8	0.742233	0.0259156	0.737923	0.057702	0.732577	0.101139	0.726528	0.155298	0.720068	0.219138
9	0.743786	0.02055	0.7403	0.045853	0.735915	0.080598	0.730872	0.124174	0.72539	0.175883
10	0.744913	0.016688	0.742035	0.037295	0.738372	0.065689	0.734109	0.101458	0.729409	0.144114
15	0.747661	0.0074628	0.746298	0.01674	0.744506	0.029634	0.742346	0.046055	0.739876	0.065894

Для формулы Ньютона:

$$c_p = 2 \cos^2 \theta, \quad c_\tau = 0 \quad (3.2)$$

Коэффициент лобового сопротивления равен

$$c_z = \frac{1}{\pi} \iint_{(S)} 2 \cos^3 \theta \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy, \quad (3.3)$$

S — площадь поверхности тела.

Отметим, что

$$\cos \theta = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 \right)^{-1/2} \quad (3.4)$$

Тогда

$$c_z = \frac{2}{\pi} \iint_{(S)} \left[\frac{\lambda^2}{\alpha^2} \left(\frac{x^2}{k^2} + y^2 \right)^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} \left(\frac{x^2}{k^4} + y^2 \right) + 1 \right]^{-1} dx dy \quad (3.5)$$

Переходя в (3.5) к полярной системе координат вида

$$\begin{aligned} x &= kr \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad dx dy = k r dr d\varphi \\ r &\in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Запишем коэффициент лобового сопротивления в виде интеграла от гипергеометрической функции $F[a, b, c, d]$

$$c_z = \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} F \left(1, \frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}, -\frac{\lambda^2}{k^2 \alpha^2} \left(1 + (k^2 - 1) \sin^2 \varphi \right) \right) d\varphi \quad (3.7)$$

В табл. 1 показаны значения величины α и c_z в зависимости от удлинения λ при фиксированном значении коэффициента эллиптичности k , а на рис. 2 — зависимость коэффициента минимального сопротивления семейства степенных эллиптических тел от удлинения λ для разных значений коэффициента эллиптичности k .

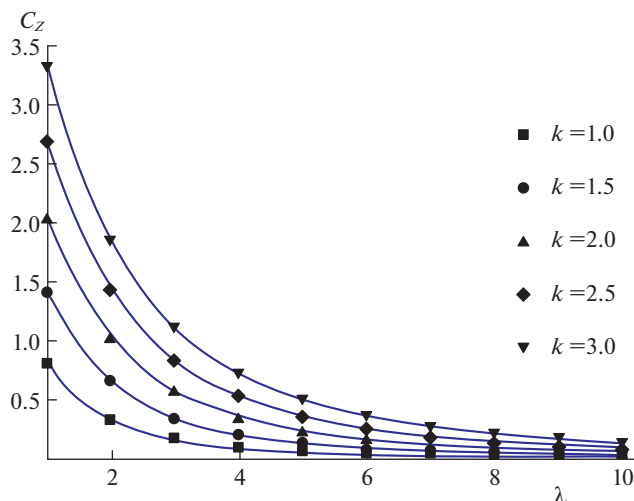


Рис. 2. Зависимость c_z от удлинения λ для разных значений коэффициента эллиптичности k .

Видно, что коэффициент минимального сопротивления степенных эллиптических тел уменьшается с удлинением λ , а для данного удлинения λ коэффициент сопротивления c_z возрастает вместе с коэффициентом эллиптичности k . Наименьшее сопротивление эллиптического тела реализуется при $k = 1$, т.е. когда наибольшее сечение эллиптического тела является кругом. Кроме того, для разных значений коэффициента эллиптичности k и с ростом удлинения λ показатель степени α стремится к значению $\alpha = 0.75$, что хорошо согласуется с результатами [8].

4. Степенные эллиптические тела минимального сопротивления. Свободномолекулярная модель. Для свободномолекулярной модели в гиперзвуковом потоке течения газа можно записать коэффициенты давления и трения следующим образом [9]

$$c_p = 2 \cos^2 \theta + \bar{z} \cos \theta, \quad \bar{z} = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma}, \quad c_\tau = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad (4.1)$$

где γ — показатель адиабаты; t_w — температурный фактор; θ — угол между вектором скорости газа и внутренней нормалью к поверхности тела.

Подставляя выражение (4.1) в (3.1), получаем формулу коэффициента сопротивления степенных эллиптических тел:

$$c_z = \frac{1}{\pi} \iint_{(S)} (2 + \bar{z} \cos \theta) dx dy \quad (4.2)$$

Тогда

$$c_z = \frac{1}{\pi} \iint_{(S)} \left(2 + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\alpha^2} \left(\frac{x^2}{k^2} + y^2 \right)^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} \left(\frac{x^2}{k^4} + y^2 \right) + 1}} \right) dx dy \quad (4.3)$$

Переходя в (4.3) к полярной системе координат (3.6), получим выражение для коэффициента лобового сопротивления тела

$$c_z = 2k + \frac{k\bar{z}}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}, -\frac{\lambda^2}{\alpha^2 k^2} (\cos^2 \varphi + k \sin^2 \varphi) \right) d\varphi \quad (4.4)$$

Таблица 2

$k = 1$			$k = 1.5$		$k = 2$		$k = 2.5$		$k = 3$	
λ	α	c_z	α	c_z	α	c_z	α	c_z	α	c_z
1	0.34872	2.18155	0.30149	3.29559	0.297104	4.4104	0.267613	5.52516	0.261547	6.63966
2	0.529225	2.11683	0.48669	3.20106	0.459546	4.28877	0.442651	5.37776	0.432184	6.46716
3	0.59469	2.08334	0.56736	3.14706	0.546076	4.21541	0.530454	5.38607	0.519314	6.35788
4	0.62238	2.06417	0.604217	3.11456	0.58843	4.16959	0.575531	5.22731	0.565368	6.2866
5	0.636492	2.05200	0.62311	3.09339	0.611671	4.13909	0.601213	5.18749	0.592386	6.23762
6	0.644676	2.04364	0.635049	3.07866	0.625747	4.11759	0.61721	5.15908	0.609647	6.20232
7	0.649868	2.03757	0.642379	3.06786	0.634932	4.1017	0.627869	5.13792	0.621389	6.17584
8	0.653381	2.03297	0.647372	3.05964	0.641273	4.08952	0.635345	5.12162	0.629762	6.15532
9	0.655875	2.02936	0.650937	3.05317	0.645844	4.07991	0.640802	5.10869	0.635957	6.13899
10	0.657714	2.02646	0.653577	3.04796	0.649255	4.07213	0.644915	5.09821	0.640678	6.08484
15	0.662337	2.0177	0.660266	3.03214	0.658019	4.04845	0.655665	5.06611	0.653259	6.06391

В табл. 2 для значений параметров $t_w = 0.1$ и $\gamma = 1.4$ представлены зависимости показателя степени α и коэффициента сопротивления c_z от удлинения λ при фиксированном коэффициенте эллиптичности k . Приведенные на рис. 3 зависимости величин минимального сопротивления семейства степенных эллиптических тел c_z от удлинения λ , ясно показывают монотонное уменьшение коэффициента минимального сопротивления степенных эллиптических тел при заданном удлинении и фиксированном коэффициенте эллиптичности k .

Кроме того, в согласии с [8] при различных значениях коэффициента эллиптичности k с увеличением удлинения λ показатель степени α стремится к значению $\alpha = 0.666$. Следует отметить, что наименьший коэффициент лобового минимального сопротивления эллиптического тела реализуется при $k = 1$, то есть наибольшее сече-

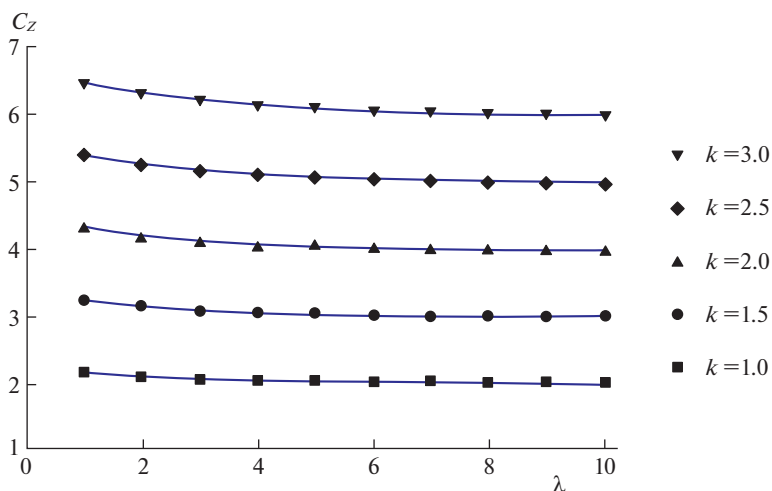


Рис. 3. Зависимость c_z от удлинения λ для различных значений k при $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$.

ние степенного эллиптического тела представляет собой круг, а обтекаемые тела — тела вращения (как в случае формулы Ньютона).

Заключение. На основе нескольких локальных моделей в определенные параметры семейства степенных эллиптических тел соответствующие минимальной величине силы сопротивления в высокоскоростном потоке разреженного газа. Рассмотрены две модели газа: модель “редкого” газа Ньютона и свободномолекулярная модель. Решением вариационной задачи для тела минимального сопротивления при фиксированном коэффициенте эллиптичности k рассчитаны зависимости показателя степени образующей эллиптического тела от удлинения λ .

Для обеих моделей наблюдается монотонное уменьшение сопротивления с возрастанием удлинения λ . При этом наименьшим сопротивлением обладает тело с коэффициентом эллиптичности $k = 1$, т.е. тело вращения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-08-00790 и стипендии Социалистической Республики Вьетнам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миеле А. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. 508 с.
2. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 688 с.
3. Черный Г.Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
4. Бунимович А.И., Якунина Г.Е. Исследование форм поперечного контура конического пространственного тела минимального сопротивления, движущегося в разреженном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 112–117.
5. Якунина Г.Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. № 64. Вып. 2. С. 199–310.
6. Таковицкий С.А. Аналитическое решение задачи минимизации волнового сопротивления осесимметричной носовой части в рамках локальной линеаризации // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 775–782.
7. Благосклонов В.И., Гродзовский Г.Л. Осесимметричное обтекание тел вращения степенной формы при сверхзвуковых скоростях набегающего потока // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. V. № 6. С. 6–22.
8. Горелов С.Л., Нгуен Ван Лам. Тело вращения минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. МАИ. 2020. № 113. <https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-4>
9. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.

Power Elliptic Bodies of Minimum Resistance in the Gas Flow

V. L. Nguyen^{a,#}

^aMoscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

[#]e-mail: lamvqtc1990@gmail.com

For power elliptical body, the drag force in the high-speed rarefied gas flow is calculated based on several local models. The solution of the variational problem determines the degree of minimum resistance in the generatrix of the body, depending on coefficient of the ellipticity and different elongation in a wide range of Reynolds numbers.

Keywords: elliptical bodies, hypergeometric function, the drag coefficient, coefficient of the ellipticity

REFERENCES

1. *Miele A.* Theory of Optimal Aerodynamic Forms. Moscow: Mir, 1969. 508 p.
2. *Newton I.* Mathematical Principles of Natural Philosophy. Moscow: Nauka, 1989, 688 p. (in Russian)
3. *Chernyi G.G.* Gas Flow at High Supersonic Speed. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 220 p. (in Russian)
4. *Bunimovich A.I., Yakunina G.E.* Investigation of the forms of the transverse contour of the conical spatial body of the minimum resistance moving in a sparse gas // Fluid Dyn., 1986, no. 5, pp. 112–117.
5. *Yakunina G.Ye.* The construction of optimum three-dimensional shapes within the framework of a model of local interaction // JAMM, 2000, vol. 64, iss. 2, p. 289–298.
6. *Takovitskii S.A.* Analytical solution to the wave-drag minimization problem for an axisymmetric fore-body using local linearization // Fluid Dyn., 2018, vol. 53, suppl. 2, pp. 38–44.
<https://doi.org/10.1134/S0015462818060095>
7. *Blagosklonov V.I., Grodzovsky G.L.* Axisymmetric flow around bodies of rotation of a power-law shape at supersonic free-stream velocities // Uch. Zap. TsAGI, 1974, vol. V, no. 6, pp. 6–22. (in Russian)
8. *Gorelov S.L., Nguyen V.L.* Rotation body of minimal aerodynamic drag in hypersonic rarefied gas flow // in: Trudy MAI (Net. Sci. Periodic Publ.), 2020, no. 113.
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117962&referer=https%3A%2F%2Fwww.google.com%2F>
9. *Galkin V.S., Erofeev A.I., Tolstykh A.I.* Approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of the bodies in the hypersonic stream of sparse gas // Proc. TsAGI, 1977, no. 1833, pp. 6–10. (in Russian)

УДК 51-73,533

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАССОПЕРЕНОСА ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПО МОНО- И ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ

© 2023 г. Д. А. Губайдуллин^{1,*}, Д. А. Тукмаков^{1,**}¹ИММ ФИЦ Каз. НЦ РАН, Казань, Россия

*e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru

**e-mail: gubaidullin@imm.knc.ru

Поступила в редакцию 19.01.2023 г.

После доработки 20.04.2023 г.

Принята к публикации 28.04.2023 г.

В работе численно моделируется распространение ударной волны по газовзвесям. Несущая среда описывалась как вязкий, сжимаемый, теплопроводный газ. Математическая модель реализовывала континуальную методику динамики многофазных сред, учитывающую взаимодействие несущей среды и дисперсной фазы. Моделировался массоперенос взвешенных в газе дисперсных включений, вызванный взаимодействием ударной волны с монодисперсными газовзвесьями и с газовзвесьями, имеющими многофракционный состав. Выявлены различия массопереноса частиц в зависимости от их размера. Установлено, что процесс массопереноса дисперсных включений в монодисперсной газовзвеся отличается от аналогичного процесса для фракции полидисперсной газовзвеся, имеющей тот же размер частиц и то же объемное содержание.

Ключевые слова: континуальная модель, полидисперсная газовзвесь, межфазное взаимодействие, массоперенос

DOI: 10.31857/S0032823523030050, EDN: ZTCTUM

1. Введение. Динамика неоднородных сред является развивающимся разделом механики жидкости и газа. В отличие от классической гидродинамики, движение смеси сопровождается эффектами, связанными с межфазным взаимодействием. Основные уравнения динамики многофазных сред приведены в [1]. Разработаны [2–5] математические модели различных течений газодисперсных и пыльных сред. В работах по тематике течений сплошных сред с дисперсными включениями [6–26] исследуются как общие теоретические вопросы процессов взаимодействия несущих сред и дисперсных включений [6, 18, 23–26], так и термодинамические и механические превращения, происходящие с частицами в потоке сплошной среды, а также массообмен фаз в потоке неоднородных сред [7, 8, 11, 17, 19]. Исследования динамических процессов в газовзвесьях связаны с практическими приложениями [9, 10, 12–16, 19–22], в частности сепарацией фракций в полидисперсных взвесьях встречающихся в ядерной энергетике [15] и химической промышленности [19–21], промышленной экологии [22]. В данной работе применяется континуальный подход механики многофазных сред. Такой подход предполагает решение полной гидродинамической системы уравнений движения для каждой из фаз смеси или же фракций, в случае если дисперсная фаза состоит из нескольких фракций, с учетом обмена импульсом и массой между дисперсной фазой и несущей средой. На основе численного моделирования исследуется про-

цесс изменения объемного содержания частиц при прохождении ударной волны и спутного за ней потока газа через область, заполненную газозвесью моно- или полидисперсного состава.

