

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 87, вып. 4



МОСКВА 2023

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 87. Iss. 4

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,
Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udwalia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko,
A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov,
S.V. Nesterov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian,
I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

July–August

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

Виктор Филиппович Журавлёв (к восьмидесятилетию со дня рождения)	501
Инерциальная навигационная система нового типа <i>В. Ф. Журавлёв</i>	513
Кватернионные и бикватернионные методы и регулярные модели аналитической механики (обзор) <i>Ю. Н. Челноков</i>	519
Особенности статики и динамики тяжелого эллипсоида на шероховатой наклонной плоскости <i>Г. М. Розенблат</i>	557
Регулярная прецессия гиростата в трех силовых полях <i>В. Ю. Ольшанский</i>	571
О резонансных значениях параметров в задаче об устойчивости лагранжевых решений в близкой к круговой ограниченной задаче трех тел <i>А. П. Маркеев</i>	589
Оптимальное управление силой тяги при скоростном маневрировании в условиях сухого трения <i>С. А. Решмин</i>	604
О гибкости скользящей вертикальной опоры плоской конструкции <i>М. З. Досаев</i>	618
Ограничения в задаче поиска оптимальных траекторий сверхзвукового неманевренного самолета <i>С. А. Кумакиев, А. М. Шматков</i>	631
Об одном методе анализа устойчивости точек покоя в критических случаях <i>С. В. Нестеров</i>	642
Моделирование амплитуды поперечных колебаний стержневой системы при ударе падающего груза с учетом деформации в области контакта <i>А. А. Битюрин</i>	649
Обратные задачи для уравнения колебаний консольной балки по отысканию источника <i>О. В. Фадеева</i>	661
Аналитический метод в линейной трехмерной аэродинамике тонкого прямоугольного крыла <i>М. А. Сумбатьян, И. К. Самсонов</i>	670
Динамические режимы двухосного растяжения тонкой идеально жесткопластичной прямоугольной пластины <i>И. М. Цветков</i>	684
Влияние среднего давления и жесткости закрепления на изгиб цилиндрической оболочки <i>М. А. Ильгамов</i>	696

C O N T E N T S

Zhuravlev V.Ph. (on 80-th birthday)	501
New Type Inertial Navigation System <i>V. Ph. Zhuravlev</i>	513
Quaternion and Biquaternion Methods and Regular Models of Analytical Mechanics (Review) <i>Yu. N. Chelnokov</i>	519
Peculiarities of Statics and Dynamics of the Heavy Ellipsoid on the Rough Inclined Plane <i>G. M. Rozenblat</i>	557
Regular Precession of a Gyrostat in Three Force Fields <i>V. Yu. Ol'shanskii</i>	571
On Resonant Values of Parameters in the Problem on the Stability of Lagrangian Solutions in the Near-Circular Restricted Three-Body Problem <i>A. P. Markeev</i>	589
Optimal Traction Control during High-Speed Maneuvering in Dry Friction Conditions <i>S. A. Reshmin</i>	604
On Flexibility of a Sliding Vertical Support of a Flat Structure <i>M. Z. Dosaev</i>	618
Constraints in the Problem of Calculating Optimal Trajectories for a Supersonic Non-Maneuverable Aircraft <i>S. A. Kumakshev, A. M. Shmatkov</i>	631
On the One Method of Analyzing the Stability of Rest Points in Critical Cases <i>S. V. Nesterov</i>	642
Simulation of the Amplitude of Transverse Oscillations of the Rod System upon Impact of a Falling Load, Taking into account Deformation in the Contact Area <i>A. A. Bityurin</i>	649
Inverse Problems for the Equation of Vibrations of a Canister Beam to Find the Source <i>O. V. Fadeeva</i>	661
Analytical Method in the Linear Three-Dimensional Aerodynamics of a Thin Rectangular Wing <i>M. A. Sumbatyan, I. K. Samsonov</i>	670
Dynamic Regimes of Biaxial Stretching of a Thin Ideally Rigid-Plastic Rectangular Plate <i>I. M. Tsvetkov</i>	684
Effect of Mean Pressure and Fixing Rigidity on the Bending of Cylindrical Shell <i>M. A. Ilgamov</i>	696

**ВИКТОР ФИЛИППОВИЧ ЖУРАВЛЁВ
(К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)**

DOI: 10.31857/S003282352304015X, EDN: WKECDL



29-го августа 2023 года выдающемуся российскому ученому-механику, академику РАН, автору многих монографий и оригинального учебника по механике Виктору Филипповичу Журавлёву исполняется 80 лет.

Научная деятельность В.Ф. Журавлёва связана с Институтом проблем механики РАН, в аспирантуру которого он поступил по окончании МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1966 году. За время обучения в аспирантуре он одновременно получил второе высшее образование, закончив механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Виктор Филиппович провел глубокие исследования и получил практически значимые результаты в различных областях механики. Им построена оценка систематического ухода гироскопа в кардановом подвесе, решена задача о предельной точности идеального криогенного гироскопа. В его работах получила развитие двумерная модель сухого трения, в рамках которой вычислены силы взаимодействия двух контактирующих тел в условиях, когда зона контакта может быть сколь угодно мала, а относительное движение определяется как скоростью скольжения, так и угловой скоростью вращения. Приведены примеры систем, когда использование простой одномерной модели Кулона приводит к серьезным ошибкам. В частности, некорректной оказывается модель качения выпуклых тел без проскальзывания — распространенный пример неголономной связи.

В аналитической механике долгое время отсутствовали регулярные дифференциальные уравнения систем с односторонними связями. Эти уравнения, полученные в 1989 году В.Ф. Журавлёвым, нашли широкое применение в теории виброударных систем и позволили решить ряд задач, неразрешимых другими методами.

Особое внимание В.Ф. Журавлёв уделяет развитию приложений методов теории групп Ли к задачам механики. Им был предложен метод инвариантной нормализации динамических систем. В ранее известных методах порождающая система диагональная, а возмущения имеют полиномиальную форму. Новый алгоритм инвариантен к выбору исходных переменных, а потому подобных ограничений на вид нормализуемой системы не имеет. Метод впервые сведен к одномерной рекуррентной формуле и отличается большой вычислительной эффективностью при построении высших приближений.

Большое теоретическое и практическое значение имеет созданная им (совместно с академиком РАН Д.М. Климовым) теория волнового твердотельного гироскопа. По этой теме изданы две книги и около двадцати научных статей, результаты исследований нашли применение в промышленности.

Виктором Филипповичем Журавлёвым написана монография, посвященная аксиоматике механики, где в частности обсуждаются детали спора о “реальности” так называемых сил инерции. Много сил и таланта Виктор Филиппович уделяет воспитанию молодых ученых. Он является автором прекрасного учебника “Основы теоретической механики”, выдержавшего несколько переизданий. В течение ряда лет Виктор Филиппович заведовал кафедрой теоретической механики Московского физико-технического института (МФТИ). Он подготовил более двадцати кандидатов наук, многим ученым помог в работе над докторскими диссертациями.

Виктор Филиппович Журавлёв пользуется непререкаемым научным авторитетом среди ученых и специалистов в нашей стране и за рубежом. Он является Лауреатом премии Ленинского комсомола (1976), Государственной премии (1994), премии имени Н.Е. Жуковского (2014), награжден орденом “Знак Почета” (1982).

В 1990 году Виктор Филиппович был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 2003 году действительным членом РАН.

В.Ф. Журавлев на протяжении многих лет является членом редколлегии журнала “Прикладная математика и механика”, способствуя своей работой повышению научного уровня журнала и его авторитета.

Друзья, коллеги и ученики, редакционная коллегия журнала ПММ желают Виктору Филипповичу доброго здоровья, счастья и долгих лет активной творческой деятельности на благо развития механики и воспитания нового поколения ученых нашей страны.

Список основных научных трудов В.Ф. Журавлёва

1970

1. О статике неидеального шарикового подшипника // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 3. С. 171–175.
2. Задача о равновесии неидеального шарикового подшипника // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 72–77.

1971

3. Динамика ротора в неидеальных шариковых подшипниках // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 44–48.

1973

4. Порог балансируемости жестких роторов в неидеальных подшипниках // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 3. С. 18–23.

5. О движении свободного гироскопа при наличии внутренних возмущений // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 5. С. 14–21.

1975

6. О движении гироскопа в кардановом подвесе при наличии люфта на оси кожуха // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 4. С. 23–29. (совм. с Д.М. Климовым)

1976

7. К вопросу об оценках эффекта Магнуса // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 3. С. 541–543.

8. Об одном типе автоколебаний вращающегося ротора // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 1. С. 21–27.

9. Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 30–35.

10. Исследование методом усреднения вынужденных колебаний гироскопа с ударным поглотителем // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 18–22. (совм. с Е.А. Приваловым)

11. Обобщение теоремы Релея на гироскопические системы // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 606–610.

1977

12. Исследование некоторых виброударных систем методом негладких преобразований // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 6. С. 24–28.

1978

13. О некоторых свойствах конечных поворотов твердого тела при наличии неголономной связи // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 7–14. (совм. с Ю.К. Жбановым)

14. Исследование виброударной системы с ограниченным возбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 45–50. (совм. с А.И. Меняйловым)

15. Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 781–788.

1979

16. Явление самосинхронизации в скоростных гироскопических опорах // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 3–10. (совм. с А.А. Лапиным)

1982

17. О некоторых свойствах гироскопических систем в связи с концепцией Герца в механике // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 2. С. 15–19.

1983

18. К анализу силовых характеристик подвеса криогенного гироскопа // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 9–15. (совм. с В.М. Руденко)

19. Об устойчивости стационарных движений плоского тела в поле центральной силы // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 71–76.

20. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17–23. (совм. с Д.М. Климовым)

21. Метод рядов Ли в проблеме разделения движений в нелинейной механике // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 559–565.

22. Тепловой барьер точности гироскопов с неконтактным подвесом // Совр. вопр. матем. и мех. и приложения. Всесоюзная конф. (Москва, 16–17 апреля 1983 г.): Избр. докл. и сообщ. М.: МФТИ, 1983. С. 11–18. (совм. с А.Ю. Ишлинским и Д.М. Климовым)

1985

23. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с. (совм. с Д.М. Климовым)

24. О прецессии собственной формы колебаний сферической оболочки при ее вращении // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 147–151. (совм. с А.Л. Поповым)

25. Об электромагнитном излучении при соударении твердых тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 101–103.

1986

26. Механика шарикоподшипников гироскопов. М.: Машиностроение, 1986. 272 с. (совм. с В.Б. Бальмонтом)

27. Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 5–11.

28. К динамике упругого твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 93–97.

29. О применении одночленных групп Ли к проблеме асимптотического интегрирования уравнений механики // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 346–352.

1988

30. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с. (совм. с Д.М. Климовым)

31. Метод подобия в задачах динамики точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 6–12. (совм. с А.Ю. Ишлинским)

1989

32. Механика систем с односторонними связями // Усп. мех. 1989. № 2. С. 37–69.

33. Application of Lie group and computer algebra to nonlinear mechanics // Lecture Notes in Computer Sci. 1989. V. 378. P. 97–106. (совм. с Д.М. Климовым и В.М. Руденко)

1990

34. Матрицы и квадратичные формы. Основные понятия. Терминология // Сер. сб. научно-нормат. термин. 1990. Вып. 112. (совм. с А.Д. Мышкисом, Е.В. Панкратьевым, И.М. Ягломом и С.Д. Шеловым)

1992

35. Нутационные автоколебания свободного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 6. С. 13–16.

36. Об особых направлениях в пространстве конфигураций линейных колебательных систем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 16–23.

37. Об управлении формой колебаний в резонансных системах // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 827–836.

1993

38. Механика систем с неудерживающими связями. М.: Наука, 1993. 240 с. (совм. с Н.А. Фуфаевым)

39. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.

1995

40. Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 12–24. (совм. с Д.Д. Линчем)

1996

41. Исследование нелинейных колебаний составного маятника // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 160–166.

42. Теорема о телесном угле в динамике твердого тела // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 323–326.

1997

43. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 1997. 320 с.

44. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.

45. Новый алгоритм нормализации гамильтоновых систем по Биркгофу // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 12–17.

1998

46. О балансировке волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 4–16. (совм. с Ю.К. Жбановым)

47. О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 5–11.

48. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.

2000

49. Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 186–192.

50. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // Тр. конф. по теории колебаний и управлению (Москва, 29 ноября 2000 года). 2000. С. 29–32.

2001

51. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 319 с. (2-е изд.)

52. Об уходе волнового твердотельного гироскопа при наличии фазового сдвига в информационном канале // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 181–186.

53. К вопросу о теоремах И.И. Метелицына // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 541–546. (совм. с Ю.К. Жбановым)

54. Анализ условий, порождающих дрейф волнового твердотельного гироскопа // В сб.: VIII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. 2001. С. 67–74. (совм. с Е.А. Измайловым)

2002

55. Group-Theoretic Methods in Mechanics and Applied Mathematics. London; New York: Taylor&Francis, 2002. 302 p. (совм. с Д.М. Климовым)

56. Обобщенный маятник Фуко в режиме управления углом прецессии // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 3–7.

57. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356–365.

58. Об одной модели механизма движения змеи // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 534–538.

59. Нормальная форма возмущений нелинейных колебательных систем // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 922–928.

2003

60. О дрейфе волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) на вращающемся основании при управлении квадратурой в режимах “быстрого” и “медленного” времени // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 13–18.

61. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81–88.

2004

62. О геометрии конических вращений // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 3. С. 11–21.

63. Дрейф несовершенного ВТГ // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 19–23.

2005

64. О решении уравнений линейного осциллятора относительно матрицы инерциального триэдра // Докл. РАН. 2005. Т. 404. № 4. С. 491–495.

65. О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел // Усп. мех. 2005. № 3. С. 58–76.

66. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 3–14. (совм. с А.А. Киреенковым)

67. Бесплатформенная инерциальная система минимальной размерности (пространственный осциллятор — датчик полной инерциальной информации) // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 5–10.

68. О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 6. С. 157–168. (совм. с Д.М. Климовым)

69. Глобальное движение симметричного тела с сухим трением // В сб.: XII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. 2005. С. 255–261. (совм. с Д.М. Климовым)

2006

70. Предельная точность идеального гироскопа // Докл. РАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 200–202.

71. К вопросу о предельной точности неконтактного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 4. С. 5–9.

72. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 3–9.

73. Третья задача механики в случае изотропного осциллятора // Сб. научно-метод. статей. Теор. мех. Вып. 26. М.: МГУ, 2006. С. 3–11.

2007

74. О разложении нелинейных обобщенных сил на потенциальную и циркулярную компоненты // Докл. РАН. 2007. Т. 414. № 5. С. 622–624.

75. Влияние подвижности центра резонатора на работу волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 6. С. 14–24. (совм. с Ю.К. Жбановым)

2008

76. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с. (3-е изд.)

77. Глобальное движение кельтского камня // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 8–16. (совм. с Д.М. Климовым)

78. Анализ структуры обобщенных сил в уравнениях Лагранжа // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 6. С. 3–8.

2009

79. Псевдолинейное приближение в методе осреднения // Докл. РАН. 2009. Т. 426. № 3. С. 325–327.