2. Математическая модель. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье—Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [4, 27–31]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) &= - \sum_{j=2,n} F_{xj} + \sum_{j=2,n} \alpha_j \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy}) &= - \sum_{j=2,n} F_{yj} + \sum_{j=2,n} \alpha_j \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}([e_1 + p - \tau_{xx}]u_1 - \tau_{xy}v_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}([e_1 + p - \tau_{yy}]v_1 - \tau_{xy}u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y}) &= \\ &= - \sum_{j=2,n} Q_j - \sum_{j=2,n} (|F_{xj}|(u - u_j) + |F_{yj}|(v - v_j)) + \sum_{j=2,n} \alpha_j \left(\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тензоры вязких напряжений записываются, через составляющие вектора скорости следующим образом:

$$\tau_{11} = \mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{22} = \mu \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

Динамика каждой из фракций дисперсной фазы описывается системой уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_j u_j)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_j v_j)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho_j u_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_j u_j^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_j u_j v_j) &= F_{xj} - \alpha_j \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho_j v_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_j u_j v_j) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_j v_j^2) &= F_{yj} - \alpha_j \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial(e_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_j u_j) + \frac{\partial}{\partial y}(e_j v_j) &= Q_j \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь p , ρ_1 , u_1 , v_1 — давление, плотность, декартовы составляющие скорости несущей среды в направлении осей x и y соответственно; T_1 , e_1 — температура и полная энергия газа; ρ_j , T_j , e_j , u_j , v_j — средняя плотность, температура, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости j -й фракции дисперсной фазы в направлении осей x , y . Для описания массопереноса фракций дисперсной фазы применялась функция средней плотности [4, 5], являющаяся произведением физической плотности, остающейся неизменной на объемное содержание, являющееся функцией временной и пространственных переменных. Температура несущей среды находится из уравнения $T_1 = (\gamma - 1)(e_1/\rho_1 - (u_1^2 + v_1^2)/(2R))$, где R — газовая постоянная несущей фазы, μ — вязкость газа, λ — теплопроводность газа, γ — постоянная адиабаты, c — скорость звука, $c = \sqrt{M^{-1}\gamma RT}$, M — молярная масса газа. Давление газа определяется выражением — $p = (\gamma - 1)(e_1 - \rho_1(u_1^2 + v_1^2)/2)$. Внутренняя энергия j -й фракции дисперсной фазы

определяется как $e_j = \rho_j C_{pj} T_j$, где C_{pj} – удельная теплоемкость единицы массы вещества j -й фракции дисперсной фазы, средняя плотность дисперсной фазы вычисляется из выражения $\rho_j = \alpha_j \rho_{j0}$, где α_j – объемное содержание j -й фракции дисперсной фазы, ρ_{j0} – физическая плотность материала j -й фракции. Пространственные составляющие силы аэродинамического сопротивления:

$$F_{xj} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_j}{d_j} C_{df} \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_j)^2 + (v_1 - v_j)^2} (u_1 - u_j)$$

$$F_{yj} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_j}{d_j} C_{df} \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_j)^2 + (v_1 - v_j)^2} (v_1 - v_j),$$

$Q_j = 6\alpha_j \lambda \text{Nu}_{1j} (T_1 - T_j) / d_j^2$ – поток тепла между несущей средой и j -й фракцией дисперсной фазы. Здесь Nu_{1j} – относительное число Нуссельта [4], d_j – диаметр частицы. Число Нуссельта определяется с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительного числа Маха M_{1j} , относительного числа Рейнольдса Re_{1j} и числа Прандтля Pr [2, 3]:

$$M_{1j} = |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_j| / c, \quad \mathbf{V}_i = [u_i, v_i], \quad \text{Re}_{1j} = \rho_1 |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_j| d_j \mu^{-1}, \quad \text{Pr} = C_p \mu \lambda^{-1}$$

$$\text{Nu}_{1j} = 2 \exp(-M_{1j}) + 0.459 \text{Re}_{1j}^{0.55} \text{Pr}^{0.33}, \quad 0 \leq M_{1j} \leq 2, \quad 0 \leq \text{Re}_{1j} < 2 \times 10^5$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления вычислялся с использованием следующего выражения [1, 3]:

$$C_{dj} = \frac{24}{\text{Re}_{1j}} + \frac{4}{\text{Re}_{1j}^{0.5}} + 0.4$$

Система уравнений (2.1)–(2.2) интегрировалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака второго порядка точности [32]. Для подавления численных осцилляций применялась схема нелинейной коррекции сеточной функции [33, 34]. В конечно-разностной аппроксимации на границах расчетной области для газа и k -й фракции дисперсной фазы задавались однородные граничные условия Неймана:

$$u_1(t, 1, j) = u_1(t, 2, j), \quad u_k(t, 1, j) = u_k(t, 2, j)$$

$$v_1(t, 1, j) = v_1(t, 2, j), \quad v_k(t, 1, j) = v_k(t, 2, j)$$

$$u_1(t, N_x, j) = u_1(t, N_x - 1, j), \quad u_k(t, N_x, j) = u_k(t, N_x - 1, j)$$

$$v_1(t, N_x, j) = v_1(t, N_x - 1, j), \quad v_k(t, N_x, j) = v_k(t, N_x - 1, j)$$

$$u_1(t, i, 1) = u_1(t, i, 2), \quad u_k(t, i, 1) = u_k(t, i, 2)$$

$$v_1(t, i, 1) = v_1(t, i, 2), \quad v_k(t, i, 1) = v_k(t, i, 2)$$

$$u_1(t, i, N_y) = u_1(t, i, N_y - 1), \quad u_k(t, i, N_y) = u_k(t, i, N_y - 1)$$

$$v_1(t, i, N_y) = v_1(t, i, N_y - 1), \quad v_k(t, i, N_y) = v_k(t, i, N_y - 1)$$

$$\rho_1(t, 1, j) = \rho_1(t, 2, j), \quad \rho_k(t, 1, j) = \rho_k(t, 2, j)$$

$$\rho_1(t, N_x, j) = \rho_1(t, N_x - 1, j), \quad \rho_k(t, N_x, j) = \rho_k(t, N_x - 1, j)$$

$$\rho_1(t, i, 1) = \rho_1(t, i, 2), \quad \rho_k(t, i, 1) = \rho_k(t, i, 2)$$

$$\rho_1(t, i, N_y) = \rho_1(t, i, N_y - 1), \quad \rho_k(t, i, N_y) = \rho_k(t, i, N_y - 1)$$

$$e_1(t, 1, j) = e_1(t, 2, j), \quad e_k(t, 1, j) = e_k(t, 2, j)$$

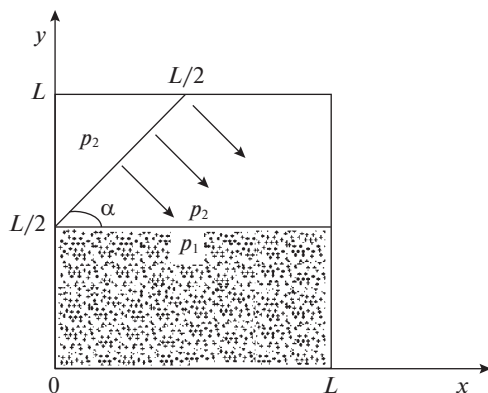


Рис. 1. Схематическое изображение моделируемого процесса.

$$\begin{aligned}
 e_1(t, N_x, j) &= e_1(t, N_x - 1, j), & e_k(t, N_x, j) &= e_k(t, N_x - 1, j) \\
 e_1(t, i, 1) &= e_1(t, i, 2), & e_k(t, i, 1) &= e_k(t, i, 2) \\
 e_1(t, i, N_y) &= e_1(t, i, N_y - 1), & e_k(t, i, N_y) &= e_k(t, i, N_y - 1) \\
 p(t, 1, j) &= p(t, 2, j), & p(t, N_x, j) &= p(t, N_x - 1, j) \\
 p(t, i, 1) &= p(t, i, 2), & p(t, i, N_y) &= p(t, i, N_y - 1)
 \end{aligned}$$

Здесь $N_x N_y$ — количество узлов; i, j — нумерация узлов в x и y направлениях соответственно. Проводилось [27] сопоставление результатов численных расчетов, проведенных описанной выше математической моделью динамики газозвеси для монодисперсного состава дисперсной фазы с результатами физического эксперимента и аналитическими расчетами. Расчеты проводились для канала, в котором направление движения ударной волны перпендикулярно поверхности раздела однородной и неоднородной среды.

3. Результаты расчетов. В работе [4] исследованы процессы, связанные с поведением средней плотности дисперсной фазы при прохождении ударной волны по газозвеси в одномерном случае. В данной работе делается обобщение на двухмерный случай, когда массоперенос частиц происходит не только в продольном, но и в поперечном направлении. Рассматривается течение газозвеси, когда ударная волна падает под углом к поверхности раздела однородной среды и газозвеси. При моделировании задавались следующие параметры несущей фазы газозвеси: $M = 29 \times 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воздуха, теплопроводность несущей среды предполагалась равной — $\lambda = 0.02553$ Вт/(м · К), динамическая вязкость несущей среды — $\mu = 1.72 \times 10^{-5}$ Па · с, $\gamma = 1.4$, $R = 8.31$ Дж/(моль · К). Угол между поверхностью разрыва давлений и поверхностью раздела газа и газозвеси составляет — $\alpha = \pi/4$. Моделируемая область течения представляет собой квадрат со стороной $L = 2$ м (рис. 1). Также исследуется влияние полидисперсного состава на процессы массопереноса частиц различных размеров.

В численных расчетах количество узлов в осевом направлении — $N_x = 200$, в радиальном направлении — $N_y = 200$. Полидисперсная газозвесь состояла из фракций с размером частиц — $d = 2$ мкм, $d = 20$ мкм, $d = 200$ мкм. Физическая плотность материала частиц различных фракций составляла $\rho_{20} = \rho_{30} = \rho_{40} = 2500$ кг/м³. Объемное содержание фракций частиц $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.0004$. В монодисперсных газозвесях раз-

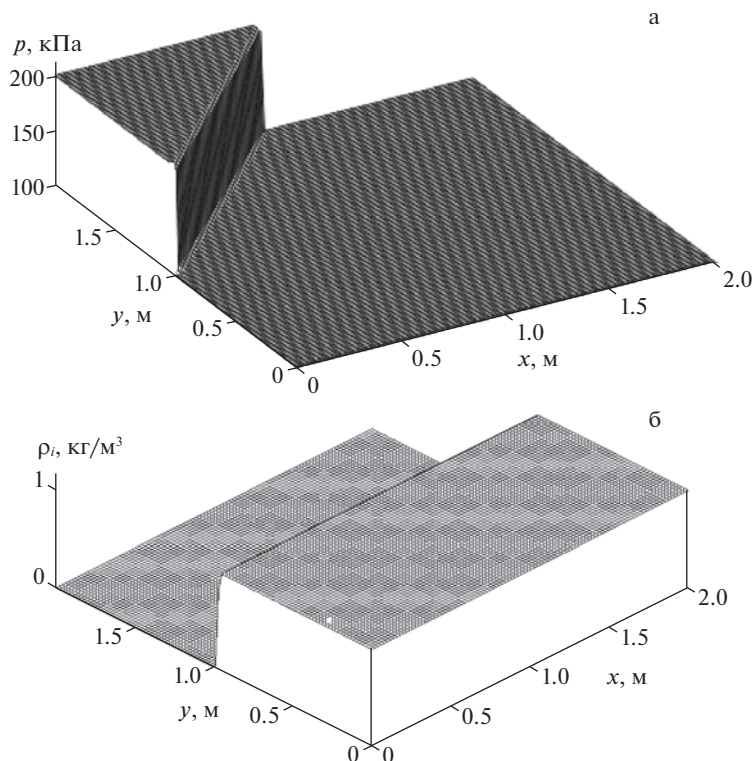


Рис. 2. Начальное распределение а: давления и б: средней плотности фракций дисперсной фазы.

меры частиц и объемные содержания предполагались равными размерам частиц соответствующих фракций полидисперсной газозвеси. На рис. 2,а и 2,б представлены начальные пространственные распределения давления газа и средней плотности каждой из фракций полидисперсной газозвеси или всей дисперсной фазы для монодисперсного случая. Давление как в газе, так и в газозвеси составляет $p_2 = 100$ кПа, $\rho_1 = 1.204$ кг/м³, $T_1 = 293$ К. Выше линии $y = x + 1$, давление газа составляет $p_2 = 200$ кПа, $\rho_1 = 2.408$ кг/м³, $T_1 = 293$ К, начальное распределение давления газа изображено на рис. 2,а. При значении вертикальной координаты $y < 1$ объемное содержание дисперсной фазы $\alpha_i > 0$, выше прямой $y = 1$ объемное содержание $\alpha_i = 0$ – рис. 2,б.

При распаде поверхности, удерживающей область с избыточным давлением, формируется ударная волна и спутный поток газа, движущийся за ударной волной (рис. 3,а). На рис. 3,б изображено распределение модуля скорости несущей среды –

$$|V_1| = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \text{ вдоль линии } -r = \sqrt{(x-L)^2 + y^2}.$$

Ударная волна движется в положительном направлении оси x и в отрицательном направлении оси y (рис. 3,а). Скорости движения ударных волн в однородном газе, в монодисперсной газозвеси с объемным содержанием дисперсной фазы $\alpha_2 = 0.0004$ и дисперсностью частиц $d = 2$ мкм, в полидисперсной газозвеси и в монодисперсной газозвеси с объемным содержанием дисперсной фазы $\alpha_2 = 0.0012$ и дисперсностью частиц $d = 2$ мкм составляет соответственно $\theta = 1.146$ с; 1.09 с; 1.07 с; 1.04 с. Скорость спутного за ударной волной потока газа имеет наибольшее значение в однородном га-

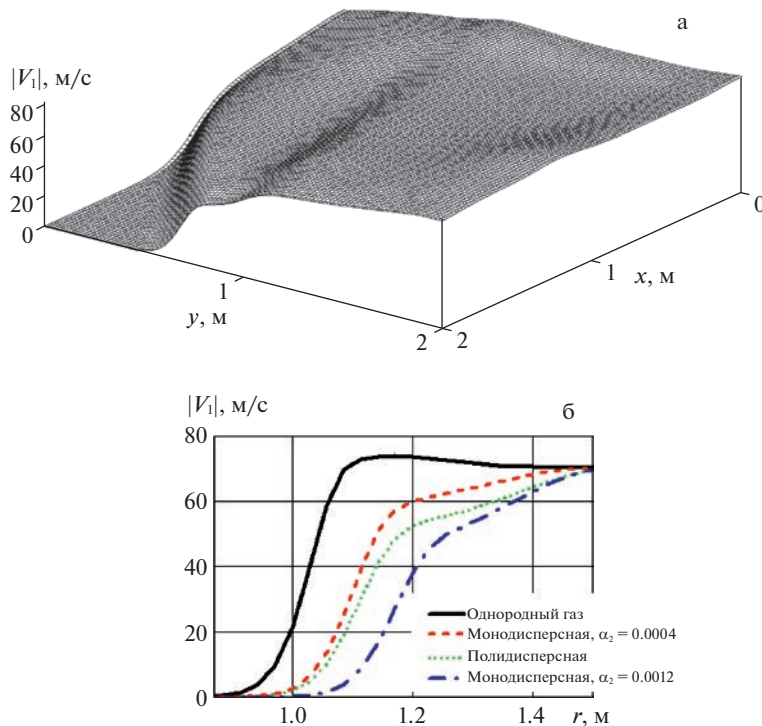


Рис. 3. Двухмерное распределение модуля скорости несущей фазы в монодисперсной газовой взвеси с дисперсностью частиц $d = 2$ мкм — а; пространственное распределение модуля скорости газа в однородном газе и в монодисперсной газовой взвеси с объемным содержанием дисперсной фазы $\alpha_2 = 0.0004$, полидисперсной газовой взвеси и монодисперсной газовой взвеси с объемным содержанием дисперсной компоненты $\alpha_2 = 0.0012$ — б, момент времени $t = 5$ мс.

зе. При движении спутного потока в трехфракционной газовой взвеси, в которой каждая фракция имеет объемное содержание $\alpha_i = 0.0004$, скорость спутного потока несущей среды меньше, чем во взвеси мелкодисперсных частиц с диаметром $d = 2$ мкм при объемном содержании дисперсной фазы $\alpha_2 = 0.0004$. Скорость спутного потока газа в монодисперсной газовой взвеси мелких частиц $d = 2$ мкм имеет меньшее значение в сравнении со скоростью спутного потока в трехфракционной газовой взвеси при одинаковой совокупной массе дисперсной фазы. В процессе движения ударной волны и спутного потока газа в полидисперсной газовой взвеси происходит концентрирование частиц дисперсной фазы по направлению движения ударной волны, что было выявлено для одномерного течения [4]. На рис. 4 можно наблюдать увеличение объемного содержания дисперсной фазы, вследствие переноса частиц с других участков области, через которые ударная волна уже прошла. В последующие моменты времени происходит снос частиц спутным потоком газа, после чего газ очищается от дисперсных включений. При этом для фракций, состоящих из частиц различных размеров, процессы концентрирования и удаления фракции дисперсной фазы потоком газа отличаются. Различия в процессе концентрирования дисперсных включений для частиц, чей диаметр составляет — $d = 2$ и 20 мкм незначительны. Увеличение размера частиц до $d = 20$ мкм увеличивает их инерционность в потоке, но на процессе концентрирования частиц

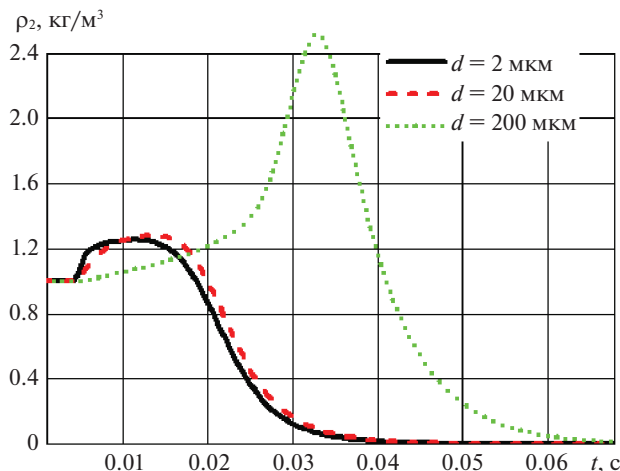


Рис. 4. Зависимость средней плотности от времени для фракций дисперсной фазы с различными размерами частиц в точке $x = 1$ м, $y = 0,1$ м.

это не оказывает существенного влияния. При увеличении размера частиц до $d = 200$ мкм инерционность дисперсных включений оказывает большее влияние на процесс концентрирования. При увеличении размера частиц происходит увеличение времени концентрирования фракции, а также увеличение максимального значения средней плотности фракции.

На рис. 5,а и б представлено продольное распределение средней плотности дисперсной фазы при движении ударной волны по монодисперсным газозвесям и по полидисперсной газозвеси для различных значений координаты y . На рис. 5,в и д представлены двумерные распределения средней плотности монодисперсной газозвеси при движении ударной волны по газозвеси с различными дисперсностями частиц, в момент времени $t = 5$ мс. Для двумерных распределений средней плотности можно наблюдать влияние размера частиц на процесс массопереноса дисперсной фазы при движении ударной волны по газозвеси. Более крупные частицы концентрируются вблизи левого края расчетной области — рис. 5,в и г; мелкодисперсные частицы сносятся к правому краю расчетной области — рис. 5,д. В верхней части области, занятой газозвесью $y = 0,45$ м — рис. 5,а ($d = 2$ и 20 мкм) мелкодисперсные частицы более существенно уносятся потоком газа. Наименьшее значение средней плотности мелкодисперсных частиц наблюдается вблизи левой границы области — ближайшей к поверхности разрыва давления. Для крупнодисперсных частиц — $d = 200$ мкм в левой части области наблюдается увеличение концентрации частиц. Различия в пространственных распределениях концентрации частиц разных размеров можно объяснить тем, что мелкодисперсные частицы больше сносятся потоком газа, в то время как для крупнодисперсных частиц процесс концентрирования более интенсивный. Для моно- и полидисперсных газозвесей закономерности аналогичны.

В нижней части расчетной области $y = 0,1$ м происходит концентрирование частиц дисперсной фазы всех размеров вблизи левой границы расчетной области, ближайшей к движущейся ударной волне — рис. 5,б. Зависимости средней плотности от времени в различных точках — рис. 6,а и б демонстрируют, что в верхней части области в процессе массопереноса мелкодисперсных частиц на временном интервале, близком к начальному, наблюдается незначительное увеличение средней плотности — до 5% от

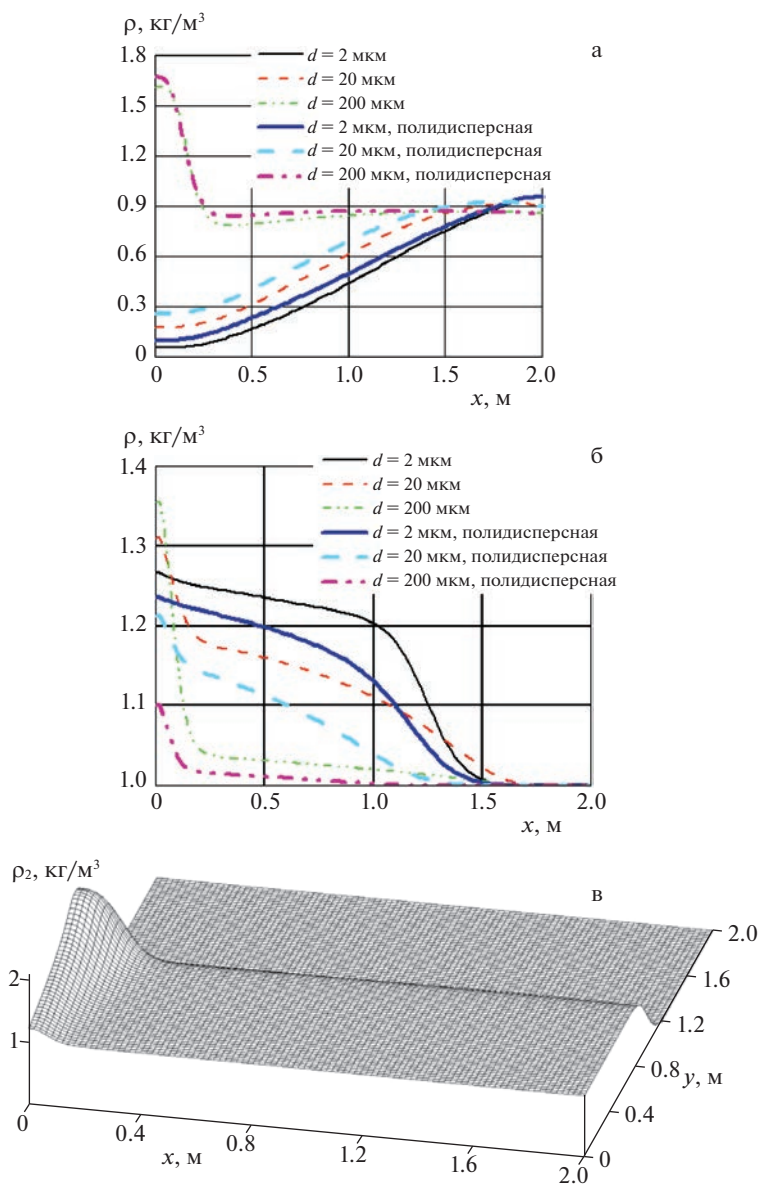


Рис. 5. Пространственное распределение вдоль оси x средней плотности для фракций полидисперсной газозвеси и для монодисперсной газозвеси с различными размерами частиц: а – $y = 0.45$ м; б – $y = 0.1$ м, двухмерные распределения средней плотности для монодисперсных газозвесей с различным размером частиц $d = 200$ мкм – в; $d = 20$ мкм – г; $d = 2$ мкм – д, момент времени $t = 5$ мс.

начальной средней плотности, тогда как массоперенос крупнодисперсной фракции – $d = 200$ мкм в верхней части области происходит без этапа увеличения концентрации. В точке $x = 0.1$ м, $y = 0.1$ м достигаемые максимальные значения средней плотности фракций полидисперсной газозвеси и одинаковых, по начальному объемному содер-

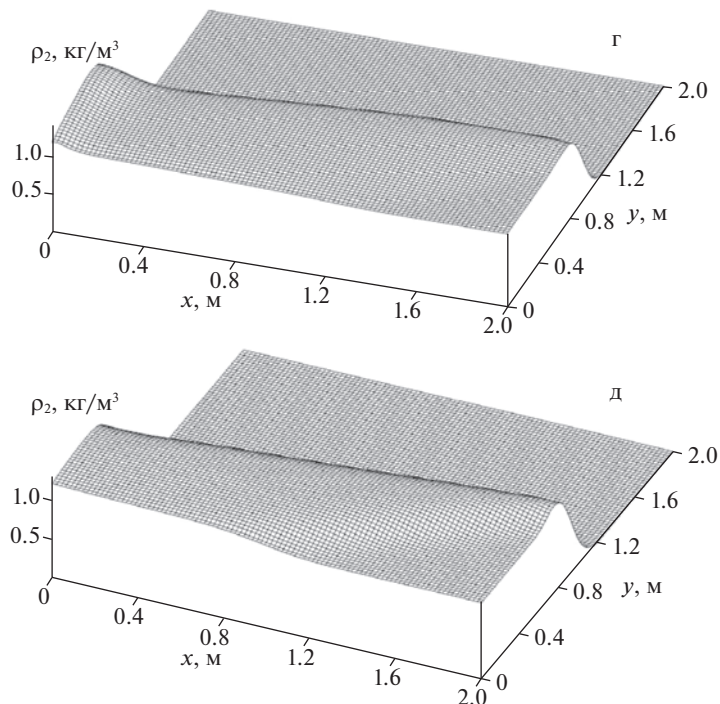


Рис. 5. Окончание

жанию дисперсной фазы, монодисперсных газовзвесей составляют соответственно $\rho_4 = 3.55 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2 = 3.44 \text{ кг/м}^3$ для частиц с диаметром $d = 200 \text{ мкм}$, $\rho_3 = 1.43 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2 = 1.4 \text{ кг/м}^3$ для частиц с диаметром $d = 20 \text{ мкм}$, $\rho_2 = 1.26$ и 1.24 кг/м^3 для частиц с диаметром $d = 2 \text{ мкм}$. Таким образом, в сравнении с монодисперсной газовзвесью в полидисперсной газовзвеси для частиц с размером $d = 2, 20$ и 200 мкм максимальная концентрация частиц увеличивается соответственно в 1.016, 1.021 и 1.032 для частиц того же размера. Для частиц с дисперсностью $d = 200 \text{ мкм}$ время начала убывания средней плотности в моно- и полидисперсной газовзвеси составляет $t_c = 19$ и 24 мс соответственно. В верхней ($y = 0.45 \text{ м}$, $x = 1 \text{ м}$) и нижней ($y = 0.1 \text{ м}$, $x = 0.1 \text{ м}$) частях моделируемой области время удаления мелкодисперсных частиц составляет соответственно $t \approx 10$ и 30 мс , время удаления крупнодисперсных частиц в аналогичных точках $t \approx 30$ и 60 мс . Численное моделирование демонстрирует, что для крупнодисперсных частиц влияние многофракционности дисперсной фазы газовзвеси на процесс концентрирования и удаления потоком газа частиц более существенно, чем для мелкодисперсных частиц.

Зависимость модуля скорости газа от времени демонстрирует рис. 7, что наиболее интенсивно кинетическая энергия несущей среды поглощается в полидисперсной газовзвеси, имеющей существенно большую массу дисперсной компоненты. При равной массе дисперсной компоненты скорость несущей среды меньше для мелкодисперсных частиц, так как при уменьшении размера частиц увеличивается площадь межфазного взаимодействия, а значит увеличивается интенсивность обмена импульсом между газовой и дисперсной фазами.

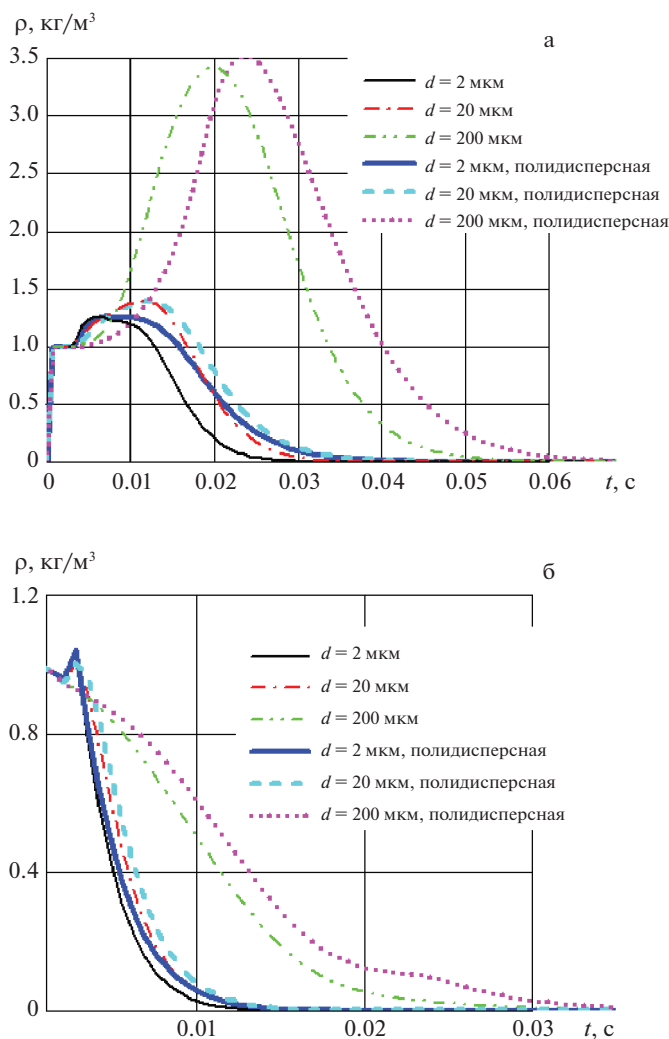


Рис. 6. Зависимость средней плотности от времени для монодисперсных газозвесей и для фракций полидисперсной газозвеси точках $x = 0.1$ м, $y = 0.1$ м – а; точках $x = 1$ м, $y = 0.45$ м – б.

Выводы. В работе численно моделируется распространение ударной волны по газозвесям моно- и полидисперсного состава, математическая модель учитывала взаимодействие между несущей средой и дисперсной компонентой, имеющей многофракционный состав, в котором фракции отличаются размером частиц. Процессы массопереноса дисперсных включений в ударной волне определяются размерами дисперсных включений. Для частиц большего размера процесс концентрирования более длительный, средняя плотность частиц достигает больших значений. Мелкодисперсные частицы удаляются спутным потоком газа, одновременно с этим продолжается процесс увеличения средней плотности крупнодисперсных частиц, процесс удаления из газа крупнодисперсных частиц является более длительным. Выявлено, что в полидисперсной газозвеси концентрирование фракций частиц отличается от аналогичного про-

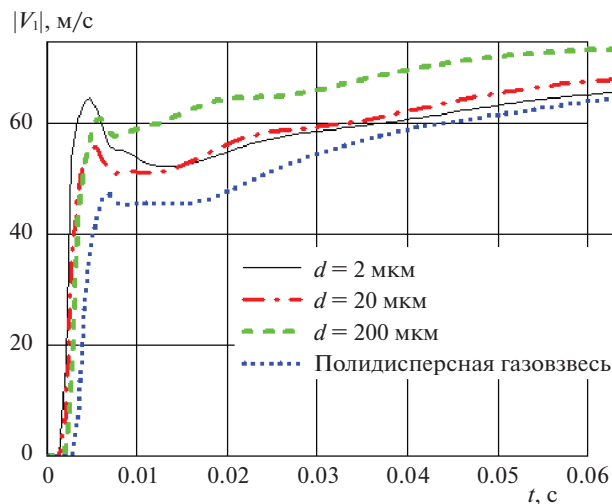


Рис. 7. Зависимость модуля скорости несущей фазы от времени для монодисперсных газовзвесей с различным размером частиц и в полидисперсной газовзвеси в точке $x = 0.1$ м, $y = 0.1$ м.

песса в монодисперсных газовзвесах, в которых объемное содержание всей дисперсной фазы равно объемному содержанию соответствующей фракции монодисперсной газовзвеси. В случае наличия нескольких фракций дисперсной фазы, процесс концентрирования более длительный, а величина наибольшего значения средней плотности имеет большее значение. Для фракций частиц большего размера влияние полидисперсности газовзвеси более существенно. Выявленные закономерности можно объяснить тем, что в полидисперсной газовзвеси процесс концентрирования каждой фракции определяется течением несущей среды, на которое оказывает влияние совокупное межфазное взаимодействие всех фракций.

Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Стернин Л.Е. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 176 с.
3. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред. М.: Энергоиздат, 1981. 472 с.
4. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003. 284 с.
5. Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газовзвесах частиц металлов. Новосибирск.: Параллель, 2015. 301 с.
6. Вараксин А.Ю., Протасов М.В. О влиянии вдува газа на защиту поверхностей тел, обтекаемых двухфазным потоком // ТВТ. 2017. № 6. С. 785–788.
7. Пахомов М.А., Терехов В.И. Влияние испарения капель на структуру течения и теплообмен в ограниченном закрученном газокapельном потоке за его внезапным расширением // Теплофиз. и аэромех. 2018. № 6. С. 865–875.
8. Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Волны уплотнения с частичной и полной дисперсией в газокapельной среде с фазовыми переходами // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 3. С. 44–55.

9. Садин Д.В. Численное и аналитическое исследование разлета газовзвеси в закрытой ударной трубе // Научно-технич. ведомости С.-Петербургского гос. политех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. № 4. С. 40–49.
10. Yeom G.S., Chang K.S. Shock wave diffraction about a wedge in a gas-microdroplet mixture // Int. J. Heat&Mass Trans. 2010. V. 53. P. 5073–5088.
11. Saurel R., Boivin P., Le Metayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows // Computers&Fluids. 2016. V. 128. P. 53–64.
12. Kapila A.K., Schwendeman D.W., Gambino J.R., Henshaw W.D. A numerical study of the dynamics of detonation initiated by cavity collapse // Shock Waves. 2015. V. 25. P. 545–572.
13. Watanabe H., Matsuo A., Chinnayya A. et al. Numerical analysis of the mean structure of gaseous detonation with dilute water spray // J. Fluid Mech. 2020. V. 887.
14. LinYoo Y., Hong-Gye S. Numerical investigation of an interaction between shock waves and bubble in a compressible multiphase flow using a diffuse interface method // Int. J. Heat&Mass Trans. 2018. V. 127. P. 210–221.
15. Назаров Д.А., Сеницын Д.С., Мосунова Н.А., Сорокин А.А. Моделирование поведения аэрозолей продуктов деления в защитной оболочке // Теплоэнергетика. 2022. № 9. С. 57–65.
16. Давыдова М.А., Чхетиани О.Г., Левашова Н.Т., Нечаева А.Л. Об оценке вклада вторичных вихревых структур в перенос аэрозолей в атмосферном пограничном слое // ПММ. 2022. Т. 86. № 5. С. 765–778.
17. Пискунов В.Н. Аналитические и численные результаты по кинетике процессов коагуляции и распада частиц // ПММ. 2012. Т. 76. № 6. С. 954–980.
18. Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // ПММ. 2019. Т. 83. № 3. С. 468–477.
19. Лантев А.Г., Лантева Е.А. Численная модель тепломассообмена и сепарации дисперсной фазы в высокоскоростных дисперсно-кольцевых потоках газа и жидкости // ЖТФ. 2022. Т. 92. № 9. С. 1319–1326.
20. Лантев А.Г., Лантева Е.А. Определение эффективности насадочных газосепараторов капельных аэрозолей с учетом неравномерности профиля скорости газа // Теоретич. основы химич. технол. 2021. Т. 55. № 2. С. 235–241.
21. Замалиева А.Т., Беляева Г.И. Изменение аэродинамических свойств и эффективности в циклонных аппаратах посредством численных и натурных исследований // Вестн. Технологич. ун-та. 2015. Т. 18. № 4. С. 134–137.
22. Азаров В.Н., Кошкарёв С.А. К модели улавливания пыли в сепарационных устройствах с фильтрующе-взвешенным слоем в стройиндустрии // Изв. вузов. Строительство. 2015. № 2. С. 73–79.
23. Федоров А.В., Бедарев И.А. Структура ударных волн в газовзвеси с хаотическим давлением частиц // Матем. моделир. 2017. Т. 29. № 6. С. 3–20.
24. Бедарев И.А., Федоров А.В., Шульгин А.В. Расчет бегущей волны в гетерогенной среде с двумя давлениями при уравнении состояния газа, зависящем от концентраций фаз // ЖВММФ. 2018. Т. 58. № 5. С. 806–820.
25. Ингель Л.Х. Нелинейное взаимодействие двух составляющих движения при осаждении тяжелой частицы в сдвиговом течении // ЖТФ. 2012. Т. 82. № 11. С. 122–125.
26. Gubaidullin D.A., Panin K.A., Fedorov Y.V. Acoustics of a liquid with droplets covered by a shell in the presence of phase transitions // Fluid Dyn. 2022. V. 57. № 4. P. 459–468.
27. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. Ударно-волновой разлет газовзвесей // Докл. РАН. 2016. Т. 466. № 4. С. 418–421.
28. Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Динамика заряженной газовзвеси с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию // ТВТ. 2017. Т. 55. № 4. С. 509–512.
29. Тукмаков Д.А., Тукмакова Н.А. Влияние распределения дисперсной фазы на параметры ударной волны в газовзвеси // Инжен.-физ. ж. 2018. № 1. С. 221–224.
30. Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния свойств газовой составляющей взвеси твердых частиц на разлет сжатого объема газовзвеси в двухкомпонентной среде // Инжен.-физ. ж. 2020. Т. 93. № 2. С. 304–310.

31. Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газовзвеси // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Матем. Мех. Информ. 2022. Т. 22. № 1. С. 90–102.
32. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей В 2-х тт., Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
33. Тукмаков А.Л. Возникновение синфазных колебаний тонких пластин при аэроупругом взаимодействии // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 1 (257). С. 77–82.
34. Музафаров И.Ф., Утюжников С.В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Матем. моделир. 1993. № 3. С. 74–83.

Numerical Investigation of the Mass Transfer of Dispersed Particles during the Passage of a Shockwave in a Mono and Polydisperse Gas Suspension

D. A. Gubaidullin^{a,#} and D. A. Tukmakov^{a,#}

^a*Federal Res. Center Kazan Sci. Center of the RAS, Kazan, Russia*

[#]*e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru*

^{##}*e-mail: gubaidullin@imm.knc.ru*

The paper numerically simulates the propagation of a shock wave through a gas suspension. The carrier medium was described as a viscous, compressible, heat-conducting gas. The mathematical model implemented a continuum method for the dynamics of multiphase media, taking into account the interaction of the carrier medium and the dispersed phase. The mass transfer of disperse inclusions suspended in the gas, caused by the interaction of the shock wave with monodisperse gas suspensions and with gas suspensions having a multifractional composition, was modeled. Differences in the mass transfer of particles depending on the particle size are revealed. It was also found that the process of mass transfer of dispersed inclusions in a monodisperse gas suspension differs from a similar process for a fraction of a polydisperse gas suspension having the same particle size and the same volume content.

Keywords: continuum model, polydisperse gas suspension, interfacial interaction, mass transfer

REFERENCES

1. Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media. N.Y.: CRC Press, 1990. 532 p.
2. Sternin L.E. Two-Phase Mono- and Polydisperse Flows of Gas with Particles. Moscow: Mashinostroyeniye, 1980. 176 p. (in Russian)
3. Deutsch M.E., Filippov G.A. Gas Dynamics of Two-Phase Media. Moscow: Energoizdat, 1981. 472p. (in Russian)
4. Kutushev A.G. Mathematical Modeling of Wave Processes in Aerodisperse and Powder Media. St. Petersburg: Nedra, 2003. 284 p. (in Russian)
5. Fedorov A.V., Fomin V.M., Khmel T.A. Wave Processes in Gas Suspensions of Metal Particles. Novosibirsk: Parallel, 2015. 301 p. (in Russian)
6. Varaksin A.Y., Protasov M.V. The effect of gas injection on the protection of body surfaces streamlined by a two-phase flow // High Temp., 2017, vol. 55, no. 6, pp. 945–948.
7. Pakhomov M.A., Terekhov V.I. Effect of droplet evaporation on the flow structure and heat and mass transfer in a confined swirling gas-droplet flow downstream of a tube sudden expansion // Thermoph. & Aeromech., 2018, vol. 25, no. 6, pp. 833–843.
8. Golubkina I.V., Osipov A.N. Partly and fully dispersed compression waves in a gas-droplet mixture with phase transitions // Fluid Dyn., 2022, vol. 57, no. 3, pp. 261–272.
9. Sadin D.V. Numerical and analytical study of the expansion of a gas suspension in a closed shock tube // Nauchno-tekhnich. Ved. St.-Peterburg. Gos. Politekh. Univ. Fiz.-mat. Nauki, 2021, no. 4, pp. 40–49. (in Russian)
10. Yeom G.S., Chang K.S. Shock wave diffraction about a wedge in a gas-microdroplet mixture // Int. J. Heat & Mass Trans., 2010, vol. 53, pp. 5073–5088.
11. Saurel R., Boivin P., Le Metayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows // Comput. & Fluids, 2016, vol. 128, pp. 53–64.

12. *Kapila A.K., Schwendeman D.W., Gambino J.R., Henshaw W.D.* A numerical study of the dynamics of detonation initiated by cavity collapse // *Shock Waves*, 2015, vol. 25, pp. 545–572.
13. *Watanabe H., Matsuo A., Chinnayya A. et al.* Numerical analysis of the mean structure of gaseous detonation with dilute water spray // *J. Fluid Mech.*, 2020, vol. 887.
14. *LinYoo Y., Hong-Gye S.* Numerical investigation of an interaction between shock waves and bubble in a compressible multiphase flow using a diffuse interface method // *Int. J. Heat&Mass Trans.*, vol. 127, 2018, pp. 210–221.
15. *Nazarov D.A., Sinitsyn D.S., Mosunova N.A., Sorokin A.A.* Modeling the behavior of fission product aerosols in a containment shell // *Teploenerg.*, 2022, no. 9, pp. 57–65. (in Russian)
16. *Davydova M.A., Chkhetiani O.G., Levashova N.T., Nechaeva A.L.* On the assessment of the contribution of secondary vortex structures to the transfer of aerosols in the atmospheric boundary layer // *PMM*, 2022, vol. 86, no. 5, pp. 765–778. (in Russian)
17. *Piskunov V.N.* Analytical and numerical results in the kinetics of particle coagulation and fragmentation processes // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 688–705.
18. *Bolotnova R.K., Gainullina E.F.* Influence of heat transfer on decreasing intensity of a spherical explosion in aqueous foam // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 970–977.
19. *Laptev A.G., Lapteva E.A.* Numerical model of heat and mass transfer and separation of the dispersed phase in high-speed dispersed-annular flows of gas and liquid // *zh. Tekhnich. Fiz.*, 2022, vol. 92, no. 9, pp. 1319–1326.
20. *Laptev A.G., Lapteva E.A.* Determining the efficiency of packed gas separators of droplets taking into account the nonuniformity of the gas velocity profile // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 2021, vol. 55, no. 2, pp. 301–306.
21. *Zamalieva A.T., Belyaeva G.I.* Change of aerodynamic properties and efficiency in cyclone apparatuses by means of numerical and field studies // *Vestn. Tekhnol. Univ.*, 2015, vol. 18, no. 4, pp. 134–137. (in Russian)
22. *Azarov V.N., Koshkarev S.A.* On the model of dust trapping in separation devices with a filter-weighted layer in the construction industry // *Izv. vзов. Stroit.*, 2015, no. 2, pp. 73–79. (in Russian)
23. *Fedorov A.V., Bedarev I.A.* The shock-wave structure in a gas–particle mixture with chaotic pressure // *Math. Models&Comput. Simul.*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 1–14.
24. *Bedarev I.A., Fedorov A.V., Shul'gin A.V.* Computation of traveling waves in a heterogeneous medium with two pressures and a gas equation of state depending on phase concentrations // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 5, pp. 775–789.
25. *Ingel L.K.* Nonlinear interaction of two components of motion during the deposition of a heavy particle in a shear flow // *zh. Tekhnich. Fiz.*, 2012, vol. 82, no. 11, pp. 122–125.
26. *Gubaidullin D.A., Panin K.A., Fedorov Y.V.* Acoustics of a liquid with droplets covered by a shell in the presence of phase transitions // *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 4, pp. 459–468.
27. *Nigmatulin R.I., Gubaidullin D.A., Tukmakov D.A.* Shock wave dispersion of gas-particle mixtures // *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 2, pp. 70–73.
28. *Tukmakov A.L., Tukmakov D.A.* Dynamics of a charged gas suspension with an initial spatially non-uniform distribution of the average dispersed phase density during the transition to the equilibrium state // *High Temp.*, 2017, vol. 55, no. 4, pp. 491–495.
29. *Tukmakov D.A., Tukmakova N.A.* Effect of dispersed phase distribution on the shock wave parameters in a gas suspension // *J. Engng. Phys.&Thermophys.*, 2018, vol. 91, no. 1, pp. 207–211.
30. *Tukmakov D.A.* Numerical investigation of the influence of properties of the gas component of a suspension of solid particles on the spreading of a compressed gas-suspension volume in a binary medium // *J. Engng. Phys.&Thermoph.*, 2020, vol. 93, no. 2, pp. 291–297.
31. *Tukmakov A.L., Tukmakov D.A.* Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged polydisperse gas suspension // *Izv. Sarat. Univ. Ser.: Matem. Mekh. Inform.*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 90–102. (in Russian)
32. *Fletcher C. A.* *Computation Techniques for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 1988. 502 p.
33. *Tukmakov A.L.* Origination of in-phase oscillations of thin plates with aeroelastic interaction // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2003, vol. 44, no. 1, pp. 64.
34. *Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V.* Application of compact difference schemes to the study of unsteady compressible gas flows // *Matem. Modelir.*, 1993, no. 3, pp. 74–83. (in Russian)

УДК 536.423

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНЫ ТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕТОНАЦИИ В СМЕСИ КАПЕЛЬ ВОДЫ С РАСПЛАВЛЕННЫМ СВИНЦОМ

© 2023 г. В. И. Мелихов^{1,*}, О. И. Мелихов^{1,**}, Салех Башар^{1,***}

¹НИУ “МЭИ”, Москва, Россия

*e-mail: MelikhovVI@mpei.ru

**e-mail: MelikhovOI@mpei.ru

***e-mail: basharsaleh10@gmail.com

Поступила в редакцию 25.03.2023 г.

После доработки 12.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Исследованы закономерности волны термического взаимодействия капель воды, находящихся в высокотемпературном расплаве свинца, или волны термической детонации. Вследствие вскипания воды на поверхности свинца обе жидкости (фазы) разделены паровой пленкой. Используется одномерная модель взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов, которая описывает динамику каждой жидкости введением специального поля, характеризующегося своими скоростью, температурой и объемной долей. Скорость волны определяется равенством скоростей и температур фаз в плоскости Чепмена–Жуге. Параметры на скачке давления вычисляются из условий на разрыве и являются граничными условиями для интегрирования уравнений сохранения в зоне взаимодействия капель воды с расплавом. Получающаяся структура волны термической детонации характеризуется тем, что максимальное давление находится на некотором удалении от ударной волны.

Ключевые слова: многофазная среда, термическая детонация, многожидкостная модель, термическое взаимодействие, фрагментация капель, межфазное трение

DOI: 10.31857/S0032823523030098, EDN: ZTPPDG

1. Введение. Исследования распространения детонационных волн в горючих газовых смесях проводились в течение длительного времени, что позволило установить основные закономерности этого явления [1, 2]: нагрев холодного слоя газа из-за сжатия на ударной волне воспламеняет эту порцию газа, а выделяющаяся при горении энергия поддерживает распространение волны. Таким образом, детонационная волна представляет собой лидирующую ударную волну, вслед за которой движется слой горящего газа. Течения газа в такой волне могут быть неустойчивыми, исследование этого вопроса выполнено в работе [3].

В случае двухфазных горючих систем, когда горючее представляет собой твердые частицы или капли, а окислителем является газ, эффекты, возникающие из-за относительного движения фаз, усложняют картину детонационной волны, что приводит, например, к различным формам распределений давления в детонационной волне горючих аэрозвесей, что было обнаружено в работах [4–6], результаты которых достаточно подробно изложены в монографии [7].

В работе [8] был предложен детонационный механизм взаимодействия смеси капель высокотемпературного расплава с водой, объясняющий природу крупномасштабных паровых взрывов [9, 10]. В отличие от детонации горючих смесей в данном

случае распространение волны осуществляется за счет передачи тепла от расплава к воде и ее последующего вскипания и расширения пароводяной смеси. Лидирующая ударная волна вызывает дробление капель расплава на мелкие фрагменты. Это приводит к резкому увеличению площади поверхности теплопередачи от расплава к воде и соответствующему увеличению теплового потока в воду. Таким образом, процесс дробления капель расплава и передачи его тепловой энергии в воду аналогичен экзотермическим химическим реакциям в горючих смесях. Основные результаты исследований детонации данного типа (термической детонации) опубликованы в статьях [11–13].

Новый вид термической детонации расплава с водой был обнаружен во время работ над созданием энергетических реакторов со свинцовым теплоносителем [14]. Их конструкция предусматривает так называемые проектные аварии, одной из которых является разрыв теплообменной трубки парогенератора, когда струя воды высокого давления из разрыва истекает в объем, занимаемый расплавленным свинцом, находящимся под низким давлением. В этом случае в области, окружающей разрыв, может образоваться дисперсная смесь капель с расплавленным свинцом. В такой системе лидирующая ударная волна будет дробить капли воды, увеличивая площадь поверхности теплопередачи от расплава к воде и подпитывая тепловой энергией расплава распространение волны термической детонации. Такая физическая система была исследована [15] методом адиабаты Гюгоньо, что позволило определить скорость волны и параметры многофазной смеси в плоскости Чепмена–Жуге.

Настоящая работа является продолжением исследования [15]. На основе одномерных стационарных уравнений динамики многофазных систем [7] построена модель волны термической детонации в системе “капли воды–водяной пар–жидкий свинец”, которая позволила рассчитать структуру волны термической детонации и получить ее основные характеристики.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать бесконечное пространство, однородно заполненное многофазной смесью, по которой распространяется стационарная плоская волна термической детонации. Выберем систему координат, связанную с распространяющейся волной. Пусть декартова ось x перпендикулярна плоскости волны и направлена в сторону движения продуктов детонации. Плоскость $x = 0$ совпадает с плоскостью лидирующей ударной волны. Исходная многофазная смесь поступает со скоростью распространения волны детонации на плоскость ударной волны из области $x < 0$. На самой плоскости $x = 0$ происходит скачок давления и некоторых других параметров смеси, после чего начинается фрагментация капель воды и взаимодействие отдельных составляющих (фаз) смеси друг с другом, в результате чего смесь продуктов детонации асимптотически достигает скоростного и термического равновесия.

Значения равновесных параметров смеси продуктов детонации лежат на адиабате Гюгоньо и определяют скорость распространения волны термической детонации [9]. Значения параметров на лидирующей ударной волне вычисляются из балансовых соотношений на разрыве, дополненных рядом модельных допущений. Структура волны в зоне фрагментации определяется численным решением стационарных одномерных уравнений динамики многофазных систем.

Будем полагать, что исходная многофазная система состоит из трех фаз. Первая (несущая) фаза представляет собой сплошной расплавленный свинец, который будем идентифицировать индексом m (melt). Вторую (дисперсную) фазу составляют исходные (крупные) капли воды, окруженные паровой пленкой. Паровая пленка возникает вследствие вскипания воды на поверхностях водяных капель, граничащих с высокотемпературным свинцом. d (droplet) – индекс второй фазы. Третьей (тоже дисперсная) фазой являются мелкие капельки (фрагменты) воды, образующиеся при дроблении исходных капель. Эти капельки тоже окружены паровыми пленками, отделяющими их от высокотемпературного расплава. Индекс третьей фазы – f (fragment). Предполагается, что вода и пар, из которых состоят частицы второй и третьей фазы,

находятся в состоянии теплового и скоростного равновесия. Каждая фаза характеризуется распределением в пространстве своей объемной доли α , и каждая фаза описывается своей плотностью, скоростью и температурой. Давления всех фаз одинаковы.

Система уравнений, определяющих волну термической детонации, включает уравнения неразрывности, импульса и энергии для каждой фазы.

Уравнения неразрывности фаз:

$$\frac{d}{dx}(\alpha_m \rho_m V_m) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_d \rho_d V_d) = -\Gamma_f \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_f \rho_f V_f) = \Gamma_f, \quad (2.3)$$

здесь используются следующие обозначения: ρ и V – плотность и скорость фазы, соответственно. Величина Γ_f выражает массовую скорость фрагментации исходных капель воды.