80. О механизме явления шимми // Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 6. С. 761–764. (совм. с Д.М. Климовым)

81. Спектральные свойства линейных гироскопических систем // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 3–6.

82. Автоколебательный износ фрикционной пары // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 6. С. 3–8. (совм. с О.Н. Озёрским)

83. О некоторых деталях уникального эксперимента “Gravity Probe-B” // Гироскопия и навигация. 2009. № 1 (64). С. 3–9.

2010

84. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: НИЦ “Регул. и хаотич. дин.”; Ин-т компют. исслед., 2010. 184 с. (совм. с В.В. Андроновым)

85. Асимптотическая симметризация гамильтоновых систем. М.: МФТИ, 2010. 53 с. (совм. с А.Г. Петровым и М.М. Шундерюком)

86. К истории закона сухого трения // Докл. РАН. 2010. Т. 433. № 1. С. 46–47.

87. Теория явления шимми // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 22–29. (совм. с Д.М. Климовым)

88. Ударные автоколебания линейного двигателя // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 3–7.

89. Отклик на статью А.В. Борисова и И.С. Мамаева “Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неавтономных систем” // Нелин. дин. 2010. Т. 6. № 2. С. 365–369.

90. Ответ А.В. Борисову // Нелин. дин. 2010. Т. 6. № 3. С. 671–674.

2011

91. О колебаниях колесного экипажа при наличии трения // Докл. РАН. 2011. Т. 436. № 5. С. 627–630. (совм. с Г.М. Розенблатом)

92. О неустойчивости экипажа в вертикальной плоскости при прямолинейном движении с учетом сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 3–17. (совм. с Г.М. Розенблатом)

93. Отклик на работу В.В. Козлова “Лагранжева механика и сухое трение” (НД, 2010. Т. 6. № 4) // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 1. С. 147–149.

94. О некоторых задачах динамики твердого тела с сухим трением // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–2. С. 133–134. (совм. с Д.М. Климовым)

95. Волновой твердотельный гироскоп: современное состояние, некоторые аспекты // Актуальные пробл. авиац. и аэрокосм. систем: процессы, модели, эксперимент. 2011. № 2 (33). С. 118–123.

2012

96. О плоских автоколебаниях колеса на консольной подвеске // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 2. С. 3–8.

97. Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 3. С. 3–11. (совм. с М.А. Бронцовом)

98. Понятие связи в аналитической механике // Нелин. дин. 2012. Т. 8. № 4. С. 853–860.

99. К вопросу о корректности постановки задач качения твердых тел в неголономной форме // Сб. научно-метод. статей. Теор. мех. Вып. 28. М.: МГУ, 2012. С. 63–68.

2013

100. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского: Системы с качением. Неголономные связи. М.: Либроком, 2013. 192 с. (совм. с Г.М. Розенблатом)

101. Дело его жизни. К 100-летию со дня рождения академика А.Ю. Ишлинского // Вестн. РАН. 2013. Т. 83. № 10. С. 918. (совм. с Д.М. Климовым, Ю.К. Жбановым)

102. Курсовые автоколебания железнодорожных вагонов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 3–8.

103. К истории закона сухого трения // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 4. С. 13–19.

104. Обзор научных работ А.Ю. Ишлинского к столетию со дня его рождения // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 5–12.

105. Новая модель шимми // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 13–23. (совм. с Д.М. Климовым и П.К. Плотниковым)

106. Новая модель шимми // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 32. (совм. с Д.М. Климовым и П.К. Плотниковым)

2014

107. О волчке Лагранжа и маятнике Фуко в наблюдаемых переменных // Докл. РАН. 2014. Т. 454. № 2. С. 168–172. (совм. с А.Г. Петровым)

108. Бесплатформенная инерциальная навигационная система маятникового типа (БИНС МТ) // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 6–17.

109. Явление шимми с позиций поликомпонентного сухого трения // Космонавт. и ракетостр. 2014. № 1 (74). С. 7–14.

110. 500 лет истории закона сухого трения // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2014. № 2 (53). С. 21–31.

111. Способ и устройство для определения пластов, содержащих углеводороды. Патент на изобретение RU 2508448 C1, 27.02.2014. Заявка № 2012149776/03 от 22.11.2012. (совм. с Д.М. Климовым, С.В. Нестеровым и А.С. Чурсиным)

2015

112. О прецессии эллиптической формы колебаний кругового кольца вследствие нелинейных эффектов // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 1. С. 3–8.

113. Волновой твердотельный гироскоп, содержащий m информационных и n управляющих электродов // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4. С. 11–15.

114. Еще раз о динамике кельтского камня (комментарий к статьям А.В. Борисова, И.С. Мамаева “Странные аттракторы в динамике кельтских камней” и А.В. Борисова, А.О. Казакова и С.П. Кузнецова “Нелинейная динамика кельтского камня: неголономная модель”) // УФН. 2015. Т. 185. № 12. С. 1337–1338.

115. Инерциальная навигационная система нового типа // Научные чтения по авиации, посв. памяти Н.Е. Жуковского. 2015. № 3. С. 15–21.

116. Трехкомпонентный измеритель угловой скорости на основе сферического гироскопа с электростатическим подвесом. Патент на полезную модель RU 155046 U1, 20.09.2015. Заявка № 2015121518/28 от 04.06.2015. (совм. с П.К. Плотниковым и А.О. Кузнецовым)

2016

117. О некорректных задачах механики // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 36–41.

118. Двумерный осциллятор Ван дер Поля с внешним управлением // Нелин. дин. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.

119. Волновой твердотельный гироскоп – инерциальный датчик нового поколения с комбинированным режимом функционирования // Инновац., информац. и коммуникац. технол. 2016. № 1. С. 425–431. (совм. с С.Е. Переляевым)

120. Трехкомпонентный измеритель угловой скорости на основе сферического гироскопа с электростатическим подвесом // XXIII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. 2016. С. 158–161. (совм. с П.К. Плотниковым и А.О. Кузнецовым)

2017

121. Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд. Ким Л.А., 2017. 194 с. (совм. с Д.М. Климовым и Ю.К. Жбановым)

122. Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. М.: Ленанд, 2017. 240 с. (совм. с Г.М. Розенблатом)

123. О “парадоксе” тормозной колодки // Докл. РАН. 2017. Т. 474. № 3. С. 301–302.

124. Некорректные задачи механики // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.: Приборостр. 2017. № 2 (113). С. 77–85.

2018

125. Эффект инертности упругих волн в упругих системах с осевой симметрией // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 83–88.

126. Температурный дрейф волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 3. С. 3–11.

127. Теоретические предпосылки к обоснованию возможности использования гироскопа Ковалевской в качестве трехкомпонентного измерителя угловой скорости // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 6–15. (совм. с П.К. Плотниковым)

128. Об устойчивости управления бесплатформенной инерциальной системой маятникового типа // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 15–18.
129. Wave solid-state gyroscope – the inertial sensor of new generation // Inform. Innov. Technol. 2018. № 1. P. 469–473. (совм. с С.Е. Переляевым и А.В. Алёхиным)
130. Модели и задачи механики: вопросы корректности по Адамару // Сб. научн.-метод. статей. Сер. “Теор. мех.”. Т. 30. М.: МГУ, 2018. С. 19–26.
131. Одногироскопный измеритель трех углов поворотов подвижного объекта на электростатическом подвесе // Юбилейная XXV С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. 2018. С. 232–236. (совм. с Б.Е. Ландау и П.К. Плотниковым)
132. Бесплатформенная инерциальная навигационная система минимальной размерности маятникового типа // Инновац., информац. и коммуникац. технол. 2018. № 1. С. 440–445. (совм. с С.Е. Переляевым)
133. Способ считывания и управления колебаниями волнового твердотельного гироскопа. Патент на изобретение RU 2670245 С1, 19.10.2018. Заявка № 2018104078 от 02.02.2018. (совм. с Д.М. Климовым и С.Е. Переляевым)
134. Устройство для определения коэффициента трения качения. Патент на полезную модель RU 177936 U1, 16.03.2018. Заявка № 2017127950 от 04.08.2017. (совм. с Д.М. Климовым, В.В. Филатовым, Е.А. Приваловым, Е.С. Нехаевой, А.А. Загорданом, А.С. Копыловым и А.В. Крапивко)
135. Одногироскопный трехкомпонентный измеритель углов поворотов объекта на электростатическом подвесе. Патент на полезную модель RU 176676 U1, 25.01.2018. Заявка № 2017101033 от 11.01.2017. (совм. с В.Г. Пешехоновым, Б.Е. Лурье и П.К. Плотниковым)
136. Strapdown inertial navigation system of minimum dimension (3D oscillator as a complete inertial sensor) // Dgon Inertial Sensors&Systems (ISS) Sept. 11–12. 2018. Inst. Flight Guidance (IFF), German Inst. Navigation (DGON). Braunschweig, Germany (Techn. Univ. Braunschweig), 2018. P. P06. (совм. с С.Е. Переляевым и Д.Е. Бородулиным)

2019

137. Основания механики: О проблемах аксиоматики. М.: Ленанд, 2019. 100 с.
138. К вопросу использования компьютерной механики в теории инерциальных навигационных систем // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 48–62. (совм. с Д.М. Климовым и П.К. Плотниковым)
139. Вопросы теории и математического моделирования процессов функционирования одногироскопного измерителя трех углов поворотов подвижного объекта // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27. № 2 (105). С. 150–161. (совм. с Б.Е. Ландау и П.К. Плотниковым)
140. Некорректные задачи механики // 10-я Межд. школа-конф. молод. ученых “Волны и вихри в сложных средах”. Сб. матер. школы. М.: ООО “Премиум-принт”, 2019. С. 166–172.
141. Миниатюрный волновой твердотельный гироскоп нового поколения для бескарданных инерциальных навигационных систем беспилотных летательных аппаратов // XXVI С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. С.-Петербург, 2019. С. 250–254. (совм. с С.Е. Переляевым, Б.П. Бодуновым и С.Б. Бодуновым)
142. Миниатюрный полусферический и сферический резонансный гироскоп нового поколения для бескарданных инерциальных навигационных систем беспилотных летательных аппаратов // Инновац., информац. и коммуникат. технол. 2019. № 1. С. 433–438. (совм. с С.Е. Переляевым)

143. 3-d micromachined spherical shell resonators: implementation vision // Inform. Innovative Technol. 2019. V. 1. № 1. P. 83–90. (совм. с С.Е. Переляевым)

144. The generalized Foucault pendulum is a 3d integrating gyroscopes using the three-dimensional precession of standing waves in a rotating spherically symmetric elastic solid // 2019 DGON Inertial Sensors&Syst. (ISS). IEEE Catalog Number: CFP1957W-ART. Technische Univ. Braunschweig Inst. Flight Guidance (IFF) German Inst. Navigation (DGON) Braunschweig, Germany, 2019. P. P04-1–P04-12. (совм. с С.Е. Переляевым и Д.Е. Бородулиным)

145. Способ считывания и управления колебаниями волнового твердотельного гироскопа. Патент на изобретение RU 2704334 C1, 28.10.2019. Заявка № 2019109616 от 02.04.2019. (совм. с Д.М. Климовым, С.Е. Переляевым и А.В. Алёхиным)

2020

146. Пространственный осциллятор Ван-дер-Поля. Технические приложения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 1. С. 158–164.

147. О формировании обратных связей в пространственном осцилляторе Ван-дер-Поля // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 2. С. 151–157.

148. Estimates of solutions during motion of the Euler – Poinso top and explanation of the experiment with Dzhani-bekov’s nut // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16. № 3. P. 517–525. (совм. с Г.М. Розенблатом)

149. Принципиальные вопросы теории новых гироскопических датчиков семейства “обобщенный маятник Фуко” и прикладные аспекты ее реализации в инженерной практике современной гироскопии // XXVII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. Т. 2. С.-Петербург, 2020. С. 262–272. (совм. с С.Е. Переляевым, Б.П. Бодуновым и С.Б. Бодуновым)

150. Current state and scientific and technological forecast of a revolutionary breakthrough in wave solid-state gyroscope technology // Int. Sci. – Pract. Conf. “Information Innovative Technol.” 2020. V. 1. P. 113–119. (совм. с С.Е. Переляевым)

151. Принципиальная теория управления обобщенным маятником Фуко и прикладные аспекты ее реализации в современных волновых твердотельных гироскопах // 13-я Мультиконф. по проблемам управления. С.-Петербург, 2020. С. 13–17. (совм. с Б.П. Бодуновым, С.Б. Бодуновым, К.Б. Сагдеевым и С.Е. Переляевым)

2021

152. Плоская динамика однородного параллелепипеда с сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 3–5.

153. Анализ действия возмущений линейных резонансных систем с двумя степенями свободы // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 2. С. 42–50. (совм. с А.Г. Петровым)

154. Пространственный эффект инертности упругих волн на сфере // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 3. С. 3–6. (совм. с Д.М. Климовым)

155. Теория двумерного осциллятора Ван-дер-Поля. Технические приложения в новых волновых твердотельных гироскопах // 28-я С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам (МКИНС). 2021. Т. 1. С. 307–311. (совм. с С.Е. Переляевым, Б.П. Бодуновым и С.Б. Бодуновым)

156. Spatial Van der Pol oscillator. Technical applications in gyroscopy // 2021 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS). IEEE. 2021. P. 1–18. (совм. с А.А. Скрипкиным и С.Е. Переляевым)

2022

157. О некоторых проблемах экспериментальной проверки общей теории относительности (ОТО) // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 3. С. 329–336.

158. Пространственный эффект инертности упругих волн на сфере. Технические приложения в современной гироскопии // XXIX С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. 2022. С. 276–284. (совм. с С.Е. Переляевым)

159. Устройство для определения характеристик сил трения качения и скольжения. Патент на полезную модель 213730 U1, 27.09.2022. Заявка № 2021136686 от 13.12.2021. (совм. с Д.М. Климовым, В.В. Филатовым, Е.А. Приваловым, Е.С. Нехаевой, А.А. Загорданом, А.С. Копыловым и А.С. Садилыным)

УДК 531

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИОННАЯ СИСТЕМА НОВОГО ТИПА

© 2023 г. В. Ф. Журавлёв^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: zhurav43@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 21.03.2023 г.

После доработки 15.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Инерциальная система нового типа обладает минимально возможной размерностью. Она отличается от уже известных инерциальных систем, платформенной и бесплатформенной, тем, что позволяет обходиться без гироскопов и блоков интегрирования уравнений Пуассона, совмещая в себе одновременно и функции датчика кажущегося ускорения.

Ключевые слова: инерциальная навигация, изотропный осциллятор, уравнение Риккати

DOI: 10.31857/S0032823523040161, EDN: MLOLEX

1. Введение. Идея инерциальной навигации в свободном пространстве крайне проста: на борту движущегося объекта достаточно разместить гиростабилизированную платформу, оси которой параллельны осям какой-либо инерциальной системы координат, на платформе закрепить три взаимно ортогональных акселерометра и сигналы с них, пропорциональные компонентам абсолютного ускорения подвижного объекта, дважды проинтегрировать. Это дает абсолютную скорость и координаты объекта в абсолютном пространстве.