Уравнения импульсов фаз:

$$\frac{d}{dx}(\alpha_m \rho_m V_m^2) = -\alpha_m \frac{dP}{dx} + K_{dm}(V_d - V_m) + K_{fm}(V_f - V_m) \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_d \rho_d V_d^2) = -\alpha_d \frac{dP}{dx} + K_{dm}(V_m - V_d) - \Gamma_f V_d \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_f \rho_f V_f^2) = -\alpha_f \frac{dP}{dx} + K_{fm}(V_m - V_f) + \Gamma_f V_d, \quad (2.6)$$

здесь p обозначает давление. Величины K_{dm} и K_{fm} описывают межфазное трение дисперсных фаз с несущей фазой.

Уравнения энергий фаз:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\alpha_m \rho_m V_m h_{sm}) = & R_{dm}(T_d - T_m) + R_{fm}(T_f - T_m) + \\ & + V_m K_{dm}(V_d - V_m) + V_m K_{fm}(V_f - V_m) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_d \rho_d V_d h_{sd}) = R_{dm}(T_m - T_d) + V_d K_{dm}(V_m - V_d) + K_{dm}(V_m - V_d)^2 - \Gamma_f h_{sd} \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_f \rho_f V_f h_{sf}) = R_{fm}(T_m - T_f) + V_f K_{fm}(V_m - V_f) + K_{fm}(V_m - V_f)^2 + \Gamma_f h_{sd} \quad (2.9)$$

Здесь h_s и T – энтальпия торможения и температура фаз. Величины R_{dm} и R_{fm} описывают межфазный теплообмен дисперсных фаз с несущей фазой.

Все три фазы в совокупности полностью занимают произвольный локальный объем рассматриваемой области, поэтому имеет место следующее уравнение:

$$\alpha_m + \alpha_d + \alpha_f = 1 \quad (2.10)$$

Энтальпия торможения определяется следующим образом:

$$h_s = e + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = 1, \quad (2.11)$$

где e – внутренняя энергия.

Плотность и внутренняя энергия жидкого свинца являются функциями его температуры, которые определялись по данным [16]. Плотности d – фазы и f – фазы определяются объемными долями пара в каждой фазе и давлением:

$$\rho_d = (1 - \varphi_d)\rho'(P) + \varphi_d\rho''(P) \quad (2.12)$$

$$\rho_f = (1 - \varphi_f)\rho'(P) + \varphi_f\rho''(P), \quad (2.13)$$

где φ_d и φ_f — объемные доли пара в d -фазе и f -фазе соответственно, $\rho(P)$ и $\rho'(P)$ — плотности воды и пара на линии насыщения при давлении, которые вычисляются по [17].

Внутренние энергии d -фазы и f -фазы определяются массовыми долями пара в каждой фазе и давлением:

$$e_d = (1 - \chi_d)e'(P) + \chi_de''(P) \quad (2.14)$$

$$e_f = (1 - \chi_f)e'(P) + \chi_fe''(P), \quad (2.15)$$

где χ_d и χ_f — массовые доли пара в d -фазе и f -фазе соответственно, $e'(P)$ и $e''(P)$ — внутренние энергии воды и пара на линии насыщения при давлении P , вычисляемые по [17].

Если в результате фазовых переходов d -фаза и/или f -фаза станут чисто однофазными (пар или вода), то уравнения (2.12)–(2.15) заменяются зависимостями от давления и температуры каждой фазы, которые вычисляются по [17].

3. Описание межфазного взаимодействия. Рассмотрим силу трения между крупными каплями воды (d -фаза) и несущей фазой жидкого свинца. Прежде всего, следует принять во внимание, что в несущей фазе еще присутствуют мелкие фрагменты воды (f -фаза), которые изменяют плотность среды, окружающей крупную каплю воды, в результате чего эффективная плотность этой среды ρ_{ef} становится равной

$$\rho_{ef} = \frac{\alpha_m\rho_m + \alpha_f\rho_f}{\alpha_m + \alpha_f} \quad (3.1)$$

С учетом (3.1) сила трения между крупными каплями воды и несущей фазой записывается в виде [7]:

$$F_d = \frac{1}{2}C_{D,dm}\rho_{ef}\pi\frac{L_d^2}{4}|V_m - V_d|(V_m - V_d) \quad (3.2)$$

Здесь $C_{D,dm}$ — коэффициент сопротивления капли, L_d — ее диаметр.

Известно [3], что при фрагментации капли происходит ее сильная деформация, она принимает форму диска, расположенного перпендикулярно набегающему потоку. Это приводит к увеличению коэффициента сопротивления по сравнению с типичной величиной 0.4 для турбулентного обтекания сферы до величины $C_{D,dm} = 2.5$ [18], которое и используется в настоящей работе.

Если концентрация крупных капель равна n_d , то сила трения между этими каплями и несущей средой равна $F_{d,\Sigma} = n_d F_d$. Поскольку объемная доля d -фазы связана с концентрацией капель соотношением

$$\alpha_d = \pi\frac{L_d^3}{6}n_d, \quad (3.3)$$

то силу трения $F_{d,\Sigma}$ можно записать следующим образом:

$$F_{d,\Sigma} = \frac{6\alpha_d}{\pi L_d^3} F_d \quad (3.4)$$

Подставляя (3.2) в (3.4), получим:

$$F_{d,\Sigma} = \frac{3\alpha_d}{4L_d} C_{D,dm}\rho_{ef}|V_m - V_d|(V_m - V_d) \quad (3.5)$$

Сила $F_{d,\Sigma}$ в уравнении импульса d -фазы была обозначена членом $K_{dm}(V_m - V_d)$. Тогда с учетом (3.5) величина K_{dm} имеет вид:

$$K_{dm} = \frac{3C_{D,dm}}{4L_d} \rho_{ef} \alpha_d |V_m - V_d| \quad (3.6)$$

Аналогичным образом определяется величина K_{fm} , описывающая силу трения между f -фазой и несущей средой

$$K_{fm} = \frac{3C_{D,fm}}{4L_f} \rho_m \alpha_f |V_m - V_f|, \quad (3.7)$$

где L_f — диаметр образующегося фрагмента воды, $C_{D,fm}$ — коэффициент сопротивления фрагмента. Поскольку образующиеся фрагменты воды имеют маленький размер и далее не дробятся, то для их коэффициента сопротивления принята стандартная величина $C_{D,fm} = 0.4$ [7].

Теплообмен между расплавленным свинцом и водой описывается величинами R_{dm} и R_{fm} , входящими в уравнения энергий фаз (2.7)–(2.9). Действуя таким же образом, как с величинами K_{dm} и K_{fm} в случае описания межфазного трения, можно получить связь величин R_{dm} и R_{fm} с коэффициентами теплоотдачи дисперсных фаз:

$$R_{dm} = 6\alpha_d \frac{h_{dm}}{L_d} \quad (3.8)$$

$$R_{fm} = 6\alpha_f \frac{h_{fm}}{L_f}, \quad (3.9)$$

где R_{dm} и R_{fm} — коэффициенты теплоотдачи от капель d -фазы и от капель f -фазы соответственно.

Теплообмен между расплавом и водой представляет собой очень сложное и не до конца изученное явление [9, 10]. При высоких температурах расплава, что, как правило, всегда имеет место в приложениях, на границе раздела расплава и воды образуется паровая пленка вследствие вскипания воды. Теплопередача от расплава к воде осуществляется через эту паровую пленку двумя механизмами: излучением и конвекцией пара в пленке [19]. Проведенные исследования позволяют оценить коэффициент теплоотдачи в этих условиях в диапазоне 100–1000 Вт/(м²·К) [20–22]. Следует отметить, что нами рассматриваются процессы непосредственно в зоне фрагментации сразу же за ударной волной. Как правило, на ударной волне, когда давление резко возрастает относительно уровня в исходной многофазной смеси, равновесное двухфазное пароводяное образование (капля воды, окруженная паровой пленкой) трансформируется в каплю воды, температура которой меньше температуры кипения, соответствующей температуре кипения при давлении на ударной волне. В этих условиях паровая пленка будет коллапсировать. Но поскольку прямой контакт воды с высокотемпературным расплавом невозможен, то водяную каплю будет окружать очень тонкий слой пара, что означает интенсификацию теплообмена между расплавом и водой. Поэтому далее в расчетах было использовано верхнее значение диапазона коэффициента теплоотдачи, $h_{dm} = h_{fm} = 1000$ Вт/(м²·К).

Оказавшаяся сразу за ударной волной крупная капля воды будет тормозиться относительно окружающего ее расплавленного свинца, поскольку плотность воды на порядок меньше плотности свинца. Жидкий свинец, как более тяжелая жидкость будет меньше тормозиться на фронте ударной волны по сравнению с водяными каплями. Возникающая разность скоростей между каплей и окружающей несущей фазой будет

приводить к возникновению возмущений на поверхности капли и срыву отдельных фрагментов воды. Для типичных параметров исследуемой системы фрагментация капли будет осуществляться по механизму обдирки поверхностного слоя [7], когда с поверхности капли срываются капельки размером, который существенно меньше размера “материнской” капли. Для описания фрагментации капли используется модель, предложенная в [23], согласно которой скорость уноса массы воды с поверхности отдельной капли определяется следующей формулой:

$$\frac{d_m}{dt} = c_{\text{frag}} |V_d - V_m| \pi L_d^2 \sqrt{\rho_d \rho_{\text{ef}}}, \quad (3.10)$$

где c_{frag} — эмпирическая константа.

Умножая (3.10) на концентрацию капель воды n_d , получим выражение для массовой скорости фрагментации капель воды в единице объема:

$$\Gamma_f = n_d \frac{d_m}{dt} = \frac{\alpha_d |V_d - V_m| \sqrt{\rho_d \rho_{\text{ef}}}}{L_d} \quad (3.11)$$

При выводе (3.11) было использовано значение $c_{\text{frag}} = 1/6$.

В ходе дробления исходной крупной капли воды ее размер L_d уменьшается. Когда он достигнет значения размера фрагментов ($L_d = L_f$), то полагается, что капля больше не дробится, а переходит в f -фазу.

Распределение концентрации дробящихся капель воды вплоть до момента достижения размера фрагментов описывается уравнением [24]:

$$\frac{d(n_d V_d)}{dx} = 0 \quad (3.12)$$

Комбинируя уравнение (3.12) с уравнением неразрывности d -фазы (2.2), можно получить уравнение, описывающее изменение размера дробящихся капель воды в зоне фрагментации:

$$\alpha_d \frac{d(\rho_d L_d^3)}{dx} = -\Gamma_f L_d^3 \quad (3.13)$$

Полагалось, что фрагментация имеет место, когда число Вебера капли воды превосходит критическое значение:

$$\text{We} = \frac{\rho_{\text{ef}} |V_d - V_m|^2 L_d}{\sigma} > \text{We}_{\text{cr}} = 12, \quad (3.14)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

4. Построение адиабаты Гюгонио. Как уже отмечалось выше, для решения уравнений, описывающих структуру волны термической детонации, необходимо построить адиабату Гюгонио, определяющую равновесное состояние многофазной системы после завершения процессов межфазного взаимодействия. Для этого получим первые интегралы системы дифференциальных уравнений (2.1)–(2.9).

Складывая уравнения (2.1)–(2.3) и интегрируя суммарное уравнение, можно получить уравнение сохранения потока массы многофазной смеси:

$$\alpha_m \rho_m V_m + \alpha_d \rho_d V_d + \alpha_f \rho_f V_f = \text{const}_1 \quad (4.1)$$

Аналогично из уравнений импульсов каждой фазы (2.4)–(2.6) можно получить уравнение сохранения потока импульса многофазной смеси:

$$\alpha_m \rho_m V_m^2 + \alpha_d \rho_d V_d^2 + \alpha_f \rho_f V_f^2 + P = \text{const}_2 \quad (4.2)$$

Таким же образом из уравнений энергий фаз (2.7)–(2.9) получается уравнение сохранения потока энергии многофазной смеси:

$$\alpha_m \rho_m V_m h_{sm} + \alpha_d \rho_d V_d h_{sd} + \alpha_f \rho_f V_f h_{sf} = \text{const}_3 \quad (4.3)$$

Обозначим параметры исходной многофазной смеси нижним индексом “0”, а нижним индексом “2” будем обозначать параметры равновесной многофазной смеси после завершения межфазного взаимодействия. Тогда с помощью первых интегралов (4.1)–(4.3) можно получить уравнения, связывающие параметры многофазного потока в сечениях “0” и “2”:

$$\rho_2 V_2 + \rho_0 V_0 \quad (4.4)$$

$$P_2 + \rho_2 V_2^2 = P_0 + \rho_0 V_0^2 \quad (4.5)$$

$$h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 = h_0 + \frac{1}{2} V_0^2 \quad (4.6)$$

В уравнениях (4.4)–(4.6) были использованы следующие обозначения:

$$\rho_0 = \alpha_{m0} \rho_{m0} + \alpha_{d0} \rho_{d0} \quad (4.7)$$

$$\rho_2 = \alpha_{m2} \rho_{m2} + \alpha_{f2} \rho_{f2} \quad (4.8)$$

$$h_0 = \frac{\alpha_{m0} \rho_{m0} h_{m0} + \alpha_{d0} \rho_{d0} h_{d0}}{\alpha_{m0} \rho_{m0} + \alpha_{d0} \rho_{d0}} \quad (4.9)$$

$$h_2 = \frac{\alpha_{m2} \rho_{m2} h_{m2} + \alpha_{f2} \rho_{f2} h_{f2}}{\alpha_{m2} \rho_{m2} + \alpha_{f2} \rho_{f2}} \quad (4.10)$$

После алгебраических преобразований уравнений (4.4)–(4.6) получается уравнение адиабаты Гюгонио:

$$(P_2 - P_0)(v_2 + v_0) - 2(h_2 - h_0) = 0, \quad (4.11)$$

где $v_0 = 1/\rho_0$ и $v_2 = 1/\rho_2$ – удельные объемы многофазной смеси в сечениях потока “0” и “2”.

В уравнении адиабаты Гюгонио (4.11) удельный объем v_2 и энтальпия равновесной многофазной смеси в сечении 2 определяются давлением P_2 и температурой T_2 в этом сечении. Задавая температуру T_2 и определяя из уравнения (4.11) давление P_2 , можно вычислить значение удельного объема v_2 и на плоскости (v_2, P_2) построить кривую (адиабату Гюгонио), которая будет описывать все возможные состояния равновесной смеси для данных параметров исходной многофазной смеси.

Определение значений параметров v_2 и P_2 на адиабате Гюгонио позволяет вычислить из уравнений (4.4) и (4.5) скорость волны термической детонации, которая равна скорости исходной смеси V_0 ,

$$V_0 = v_0 \sqrt{\frac{P_2 - P_0}{v_0 - v_2}} \quad (4.12)$$

5. Расчет параметров на лидирующей ударной волне. Теперь определим значения параметров многофазной смеси на лидирующей ударной волне, которая распространяется со скоростью V_0 . Обозначим нижним индексом “1” сечение потока, в котором находится плоскость ударной волны. В этом месте происходит скачок давления, который приводит к разрыву некоторых параметров многофазного потока относительно их исходных значений.

Будем полагать, что температура расплавленного свинца в сечении “1” не меняется ($T_{m1} = T_{m0}$), а фрагментация капель воды начинается после их прохождения сечения “1”.

Потоки масс расплава и d -фазы на ударной волне сохраняются:

$$\alpha_{m1}\rho_{m1}V_{m1} = \alpha_{m0}\rho_{m0}V_0 \quad (5.1)$$

$$\alpha_{d1}\rho_{d1}V_{d1} = \alpha_{d0}\rho_{d0}V_0 \quad (5.2)$$

Так как температура расплава на ударной волне не меняется, то $\rho_{m1} = \rho_{m0}$. (Отметим, что скорости расплава и d -фазы на ударной волне не равны между собой.)

Поток импульса многофазной смеси на ударной волне также сохраняется.

$$P_1 + \alpha_{m1}\rho_{m1}V_{m1}^2 + \alpha_{d1}\rho_{d1}V_{d1}^2 = P_0 + (\alpha_{m0}\rho_{m0} + \alpha_{d0}\rho_{d0})V_0^2 \quad (5.3)$$

Кроме того, на ударной волне выполняется закон сохранения энергии для каждой фазы [21]:

$$h_{m1} + \frac{1}{2}V_{m1}^2 = h_{m0} + \frac{1}{2}V_0^2 \quad (5.4)$$

$$h_{d1} + \frac{1}{2}V_{d1}^2 = h_{d0} + \frac{1}{2}V_0^2 \quad (5.5)$$

Многофазная смесь на ударной волне состоит из расплава и дисперсной d -фазы, поэтому имеет место соотношение $\alpha_{m1} + \alpha_{d1} = 1$.

Плотность и энтальпия d -фазы на ударной волне определяются давлением и объемной долей пара в капле ($\rho_{d1} = \rho_{d1}(P_1, \varphi_1)$ и $h_{d1} = h_{d1}(P_1, \varphi_1)$) или, если паровая пленка сконденсировалась, давлением и температурой воды в капле ($\rho_{d1} = \rho_{d1}(P_1, T_{d1})$ и $h_{d1} = h_{d1}(P_1, T_{d1})$). Энтальпия расплава на ударной волне определяется давлением на ударной волне и температурой исходного расплава, поскольку его температура на ударной волне не меняется, $h_{m1} = h_{m1}(P_1, T_{m0})$.

Уравнения (5.1)–(5.5) позволяют определить неизвестные значения параметров на ударной волне (в сечении “1”): α_{m1} , α_{d1} , V_{m1} , V_{d1} , P_1 , φ_1 или T_{d1} . Эти значения используются в качестве краевых условий для решения системы дифференциальных уравнений (2.1)–(2.9), описывающих структуру волны термической детонации.

6. Метод решения. Описанная выше задача решалась численно в следующей последовательности: 1) построение адиабаты Гюгонио и определение скорости волны термической детонации, 2) расчет параметров на лидирующей ударной волне, 3) решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в зоне фрагментации после ударной волны.

Построение адиабаты Гюгонио выполнялось с использованием метода бисекций. Расчеты параметров на ударной волне производились методом итераций Ньютона. Дифференциальные уравнения решались со вторым порядком точности по шагу интегрирования, при этом члены в правых частях вычислялись в центральной точке, а их нелинейность снималась итерациями.

7. Результаты расчета стационарной волны термической детонации. С помощью разработанной модели был выполнен расчет волны термической детонации в смеси капель воды с расплавленным свинцом. Использовались следующие параметры исходной системы: давление $P_0 = 0.8$ МПа, температура расплавленного свинца $T_{m0} = 800$ К, объемная доля пара в каплях $\varphi_0 = 0.7$, диаметр капель $L_{d0} = 10$ мм. Полагалось, что вода и пар в исходных каплях находятся в состоянии насыщения, соответствующего системному давлению 0.8 МПа. Размер образующихся при дроблении капель фрагментов воды принимался равным $L_f = 1$ мм.

По этим параметрам была построена адиабата Гюгонио и касательная к ней, проведенная из точки начального состояния многофазной смеси, то есть прямая Рэлея–Михельсона [1, 2]. Точка касания этой прямой адиабаты Гюгонио (точка Чепмена–Жуге) определяет параметры равновесной смеси продуктов детонации, а наклон пря-

мой определяет скорость волны детонации, которая будет реализована [1, 2, 9]. Для данных системных параметров скорость детонации равна $V_{\text{det}} = V_0 = 222$ м/с. Давление в точке (плоскости) Чепмена–Жуге составляет 46.61 МПа.

Рассчитанные параметры смеси на лидирующей ударной волне имеют следующие значения: объемная доля капель воды $\alpha_{dl} = 0.29$, объемная доля расплавленного свинца $\alpha_{ml} = 0.71$, скорость капель воды $V_{dl} = 70$ м/с, скорость расплава свинца $V_{ml} = 218.66$ м/с, давление $P_1 = 8.52$ МПа. Также расчет параметров смеси на ударной волне показал, что на ударной волне пар в паровой пленке, окружающей каплю воды, сконденсировался, и капля стала состоять из одной воды, температура которой $T_{dl} = 452.7$ К меньше температуры насыщения (кипения) воды, которая соответствует давлению на ударной волне P_1 . Эти значения использовались, как граничные условия для решения дифференциальных уравнений (2.1)–(2.9), описывающих процессы в зоне фрагментации капель за ударной волной.

На рис. 1 представлено распределение давления за ударной волной в зоне фрагментации. Видно, что давление исходной смеси после ударной волны возрастает до величины 4.2 МПа. После этого давление очень быстро увеличивается до значения 77.7 МПа на расстоянии около 3 см от плоскости лидирующей ударной волны. Этот рост вызван интенсивной фрагментацией капель воды в этой области из-за возникшей большой разности скоростей капель и расплавленного свинца. Образовавшиеся из-за этого мелкие фрагменты воды тормозятся силой трения между их поверхностью и жидким свинцом, вызывая рост локального давления в системе. Далее давление медленно уменьшается, асимптотически стремясь достигнуть давления в плоскости Чепмена–Жуге для равновесной смеси продуктов детонации.

Рис. 2 показывает распределения скоростей фаз в зоне фрагментации. Тяжелая фаза (расплавленный свинец) входит в зону фрагментации практически со скоростью распространения волны детонации, что означает практически полное отсутствие торможения на ударной волне. Легкая фаза (капли воды) существенно замедляет свою скорость на ударной волне (с 222 м/с до 70 м/с). В результате после прохождения ударной волны из-за возникающей значительной разности скоростей капель воды и расплавленного свинца начинается интенсивная фрагментация капель, приводящая к усиленному тепловыделению в зоне фрагментации, что поддерживает распространение волны. Из-за сильного трения между несущей фазой и дисперсными фазами их скорости быстро сравниваются на расстоянии примерно 8 см от плоскости ударной волны. Распределения скоростей дисперсных фаз практически совпадают. Это объясняется тем, что образующиеся фрагменты воды имеют скорость материнской капли, а разница времен релаксации скоростей дисперсных фаз к скорости несущей фазы незначительна. При этом надо иметь в виду, что размер материнской капли постоянно уменьшается в ходе ее фрагментации, что означает уменьшение времени ее скоростной релаксации.

На рис. 3 представлены распределения температур фаз в зоне фрагментации капель. Видно, что массивный свинец охлаждается незначительно, в то время, как температуры легких фаз (капли и фрагменты воды) быстро растут, причем рост температуры f -фазы происходит быстрее, чем в случае d -фазы, что объясняется меньшим размером фрагментов воды.

Сравнивая распределения скоростей фаз (рис. 2) и их температур (рис. 3), можно заключить, что скоростная релаксация фаз происходит значительно быстрее термической релаксации. Если скорости фаз выравниваются на расстоянии около 8 см от плоскости ударной волны, то температуры фаз на расстоянии метра от плоскости ударной волны еще значительно различаются.

Рис. 4 дает наглядное представление об исследуемом процессе в целом. На нем на плоскости “удельный объем многофазной смеси—давление смеси” построены адиаб-

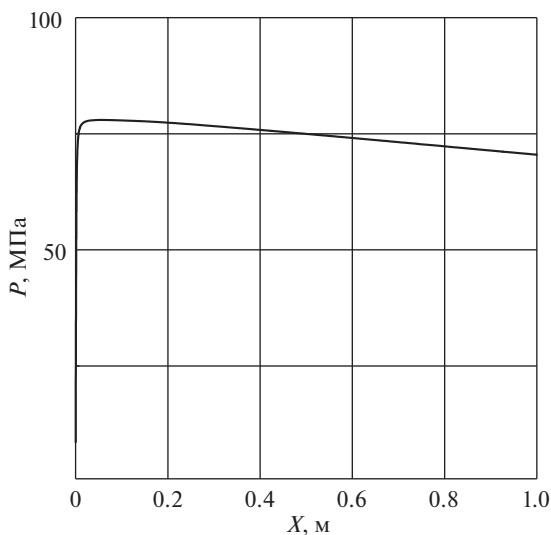


Рис. 1. Распределение давления в зоне фрагментации.

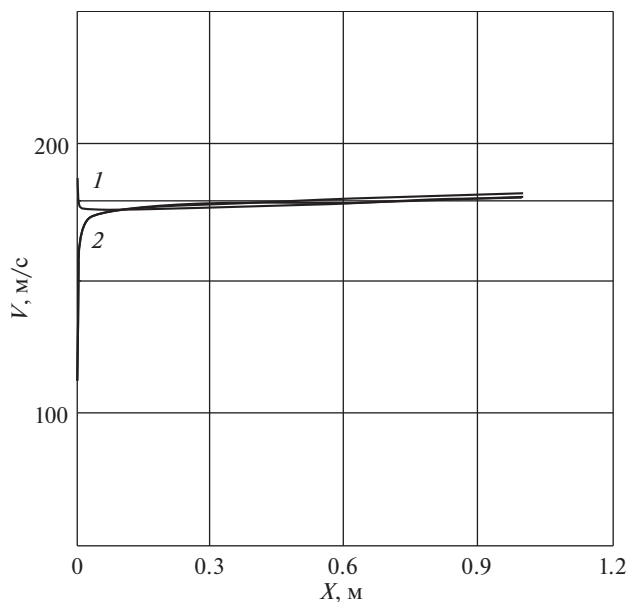


Рис. 2. Распределения скоростей фаз в зоне фрагментации. 1 – расплав свинца, 2 – *f*-фаза и *d*-фаза.

та Гюгонио (кривая 1) и ударная адиабата (кривая 2). Излом ударной волны на 90° означает полную конденсацию пара в паровой пленке на ударной волне и переход воды в состояние недогретой до температуры насыщения жидкости.

Точки на ударной адиабате выше 22 МПа (критическое давление воды) указывают на то, что вода в смеси находится в сверхкритическом состоянии. Как следует из рис. 4,

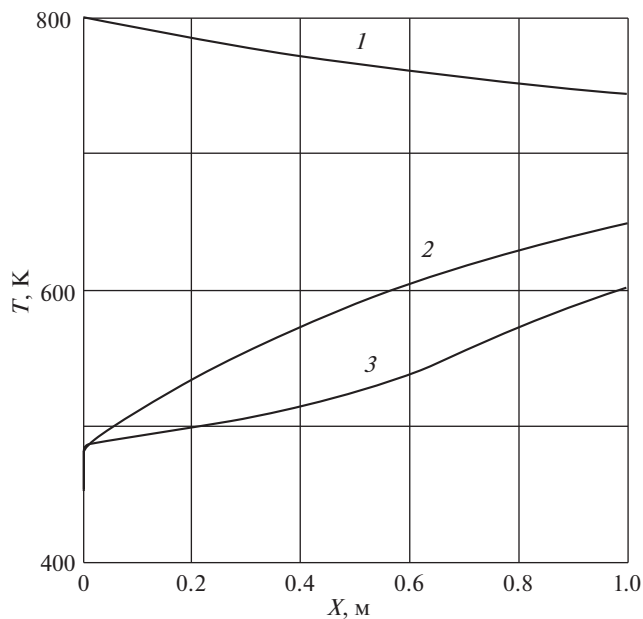


Рис. 3. Распределения температур фаз в зоне фрагментации. 1 – расплав свинца, 2 – f -фаза, 3 – d -фаза.

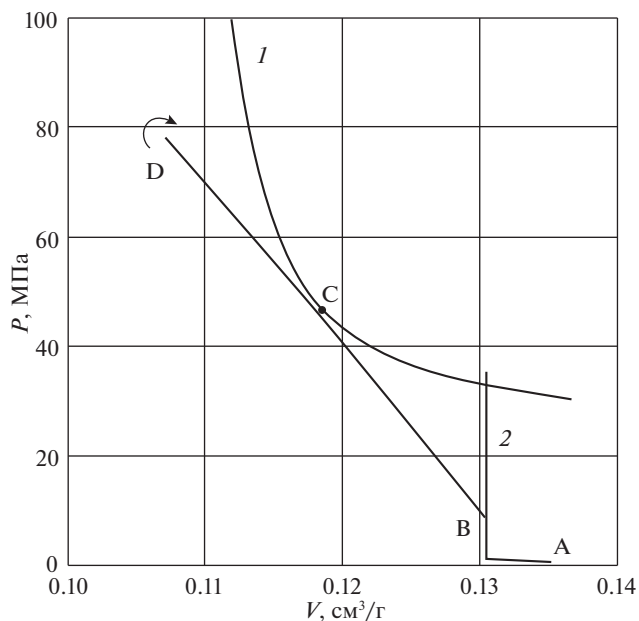


Рис. 4. Адиабата Гюгонио (1) и ударная адиабата (2). Точки: А – исходное состояние, В – на ударной волне, С – точка Чепмена–Жуге, D – достижение максимального давления.

вся адиабата Гюгонио лежит выше критического давления воды, то есть вода в равновесной смеси продуктов детонации находится в сверхкритическом состоянии.

Точка А на рис. 4 показывает исходную смесь. Точка В представляет состояние смеси на ударной волне. Линия ВD отображает состояние многофазной смеси при ее те-

чении от плоскости ударной волны к плоскости Чепмена–Жуге. Видно, что в некоторый момент удельный объем смеси и ее давление совпадают с параметрами точки Чепмена–Жуге. Однако это не означает, что система пришла в равновесное состояние — в этот момент скорости фаз значительно отличаются между собой, то же самое имеет место и для температур фаз.

Далее система начинает двигаться от точки С к точке D, в которой она достигает максимального давления и максимального сжатия — ее удельный объем в этой точке минимален. После прохождения точки D начинается расширение многофазной системы, которое сопровождается снижением давления. Система движется в обратном направлении по линии DC, асимптотически приближаясь к точке Чепмена–Жуге.

Заключение. Для расчета внутренней структуры детонационной волны в смеси капель воды с расплавленным свинцом разработана одномерная стационарная модель для многофазной смеси, состоящей из трех фаз: жидкий свинец (сплошная фаза), капли воды (дисперсная фаза) и фрагменты воды, образующиеся при дроблении капель (вторая дисперсная фаза). Учитываются: сила межфазного трения, теплообмен и фрагментация капель воды. Результаты исследований показали, что в волне термической детонации в данной системе максимальное давление достигается в плоскости, расположенной между плоскостью лидирующей ударной волны и плоскостью Чепмена–Жуге.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 21-19-00709.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б., Компанеев А.С. Теория детонации. М.: Гостехиздат, 1955. 268 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 тт. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Крайко А.Н. Неустойчивость стационарных течений в каналах переменной площади поперечного сечения с детонационной волной Чепмена–Жуге // ПММ. 2019. Т. 83. № 3. С. 354–369.
4. Вайнштейн П.Б., Нигматулин Р.И., Попов В.В. Переход конвективного горения аэровзвесей унитарного топлива в детонацию // Физика горения и взрыва. 1980. № 5. С. 102–106.
5. Нигматулин Р.И., Вайнштейн П.Б., Ахатов И.Ш. Структура стационарных детонационных волн в смесях газа с частицами унитарного топлива // в сб.: Химическая физика процессов горения и взрыва. Детонация. Черноголовка: Ин-т хим. физ. АН СССР, 1980. 128 с. С. 96–99.
6. Ахатов И.Ш., Вайнштейн П.Б., Нигматулин Р.И. Структура детонационных волн в газозвзвях унитарного топлива // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 5. С. 47–53.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука, 1987. 464 с.
8. Board S.J., Hall R.W., Hall R.S. Detonation of a fuel coolant explosion // Nature. 1975. V. 254. P. 319–321.
9. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е. Гидродинамика и теплофизика паровых взрывов. М.: ИПМех РАН, 2020. 276 с.
10. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е. Термическое взаимодействие высокотемпературных расплавов с жидкостями // ТВТ. 2022. Т. 60. № 2. С. 280–318.
11. Sharon A., Bankoff S.G. On the existence of steady supercritical plane thermal detonations // Int. J. Heat Mass Trans. 1981. V. 24. P. 1561–1572.
12. Frost D.L., Lee J.H.S., Ciccarelli G. The use of Hugoniot analysis for the propagation of vapor explosion waves // Shock Waves. 1991. V. 1. P. 99–110.
13. Iskhakov A.S., Melikhov V.I., Melikhov O.I., Yakush S.E., Le Tran Chung. Hugoniot analysis of experimental data on steam explosion in stratified melt-coolant configuration // Nucl. Engng. & Design. 2019. V. 347. P. 151–157.
14. Dinh T.N. Multiphase flow phenomena of steam generator tube rupture in a lead-cooled reactor system: a scoping analysis // Proc. ICAPP 2007. Paper No. 7497. May 13–18, 2007. Nice, France.

15. *Iskhakov A.S., Melikhov V.I., Melikhov O.I.* Hugoniot analysis of energetic molten lead water interaction // *Annals of Nucl. Energy*. 2019. V. 129. P. 437–449.
16. *Sobolev V.* Database of thermophysical properties of liquid metal coolants for GEN-IV. Sodium, lead, lead-bismuth eutectic (and bismuth) // in: *Belgian Nuclear Res. Centre. Sci. Rep. SCK CEN-BLG-1069*. Boeretang, Belgium. 2010. P. 175.
17. IAPWS (The Int. Assoc. for the Properties of Water&Steam). <http://www.iapws.org>
18. *Pilch M., Erdman C.A.* Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquid drop // *Int. J. Multiphase Flow*. 1987. V. 13. P. 741–757.
19. *Meignen R., Picchi S., Lamome J. et al.* The challenge of modeling fuel-coolant interaction: Pt. I – Premixing // *Nucl. Engng. & Design*. 2014. V. 280. P. 511–527.
20. *Fletcher D.F., Anderson R.P.* A review of pressure-induced propagation models of the vapour explosion process // *Prog. Nucl. Energy*. 1990. V. 23. P. 137–179.
21. *Fletcher D.F.* An improved mathematical model of melt/water detonations – I. Model formulation and example results // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1991. V. 34. № 10. P. 2435–2448.
22. *Безносков А.В., Пинаев С.С., Давыдов Д.В. и др.* Экспериментальные исследования характеристик контактного теплообмена свинцовый теплоноситель–рабочее тело // *Атомная энергия*. 2005. Т. 98 (3). С. 182–187.
23. *Carachalios C., Burger M., Unger H.* A transient two-phase model to describe thermal detonations based on hydrodynamic fragmentation // in: *Proc. Int. Meeting on LWR Severe Accident Evaluation*, Cambridge, Massachusetts, 28 Aug.–1 Sep. 1983.
24. *Ishii M., Hibiki T.* *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. New York: Springer, 2011. 518 p.
25. *Kolev N.I.* *Multiphase Flow Dynamics*. V. 1. Fundamentals. New York: Springer, 2015. 840 p.