Естественный шаг в развитии этой идеи состоял в том, что блок акселерометров можно крепить неподвижно на самом объекте, обходясь без гиростабилизированной платформы. Тогда показания акселерометров будут пропорциональны компонентам абсолютного ускорения в проекциях на связанные с объектом оси и перед тем как, осуществлять интегрирование этих показаний, необходимо их перепроектировать на оси инерциальной системы отсчета. Для этого следует предварительно измерить угловую скорость объекта в проекциях на подвижные оси, после чего проинтегрировать уравнения Пуассона, позволяющие вычислить матрицу направляющих косинусов между осями подвижной и инерциальной систем координат.

Технически реализация бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) проще, чем платформенной. Для этого требуется три акселерометра, три гироскопа и интеграторы линейных ускорений и уравнений Пуассона.

БИНС можно еще более упростить, если удастся наблюдать оси, параллельные инерциальным осям непосредственно на самом объекте, не прибегая к помощи гиростабилизированной платформы. Это позволит строить матрицу поворота, обходясь без гироскопов и блока интегрирования уравнений Пуассона.

Реализовать эту идею принципиально нетрудно. Для этого достаточно наблюдать на борту подвижного объекта колебания пространственного изотропного осциллятора. Пространственный изотропный осциллятор это точечная масса, закрепленная на

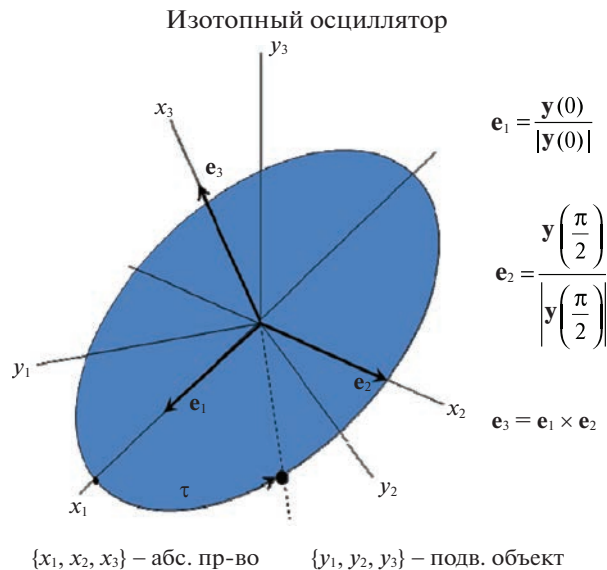


Рис. 1.

объекте посредством трех взаимно ортогональных пружинок одинаковой жесткости. Если предположить вначале, что подвижный объект совершает только вращение вокруг неподвижной точки, то любое свободное движение этого осциллятора представляет собой эллиптическую траекторию, не меняющую свою ориентацию по отношению к инерциальным осям, как бы ни двигался подвижный объект (рис. 1).

Если снять показание осциллятора в момент его нахождения в максимально удаленной от точки подвеса точке эллипса M и в ближайшей к центру точке N и вычислить векторное произведение соответствующих единичных векторов $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, то матрица $A = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\|$, составленная из этих векторов и будет искомой матрицей поворота, переводящей подвижную систему отсчета y_1, y_2, y_3 в инерциальную x_1, x_2, x_3 .

В общем случае ускоренного движения центр рассматриваемого эллипса будет смещаться в сторону, противоположную ускорению и перед выполнением указанных выше процедур следует выделить из показаний осциллятора гармоническую часть. Оставшаяся непериодическая часть, пропорциональная абсолютному ускорению может быть использована для построения информации о движении точки подвеса осциллятора. То есть изотропный осциллятор может использоваться не только для построения матрицы поворота, но и для построения вектора абсолютного ускорения.

Навигация в окрестности Земли требует дополнительного знания гравитационного поля в окрестности подвижного объекта.

Предлагаемая бесплатформенная инерциальная система является системой маятникового типа (БИНС МТ).

2. Получение инерциальной информации. Траектория изотропного осциллятора (центр масс электростатического шара или центр приведенной массы в упругом подвесе) наблюдается в осях y_1, y_2, y_3 , жестко связанных с подвижным объектом. Эти оси ориентированы по осям симметрии поворота поддерживающих и наблюдающих электродов.

Будем предполагать вначале, что подвижный объект вращается относительно инерциального пространства с произвольной угловой скоростью вокруг неподвижной точ-

ки. Если помимо поддерживающих сил на осциллятор никаких других сил не действует, то при произвольных начальных условиях осциллятор описывает эллиптическую траекторию, которая в безразмерном времени будет удовлетворять уравнениям

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \quad (2.1)$$

Нас будет интересовать вычисление ортогональной матрицы поворота подвижного объекта, или, что то же самое, связанной с объектом системы $\mathbf{y}$ относительно инерциальной системы $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{y} \quad (2.2)$$

В системе отсчета связанной с самим объектом, уравнения движения примут вид

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} + 2A^T \dot{A} \dot{\mathbf{y}} + A^T \ddot{A} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.3) можно рассматривать, как дифференциальные уравнения второго порядка относительно матрицы поворота $A(t)$:

$$\ddot{A}\mathbf{y} + 2\dot{A}\dot{\mathbf{y}} + A(\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

в которых $\mathbf{y}(t)$ — известная из наблюдений функция времени.

Заметим, что уравнение (2.4) допускает понижение порядка. Это можно сделать следующим образом. Введем обозначение для матрицы угловой скорости $\Omega = A^T \dot{A}$. Тогда из (2.3) получим $\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} + -2\Omega\dot{\mathbf{y}} - A^T \ddot{A} \mathbf{y}$.

Покажем, что

$$A^T \ddot{A} = \dot{\Omega} + \Omega^2$$

Действительно:

$$\dot{\Omega} = d(A^T \dot{A})/dt = \dot{A}^T \dot{A} + A^T \ddot{A}, \quad \text{а} \quad \Omega^2 = -\Omega^T \Omega = -\dot{A}^T A A^T \dot{A} = -\dot{A}^T \dot{A},$$

откуда и следует утверждение.

Поэтому (2.4) можно переписать в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{\Omega}\mathbf{y} = -\Omega^2\mathbf{y} - 2\Omega\dot{\mathbf{y}} - \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{y}, \quad \dot{A} = A\Omega, \quad (2.5)$$

в которой первое уравнение относительно матрицы угловой скорости отделилось. Оно является матричным уравнением Риккати и может решаться независимо. После того как $\Omega(t)$ найдено второе уравнение системы (уравнение Пуассона) позволяет найти искомую матрицу поворота $A(t)$. Уравнение Риккати нелинейное и это цена, которую приходится платить за понижение порядка.

В предлагаемой БИНС МТ уравнение (2.4) решается на борту подвижного объекта приближенно следующим образом. Будем предполагать, что частота собственных колебаний осциллятора много больше модуля угловой скорости подвижного объекта, тогда приближенно решение системы (2.4) относительно матрицы $A(t)$ можно искать в виде кусочно-постоянной функции, считая $A(t) = \text{const}$ для $2\pi(n-1) < t < 2\pi n$, где n пробегает все целые значения.

Известно, что последовательность ступенчатых функций равномерно сходится к функции $A(t)$ тогда и только тогда, когда эта функция непрерывная, или содержит разрывы первого рода. Это означает, что для любой заданной точности вычисления матрицы $A(t)$ всегда можно выбрать период собственных колебаний осциллятора таким, что заданная точность будет гарантирована.

На каждом таком интервале решение системы (2.4) имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{u} \cos t + \mathbf{v} \sin t, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — трехмерные векторы произвольных постоянных. Такое решение является, очевидно, точным для уравнений в инерциальной системе отсчета. Приближенное решение (2.6) имеет прозрачный смысл — за время одного колебания осциллятора его форма колебаний в связанной системе меняется пренебрежимо мало.

Траектория, определяемая соотношениями (2.6), представляет собой параметрическую запись произвольного эллипса, включая в качестве частных случаев, проходящие через начало координат отрезки прямых и окружности с центром в том же начале. Введем следующие обозначения (рис. 1): $\mathbf{e}_1$ — единичный вектор большой полуоси эллипса, r — длина этой полуоси, $\mathbf{e}_2$ — единичный вектор малой полуоси, k — длина этой полуоси, $\mathbf{e}_3$ — единичный вектор перпендикуляра к плоскости эллипса: $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, поскольку этот эллипс неподвижен в инерциальном пространстве, оси инерциальной системы отсчета x_1, x_2, x_3 можно направить по введенным единичным векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, тогда эти векторы будут являться столбцами искомой матрицы поворота A : $A = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\|$.

Матрица A позволяет связать запись эллипса в подвижных осях с его записью в инерциальных:

$$A(\mathbf{u} \cos t + \mathbf{v} \sin t) = \begin{vmatrix} r \cos(t + \tau) \\ k \sin(t + \tau) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix} \cos t + \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix} \sin t, \quad (2.7)$$

где угол τ определяет положение точки на эллипсе в момент времени $t = 0$.

Выразим эту матрицу явно через векторы произвольных постоянных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Для этого заметим, что соотношение (2.7) эквивалентно следующим двум соотношениям

$$A\mathbf{u} = \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix}, \quad A\mathbf{v} = \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Вычислим векторное произведение векторов (2.8)

$$A\mathbf{u} \times A\mathbf{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ rk \end{vmatrix} = A(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad (2.9)$$

Величина $K = rk$, представляющая собой модуль момента количества движения колеблющейся частицы, носит название квадратуры (πrk — площадь описываемого эллипса).

Поскольку, в силу инвариантности векторного произведения по отношению к группе вращения, имеет место тождество $A\mathbf{u} \times A\mathbf{v} = A(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, то в результате можем записать следующее матричное равенство

$$A\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \begin{vmatrix} r \cos \tau & -r \sin \tau & 0 \\ k \sin \tau & k \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & rk \end{vmatrix} = B, \quad (2.10)$$

которое может быть явно разрешено относительно матрицы A если $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq 0$:

$$A = B\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^{-1} \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq 0) \quad (2.11)$$

Если $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, то эллипс вырождается в отрезок прямой, информация о повороте объекта вокруг этой прямой теряется.

Если выразить r, k и τ через векторы произвольных постоянных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, то матрица A , определяющая ориентацию эллипса (2.6) относительно исходного трехгранника, будет выражена только через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, т.е. только через данные наблюдений. Поскольку в случае вращения этого трехгранника эллипс (2.6) остается неподвижным в инерциальной системе отсчета, то матрица A определяет ориентацию подвижного объекта в абсолютном пространстве.

Для нахождения требуемых параметров вычислим скалярные произведения векторов (2.8) друг на друга и на самих себя.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{u} &= \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix}^T = r^2 \cos^2 \tau + k^2 \sin^2 \tau \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} &= \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix}^T = (k^2 - r^2) \cos \tau \sin \tau \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} &= \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix}^T = r^2 \sin^2 \tau + k^2 \cos^2 \tau \end{aligned} \quad (2.12)$$

Соотношения (2.12) позволяют найти

$$\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = r^2 + k^2, \quad \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2 = (r^2 - k^2) \cos 2\tau \quad (2.13)$$

Это дает возможность получить окончательно

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + \sqrt{(\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2)^2 + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \right]} \\ k &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 - \sqrt{(\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2)^2 + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \right]}, \quad \operatorname{tg} 2\tau = \frac{2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2}, \quad \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Заметим, что входящая в (2.10) и (2.11) квадратура $K = rk$ также может вычисляться непосредственно через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Из (2.14) следует

$$rk = \sqrt{\mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \quad (2.15)$$

В случае, если $\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2 = 0$ и одновременно $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, то угол τ не определен и траекторией точки, как это видно из (2.14) является окружность.

Равенства (2.14) совместно с (2.11) завершают построение матрицы A , т.е. матрицы ориентации подвижного триэдра относительно неподвижного в случаях, когда траектория осциллятора в инерциальной системе отсчета не является ни отрезком прямой, ни окружностью.

Выражения (2.11) и (2.14) носят общий характер, они не зависят от того, каким образом вычисляются по данным измерений векторные константы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ между тем эти выражения существенно упрощаются, если конкретизировать процедуру измерения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Будем считать, что для измерений используется отсчетный генератор, частота которого равна частоте рассматриваемого осциллятора. Этот генератор позволяет определять $\mathbf{y}(t)$ в избранные моменты времени. Поэтому в соответствии с (2.6) необходимые константы могут быть найдены так

$$\mathbf{u} = \mathbf{y}(2\pi(n-1)), \quad \mathbf{v}(\pi/2 + 2\pi(n-1)); \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Далее, посредством обратной связи можно вводить поправку на частоту генератора, пропорциональную скалярному произведению векторов (2.16): $\dot{\tau} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$. В силу (2.12) $\dot{\tau} = a(k^2 - r^2) \sin \tau \cos \tau$ и при $a > 0$ генератор настраивается на асимптотически устойчивый режим, при котором $\tau = 0$. В выбранные таким образом моменты измерения произведение $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ и формулы (2.14) приобретают вид

$$r = |\mathbf{u}|, \quad k = |\mathbf{v}|, \quad \tau = 0, \quad (2.17)$$

что позволяет найти матрицу в виде

$$A = \begin{bmatrix} |\mathbf{u}| & 0 & 0 \\ 0 & |\mathbf{v}| & 0 \\ 0 & 0 & |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \end{bmatrix} \left\| \mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{u} \times \mathbf{v} \right\|^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} & \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} & \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \end{bmatrix}^T \quad (2.18)$$

В последнем переходе в (2.18) обратная матрица заменена на транспонированную в силу ее ортогональности.

Текущая информация о $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ получается посредством снятия показаний об $\mathbf{y}(t) = \mathbf{u} \cos t + \mathbf{v} \sin t$ с электродов по всем трем осям с последующим разделением косинусной и синусной составляющих.

Управление эллиптической траекторией с целью ее стабилизации осуществляется так же, как это делается в волновом твердотельном гироскопе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлёв В.Ф. Бесплатформенная инерциальная система минимальной размерности // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 5–10.
2. Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К. Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Ким Л.А., 2017. 194 с.
3. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.

The New Type of Inertial Navigation Systems

V. Ph. Zhuravlev^{a, #}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: zhurav43@ipmnet.ru*

An inertial system of a new type has the smallest possible dimension. It differs from the already known inertial systems, platform and strapdown, in that it allows you to do without gyroscopes and blocks for integrating Poisson's equations, simultaneously combining the functions of an apparent acceleration sensor.

Keywords: inertial navigation, isotropic oscillator, Riccati equation

REFERENCES

1. Zhuravlev V.Ph. A strapdown inertial system of minimum dimension (A 3D oscillator as a complete inertial sensor) // Mech. Solids, 2005, vol. 40, no. 5, pp. 1–5.
2. Klimov D.M., Zhuravlev V.F., Zhdanov Yu.K. Quartz Hemispherical Resonator (Wave Solid-State Gyroscope). Moscow: Kim L.A., 2017. 194 p. (in Russian)
3. Ishlinskii A.Yu. Orientation, Gyroscopes, and Inertial Navigation Moscow: Nauka, 1976. (in Russian)

УДК 531.36

**КВАТЕРНИОННЫЕ И БИКВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ
МОДЕЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ (ОБЗОР)**© 2023 г. Ю. Н. Челноков^{1,*}¹*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия***e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 22.05.2023 г.

После доработки 15.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Работа носит обзорный аналитический характер. Излагаются кватернионные и бикватернионные методы описания движения, модели теории конечных перемещений и регулярной кинематики твердого тела, основанные на использовании четырехмерных вещественных и дуальных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона). Эти модели, в отличие от классических моделей кинематики в углах Эйлера–Крылова и в их дуальных аналогах, не имеют особенностей типа деления на ноль и не содержат тригонометрических функций, что повышает эффективность аналитического исследования и численного решения задач механики, инерциальной навигации и управления движением. Обсуждается проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, лежащих в основе небесной механики и механики космического полета (астродинамики), с помощью использования параметров Эйлера, четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, нашедшие широкое применение в небесной механике и астродинамике. Излагаются кватернионные методы регуляризации, имеющие ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля, и различные регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел (как для абсолютного, так и для относительного движения), которые целесообразно использовать для прогноза и коррекции орбитального движения небесных и космических тел.

Ключевые слова: аналитическая механика, геометрия движения, регулярная кинематика, механика космического полета (астродинамика), возмущенная пространственная задача двух тел, регуляризация особенностей, порождаемых гравитационными силами, уравнения орбитального движения, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), переменные Кустаанхеймо–Штифеля, кватернионы, бикватернионы

DOI: 10.31857/S0032823523040033, EDN: NBKLFD

1. Введение. Кватернионные и бикватернионные методы и модели аналитической механики имеют ряд качественных преимуществ перед классическими методами и моделями и кардинально повышают эффективность аналитического исследования и численного решения многих задач небесной механики, механики твердого тела и ме-

ханических систем, механики космического полета, инерциальной навигации и управления движением, кинематики и динамики пространственных механизмов и роботов.

Широкое использование четырехмерных вещественных параметров Эйлера [1], Родрига [2], Уиттекера [3], Лурье [4]) и их дуальных аналогов — дуальных параметров Эйлера [5–7] (в России они чаще называются параметрами Родрига–Гамильтона) в качестве кинематических параметров движения твердого тела привело к естественному использованию в механике, навигации и управлении движением четырехмерных гиперкомплексных переменных: кватернионов поворотов (вращений) Гамильтона [8–11] и параболических бикватернионов конечных перемещений Клиффорда [10, 12–16]. Их компонентами являются вещественные и дуальные параметры Эйлера соответственно, которые однозначно связаны с проекциями вектора Родрига [2] или вектора Гиббса [17, 18] и с их дуальными аналогами [10].

Кватернионы (гиперкомплексные числа или переменные) были введены в математику и механику Гамильтоном в 1843 году [8] и используются в механике для описания вращательного движения. Параболические бикватернионы (дуальные кватернионы) являются более общими гиперкомплексными числами или переменными. Они были введены для евклидова пространства в математику и механику Клиффордом в 1873 году [12] и используются в механике для описания общего пространственного движения (композиции вращательного и поступательного движений). Есть еще эллиптические бикватернионы, также введенные Клиффордом, и гиперболические бикватернионы, введенные Коксом (Н. Сох), используемые для изучения неевклидовых пространств и неевклидовой механики. Большой вклад в разработку теории параболических бикватернионов и их приложений в механике твердого тела внес Котельников [13–15]. Им же в докторской диссертации (1897) развита теория эллиптических и гиперболических чисел и бикватернионов и даны их приложения в неевклидовой геометрии и механики (пространства Римана и Лобачевского).

В СССР и в России разработка кватернионных и бикватернионных методов и моделей (уравнений) механики и их приложений к решению задач ориентации, инерциальной навигации, управления движением, теории пространственных механизмов была начата в 1970 годах. С этого времени в СССР и в России опубликовано большое количество работ в области кватернионных и бикватернионных методов и моделей (уравнений) механики и их различных приложений.

С 70 годов в СССР были разработаны новые технические решения для построения систем ориентации и управления движением на орбитальном участке полета космических аппаратов (в том числе пилотируемых аппаратов), основанные на применении бортовых цифровых вычислительных комплексов и бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Задачи ориентации и управления движением космических аппаратов решались в то время и решаются в настоящее время в России с применением кватернионов и кватернионных кинематических уравнений. Автором этих технических решений был коллектив разработчиков, возглавляемый В.Н. Бранцем. Кватернионные теории, уравнения и алгоритмы этих решений были изложены в работах Бранца и Шмыглевского [9, 16].

Если вещественные параметры Эйлера и кватернионы эффективно используются для описания вращательного движения, то дуальные параметры Эйлера и параболические бикватернионы Клиффорда — для эффективного описания общего пространственного движения, представляющего собой композицию вращательного и поступательного движений. В работе Челнокова [5], по-видимому впервые в России, были предложены (с использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди) бикватернионные кинематические уравнения пространственного движения твердого тела (в бикватернионных матрицах дуальных параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера)) и были даны аналитические решения этих уравнений для одного класса винтовых

движений твердого тела. В этих уравнениях присутствуют проекции кинематического винта твердого тела на координатные оси, связанные с телом. Они были использованы [7] для решения задач пространственной инерциальной навигации. Также были предложены [7] бикватернионные кинематические уравнения, дуальные коэффициенты которых — проекции кинематического винта твердого тела на оси опорной (в частности, инерциальной) системы координат. Отметим, однако, что наибольшее распространение в механике, инерциальной навигации и управлении движением нашли бикватернионные кинематические уравнения, дуальные коэффициенты которых — проекции кинематического винта твердого тела на оси системы координат, связанной с телом (движущимся объектом) в силу их большего практического удобства.

В нашей работе с использованием кватернионов Гамильтона, параболических бикватернионов Клиффорда, а также кватернионных и бикватернионных матриц излагаются кватернионные и бикватернионные методы описания движения, модели теории конечных перемещений и регулярной кинематики твердого тела, основанные на использовании четырехмерных вещественных и дуальных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона). Эти модели кинематики, в отличие от классических моделей, не имеют особенностей типа деления на ноль, порождаемых использованием классических углов Эйлера–Крылова и их дуальных аналогов, и не содержат тригонометрических функций. Эти свойства кватернионных и бикватернионных моделей кинематики повышают эффективность аналитического исследования и численного решения задач механики, навигации и управления движением.

Также обсуждается проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, лежащих в основе небесной механики и механики космического полета (астродинамики), с помощью использования параметров Эйлера, четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и кватернионов Гамильтона: проблема устранения особенностей типа сингулярностей (деления на ноль), которые порождаются действующими на небесное или космическое тело (в частности, космический аппарат) ньютоновскими гравитационными силами и которые осложняют аналитическое и численное исследование движения тела (космического аппарата) вблизи гравитирующих тел или его движения по сильно вытянутым орбитам.

Проблема устранения указанной особенности восходит к Эйлеру и Леви-Чивита, которые дали решения одномерной и двумерной задач о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Процедуру, позволяющую устранить указанную особенность дифференциальных уравнений движения, следуя Леви-Чивита, называют регуляризацией. Эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, так называемая спинорная или *KS*-регуляризация, была предложена Кустаанхеймо и Штифелем. Она наиболее полно изложена в широко цитируемой монографии [19].

Обсуждаемая в статье кватернионная регуляризация уравнений небесной механики и астродинамики имеет ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля. Она в настоящее время признана одной из наиболее эффективных регуляризаций особенностей классических ньютоновских уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых гравитационными силами.

В статье приводятся основные регуляризующие соотношения и регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенные Кустаанхеймо, Штифелем и Шейфеле, а также кватернионные регуляризующие соотношения и регулярные кватернионные уравнения этой задачи (орбитального движения изучаемого тела), предложенные автором статьи, как для абсолютного движения изучаемого тела (в инерциальной системе координат), так и для относительного движения (в системе координат, вращающейся в инерциальном пространстве по произвольно заданному закону, в частности, в системе координат, связанной с Землей). Приводятся предло-

женные нами наглядные геометрические и кинематические интерпретации регулярizing преобразований классических уравнений в декартовых координатах и более общие (в сравнении с широко известными уравнениями Кустаанхеймо–Штифеля) регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, для построения которых использованы или четырехмерные кватернионные матрицы или четырехмерные гиперкомплексные переменные (кватернионы Гамильтона).

Приведены полученные нами (Логинов, Челноков) результаты исследования точности определения траектории движения космического аппарата (КА) в поле тяготения Земли и Луны с помощью численного интегрирования предложенных нами регулярных кватернионных уравнений движения КА в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, показывающие, что эта точность на несколько порядков выше точности, полученной при численном интегрировании уравнений движения КА в декартовых координатах. Также приведены результаты сравнительного исследования точности численного интегрирования различных форм регуляризованных уравнений небесной механики и астродинамики в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и ньютоновских уравнений в декартовых координатах ряда других исследователей (Штифель, Шейфеле, Бордовицына, Шарковский, Авдюшев и Фукушима), показывающие, что точность численного интегрирования регуляризованных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля (в частности, уравнений движения искусственного спутника Земли по орбитам с большими эксцентриситетами) значительно выше (на несколько порядков) точности численного интегрирования ньютоновских уравнений. Сравнение этих результатов с нашими показало, что они в целом согласуются между собой.

В настоящее время кватернионные и бикватернионные методы и модели относятся к основным методам и моделям аналитической механики в силу их достоинств. Они широко используются для решения многих актуальных задач механики, навигации и управления движением и излагаются в учебниках и пособиях по теоретической механике. Кватернионный метод регуляризации особенностей уравнений небесной механики и астродинамики, порожденных гравитационными силами, с помощью использования для описания орбитального движения параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо–Штифеля уникален в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем. Поэтому приводимый аналитический обзор работ по кватернионным и бикватернионным методам и регулярным моделям аналитической механики и их приложениям является, на наш взгляд, актуальным.

2. Кватернионные и бикватернионные методы и модели механики. В соответствии с фундаментальной теоремой Эйлера о конечном повороте твердого тела оно может быть переведено из исходного углового положения в конечное с помощью одного поворота вокруг оси, проходящей через некоторую выбранную точку тела, например, его центр масс. Угол этого поворота называется углом Эйлера, а ось вращения – осью Эйлера. Уравнения и соотношения теории конечных поворотов и кинематики вращательного движения принимают наиболее удобный вид, если их записать с использованием четырех вещественных параметров Эйлера, имеющих вид

$$\lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \lambda_i = \sin(\varphi/2)e_i; \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

где φ – эйлеров угол поворота тела (или связанной с ним системы координат X) относительно выбранной опорной, например, инерциальной или орбитальной системы координат ξ , e_i – проекции единичного вектора e эйлеровой оси конечного поворота тела на оси связанной системы координат X .

Использование четырех вещественных параметров Эйлера в качестве кинематических параметров вращательного движения естественным образом привело к введению в механику четырехмерного гиперкомплексного числа (2.2) – кватерниона конечного

поворота λ (кватерниона поворота Гамильтона), компонентами которого являются вещественные параметры Эйлера λ_j :

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k} = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)(e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}) \\ \lambda_0 &= \cos(\varphi/2), \quad \lambda_i = \sin(\varphi/2) e_i \quad (i = 1, 2, 3),\end{aligned}\quad (2.2)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — векторные мнимые единицы Гамильтона, определяемые таблицей умножения

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \circ \mathbf{i} &= -1, \quad \mathbf{j} \circ \mathbf{j} = -1, \quad \mathbf{k} \circ \mathbf{k} = -1 \\ \mathbf{i} \circ \mathbf{j} &= 1, \quad \mathbf{j} \circ \mathbf{i} = -1, \quad \mathbf{i} \circ \mathbf{k} = -1, \quad \mathbf{k} \circ \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \circ \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{k} \circ \mathbf{j} = -1\end{aligned}\quad (2.3)$$

Здесь центральный кружок — символ кватернионного произведения.

Кватернионное исчисление, в отличие от матричного исчисления, имеет геометрическую наглядность векторного исчисления. В отличие от векторного исчисления, оно более общее и гибкое. Так, в кватернионном исчислении, в отличие от векторного, операция деления определена (существует), и она легко алгоритмизуема, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Кроме того, в кватернионных уравнениях, в отличие от векторных, можно непосредственно использовать векторные величины, определяемые их проекциями не в одной, а в разных системах координат. Все это вместе делает кватернионный аппарат более мощным и гибким средством решения многих задач механики, навигации и управления движением, чем векторный. Также отметим, что в кватернионном исчислении, в отличие от матричного, операция аналитического нахождения и численного вычисления обратного кватерниона, в отличие от аналитического нахождения и вычисления обратной матрицы, проста и легко алгоритмизуема.

В нашей стране кватернионы впервые были внедрены в механику космического полета и в системы управления вращательным движением космических аппаратов Бранцем и Шмыглевским в 70-х годах в Ракетно-космической корпорации “Энергия”.

Использование четырех вещественных параметров Эйлера в качестве кинематических параметров вращательного движения также естественным образом привело к введению в механику четырехмерных кватернионных матриц n и m , имеющих вид ([10, 20–22]):

$$n = n\{\lambda\} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad m = m\{\lambda\} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}\quad (2.4)$$

Кватернионные матрицы n и m ортогональны и коммутируют между собой, что является полезным свойством при их совместном использовании в уравнениях и соотношениях механики.

Общее перемещение твердого тела в пространстве состоит из поступательного перемещения вместе с произвольно выбранной точкой тела, например, его центра масс, и углового перемещения. В соответствии с фундаментальной теоремой Шаля общее перемещение тела эквивалентно его винтовому перемещению. Это перемещение тела наиболее эффективно описывается с помощью четырех дуальных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_j , имеющих вид [5–7, 10, 16]:

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= \cos(\Phi/2), \quad \Lambda_k = \sin(\Phi/2) \cos \Gamma_k, \quad \Phi = \varphi + s\varphi^0 \\ \Gamma_k &= \gamma_k + s\gamma_k^0, \quad k = 1, 2, 3 \\ \Lambda_j &= \lambda_j + s\lambda_j^0, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad s^2 = 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

Из этих дуальных соотношений следуют вещественные скалярные соотношения

$$\lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \lambda_k = \sin(\varphi/2) \cos \gamma_k$$

$$\lambda_0^0 = -(\varphi^0/2) \sin(\varphi/2), \quad \lambda_k^0 = (\varphi^0/2) \cos(\varphi/2) \cos \gamma_k - \gamma_k^0 \sin(\varphi/2) \sin \gamma$$

Здесь $\Phi = \varphi + s\varphi^0$ — дуальный угол поворота тела вокруг его оси ab винтового конечного перемещения, φ — обычный (вещественный) угол поворота тела вокруг оси ab , φ^0 — величина поступательного перемещения тела вдоль оси ab , $\Gamma_k = \gamma_k + s\gamma_k^0$ — дуальный угол между осью ab и осью ξ_k системы координат ξ , в которой рассматривается положение и движение тела, γ_k — обычный угол между осью ab и осью ξ_k , $|\gamma_k^0|$ — кратчайшее расстояние между этими осями; s — комплексность Клиффорда, имеющая свойство $s^2 = 0$, λ_j — обычные (вещественные) параметры Эйлера, характеризующие поворот тела вокруг оси ab , λ_j^0 — линейные параметры, характеризующие поступательное перемещение тела вдоль оси ab .