Investigation of a Thermal Detonation Wave in a Mixture of Water Drops with Molted Lead

V. I. Melikhov^{a,#}, O. I. Melikhov^{a,##}, and Saleh Bashar^{a,###}

^a*NRU MPEI, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: MelikhovVI@mpei.ru*

^{##}*e-mail: MelikhovOI@mpei.ru*

^{###}*e-mail: basharsaleh10@gmail.com*

The patterns of the wave of thermal interaction of water drops in a high-temperature molten lead, are studied. Due to the boiling of water on the surface of molten lead, both liquids (phases) are separated by a vapor film. A one-dimensional model of interacting and interpenetrating continuums is used, which describes the dynamics of each fluid by introducing a special field characterized by its own velocity, temperature, and volume fraction. Wave velocity is determined by the equality of phase velocities and temperatures in the Chapman-Jouguet plane. The parameters at the pressure peak are calculated from the conditions at the discontinuity which are the boundary conditions for integrating the conservation equations in the zone of interaction of water droplets with the melt. The resulting structure of the thermal detonation wave is characterized by the fact that the maximum pressure is at some distance from the shock wave.

Keywords: multiphase medium, thermal detonation, multifluid model, thermal interaction, droplet fragmentation, interfacial friction

REFERENCES

1. *Zeldovich Y.B., Kompaneets A.S.* *Theory of Detonation*. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 268 p. (in Russian)
2. *Landau L.D., Lifshits E.M.* *Theoretical Physics: Textbook*. In 10 vols. V. VI. Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (in Russian)
3. *Kraiko A.N.* Instability of stationary flows in channels of variable cross-sectional area with a detonation Chempin–Jouguet wave // *JAMM*, 2019, vol. 83, no. 3, pp. 354–369. (in Russian)

4. *Vainshtein P.B., Nigmatulin R.I., Popov V.V.* Transition of convective combustion of air suspensions of unitary fuel into detonation // *Phys. Combust.&Explos.*, 1980, no. 5, pp. 102–106. (in Russian)
5. *Nigmatulin R.I., Vainshtein P.B., Akhatov I.Sh.* Structure of stationary detonation waves in mixtures of gas with particles of unitary fuel // in: *Chem. Phys. Combust.&Explos. Proc. Detonation*. Chernogolovka: Inst. Chem. Phys. AS USSR, 1980. pp. 96–99. (in Russian)
6. *Akhatov I.S., Vainshtein P.B., Nigmatulin R.I.* Structure of detonation waves in gas suspensions of fuel containing the oxidant // *Fluid Dyn.*, 1981, vol. 16, pp. 675–681.
<https://doi.org/10.1007/BF01089577>
7. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. Part I. Moscow: Nauka, 1987. 464 p. (in Russian)
8. *Board S.J., Hall R.W., Hall R.S.* Detonation of a fuel coolant explosion // *Nature*, 1975, vol. 254, pp. 319–321.
9. *Melikhov V.I., Melikhov O.I., Yakush S.E.* Hydrodynamics and Thermal Physics of Steam Explosions. M.: IPMech RAS, 2020. 276 p. (in Russian)
10. *Melikhov V.I., Melikhov O.I., Yakush S.E.* Thermal interaction of high-temperature melts with liquids // *High. Temp.*, 2022, vol. 60, pp. 252–285. <https://doi.org/10.1134/S0018151X22020274>
11. *Sharon A., Bankoff S.G.* On the existence of steady supercritical plane thermal detonations // *Int. J. Heat Mass Trans.*, 1981, vol. 24, pp. 1561–1572.
12. *Frost D.L., Lee J.H.S., Ciccarelli G.* The use of Hugoniot analysis for the propagation of vapor explosion waves // *Shock Waves*, 1991, vol. 1, pp. 99–110.
13. *Iskhakov A.S., Melikhov V.I., Melikhov O.I., Yakush S.E., Le Tran Chung.* Hugoniot analysis of experimental data on steam explosion in stratified melt-coolant configuration // *Nucl. Engng.&Design*, 2019, vol. 347, pp. 151–157.
14. *Dinh T.N.* Multiphase flow phenomena of steam generator tube rupture in a lead-cooled reactor system: a scoping analysis // *Proc. ICAPP 2007*, Paper No. 7497. May 13–18, 2007. Nice, France.
15. *Iskhakov A.S., Melikhov V.I., Melikhov O.I.* Hugoniot analysis of energetic molten lead water interaction // *Annals of Nucl. Energy*, 2019, vol. 129, pp. 437–449.
16. *Sobolev V.* Database of thermophysical properties of liquid metal coolants for GEN-IV. Sodium, lead, lead-bismuth eutectic (and bismuth). Belgian Nuclear Research Centre. Scientific Report SCK CEN-BLG-1069. Boeretang, Belgium. 2010. 175 p.
17. IAPWS (The Int. Assoc. for the Properties of Water&Steam). <http://www.iapws.org>.
18. *Pilch M., Erdman C.A.* Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquid drop // *Int. J. Multiphase Flow*, 1987, vol. 13, pp. 741–757.
19. *Meignen R., Picchi S., Lamome J. et al.* The challenge of modeling fuel-coolant interaction: Part I – Premixing // *Nucl. Engng.&Design*, 2014, vol. 280, pp. 511–527.
20. *Fletcher D.F., Anderson R.P.* A review of pressure-induced propagation models of the vapour explosion process // *Prog. Nucl. Energy*, 1990, vol. 23, pp. 137–179.
21. *Fletcher D.F.* An improved mathematical model of melt/water detonations – I. Model formulation and example results // *Int. J. Heat Mass Trans.*, 1991, vol. 34, no. 10, pp. 2435–2448.
22. *Beznosov A.V., Pinaev S.S., Davydov D.V. et al.* Experimental studies of the characteristics of contact heat transfer lead coolant – working body // *Atomic Energy*, 2005, vol. 98 (3), pp. 182–187. (in Russian)
23. *Carachalios C., Burger M., Unger H.* A transient two-phase model to describe thermal detonations based on hydrodynamic fragmentation // *Proc. Int. Meeting on LWR Severe Accident Evaluation*, Cambridge, Massachusetts, 28 Aug.–1 Sep. 1983.
24. *Ishii M., Hibiki T.* Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow. N.Y.: Springer, 2011. 518 p.
25. *Kolev N.I.* Multiphase Flow Dynamics. Vol. 1. Fundamentals. N.Y.: Springer, 2015. 840 p.

УДК 517.956.3

**ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОУПРУГОГО
ПО МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА СТЕРЖНЯ**© 2023 г. В. И. Корзюк^{1,2,*}, Я. В. Рудько^{1,**}, В. В. Колячко^{2,***}¹Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь²Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

*e-mail: korzyuk@bsu.by

**e-mail: janycz@yahoo.com by

***e-mail: vlad.kolyachko@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.11.2022 г.

После доработки 20.04.2023 г.

Принята к публикации 25.04.2023 г.

В настоящей работе исследуется корректность по Адамару задачи Коши для одномерной гиперболической системы уравнений с частными производными, описывающей продольные колебания вязкоупругого по модели Максвелла стержня постоянного поперечного сечения. Также обсуждаются некоторые свойства системы и ее решений: закон сохранения модифицированной “энергии”, конечная скорость распространения волн, дисперсия и диссипация решений.

Ключевые слова: продольные колебания, модель Максвелла, задача Коши, корректно поставленная задача

DOI: 10.31857/S0032823523030086, EDN: ZTPLMI

1. Введение. В строительстве различных сооружений очень часто приходится иметь дело с колебаниями сплошных сред. Поэтому изучение математических моделей таких явлений представляется целесообразным. В данной работе мы исследуем одну из таких моделей, представляющую систему двух дифференциальных уравнений с частными производными, исследуем задачу Коши для нее и обсуждаем качественные свойства решений.

В разд. 2, исходя из соображений механики сплошных сред, выписываются уравнения для описания состояния стержня. В разд. 3 формулируется задача Коши для определения свободных и/или вынужденных колебаний стержня. В разд. 4 система записывается в матричной форме, исследуется гиперболичность системы и непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных. В разд. 5 отыскиваются решения в виде плоских волн и экспоненциальных волн, устанавливаются дисперсионные и диссипативные свойства. В разд. 6 устанавливается закон сохранения модифицированной “энергии” и единственность решения задачи Коши. В разд. 7 доказываются, что решения обладают конечной скоростью распространения. В разд. 8 и 9 в явном аналитическом виде отыскивается решение задачи Коши о свободных и вынужденных колебаниях стержня соответственно. В разд. 10 подводится заключение данной работы.

2. Физическая модель. Рассмотрим в одномерном случае вязкоупругий по модели Максвелла стержень постоянного поперечного сечения, свойства материала которого не зависят от времени и координаты. Для него верно уравнение движения [1]

$$\rho \partial_t^2 u = \partial_x \sigma + f, \quad (2.1)$$

где f – внешняя объемная сила, $\rho > 0$ – плотность материала стержня, u – дилатации (смещения) стержня, σ – напряжения стержня. А связь между деформацией ε и напряжением σ подчиняется закону [2, 3]

$$\sigma + \beta \partial_t \sigma = \gamma \partial_t \varepsilon, \quad (2.2)$$

где $\beta > 0$ – время релаксации, $\gamma \beta^{-1} > 0$ – мгновенный модуль упругости. Подставив определения деформации $\varepsilon = \partial_x u$ в уравнение (2.2), получим

$$\sigma + \beta \partial_t \sigma = \gamma \partial_t \partial_x u \quad (2.3)$$

Из связи между деформацией ε и напряжением σ стержня следует интегральное уравнение Вольтерры второго рода

$$\varepsilon(t) = \frac{\beta \sigma(t)}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

В формуле (2.4) мы пренебрегаем начальной деформацией в силу отдаления начального момента времени в минус бесконечность [3].

3. Постановка задачи Коши. Таким образом, для определения свободных колебаний стержня, требуется найти решение системы уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t, x), \quad \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, x) = \beta \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + w(t, x); \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

при начальных условиях

$$w(0, x) = \mu(x), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x); \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

в предположении достаточной гладкости функций μ , φ , ψ . В уравнении (3.1) для удобства буквой w обозначено напряжения стержня.

Если же требуется определить колебания стержня, происходящие под действием внешней силы, то вместо уравнений (3.1) надо взять уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) + f(t, x), \quad \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, x) = \beta \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + w(t, x); \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad (3.3)$$

4. Матричное представление системы уравнений. Введем в систему уравнений (3.1) функцию $v := \partial_t u$. Тогда имеет место матричное представление

$$\mathbf{u}_t = A \mathbf{u}_x + B \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_t v \\ \partial_t w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_x = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \\ \partial_x w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & \gamma \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^{-1} \end{pmatrix}$$

Заметим, что собственными значениями матрицы $-A$ являются числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{\gamma \beta^{-1} \rho^{-1}}$ и $\lambda_3 = \sqrt{\gamma \beta^{-1} \rho^{-1}}$. При условии $\gamma \beta^{-1} \rho^{-1} > 0$ это будут три различных действительных числа. Значит, что если $\gamma \beta^{-1} \rho^{-1} > 0$, то система (3.1) является гиперболической по [4], и строго гиперболической по классификации [5].

Применим к (4.1) преобразование Фурье по переменной x в виде

$$\mathcal{F}[\cdot](t, \omega) = \hat{\cdot}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot(t, x) \exp(-i\omega x) dx; \quad (t, \omega) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

и запишем Фурье-образ системы (4.1)

$$\hat{\mathbf{u}}_t(t, \omega) = Q(\omega)\hat{\mathbf{u}}(t, \omega), \quad (4.2)$$

где разрешающая матрица $Q(\omega) = i\omega A + B$. Рассмотрим матрицу

$$\exp(Q(\omega)t) = \begin{pmatrix} 1 & \exp(t) & 1 \\ 1 & 1 & \exp(-it\omega\rho^{-1}) \\ 1 & \exp(it\gamma\omega\beta^{-1}) & \exp(-t\beta^{-1}) \end{pmatrix},$$

ее норма оценивается как

$$\|\exp(Q(\omega)t)\|_{\infty} \leq \max \left\{ 3, 2 + \exp(t), 2 + \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right) \right\} \leq C_t = 2 + \exp(t) \quad (4.3)$$

Так как норма матрицы $\exp(Q(\omega)t)$ ограничена независимо от ω , то решение задачи Коши (3.1)–(3.2) непрерывно зависит от начальных данных [4].

Этими методами аналогично доказывается гиперболичность системы (3.3) при условии $\gamma\beta^{-1}\rho^{-1} > 0$ и непрерывная зависимость решения задачи Коши (3.2)–(3.3) от начальных данных.

5. Волновые решения. Исследуем систему (3.1) на наличие решений в виде плоских волн. Такие решения имеют вид

$$u(t, x) = U(kx - \omega t + \phi), \quad w(t, x) = W(kx - \omega t + \phi), \quad (5.1)$$

где k – волновое число, ω – циклическая частота, ϕ – фаза. Если при этом $(U, W)^T \neq (0, 0)^T$ и $U, U', U'', W, W', W'' \rightarrow 0$ при $kx - \omega t + \phi = z \rightarrow \pm\infty$, то скажем, что такое имеет вид уединенной волны.

Подставляя (5.1) в (3.1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций U и W

$$\begin{cases} \rho\omega^2 U''(z) - kW'(z) = 0 \\ \beta\omega W'(z) - W(z) - k\gamma\omega U''(z) = 0 \end{cases}$$

Ее решение может быть представлено в виде

$$U(z) = \sum_{i=1}^3 c_i U_i(z), \quad W(z) = \sum_{i=1}^3 c_i W_i(z), \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} U_1(z) &= 1, \quad U_2(z) = z, \quad W_1(z) = W_2(z) = 0, \quad W_3(z) = \exp\left(\frac{z\rho\omega}{\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma}\right), \\ U_3(z) &= \frac{1}{\rho^2\omega^3} \left[k^3\gamma - k\rho\omega(z + \beta\omega) + \exp\left(\frac{z\rho\omega}{\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma}\right) k(\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma) \right], \end{aligned}$$

и c_1, c_2 и c_3 – произвольные константы.

Теорема 1. Система уравнений (3.1), допускает решения в виде плоских волн, которые представляются в виде (5.1)–(5.2).

Доказательство следует из рассуждений выше.

Из формул (5.1) и (5.2) также следует

Утверждение 1. Система уравнений (3.1) не имеет решений в виде уединенных волн (солитонов).

Доказательство. Достаточно показать, что условие $U, U', W \rightarrow 0$ при $kx - \omega t + \phi = z \rightarrow \pm\infty$ влечет $U = W = 0$. Обозначим $\alpha = \frac{\rho\omega}{\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma}$. Тогда, в силу формулы $W(z) = c_3 W_3(z) = c_3 \exp(\alpha z)$, имеют место представления

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} W(z) = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \wedge c_3 > 0 \\ -\infty, & \alpha > 0 \wedge c_3 < 0 \\ c_3, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases} \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} W(z) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 0 \wedge c_3 > 0 \\ -\infty, & \alpha < 0 \wedge c_3 < 0 \\ c_3, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha > 0 \end{cases}$$

из которых следует, что $\lim_{z \rightarrow +\infty} W(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} W(z) = 0$ если и только если $c_3 = 0$. В таком случае $U(z) = c_1 + c_2 z$ и $U'(z) = c_2$. А в силу $c_2 = \lim_{z \rightarrow +\infty} U'(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} U'(z) = 0$ имеем $U(z) = c_1$ и аналогично получаем $c_1 = \lim_{z \rightarrow +\infty} U(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = 0$. Значит, $U(z) = W(z) = 0$.

Теперь исследуем систему (3.1) на наличие решений в виде экспоненциальных волн. Это комплексно-значные функции вида

$$u(t, x) = U_0 \exp(i(kx - \omega t)), \quad w(t, x) = W_0 \exp(i(kx - \omega t)), \quad (5.3)$$

где $U_0 \in \mathbb{C}$, $W_0 \in \mathbb{C}$ – комплексные амплитуды, $k \in \mathbb{R}$ – волновое число, $\omega \in \mathbb{C}$ – временная частота. Поскольку такие решения представляют собой бесконечно-дифференцируемые функции, то дифференцируя первое уравнение системы (3.1) по x , а второе по t и выражая $\partial_t^2 \partial_x u$ из обоих уравнений, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\rho\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

Подставляя в последнее уравнение представление (5.3), мы находим

$$(k^2\gamma - \rho\omega(\beta\omega + i))w(t, x) = 0$$

Отсюда

$$\omega = \frac{-i \pm \sqrt{4k^2\beta\gamma\rho^{-1} - 1}}{2\beta} \quad (5.4)$$

Можно видеть, что скорость распространения волн $\omega/|k|$ нелинейно зависит от частоты. То, что волны, описываемые системой уравнений (3.1), обладают дисперсией. Интегрируя первое уравнение из (3.1) относительно u , получаем

$$u(t, x) = -\frac{ikW_0}{\rho\omega^2} \exp(i(kx - \omega t)), \quad (5.5)$$

$$\text{т.е. } U_0 = -\frac{ikW_0}{\rho\omega^2}.$$

Пользуясь данными представлениями, можно найти фазовый сдвиг между волнами смещений и напряжений:

$$\arg(U_0) - \arg(W_0) = \frac{3\pi}{2} + \arg\left(\frac{k}{\omega^2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \arg(k) - 2\arg\left(-i \pm \sqrt{4k^2\beta\gamma\rho^{-1} - 1}\right)$$

Рассмотрим теперь случай, что ω это чисто мнимое число (такое произойдет, если будет верно неравенство $4k^2\beta\gamma\rho^{-1} - 1 < 0$). В таком случае

$$w(t, x) = W_0 \exp \left(ikx + \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right)$$

$$u(t, x) = \frac{ik W_0}{\rho} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right)^{-2} \exp \left(ikx + \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right)$$

Полагая $W_0 = |W_0| \exp(i\phi)$ ($|W_0| \in [0, \infty)$ и $\phi \in [0, 2\pi)$) и беря вещественную и мнимую части от решений u и w , находим что

$$w(t, x) = |W_0| \exp \left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right) \cos(kx + \phi)$$

$$u(t, x) = \frac{k |W_0|}{\rho} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right)^{-2} \exp \left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right) \cos \left(kx + \phi + \frac{\pi}{2} \right)$$

и

$$w(t, x) = |W_0| \exp \left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right) \sin(kx + \phi)$$

$$u(t, x) = \frac{k |W_0|}{\rho} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right)^{-2} \exp \left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right) \sin \left(kx + \phi + \frac{\pi}{2} \right)$$

также являются решениями системы (3.1). В последних формулах присутствует отрицательный экспоненциальный член вида $\exp \left(-(2\beta)^{-1} \left(1 + \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}} \right) t \right)$, который соответствует затуханию или диссипации.