Декартовы координаты ξ_k твердого тела в опорной системе координат ξ находятся через параметры винтового перемещения λ_j и λ_j^0 по формулам [5–7, 10, 16]:

$$\xi_1 = 2(-\lambda_1\lambda_0^0 + \lambda_0\lambda_1^0 - \lambda_3\lambda_2^0 + \lambda_2\lambda_3^0), \quad \xi_2 = 2(-\lambda_2\lambda_0^0 + \lambda_3\lambda_1^0 + \lambda_0\lambda_2^0 - \lambda_1\lambda_3^0)$$

$$\xi_3 = 2(-\lambda_3\lambda_0^0 - \lambda_2\lambda_1^0 + \lambda_1\lambda_2^0 + \lambda_0\lambda_3^0) \quad (2.6)$$

Использование четырех дуальных параметров Эйлера в качестве дуальных скалярных кинематических параметров общего пространственного движения естественным образом привело к введению в механику четырехмерного дуального гиперкомплексного числа (2.7) (бикватерниона Клиффорда) — бикватерниона конечного перемещения Λ , компонентами которого являются дуальные параметры Эйлера Λ_j [5–7, 10, 16]:

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k} = \cos(\Phi/2) + \sin(\Phi/2)(E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k})$$

$$\Lambda_0 = \cos(\Phi/2), \quad \Lambda_i = \sin(\Phi/2)E_i, \quad \Lambda_j = \lambda_0 + s\lambda_j^0, \quad s^2 = 0 \quad (2.7)$$

$$\Lambda = \lambda + s\lambda^0 = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k} + s(\lambda_0^0 + \lambda_1^0\mathbf{i} + \lambda_2^0\mathbf{j} + \lambda_3^0\mathbf{k})$$

Бикватернион Λ является дуальной композицией кватерниона λ , характеризующего поворот тела, и кватерниона λ^0 , характеризующего поступательное перемещение тела. Эта композиция образуется с помощью комплексности Клиффорда s , квадрат которой равен нулю.

Декартовы координаты ξ_k твердого тела в опорной системе координат ξ находятся через кватернионы λ и λ^0 по кватернионной формуле [5–7, 10]:

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = 2\lambda^0 \circ \bar{\lambda}, \quad (2.8)$$

где верхняя черта — символ кватернионного сопряжения.

Бикватернион Λ эквивалентен восьми вещественным числам (или переменным) и содержит, помимо трех мнимых единиц Гамильтона, комплексность Клиффорда. Он был введен в математику и механику в 1873 году [12] спустя 30 лет после изобретения Гамильтоном кватернионов. Бикватернионное исчисление обладает перед винтовым исчислением [23] всеми преимуществами кватернионного исчисления перед векторным.

Использование четырех дуальных параметров Эйлера в качестве дуальных скалярных кинематических параметров общего пространственного движения также есте-

ственным образом привело к введению в механику четырехмерных ортогональных бикватернионных матриц N и M , имеющих вид [6, 10]:

$$N = N\{\Lambda\} = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & \Lambda_3 & -\Lambda_2 \\ \Lambda_2 & -\Lambda_3 & \Lambda_0 & \Lambda_1 \\ \Lambda_3 & \Lambda_2 & -\Lambda_1 & \Lambda_0 \end{pmatrix}, \quad M = M\{\Lambda\} = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & -\Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & \Lambda_0 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_3 & -\Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\Lambda_0 = \cos(\Phi/2), \quad \Lambda_i = \sin(\Phi/2) E_i, \quad \Lambda_j = \lambda_0 + s\lambda_j^0, \quad s^2 = 0$$

Приведем основные бикватернионные соотношения и уравнения теории конечных перемещений и кинематики пространственного движения твердого тела.

1) Свойства бикватернионов и бикватернионных матриц [6, 10, 16].

Сопряженный бикватернион:

$$\bar{\Lambda} = \Lambda_0 - \Lambda_1 \mathbf{i} - \Lambda_2 \mathbf{j} - \Lambda_3 \mathbf{k}$$

Норма бикватерниона конечного перемещения Λ :

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \circ \Lambda = \Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \quad \lambda_0 \lambda_0^0 + \lambda_1 \lambda_1^0 + \lambda_2 \lambda_2^0 + \lambda_3 \lambda_3^0 = 0$$

Обратный бикватернион конечного перемещения:

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\|\Lambda\|} \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}$$

Бикватернион Λ может быть представлен в следующем виде:

$$\Lambda = \lambda + s\lambda^0 = \lambda \circ (1 + s\bar{\lambda} \circ \lambda^0) = \lambda \circ (1 + s(1/2)\mathbf{r}_x) = \lambda \circ \exp(s(1/2)\mathbf{r}_x)$$

или в виде

$$\Lambda = \lambda + s\lambda^0 = (1 + s\lambda^0 \circ \bar{\lambda}) \circ \lambda = (1 + s(1/2)\mathbf{r}_\xi) \circ \lambda = \exp(s(1/2)\mathbf{r}_\xi) \circ \lambda,$$

где $\mathbf{r}_x$ и $\mathbf{r}_\xi$ — отображения радиус-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из начала опорной системы координат ξ в начало связанной с твердым телом системы координат X , на базисы X и ξ соответственно:

$$\mathbf{r}_x = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} = 2\bar{\lambda} \circ \lambda^0, \quad \mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = 2\lambda^0 \circ \bar{\lambda}$$

В этих формулах x_k и ξ_k — проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ на оси систем координат X и ξ (ξ_k — декартовы координаты твердого тела в опорной системе координат ξ).

Эти формулы наглядно иллюстрируют тот факт, что бикватернион Λ описывает собой композицию вращательного (углового) и поступательного (орбитального) движений твердого тела.

Определители матриц N и M и обратные к ним матрицы:

$$|N| = |M| = 1, \quad N^{-1} = N^T, \quad M^{-1} = M^T$$

Матрицы N и M коммутативны: $NM = MN$. Это свойство коммутативности матриц N и M повышает эффективность аналитического и численного решения ряда геометрических и кинематических задач механики.

Произведение матриц типа N (M) дает матрицу такого же типа.

2) Преобразование дуальных ортогональных координат винта с помощью бикватернионов.

2.1) Бикватернионное перепроектирование винтов [10, 16].

Дуальные ортогональные проекции Ξ_k некоторого винта $\mathbf{R}$ на оси опорной системы координат ξ связаны с его дуальными ортогональными проекциями X_k на оси системы координат X , получаемой из системы координат ξ винтовым конечным перемещением, задаваемым бикватернионом конечного перемещения Λ , бикватернионной формулой

$$\mathbf{R}_x = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{R}_\xi \circ \Lambda; \quad \mathbf{R}_x = X_1 \mathbf{i} + X_2 \mathbf{j} + X_3 \mathbf{k}, \quad X_k = x_k + s x_k^0$$

$$\mathbf{R}_\xi = \Xi_1 \mathbf{i} + \Xi_2 \mathbf{j} + \Xi_3 \mathbf{k}, \quad \Xi_k = \xi_k + s \xi_k^0$$

2.2) Перепроектирование винтов с помощью бикватернионных матриц [6, 10]:

$$(0, X_1, X_2, X_3) = N\{\Lambda\} (M\{\Lambda\})^T (0, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3) = (M\{\Lambda\})^T N\{\Lambda\} (0, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3),$$

где $(0, X_1, X_2, X_3)$ и $(0, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3)$ – вектор-столбцы, составленные из дуальных ортогональных проекций винта $\mathbf{R}$ на оси систем координат X и ξ , $N\{\Lambda\}$ и $M\{\Lambda\}$ – бикватернионные матрицы, имеющие вид (2.8).

3) Сложение конечных перемещений твердого тела.

3.1) Бикватернионные формулы сложения конечных перемещений твердого тела [10, 16].

Бикватернион Λ результирующего конечного перемещения твердого тела находится через бикватернионы Λ_1 и Λ_2 двух слагаемых конечных перемещений, заданные своими компонентами в одной системе координат, например в ξ , по классической формуле

$$\Lambda_\xi = \Lambda_{2\xi} \circ \Lambda_{1\xi}$$

В случае, когда каждый из бикватернионов конечных перемещений твердого тела Λ_1 и Λ_2 определен в своей системе координат, преобразуемой этим перемещением, то есть, когда бикватернионы и результирующего и слагаемых конечных перемещений являются собственными, бикватернионная формула сложения двух конечных перемещений твердого тела имеет другой вид:

$$\Lambda_\xi = \Lambda_x = \Lambda^* = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*,$$

где верхняя звезда означает, что бикватернион является собственным.

Эта формула имеет большое практическое применение, так как в задачах механики, робототехники, навигации и управления движением, как правило, имеется или вырабатывается именно такая информация о перемещениях твердых тел и движущихся объектов.

3.2) Матричные формулы сложения конечных перемещений твердого тела с использованием бикватернионных матриц [6, 10].

Компоненты результирующего бикватерниона Λ конечного перемещения твердого тела находятся через компоненты бикватернионов Λ_1 и Λ_2 двух слагаемых конечных перемещений, заданных в одной системе координат, например ξ , по матричной формуле

$$\Lambda = N\{\Lambda_1\} \Lambda_2 = M\{\Lambda_2\} \Lambda_1,$$

где $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$, $\Lambda_i = (\Lambda_{0i}, \Lambda_{1i}, \Lambda_{2i}, \Lambda_{3i})$ – матрицы-столбцы, составленные из компонент бикватернионов результирующего и двух слагаемых конечных перемещений, $N\{\Lambda_1\}$ и $M\{\Lambda_2\}$ – бикватернионные матрицы, составленные из элементов бикватернионов Λ_1 и Λ_2 и имеющие вид (2.9).

Компоненты результирующего бикватерниона Λ конечного перемещения твердого тела находятся через компоненты собственных бикватернионов Λ_1^* и Λ_2^* двух слагаемых конечных перемещений по другой матричной формуле:

$$\Lambda = \Lambda^* = N\{\Lambda_2^*\}\Lambda_1^* = M\{\Lambda_1^*\}\Lambda_2^*,$$

где $\Lambda^* = (\Lambda_0^*, \Lambda_1^*, \Lambda_2^*, \Lambda_3^*)$, $\Lambda_i^* = (\Lambda_{0i}^*, \Lambda_{1i}^*, \Lambda_{2i}^*, \Lambda_{3i}^*)$ – матрицы-столбцы, составленные из компонент собственных бикватернионов результирующего и двух слагаемых конечных перемещений, $N\{\Lambda_2^*\}$ и $M\{\Lambda_1^*\}$ – бикватернионные матрицы, составленные из элементов бикватернионов Λ_1^* и Λ_2^* и имеющие вид (2.9).

Компоненты результирующего бикватерниона Λ конечного перемещения твердого тела находятся через компоненты бикватернионов $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ n слагаемых конечных перемещений, заданные в одной системе координат по матричной формуле

$$\Lambda = \left(\prod_{i=v}^{k+1} M_i \right) \left(\prod_{i=1}^{k-1} N_i \right) \Lambda_k; \quad k \leq v$$

Здесь $M_i = M(\Lambda_i)$, $N_i = N(\Lambda_i)$; $\left(\prod_{i=1}^{k-1} N_i \right) = E$ при $k = 1$, $\left(\prod_{i=v}^{k+1} M_i \right) = E$ при $k = v$.

Бикватернионные матрицы N_i и M_i имеют структуру вышеприведенных матриц N и M .

Компоненты результирующего бикватерниона Λ конечного перемещения твердого тела находится через компоненты собственных бикватернионов $\Lambda_1^*, \Lambda_2^*, \dots, \Lambda_n^*$ n слагаемых конечных перемещений по другой матричной формуле:

$$\Lambda = \Lambda^* = \left(\prod_{i=v}^{k+1} N_i^* \right) \left(\prod_{i=1}^{k-1} M_i^* \right) \Lambda_k^*; \quad k \leq v$$

Здесь $N_i^* = N\{\Lambda_i^*\}$, $M_i^* = M\{\Lambda_i^*\}$; $\left(\prod_{i=1}^{k-1} M_i^* \right) = E$ при $k = 1$, $\left(\prod_{i=v}^{k+1} N_i^* \right) = E$ при $k = v$.

Бикватернионные матрицы N_i^* и M_i^* имеют структуру вышеприведенных матриц N и M .

Приведенные матричные формулы сложения конечных перемещений твердого тела с использованием двух типов бикватернионных матриц N и M повышают эффективность аналитического исследования и численного решения уравнений движения сложных многосвязных механизмов и устройств в силу коммутативности матриц типов N и M .

4) Бикватернионные кинематические уравнения движения твердого тела.

4.1) Уравнения в дуальных параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона) и вещественных параметрах винтового движения.

Конечное перемещение связанной со свободным твердым телом системы координат X относительно опорной системы координат ξ будем характеризовать дуальными параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$).

Бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела, эквивалентного его винтовому движению, устанавливающее связи дуальных параметров Эйлера, их первых производных по времени с дуальными ортогональными проекциями $U_i = \omega_i + s v_i$ кинематического винта $\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} + s \mathbf{v}$ твердого тела на оси связанной с твердым телом системы координат X , имеет вид [5, 7, 10, 16, 24]

$$\begin{aligned}
2d\Lambda/dt &= 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ U_x \\
\Lambda &= \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i} + \Lambda_2 \mathbf{j} + \Lambda_3 \mathbf{k} = \lambda + s\lambda^0, \quad \Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0 \\
\dot{\Lambda} &= \dot{\Lambda}_0 + \dot{\Lambda}_1 \mathbf{i} + \dot{\Lambda}_2 \mathbf{j} + \dot{\Lambda}_3 \mathbf{k} = \dot{\lambda} + s\dot{\lambda}^0, \quad \dot{\Lambda}_j = \dot{\lambda}_j + s\dot{\lambda}_j^0 \\
U_x &= U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j} + U_3 \mathbf{k} = \omega_x + s\nu_x, \quad U_i = \omega_i + s\nu_i
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь $\Lambda = \lambda + s\lambda^0$ — собственный бикватернион винтового конечного перемещения твердого тела относительно опорного базиса ξ , являющийся комплексной комбинацией кватерниона λ ориентации тела в опорном базисе и кватерниона λ^0 , характеризующего поступательное перемещение тела в этом базисе; $U_x = U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j} + U_3 \mathbf{k}$ — отображение кинематического винта U твердого тела на связанный с телом базис X , компоненты $U_i = \omega_i + s\nu_i$ бикватерниона U_x являются комплексными комбинациями проекций ω_i и ν_i вектора ω угловой скорости тела и вектора ν скорости выбранной точки тела (полюса) на связанные с ним координатные оси.

Угловое положение (ориентация) твердого тела в опорном базисе ξ характеризуется параметрами Эйлера λ_j , а его линейное положение (поступательное перемещение) в этом базисе — декартовыми координатами ξ_i выбранного полюса, которые находятся через вещественные параметры винтового движения λ_j и λ_j^0 , являющиеся компонентами кватернионов λ и λ^0 , с помощью кватернионной формулы (2.8).

Бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела, устанавливающее связи дуальных параметров Эйлера, их первых производных по времени с дуальными ортогональными проекциями U_i^* кинематического винта $U = \omega + s\nu$ твердого тела на оси опорной системы координат ξ , имеет вид [7, 10, 16]

$$\begin{aligned}
2d\Lambda/dt &= 2\dot{\Lambda} = U_\xi \circ \Lambda \\
U_\xi &= U_1^* \mathbf{i} + U_2^* \mathbf{j} + U_3^* \mathbf{k} = \omega_\xi + s\nu_\xi, \quad U_i^* = \omega_i^* + s\nu_i^*
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь U_ξ — отображение кинематического винта на опорный базис ξ , имеющее дуальные компоненты U_i^* .

Кинематические уравнения, связывающие дуальные параметры Эйлера Λ_j и их производные с дуальными ортогональными проекциями U_i и U_i^* кинематического винта на оси связанной с твердым телом системы координат и опорной системы координат, в матричных формах имеют следующий вид [5, 7, 10]:

$$2d\Lambda/dt = 2\dot{\Lambda} = N \{U_x\} \Lambda, \quad 2dN/dt = 2\dot{N} = N \{U_x\} N \tag{2.12}$$

$$2d\Lambda/dt = 2\dot{\Lambda} = M \{U_\xi\} \Lambda, \quad 2dM/dt = 2\dot{M} = M \{U_\xi\} M, \tag{2.13}$$

$\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$, $\dot{\Lambda} = (\dot{\Lambda}_0, \dot{\Lambda}_1, \dot{\Lambda}_2, \dot{\Lambda}_3)$ — матрицы-столбцы;

$$N \{U_x\} = \begin{pmatrix} 0 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ U_1 & 0 & U_3 & -U_2 \\ U_2 & -U_3 & 0 & U_1 \\ U_3 & U_2 & -U_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M \{U_\xi\} = \begin{pmatrix} 0 & -U_1^* & -U_2^* & -U_3^* \\ U_1^* & 0 & -U_3^* & U_2^* \\ U_2^* & U_3^* & 0 & -U_1^* \\ U_3^* & -U_2^* & U_1^* & 0 \end{pmatrix},$$

N и M — ортогональные бикватернионные матрицы, составленные из дуальных параметров Эйлера, имеющие вид (2.9).

Бикватернионные кинематические уравнения (2.10) и (2.12) в дуальных параметрах Эйлера, являются (при $U_x = U_x(t)$) линейными нестационарными дифференциаль-

ными уравнениями, не имеющими особых точек (деления на ноль), в отличие от нелинейных кинематических уравнений в дуальных углах Эйлера–Крылова [10], содержащих эти особые точки. В отличие от линейных кинематических уравнений в дуальных направляющих косинусах [10], имеющих размерность, равную девяти, уравнения в дуальных параметрах Эйлера имеют меньшую размерность, равную четырем. Поэтому эти уравнения нашли широкое применение в механике твердого тела и механических систем, в инерциальной навигации, в робототехнике и в управлении движением.

Дуальные ортогональные проекции U_i^* кинематического винта $\mathbf{U}$ на оси опорной системы координат имеют вид [10]

$$U_i^* = \omega_i^* + s \left(v_i^* + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})_{\xi_i} \right),$$

где v_i^* , ω_i^* и $(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})_{\xi_i}$ — проекции вектора $\mathbf{v}$ скорости выбранной точки тела (полюса), вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела и векторного произведения $(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$ на оси опорной системы координат ξ , в котором $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала опорной системы координат ξ в начало связанной с твердым телом системы координат X .

Дуальные проекции U_i^* содержат проекции ξ_i радиус-вектора $\mathbf{r}$ полюса O твердого тела на оси опорной системы координат. Это затрудняет непосредственное использование кинематических уравнений (2.11) и (2.13) винтового движения твердого тела (на этот недостаток уравнения (2.11) не обращают внимания некоторые англоязычные авторы, использующие эти уравнения в робототехнике). От указанного недостатка свободны кинематические уравнения (2.10) и (2.12) винтового движения твердого тела, использующие дуальные ортогональные проекции $U_i = \omega_i + s v_i$ кинематического винта $\mathbf{U}$ тела на оси связанной системы координат X .

Следует отметить, что декартовы координаты ξ_i можно исключить из уравнений (2.11) и (2.13), если учесть их связи с вещественными параметрами винтового движения λ_j и λ_j^0 , являющимися компонентами кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$, с помощью кватернионной формулы (2.8). Однако, получающиеся при этом дифференциальные уравнения относительно переменных λ_j^0 являются достаточно сложными и, вследствие этого, малоудобными в приложениях.

Бикватернионное кинематическое уравнение (2.10), а также каждое из дуальных матричных кинематических уравнений (2.12) эквивалентно системе четырех скалярных однородных линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных дуальных параметров Эйлера Λ_j , имеющей вид

$$\begin{aligned} 2\dot{\Lambda}_0 &= -U_1\Lambda_1 - U_2\Lambda_2 - U_3\Lambda_3, & 2\dot{\Lambda}_1 &= U_1\Lambda_0 + U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3 \\ 2\dot{\Lambda}_2 &= U_2\Lambda_0 - U_3\Lambda_1 + U_1\Lambda_3, & 2\dot{\Lambda}_3 &= U_3\Lambda_0 + U_2\Lambda_1 - U_1\Lambda_2 \end{aligned}$$

Отметим также, что бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела (2.10) эквивалентно двум следующим кватернионным кинематическим уравнениям в параметрах винтового движения λ_j и λ_j^0 :

$$\begin{aligned} 2d\boldsymbol{\lambda}/dt &= 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x, & 2d\boldsymbol{\lambda}^0/dt &= 2\dot{\boldsymbol{\lambda}}^0 = \boldsymbol{\lambda}^0 \circ \boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{v}_x \\ \boldsymbol{\lambda} &= \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}, & \boldsymbol{\lambda}^0 &= \lambda_0^0 + \lambda_1^0\mathbf{i} + \lambda_2^0\mathbf{j} + \lambda_3^0\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_x &= \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}, & \mathbf{v}_x &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}, \end{aligned}$$

где, по-прежнему, ω_i и v_i — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела и вектора $\mathbf{v}$ скорости выбранной точки тела (полюса) на связанные с ним координатные оси.

Первое из этих уравнений – классическое кватернионное кинематическое уравнение сферического (вращательного, углового) движения твердого тела, второе уравнение, дополненное кватернионным соотношением

$$\mathbf{r}_{\xi} = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}},$$

описывает кинематику поступательного движения тела в опорной системе координат.

Отметим, что приведенные бикватернионные уравнения и соотношения теории конечных перемещений и кинематики винтового движения твердого тела переходят в кватернионные уравнения и соотношения теории конечных поворотов и кинематики вращательного движения тела, если в них символ Клиффорда s положить равным нулю.

Приведенные кинематические уравнения винтового движения твердого тела в дуальных параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона) и в вещественных параметрах винтового движения были, по-видимому, впервые получены автором статьи в работах [5, 7].

В нашей стране бикватернионы впервые, по-видимому, были использованы в кинематике пространственных механизмов, в инерциальной навигации и управлении движением автором статьи, Бранцем и Шмыглевским.

Разработке кватернионных методов и моделей теоретической механики и их приложений в управлении движением твердого тела и инерциальной навигации посвящены книги Бранца и Шмыглевского [9, 16]. Первая книга носит пионерский характер в этой области. Во второй книге также изложены бикватернионные методы и модели геометрии и кинематики механики твердого тела и их приложения в инерциальной навигации.

Разработка кватернионных и бикватернионных методов и моделей аналитической механики и их приложение в механике твердого тела, механических и гироскопических систем, в теории регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, а также в инерциальной навигации были начаты автором статьи в 70–80 гг. в его диссертациях [25, 26], полученные результаты в этих областях были частично изложены им в монографиях, изданных при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) в 2006 и 2011 годах [10, 27].

Отметим, что проблемы существенной нелинейности и нерегулярности (типа деление на ноль) классических моделей механики, в которых для описания движения используются трехмерные вещественные переменные (углы Эйлера–Крылова) и их дуальные аналоги, кардинально были решены с помощью использования для описания движения четырехмерных вещественных и дуальных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), а также гиперкомплексных переменных: кватернионов Гамильтона и бикватернионов Клиффорда, компонентами которых являются вещественные и дуальные параметры Эйлера соответственно.

Также отметим, что существуют другие особенности классических моделей небесной механики и механики космического полета (астродинамики) типа деления на ноль, которые порождаются действующими на небесное или космическое тело (в частности, космический аппарат) гравитационными силами и которые осложняют исследование движения тела (аппарата) вблизи гравитирующих тел или его движения по сильно вытянутым орбитам. Наиболее эффективные методы регуляризации этих особенностей и регулярные модели небесной механики и астродинамики были разработаны и построены с помощью использования параметров Эйлера и четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, а также их модификаций, и кватернионных переменных. Поэтому в настоящее время кватернионные и бикватернионные методы и модели относятся к основным методам и моделям механики, навигации и управления движением.

Далее нами рассматриваются кватернионные методы аналитической механики, с помощью которых эффективно решается проблема регуляризации (проблема устранения сингулярностей (особенностей типа деления на ноль), порождаемых действующими гравитационными силами), а также излагаются регулярные кватернионные модели небесной механики и механики космического полета, построенные с помощью этих методов.

3. Проблема регуляризации уравнений небесной механики и механики космического полета (астродинамики). В основе небесной механики и астродинамики лежат ньютоновские дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. Ньютоновские уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел вырождаются при соударении второго (изучаемого) тела с первым (центральным) телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутой орбите. Сингулярность в начале координат создает в задаче двух тел не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности. Аналогично, ньютоновские уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел вырождаются при соударении изучаемого тела (тела с пренебрежимо малой массой) с одним из двух других гравитирующих тел, имеющих конечные массы, что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения тела с пренебрежимо малой массой в окрестности первого или второго гравитирующего тела и также создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности в ограниченной задаче трех тел. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) классических (ньютоновских) уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых силами гравитации, получило название “регуляризация” (Леви-Чивита 1920), а уравнения, не имеющие этих особенностей, называются регулярными. Среди методов регуляризации и регулярных моделей прикладной небесной механики и астродинамики в последнее время широкое распространение получили кватернионные методы и модели, основанные на использовании гиперкомплексных переменных — кватернионов Гамильтона, компонентами (элементами) которых являются переменные Кустаанхеймо—Штифеля или параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона). Эти методы и модели имеют ряд преимуществ аналитического и вычислительного характера перед другими методами и моделями.

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля (KS -переменных) посвящены работы Velte [28], Vivarelli [29–31], Шарова [32]; Deprit, Eliepe и Ferrer [33], Vrbik [34, 35], Waldvogel [36, 37], Saha [38], Zhao [39]; Roa, Urrutxua и Pelaez [40], Roa и Pelaez [41], Breiter и Langner [42–44], Ferrer и Crespo [45], а также работы автора статьи [46–60].

В работах Штифеля и Шейфеле [19], Бордовицыной [61], Бордовицыной и Авдюшева [62], Fukushima [63, 64], Pelaez, Hedo, Rodriguez [65], Baù, Bombardelli, Pelaez и Lorenzini [66], Amato, Bombardelli, Baù, Morand, Rosengren [67], а также Baù, Roa [68] приводятся результаты сравнения численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, параметрах Эйлера и в других переменных, которые свидетельствуют об эффективности использования переменных Кустаанхеймо—Штифеля и параметров Эйлера в задачах небесной механики и астродинамики.

Проведено [69, 70] сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных автором статьи [71] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Шти-

феля, принимающих вид ниже приводимых регулярных кватернионных уравнений (5.9) возмущенной пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны. Регулярные кватернионные уравнения в KS -переменных показали значительно более высокую точность, чем уравнения в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на два порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом — на четыре порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом — на семь порядков.

Отметим, что в книге Бордовицыной [61] приведены результаты численных исследований решений уравнений невозмущенной и возмущенной пространственной задачи двух тел (решений уравнений невозмущенного и возмущенного движения ИСЗ) ряда авторов с использованием уравнений в KS -переменных и уравнений в декартовых координатах, демонстрирующие преимущество уравнений в KS -переменных перед уравнениями в декартовых координатах (в смысле точности их численного интегрирования). Сравнение этих результатов с нашими показало, что они в целом согласуются между собой. Отметим также, что Бордовицыной и Шарковским использованы регулярные уравнения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля в канонической форме, выведенные ими с использованием соответствующего гамильтониана.

Полученные нами результаты подтверждают значительные преимущества регулярных кватернионных уравнений в KS -переменных, имеющих возмущенный осцилляторный вид, в задачах прогноза движения небесных и космических тел, а также в задачах коррекции параметров орбитального движения КА и инерциальной навигации в космосе перед уравнениями в декартовых координатах.

В дальнейшем в нашей статье анализируются кватернионные методы и регулярные кватернионные модели небесной механики и астродинамики, построенные на основе дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо—Штифеля (KS -переменных).

Рассматриваемая нами регуляризация особенностей (деления на ноль) классических уравнений небесной механики и механики космического полета, порождаемых гравитационными и другими центральными силами, основана на использовании параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона), переменных Кустаахеймо—Штифеля и на использовании в качестве дополнительных переменных энергетических характеристик движения и реального времени, а также на использовании новой независимой переменной вместо реального времени (для регуляризующего преобразования реального времени). В излагаемой нами регуляризации используются четырехмерные кватернионные матрицы и кватернионы Гамильтона, поскольку используемые для целей регуляризации параметры Эйлера и переменные Кустаахеймо—Штифеля являются четырехмерными переменными, а кватернион Гамильтона есть четырехмерное гиперкомплексное число или переменная.

4. Регуляризация Кустаанхеймо—Штифеля уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Векторное и скалярные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3} \mathbf{r} &= \mathbf{p}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right); \quad r = |\mathbf{r}| \\ \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3} \xi_1 &= p_1, \quad \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3} \xi_2 = p_2 \\ \frac{d^2 \xi_3}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3} \xi_3 &= p_3, \quad r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра масс второго (изучаемого) тела, проводимый из центра масс первого (центрального) тела, $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние между телами, m и M — массы

второго и первого тел; f — гравитационная постоянная; $\mathbf{p}$ — вектор возмущающего ускорения центра масс второго тела (вектор-функция времени t , радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ второго тела в системе координат ξ , имеющей начало в центре масс первого тела и координатные оси, параллельные осям инерциальной системы координат), t — время; ξ_k — декартовы координаты центра масс изучаемого тела в системе координат ξ , $p_k = p_k(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3)$ ($k = 1, 2, 3$) — проекции возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси инерциальной системы координат, совпадающие с его проекциями на оси системы координат ξ , верхняя точка — символ дифференцирования по времени t .

Уравнения (4.1) вырождаются при соударении второго тела с центральным телом (при равенстве нулю расстояния r между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат, как уже отмечалось, создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности.

Проблема устранения указанной особенности, известная в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной задачи двух тел, восходит, как уже отмечалось, к Эйлеру [72] и Леви-Чивита [73–75]. Наиболее эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел (спиновая или KS -регуляризация) была предложена Кустаанхеймо и Штифелем [76, 77]. Она представляет собой обобщение регуляризации Леви-Чивита уравнений плоского движения и наиболее полно изложена в монографии Штифеля и Шейфеле [19].

В книге [19, § 4. Сингулярные дифференциальные уравнения, с. 15–16] говорится: “Уравнения движения (16) (в декартовых координатах) имеют особенность в начале координат, так как ньютоновское гравитационное притяжение центральной массы становится бесконечным в этой точке. Вследствие этого возникают не только теоретические, но и очень неприятные практические трудности. Если частица подходит достаточно близко к центральной массе, то можно говорить о почти соударении. Такое событие вызывает большие гравитационные силы и резкое изменение орбиты. При численном интегрировании единственный способ преодолеть эту трудность состоит в уменьшении длины шага и употреблении большого количества шагов интегрирования в зоне тесного сближения. Из-за ошибок округления и отбрасывания членов в формуле интегрирования после прохождения почти соударения будет довольно низкой. В классической небесной механике об этом не приходится заботиться, поскольку соударения планет, как правило, не встречаются¹. Но любой запуск искусственного космического аппарата приводит к тесному сближению на участках старта и финиша.

Таким образом, нас интересует преобразование сингулярных дифференциальных уравнений в регулярные. Эта процедура называется регуляризацией”.

Брумбергом [78] рассматриваются уравнения возмущенной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, в ганзеновских координатах и параметрах Эйлера. Брумбергом отмечается, что среди математических проблем небесной механики актуальны вопросы регуляризации и стабилизации уравнений небесной механики, в частности, развитие регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля, которая сводит кеплеровское движение в трехмерном пространстве к задаче гармонического осциллятора в четырехмерном пространстве. Им также отмечается, что правые части дифференциальных уравнений небесной механики принимают симметричную форму, приближающуюся к полиномиальной, и становятся более удобными для вычислений, если вместо трех углов Эйлера вводятся четыре параметра Эйлера, которые можно рассматривать как

¹ Трудности, связанные с почти соударениями, возникают и в задачах классической небесной механики, в частности, при исследовании движения кометы в сфере действия большой планеты (Прим. ред. В.А. Брумберга).

компоненты единичного четырехмерного вектора. Такая модификация классических методов, по мнению Брумберга, была начата [79, 80] и постепенно приобретает все большую популярность.

В книге Бордовицыной ([61], с. 25–26) говорится: “...классические уравнения движения небесных тел имеют особенности в окрестности соударений гравитирующих масс. В практических задачах небесной механики прямые соударения тел, как правило, не рассматриваются. Однако в рамках этих задач наличие особенностей в уравнениях движения оказывают заметное влияние на процесс их численного решения.

Наиболее характерной математической моделью движения тел Солнечной системы является возмущенная задача двух тел. Уравнения этой задачи, записанные в системе координат, связанной с центральным телом, сингулярны в начале координат и при тесных сближениях с возмущающими телами. Для орбит, имеющих большие эксцентриситеты, когда скорость изменения центрального радиуса растет при приближении к перигею и убывает при удалении от него, наличие особенности в начале координат приводит к неравномерному изменению функций правых частей уравнений движения. При численном решении задачи такая неравномерность требует постоянного изменения шага интегрирования. Все это снижает точность численного интегрирования и приводит к непроизводительным затратам машинного времени.

В случае тесных сближений с возмущающими телами также появляется неравномерность в изменении функций правых частей уравнений движения, приводящих к потере точности интегрирования. Наиболее сложный случай представляет собой движение долгопериодических комет и особых малых планет. Эти тела движутся по высокоэллиптическим орбитам и имеют тесные сближения с большими планетами.

Процедуру, позволяющую устранить особенности дифференциальных уравнений движения, следуя Леви-Чивита, называют регуляризацией.”

Из изложенного следует, что сингулярности в задачах небесной механики и механики космического полета, порождаемые действующими гравитационными силами, играют важную роль. Их устранение — одна из проблем небесной механики и астродинамики.

В регуляризации Кустаанхеймо использованы достоинства методов теории спиноров: вместо одной комплексной переменной теории Леви-Чивита была взята пара комплексных чисел. На языке вещественного анализа это эквивалентно введению четырех параметров $u_1, u_2, u_3, u_4 = u_0$.

В регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля, изложенной в книге Штифеля и Шейфеле [19], использована обобщенная матрица Леви-Чивита, названная *KS*-матрицей. Эта матрица (обозначается здесь как $L(\mathbf{u}_{KS})$) — четырехмерная квадратная матрица, содержащая в левом верхнем углу двухмерную квадратную матрицу Леви-Чивита и имеющая вид

$$L(\mathbf{u}_{KS}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

В этой матрице u_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — переменные Кустаанхеймо–Штифеля, называемые *KS*-переменными (вместо обозначения u_4 одной из переменных Кустаанхеймо–Штифеля здесь и далее нами используется обозначение u_0).

В матричной записи преобразование Кустаанхеймо–Штифеля имеет вид [19]:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u}_{KS}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

В скалярной записи связи декартовых координат ξ_k с переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j имеют вид

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1 u_2 - u_0 u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \quad (4.4)$$

и с точностью до перестановки индексов совпадает с отображением Хопфа [81].

Таким образом, в основе регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, которое основывается на переходе от трехмерных декартовых координат ξ_k к новым четырехмерным переменным Кустаанхеймо–Штифеля u_j (то есть, на переходе от трехмерного пространства декартовых координат к новому четырехмерному пространству).

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля в скалярной записи имеют вид [19]

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_j = \frac{1}{2} r q_j; \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (4.5)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2 \left(q_0 \frac{du_0}{d\tau} + q_1 \frac{du_1}{d\tau} + q_2 \frac{du_2}{d\tau} + q_3 \frac{du_3}{d\tau} \right) \quad (4.6)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} q_0 &= u_0 p_1 - u_3 p_2 + u_2 p_3, & q_1 &= u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 \\ q_2 &= -u_2 p_1 + u_1 p_2 + u_0 p_3, & q_3 &= -u_3 p_1 - u_0 p_2 + u_1 p_3 \end{aligned}$$

Здесь τ — новая независимая переменная, называемая фиктивным временем, связанная с временем t дифференциальным соотношением $dt = r d\tau$ (преобразованием времени Зундмана [82]), h — кеплеровская энергия единицы массы изучаемого тела, рассматриваемая как дополнительная переменная и определяемая соотношением

$$h = \frac{1}{2} v^2 - f(m + M) \frac{1}{r}; \quad v = |\mathbf{v}|, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (4.8)$$

Время t также рассматривается как дополнительная (зависимая) переменная.

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля (4.5)–(4.7) образуют систему десяти обыкновенных нелинейных, в общем случае нестационарных, дифференциальных уравнений относительно четырех KS -переменных u_j , их первых производных $du_j/d\tau$ по новой независимой переменной τ , кеплеровской энергии h и времени t .

Эти скалярные уравнения эквивалентны матричным уравнениям [19]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}_{ks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{u}_{ks} &= \frac{1}{2} r L(\mathbf{u}_{ks}) \mathbf{P}_{ks}, & \frac{dh}{d\tau} &= -2 \left(\frac{d\mathbf{u}_{ks}}{d\tau}, (L(\mathbf{u}_{ks}))^T \mathbf{P}_{ks} \right) \\ \frac{dt}{d\tau} &= (\mathbf{u}_{ks}, \mathbf{u}_{ks}) & \mathbf{u}_{ks} &= (u_1, u_2, u_3, u_0), & \mathbf{P}_{ks} &= (p_1, p_2, p_3, 0), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\mathbf{u}_{ks}$ — четырехмерный вектор-столбец KS -переменных, $L(\mathbf{u}_{ks})$ — KS -матрица, определяемая соотношением (4.2), $\mathbf{P}_{ks}$ — четырехмерный вектор-столбец, сопоставляемый трехмерному вектору возмущающего ускорения $\mathbf{p}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение четырехмерных вектор-столбцов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Отметим основные хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля (4.5)–(4.7):

— они, в отличие от ньютоновских уравнений (4.1), регулярны в центре притяжения, когда расстояние между телами $r = 0$;

— линейны во времени τ для невозмущенных кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных ньютоновских уравнений) и имеют в этом случае вид систе-

мы четырех независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковыми постоянными коэффициентами, равными половинной кеплеровской энергии h , взятой со знаком минус:

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_j = 0; \quad h = \text{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3;$$

– для эллиптического кеплеровского движения, когда кеплеровская энергия $h = \text{const} < 0$, эти уравнения эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора во времени τ , квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии, взятой со знаком минус;

– позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;

– близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;

– позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Эти свойства регулярных уравнений позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Штифелем и Шейфеле [19], Бордовицкой и Шарковским [61] показано, что точность численного интегрирования регуляризованных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля значительно выше точности интегрирования ньютоновских уравнений. Так, Бордовицкой и Шарковским показано, что использование регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики, например, задачи о движении искусственного спутника Земли (ИСЗ) по орбитам с большими эксцентриситетами, от трех до пяти порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании классических ньютоновских уравнений. Сравнение этих результатов с нашими, приведенными выше, показало, как уже отмечалось выше, что они в целом согласуются между собой.

Отметим, что в книге Бордовицкой [61] приводятся результаты Всесоюзного эксперимента по исследованию эффективности алгоритмов и программ численного прогнозирования движения небесных тел, который проводился по решению III Всесоюзного совещания “Алгоритмы небесной механики” (Рига, 1980) с целью определения сравнительных характеристик имеющихся в распоряжении предприятий и организаций методов и программ численного интегрирования уравнений движения небесных тел. В книге ([61], с. 109) говорится: “Расчет эталонных орбит осуществлялся с помощью так называемой численной модели движения ИСЗ, разработанной Т.В. Бордовицкой и Н.А. Шарковским. ... В качестве системы уравнений спутника были выбраны уравнения в регулярных оскулирующих элементах. Для обоснования такого выбора на рис. 7 вместе с графиком, иллюстрирующим накапливающиеся ошибки интегрирования при использовании регулярных элементов (α), при вычислении орбиты ИСЗ типа “Навстар” даны аналогичные графики для уравнений в параметрических переменных (u) и обычно применяемых прямоугольных координатах (x)”. Результаты эксперимента, как отмечается Бордовицкой ([61], с. 120), показали, что “Наиболее точные результаты с различными методами дает преобразование Кустаанхеймо–Штифеля, которое, как показал К. Велез, не меняет пределов устойчивости численного метода, но, как мы видели раньше, существенно повышает динамическую устойчивость системы”.

В книге Бордовицкой и Авдюшева [62] говорится: “методы теории специальных возмущений весьма эффективны и могут быть рекомендованы к применению для численного моделирования спутниковых орбит. Впечатляющие результаты получаются при использовании KS -уравнений ($u, \delta u$) и уравнений Роя (ry). Так, при сохране-

нии точности интегрирования с их помощью удастся повысить быстродействие в 3–4 раза. Кроме того, метод Энке в KS -переменных (δu) за счет ослабления влияния ошибок округления позволяет повысить уровень наивысшей точности почти на 1–2 порядка”. Здесь речь идет о спутниковых орбитах с эксцентриситетом равным нулю или 0.01 (типа орбит спутниковой навигационной группировки ГЛОНАСС, близких к круговым орбитам).

В работах Фукушимы [63, 64], ученого из японской Национальной астрономической обсерватории, также показано, что KS -регуляризация приводит к очень эффективной схеме интегрирования уравнений орбитального движения, повышающей точность и скорость численного интегрирования. Это связано не только со структурой уравнений, но также с использованием нескольких методов, которые приносят важные преимущества численной схеме. В работе [64] приводится численное сравнение четырех схем регуляризации трехмерной задачи двух тел в условиях возмущения: регуляризации Шперлинга–Бурде (SB), Кустаанхеймо–Штифеля (KS), Бурде–Феррандиса (BF) и трехмерное расширение регуляризации Леви–Чивита (LC). В аннотации статьи [64] сказано: KS и расширенная LC регуляризация с масштабированием энергии Кеплера обеспечивают наилучшую экономическую эффективность при интеграции почти всех возмущенных задач двух тел. Подчеркнем, что также сравниваются семь схем, описанных в ([64], §1) и “нерегуляризованная обработка, а именно прямое интегрирование в декартовых координатах”. Для каждой из этих формулировок им проводится тестовая интеграция Икара, охватывающая около 1 миллиона лет, и измеряется время его выполнения.

Отметим также, что установлено [83], что уравнения невозмущенной пространственной задачи двух тел (для кеплеровского движения) могут быть приведены к виду

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} - \frac{2h}{\alpha^2} \mathbf{r} + \frac{1}{\alpha^2} \mathbf{A} = 0; \quad r d\tau = \alpha dt,$$

где h и $\mathbf{A}$ – энергия и вектор Лапласа, которые в этом случае являются постоянными величинами; постоянная α – это шкала длин, введенная для того, чтобы дать новой независимой переменной τ физическое измерение времени.

Таким образом, Bohlín были предложены регулярные уравнения задачи двух тел в декартовых координатах ξ_k , которые для эллиптического кеплеровского движения имеют вид трехмерного одночастотного гармонического осциллятора, находящегося под действием ускорения, постоянного по модулю и направлению в инерциальной системе координат. Наличие неоднородной части в аналитическом решении уравнений Bohlín осложняет их использование для построения методом вариации произвольных постоянных интегрирования уравнений возмущенной задачи двух в медленно изменяющихся (оскулирующих) переменных.

Идеи Бохлина были использованы в работах Бурде [84, 85].

5. Кватернионная регуляризация и регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенные автором статьи. В основе знаменитой регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит, как уже отмечалось, нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, обобщающее преобразование Леви–Чивита и названное KS -преобразованием. Причем это преобразование состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат к четырехмерному пространству новых координат (к четырехмерным переменным Кустаанхеймо–Штифеля). Поэтому, по мнению Штифеля и Шейфеля прямой вывод регулярных уравнений в трехмерном (т.е. пространственном) случае невозможен ([19], с. 29): “В случае плоского движения (§ 8) мы начали с уравнений (8) для координат x_i (в наших обозначениях ξ_i) и получили уравнения (26) для параметров u_i . Этот прямой подход нельзя повторить в рассматриваемом трехмерном случае. Причина заключает-

ся в том, что KS -преобразование неоднозначно при переходе от x к u . Существует целое одномерное множество векторов u , соответствующих данному вектору x . Единственный путь избежать этой трудности состоит в постулировании уравнений (26) и проверки того, что при этом удовлетворяются старые уравнения (8). Несколько дополнительных теорем помогут в достижении этой цели”.

В книге [19] постулируется матричное регулярное уравнение пространственной задачи двух тел (первое из уравнений (4.9)), записанное ими по аналогии с матричным регулярным уравнением Леви-Чивита плоского движения, и с помощью нескольких теорем доказывают, что при этом удовлетворяется старое векторное ньютоновское уравнение (первое из уравнений (4.1)).