Таким образом, при распространении колебаний в вязкоупругих по модели Максвелла стержнях присутствуют эффекты затухания и дисперсии.

6. Сохранение модифицированной энергии. Определим модифицированную “энергию” системы (3.1) как

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta}{\gamma} w^2 \right) (t, x) dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(\tau, x) dx$$

Замечание 1. Величину $\tilde{E}$ не совсем корректно называть энергией, ведь она имеет размерность $[\tilde{E}] = MT^{-2}$, вместо требуемого $L^2 MT^{-2}$.

Замечание 2. Как известно [1], полная механическая энергия стержня в отсутствии внешних сил и теплового расширения может быть найдена по формуле

$$E = T + \Pi, \quad T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\partial_t u)^2 dV, \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \partial_x u dV, \quad (6.1)$$

где T – кинетическая энергия стержня, Π – потенциальная энергия стержня, V – объем стержня, $dV = dx dy dz$ – элемент объема.

Справедливо утверждение о том, что модифицированная “энергия” сохраняется.

Теорема 2. Пусть пара функций u, w есть классическое решение уравнения (3.1) и функции $u(t, \bullet)$ и $w(t, \bullet)$ имеют компактный носитель в пространстве для любого $t \in \mathbb{R}$. Тогда функция $t \mapsto \tilde{E}(t)$ есть константа.

Доказательство. В самом деле, легко рассчитать

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\gamma} w \frac{\partial w}{\partial t} \right) (t, x) dx + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(t, x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\gamma} w \left(\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - w \right) + \frac{1}{\gamma} w^2 \right) (t, x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) (t, x) dx = 0 \end{aligned}$$

Интегрирование по частям в этом доказательстве корректно, поскольку функции u и w имеют компактный носитель в пространстве для любой временной координаты.

Замечание 3. В теореме 2 требование компактного носителя можно ослабить, например, $u \in C^2(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}))$ и $w \in C^1(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R})) \cap L^2([0, T] \times \mathbb{R})$ для любого $T > 0$.

Из сохранения модифицированной энергии следует, что задача (3.1), (3.2) не может иметь двух и более различных классических решений.

Теорема 3. Задача Коши (3.1)–(3.2) имеет не более одного классического решения, если оно существует.

Доказательство. Пусть существует два решения задачи Коши (3.1) и (3.2): (u_1, w_1) и (u_2, w_2) . Обозначим $u = u_1 - u_2$ и $w = w_1 - w_2$. Тогда пара функций u и w удовлетворяет задаче (3.1) и (3.2), в которой $\mu = \varphi = \psi = 0$. Тогда для любого $t \geq 0$ верно равенство $\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) = 0$. Отсюда следует, что на множестве $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ имеют место равенства $\partial_t u = 0$ и $w = 0$. Из первого из последних равенств следует, что функция u не зависит от t , так как она непрерывна, то в силу условия $u(0, x) = 0$ на всем множестве $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ выполняется $u = 0$. Из последних результатов следует, что $u_1 = u_2$ и $w_1 = w_2$.

7. Конечная скорость распространения волн. Для фиксированных $x_0 \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ рассмотрим конус прошлого с вершиной (t_0, x_0)

$$K(t_0, x_0) := \{(t, x) | 0 \leq t \leq t_0 \wedge |x - x_0| \leq \sqrt{\gamma/(\rho\beta)} |t_0 - t|\}$$

Теорема 4. Если $u \equiv \partial_t u \equiv w \equiv 0$ на отрезке $[x_0 - t_0 \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}, x_0 + t_0 \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}]$, то $u \equiv w \equiv 0$ внутри конуса $K(t_0, x_0)$.

Доказательство. Определим локальную модифицированную энергию как

$$\tilde{e}(t) = \frac{1}{2} \int_{x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta}{\gamma} w^2 \right) (t, x) dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^t d\tau \int_{x_0 - (t_0 - \tau) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - \tau) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} w^2(\tau, x) dx; \quad t \in [0, t_0]$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{e}'(t) &= \int_{x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\gamma} w \frac{\partial w}{\partial t} \right) (t, x) dx + \frac{1}{\gamma} \int_{x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} w^2(t, x) dx - \\ &- \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - \mathcal{W}(w)(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) (t, x) dx - \\
&- \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) - \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) - \mathcal{W}(w)(t) = \\
&= \int_{x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x) dx + \\
&+ (w \partial_t u) \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) - (w \partial_t u) \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) - \\
&- \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) - \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) - \mathcal{W}(w)(t); \quad t \in [0, t_0],
\end{aligned} \tag{7.1}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(u, w) &= \sqrt{\frac{\gamma \rho}{\beta}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma \rho}} w^2 \\
\mathcal{W}(w)(t) &= \int_0^t \sqrt{\frac{1}{\gamma \beta \rho}} \left(w^2 \left(\tau, x_0 - (t_0 - \tau) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) + w^2 \left(\tau, x_0 + (t_0 - \tau) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) \right) d\tau
\end{aligned}$$

В силу неравенства Коши–Шварца имеем

$$\pm w \partial_t u \leq \sqrt{\frac{\beta}{\gamma \rho}} w^2 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\gamma \rho}{\beta}} (\partial_t u)^2 \tag{7.2}$$

Подставляя (7.2) в (7.1), получаем

$$\tilde{e}'(t) \leq -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{\gamma \rho}{\beta}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \rho}} \right) \right) - \mathcal{W}(w)(t) \leq 0$$

В таком случае, $0 \leq e(t) \leq e(0) = 0$ для всех $t \in [0, t_0]$. Отсюда следует, что на множестве $K(t_0, x_0)$ имеют место равенства $\partial_t u = 0$ и $w = 0$. Из первого из последних равенств следует, что функция u не зависит от t , так как она непрерывна, то в силу условия $u(0, x) = 0$ при $x \in [x_0 - t_0 \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}, x_0 + t_0 \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}]$, на всем множестве $K(t_0, x_0)$ выполняется $u = 0$.

Таким образом, любое возмущение начальных данных, заданное вне отрезка $[x_0 - t_0 \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}, x_0 + t_0 \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}]$, не влияет на решение внутри $K(t_0, x_0)$. Следовательно, эффекты ненулевых начальных данных распространяются со скоростью, не превышающей $\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}$.

8. Классическое решение задачи Коши о свободных колебаниях. Формально найдем выражения для решения задачи (3.1)–(3.2). Дифференцируя первое уравнение системы (3.1) по x , а второе по t и выражая $\partial_t^2 \partial_x u$ из обоих уравнений, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\gamma}{\rho \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) &= 0; \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \\
w(0, x) &= \mu(x), \quad \partial_t w(0, x) = \frac{\gamma}{\beta} \psi'(x) - \frac{1}{\beta} \mu(x); \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Такая задача Коши легко интегрируется, и ее классическое решение существует и единственно [6]. Но для нахождения решения в явном аналитическом виде сделаем замену

$$w(t, x) = w_{KG}(t, x) \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right), \quad (8.1)$$

и в результате получим задачу Коши для уравнения Клейна–Гордона–Фока в виде

$$\frac{\partial^2 w_{KG}}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\gamma}{\rho\beta} \frac{\partial^2 w_{KG}}{\partial x^2}(t, x) - \frac{w_{KG}}{4\beta^2}(t, x) = 0; \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

$$w_{KG}(0, x) = \mu(x), \quad \partial_t w_{KG}(0, x) = \frac{\gamma}{\beta} \psi'(x) - \frac{1}{2\beta} \mu(x); \quad x \in \mathbb{R}$$

Выражение для w_{KG} можно взять из работы [7], а с учетом формулы (8.1) имеем

$$\begin{aligned} w(t, x) = & \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right) \left(\mu\left(x - \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta}} t\right) + \mu\left(x + \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta}} t\right) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right) \sqrt{\frac{\rho\beta}{\gamma}} \int_{x-t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x+t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} I_0\left(\frac{1}{2\beta} \sqrt{t^2 - \frac{\rho\beta(x-\xi)^2}{\gamma}}\right) \left(\frac{\gamma}{\beta} \psi'(\xi) - \frac{1}{2\beta} \mu(\xi)\right) d\xi + \\ & + \frac{t}{4} \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right) \sqrt{\frac{\rho}{\gamma\beta}} \int_{x-t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x+t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \frac{1}{4\beta} {}_0F_1\left(2; \frac{t^2 - \gamma^{-1}\rho\beta(x-\xi)^2}{16\beta^2}\right) \mu(\xi) d\xi; \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \varphi(x) + t\psi(x) + \frac{1}{\rho} \int_0^t d\lambda \int_0^\lambda \frac{\partial w}{\partial x}(\tau, x) d\tau = \\ = & \varphi(x) + t\psi(x) + \frac{1}{\rho} \int_0^t d\lambda \int_0^\lambda (16\beta)^{-1} \exp(-\tau/(2\beta)) \times \\ & \times \left(8\beta \sqrt{\frac{\rho\beta}{\gamma}} \int_{x-\tau\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x+\tau\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \frac{\rho(x-\xi)}{64\beta^2\gamma} {}_0F_1\left(2; \frac{\tau^2 - \beta\gamma^{-1}(x-\xi)^2}{16\beta^2}\right) (\mu(\xi) - 2\gamma\psi'(\xi)) d\xi + \right. \\ & + t \sqrt{\frac{\rho}{\beta\gamma}} \left(\mu\left(x + \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mu\left(x - \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) \right) + 8\beta \left(\mu'\left(x - \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) + \mu'\left(x + \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) \right) + \\ & + 4 \sqrt{\frac{\rho\beta}{\gamma}} \left(\mu\left(x - \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mu\left(x + \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - 2\gamma\psi'\left(x - \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) + 2\gamma\psi'\left(x + \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) \right) + \\ & \left. + 4\beta\tau \sqrt{\frac{\rho}{\beta\gamma}} \int_{x-\tau\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x+\tau\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \frac{\rho(\xi-x)}{64\beta^2\gamma} {}_0F_1\left(3; \frac{\tau^2 - \beta\gamma^{-1}(x-\xi)^2}{16\beta^2}\right) \mu(\xi) d\xi \right) d\tau; \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.3)$$

В формулах (8.2) и (8.3) использованы обозначения: I_n — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n и ${}_0F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Решение было построено формально, поэтому непосредственной проверкой убеждаемся, что функции u и w обладают необходимой степенью гладкости, удовлетворяют уравнениям (3.1) и начальным условиям (3.2), если, например, $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R})$.

Таким образом, построено в явном аналитическом виде классическое решение задачи Коши (3.1)–(3.2). Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 5. Пусть выполняются условия $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда задача (3.1)–(3.2) имеет единственное классическое решение, представленное формулами (8.2) и (8.3), которое непрерывно зависит от начальных данных.

Доказательство следует из рассуждений выше.

9. Классическое решение задачи Коши о вынужденных колебаниях. Рассмотрим начальную задачу (3.2)–(3.3). Ее решение можно искать в виде суммы

$$u_{\text{forced}} = u + u_p, \quad w_{\text{forced}} = w + w_p, \quad (9.1)$$

где пара функций (“общее” решение однородной системы) u, w есть решение задачи (3.1)–(3.2), а функции (частное решение неоднородной системы) u_p, w_p удовлетворяют уравнениям (3.3) и однородным граничным условиям

$$w_p(0, x) = u_p(0, x) = \partial_t u_p(0, x) = 0; \quad x \in \mathbb{R}$$

Фактически, при условии $f \in C^{1,4}([0, \infty) \times \mathbb{R})$, функции u_p, w_p построены в работах [6, 8], и они имеют вид [8]

$$\begin{aligned} w_p(t, x) = & \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right) \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta}} \int_0^t d\tau \int_{x-\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}(t-\tau)}^{x+\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}(t-\tau)} \left(\exp\left(\frac{\tau}{2\beta}\right) \times \right. \\ & \left. \times \partial_x f(\tau, \lambda) I_0\left(\frac{1}{2\beta} \sqrt{(t-\tau)^2 - \rho\beta\gamma^{-1}(x-\lambda)^2}\right) \right) d\lambda \\ u_p(t, x) = & \frac{1}{\rho} \int_0^t d\lambda \int_0^\lambda \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} + f \right) (\tau, x) d\tau \end{aligned} \quad (9.2)$$

Они принадлежат классам $C^3([0, \infty) \times \mathbb{R})$ и $C^{2,4}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ соответственно при условии $f \in C^{1,4}([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Кроме того, $\partial_t w_p(0, x) = 0$ и $\partial_t^2 w_p(0, x) = \gamma \rho^{-1} \beta^{-1} \partial_x f(0, x)$.

Единственность решения задачи устанавливается методом энергий, аналогично теореме 3.

Теорема 6. Пусть выполняются условия $f \in C^{1,4}([0, \infty) \times \mathbb{R})$, $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда задача (3.2)–(3.3) имеет единственное классическое решение u_{forced} и w_{forced} , представленное формулами (9.1), (9.2), (8.2) и (8.3), которое непрерывно зависит от начальных данных.

Доказательство следует из рассуждений выше.

Заключение. В данной работе показано, что задача Коши для одномерной системы уравнений с частными производными, описывающей продольные колебания вязкоупругого по модели Максвелла стержня, является корректной. Найдено ее решение в явном аналитическом виде. Также указаны некоторые качественные свойства решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 тт. М.: Физматлит, 2003. Т. VII: Теория упругости. 264 с.
2. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 418 с.
3. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: ГИТТЛ, 1949. 248 с.
4. Strikwerda J.C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. 2nd ed. Philadelphia: Soc. for Industr.&Appl. Math., 2004. 439 p.
5. Evans L.C. Partial Differential Equations. 2nd ed. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2010. 749 p.

6. Корзюк В.И., Рудько Я.В. Классическое решение задачи Коши для одномерного квазилинейного волнового уравнения // Докл. Нац. АН Беларуси. 2023. Т. 67. № 1. С. 14–19.
7. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
8. Корзюк В.И., Рудько Я.В. Частное решение задачи для системы уравнений из механики с негладкими условиями Коши // Изв. Нац. АН Беларуси. Сер. Физ.-мат. наук. 2022. Т. 58. № 3. С. 300–311.

Problem of Longitudinal Vibrations of a Viscoelastic Rod of Maxwell Type

V. I. Korzyuk^{a,b,#}, J. V. Rudzko^{a,##}, and V. V. Kolyachko^{b,###}

^a*Institute of Mathematics of the NAS of Belarus, Minsk, Belarus*

^b*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

[#]*e-mail: korzyuk@bsu.by*

^{##}*e-mail: janycz@yahoo.com*

^{###}*e-mail: vlad.kolyachko@yandex.ru*

In this paper, we study well-posedness in the sense of Hadamard of the Cauchy problem for a one-dimensional hyperbolic system of partial differential equations describing the longitudinal vibrations of a viscoelastic rod of Maxwell type with constant cross-section. We discuss some properties of the system and its solutions: the conservation of modified “energy”, the finite propagation speed, dispersion, and dissipation of solutions.

Keywords: longitudinal vibrations, Maxwell material, Cauchy problem, well-posed problem

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics. in 10 vol. Vol. 7. Theory of Elasticity. Moscow: Fizmatlit, 2003. 264 p. (in Russian)
2. Rzhanytsyn A.R. Theory of Creep. Moscow: Stroiizdat, 1968. 418 p. (in Russian)
3. Rzhanytsyn A.R. Some Questions of the Mechanics of Systems Deforming in Time. Moscow: GITTL, 1949. 248 p. (in Russian)
4. Strikwerda J.C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. 2nd ed. Philadelphia: Soc. for Industr.&Appl. Math., 2004. 439 p.
5. Evans L.C. Partial Differential Equations. 2nd ed. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2010. 749 p.
6. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation // Dokl. Nat. Acad. of Sci. Belarus, 2023, vol. 67, no. 1, pp. 14–19.
7. Polyanin A.D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2002. 800 p.
8. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. A particular solution of a problem for a system of equations from mechanics with nonsmooth Cauchy conditions // Proc. of the Nat. Acad. of Sci. Belarus. Ser. Phys.&Math., 2022, vol. 58, no. 3, pp. 300–311. (in Russian)