Вскоре после открытия KS -преобразования было рассмотрено использование кватернионов Гамильтона (четырёхмерных гиперкомплексных чисел) и четырёхмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел, поскольку четырёхмерность пространства новых координат делала естественным использование для такой регуляризации кватернионов Гамильтона и четырёхмерных кватернионных матриц. Однако, Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав в одиннадцатой главе своей книги [19], посвященной геометрии KS -преобразования, что “Любая попытка заменить теорию KS -матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму”. Поэтому вместо хорошо известных в математике четырёхмерных кватернионных матриц Штифель и Шейфеле в своей книге используют для построения теории регуляризации новые, введенные ими, четырёхмерные квадратные матрицы, названные ими KS -матрицами, имеющие вид (4.2).

Приведенное утверждение Штифеля и Шейфеле было опровергнуто, по-видимому впервые, автором статьи [46–49]. Известный ученый Вальдвогель по поводу цитированного выше высказывания Штифеля и Шейфеле о бесперспективности использования в теории регуляризации кватернионных матриц в работе [37] (“Кватернионы для регуляризации небесной механики: истинный (верный) путь”) говорит: “Это утверждение было впервые опровергнуто Челноковым (1981), который представил теорию регуляризации пространственной задачи Кеплера, используя геометрические представления во вращающейся системе координат и кватернионные матрицы. В серии статей (например, 1992 и 1999) тем же автором была расширена теория кватернионной регуляризации и приведены практические применения.”

Челноковым было показано [46–49] (с использованием классических кватернионных матриц [46] и с использованием кватернионов Гамильтона [47]), что кватернионный подход к регуляризации

- позволяет дать прямой и наглядный вывод регулярных уравнений в KS -переменных (что, как уже отмечалось, ставилось Штифелем и Шейфеле под сомнение ([19], с. 29) из-за неоднозначности KS -преобразования);
- позволяет дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризирующему KS -преобразованию;
- раскрывает геометрический смысл его неоднозначности;
- позволяет получить более общие регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Куستاанхеймо–Штифеля.

В работе [46] для построения кватернионных регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел была использована четырёхмерная кватернионная матрица

$$n\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} u_0 & -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & u_0 & u_3 & -u_2 \\ u_2 & -u_3 & u_0 & u_1 \\ u_3 & u_2 & -u_1 & u_0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

элементами которой являются переменные Кустанхеймо–Штифеля u_j .

Эта матрица имеет вид первой из кватернионных матриц (2.4) и она отличается от KS -матрицы (4.2). Если под элементами u_j этой матрицы понимать параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j , то она будет являться хорошо известной кватернионной матрицей поворота, описывающей вращение в трехмерном пространстве.

В работе [47] для этих целей использован кватернион Гамильтона $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad (5.2)$$

элементами которого являются переменные Кустанхеймо–Штифеля u_j .

В кватернионной записи связи декартовых координат ξ_k с переменными Кустанхеймо–Штифеля u_j имеют вид

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_1\mathbf{i} - u_2\mathbf{j} - u_3\mathbf{k}, \quad (5.3)$$

приведенный Штифелем и Шейфеле в их книге [19].

В работах [46, 47] показано, что регуляризующее KS -преобразование координат заключается в переходе от декартовых координат центра масс второго тела в инерциальной системе координат к новым переменным, которые являются нормированными определенным образом компонентами сопряженного кватерниона поворота $\bar{\lambda} = \lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}$, характеризующего ориентацию вращающейся системы координат η в инерциальной системе координат. Ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела, а ее начало находится в центре масс этого тела. Нормирующий множитель равен квадратному корню из расстояния r от центра масс второго тела до центра притяжения, поэтому кватернионные переменные $\mathbf{u}$ и λ связаны соотношением $\mathbf{u} = \sqrt{r}\bar{\lambda}$.

Было показано, что билинейное соотношение Кустанхеймо–Штифеля

$$u_1 \frac{du_0}{d\tau} - u_0 \frac{du_1}{d\tau} + u_3 \frac{du_2}{d\tau} - u_2 \frac{du_3}{d\tau} = 0, \quad (5.4)$$

связывающее между собой KS -переменные u_j и их первые производные по новой независимой переменной τ , накладывает на движение трехгранника η дополнительное (неголономное) условие, заключающееся в равенстве нулю проекции ω_1 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости трехгранника η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (ось η_1):

$$\omega_1 = 2 \left(\lambda_0 \frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1 \frac{d\lambda_0}{dt} - \lambda_2 \frac{d\lambda_3}{dt} + \lambda_3 \frac{d\lambda_2}{dt} \right) = \frac{2}{r} \left(u_1 \frac{du_0}{d\tau} - u_0 \frac{du_1}{d\tau} + u_3 \frac{du_2}{d\tau} - u_2 \frac{du_3}{d\tau} \right) = 0$$

Отметим, что по словам Штифеля и Шейфеле ([19], с. 29) соотношение вида (5.4):

$$u_4 v_1 - u_3 v_2 + u_2 v_3 - u_1 v_4 = 0,$$

где u_j и v_j — компоненты четырехмерных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, “называется билинейным соотношением и играет основную роль в нашем построении регулярной небесной механики”.

Таким образом, переход в уравнениях пространственной задачи двух тел от декартовых координат центра масс второго тела к KS -переменным фактически означает запись этих уравнений во вращающейся системе координат η с использованием в качестве параметров ориентации этой системы координат четырехмерных параметров Эй-

лера (Родрига—Гамильтона) λ_j , являющихся компонентами кватерниона поворота λ этой системы координат.

Наши дальнейшие преобразования этих уравнений связаны с нормировкой параметров Эйлера λ_j (кватерниона поворота λ) с помощью множителя $\sqrt{r}$ и с переходом в них к переменным Кустаанхеймо—Штифеля u_j , а также с введением в качестве дополнительных зависимых переменных кеплеровской энергии h и времени t и с переходом к новой независимой переменной τ .

Отметим, что в работах [46, 47] были получены более общие (в сравнении с уравнениями Кустаанхеймо—Штифеля) матричные (с использованием кватернионных матриц) и кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в KS -переменных в предположении, что вышеуказанное билинейное соотношение Кустаанхеймо—Штифеля (5.4) не выполняется. Эти уравнения содержат дополнительные слагаемые, в которых присутствуют проекции ω_1 и ε_1 векторов угловой скорости и углового ускорения сопровождающего трехгранника η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела (одна из этих проекций (ω_1 или ε_1) является произвольно задаваемым параметром), и являются более сложными.

Для получения этих уравнений нами были использованы восьмимерные параметры винтового движения λ_j и λ_j^0 ($j = 0, 1, 2, 3$) введенной поступательно перемещающейся и вращающейся системы координат η , а также полученные в этих переменных матричные [46] или кватернионные [47] дифференциальные уравнения возмущенного движения материальной точки (второго тела) в ньютоновском гравитационном поле. В этих работах было отмечено, что переменные λ_j и λ_j^0 являются компонентами дуальных параметров Родрига—Гамильтона (Эйлера) $\Lambda_j = \lambda_0 + s\lambda_j^0$, которые, в свою очередь, являются компонентами бикватерниона конечного перемещения Клиффорда [12]

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i} + \Lambda_2 \mathbf{j} + \Lambda_3 \mathbf{k} = \lambda + s\lambda^0 = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k} + s(\lambda_0^0 + \lambda_1^0 \mathbf{i} + \lambda_2^0 \mathbf{j} + \lambda_3^0 \mathbf{k}),$$

описывающего движение подвижной системы координат η , в которой были записаны уравнения движения материальной точки.

В состав использованных уравнений движения материальной точки входят дифференциальные уравнения в переменных λ_j и λ_j^0 , записанные в матричном виде с использованием кватернионных матриц типа n , имеющей вид первой из матриц (2.4) [46], или в кватернионном виде [47] с использованием кватернионных переменных λ и λ^0 .

В работе [47] отмечено, что использованные кватернионные дифференциальные уравнения в переменных λ и λ^0 эквивалентны одному бикватернионному (дуальному кватернионному) кинематическому уравнению [5]

$$2d\Lambda/dt = \Lambda \circ \mathbf{U}$$

$$\Lambda = \lambda + s\lambda^0, \quad \mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} + s\mathbf{v} = (\omega_1 + s\nu_1)\mathbf{i} + (\omega_2 + s\nu_2)\mathbf{j} + (\omega_3 + s\nu_3)\mathbf{k},$$

имеющему вид уравнения (2.10).

В этом уравнении $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости подвижной системы координат η , $\mathbf{v}$ — вектор линейной скорости начала этой системы координат, совпадающего с материальной точкой (центром масс второго тела), ω_k и ν_k — проекции этих векторов на оси подвижной системы координат η .

Декартовы координаты центра масс изучаемого тела ξ_k в системе координат ξ (т.е. проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс этого тела на оси инерциальной системы координат) связаны с переменными λ_j и λ_j^0 скалярными соотношениями (2.6):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 2(-\lambda_1\lambda_0^0 + \lambda_0\lambda_1^0 - \lambda_3\lambda_2^0 + \lambda_2\lambda_3^0), & \xi_2 &= 2(-\lambda_2\lambda_0^0 + \lambda_3\lambda_1^0 + \lambda_0\lambda_2^0 - \lambda_1\lambda_3^0) \\ \xi_3 &= 2(-\lambda_3\lambda_0^0 - \lambda_2\lambda_1^0 + \lambda_1\lambda_2^0 + \lambda_0\lambda_3^0),\end{aligned}$$

которые в кватернионной записи имеют вид (2.8): $\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = 2\lambda^0 \circ \bar{\lambda}$.

Если в приведенных скалярных соотношениях (2.6) положить

$$\lambda_0 = r^{-1/2}u_0, \quad \lambda_i = -r^{-1/2}u_i; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_0^0 = (1/2)r^{1/2}u_1, \quad \lambda_1^0 = (1/2)r^{1/2}u_0, \quad \lambda_2^0 = -(1/2)r^{1/2}u_3, \quad \lambda_3^0 = (1/2)r^{1/2}u_2,$$

то из них следуют формулы Кустаанхеймо–Штифеля (4.4):

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2)$$

Таким образом, нами было показано, что преобразование Кустаанхеймо–Штифеля является частным случаем более общего преобразования, описывающего винтовое движение в пространстве.

Приведенные скалярные соотношения (2.6), связывающие декартовы координаты ξ_k с параметрами винтового движения λ_j и λ_j^0 , впервые были установлены алгебраическим путем Штуди [86] как формулы, служащие для нахождения координат начала новой системы координат, получаемой из старой некоторым винтовым перемещением, определяемым бикватернионной операцией $\bar{\Lambda} \circ (\bullet) \circ \Lambda$. Их вывод также приводится в работе Котельникова [13], где для их получения используется теория приведения бикватернионов и бивекторов к выбранной точке приведения, и в работах автора статьи [5, 10] с использованием теории конечных перемещений твердого тела.

Отметим, что проекции η_k радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела на оси подвижной системы координат η связаны с переменными λ_j и λ_j^0 кватернионным соотношением $\mathbf{r}_\eta = \eta_i\mathbf{i} = 2\bar{\lambda} \circ \lambda^0 = \mathbf{r}\mathbf{i}$.

Матричные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в общем случае, когда билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля (5.4) не выполняется, имеют вид [46]

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} u_1'' \\ u_0'' \\ -u_3'' \\ u_2'' \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & -\xi_1 - 3r & -\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_1 + 3r & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 + 3r \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 - 3r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_0' \\ -u_3' \\ u_2' \end{pmatrix} - \\ & - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h + \omega_1^2 r^2 & -r^2 \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ r^2 \varepsilon_1 & h + \omega_1^2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h + \omega_1^2 r^2 & r^2 \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & -r^2 \varepsilon_1 & h + \omega_1^2 r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \\ -u_3 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}r \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ & h' = 2(q_0u_0' + q_1u_1' + q_2u_2' + q_3u_3'), \quad t' = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ & q_0 = u_0p_1 - u_3p_2 + u_2p_3, \quad q_1 = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 \\ & q_2 = -u_2p_1 + u_1p_2 + u_0p_3, \quad q_3 = -u_3p_1 - u_0p_2 + u_1p_3 \\ & \xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2),\end{aligned}\tag{5.5}$$

где ω_1 и $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ — проекции векторов угловой скорости и углового ускорения трехгранника η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (одна из этих проекций (ω_1 или ε_1) является произвольно задаваемым параметром), верхний штрих, по-прежнему, — символ дифференцирования по независимой переменной τ .

Кватернионные регулярные уравнения этой задачи в общем случае в переменных Кустанхеймо—Штифеля имеют вид [47] (в этой работе эти уравнения записаны в другой кватернионной форме, соответствующей приведенной выше матричной записи этих уравнений (5.5), когда кватернионная переменная α , введенная в этой работе и соответствующая вектор-столбцу $(u_1, u_0, -u_3, u_2)$, равна $\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}$):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{3}{2} r \omega_1 \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + \frac{1}{2} \left(r^2 \varepsilon_1 + \omega_1 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \bar{\mathbf{u}} \right) \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} - \frac{1}{2} (h + r^2 \omega_1^2) \mathbf{u} &= -\frac{1}{2} r \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi \\ \frac{dh}{d\tau} &= \mathbf{p}_\xi \cdot \left[\frac{d}{d\tau} (\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}) \right], \quad \frac{dt}{d\tau} = r, \quad \frac{d\omega_1}{d\tau} = r \varepsilon_1 \\ \mathbf{u} &= u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ \mathbf{p}_\xi &= p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}, \quad p_k = p_k(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3) \end{aligned} \quad (5.6)$$

В этих уравнениях $\mathbf{u}$, h , t — неизвестные функции независимой переменной τ , $\bar{\mathbf{u}}$ — кватернион, сопряженный кватерниону $\mathbf{u}$, проекции p_k вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения на оси инерциальной системы координат являются заданными функциями времени t , декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс второго тела на оси опорной системы координат ξ , которые могут быть представлены как функции времени t и переменных u_j, u'_j ; ω_1 и $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ — проекции векторов угловой скорости и углового ускорения трехгранника η на ось η_1 , заданные как функции переменных t и u_j, u'_j ; центральная точка означает скалярное произведение.

Для нахождения проекций радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ центра масс изучаемого тела на оси инерциальной системы координат (координат ξ_k и их производных $\dot{\xi}_k$ по времени t) через переменные u_j и u'_j необходимо воспользоваться кватернионными соотношениями

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1 \mathbf{i} + \dot{\xi}_2 \mathbf{j} + \dot{\xi}_3 \mathbf{k} = 2r^{-1} \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}'$$

Таким образом, нами были получены более общие, чем в случае Кустанхеймо—Штифеля, регулярные матричные и кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел. Эти уравнения сложнее уравнений Кустанхеймо—Штифеля. Они, в первую очередь, имеют теоретический интерес, демонстрируя тот факт, что регуляризация достигается и в том случае, когда $\omega_1 \neq 0$, т.е. когда не выполняется билинейное соотношение, являющееся одним из основных в теории регуляризации Кустанхеймо—Штифеля. Возможно, эти уравнения будет целесообразно использовать для высокоточных численных расчетов, поскольку при их интегрировании не требуется выполнения билинейного соотношения (5.4), которое неизбежно будет нарушаться в процессе численного интегрирования из-за методических и вычислительных погрешностей.

Полагая $\omega_1 = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$, из уравнений (5.6) получаем кватернионную форму регулярных уравнений Кустанхеймо—Штифеля:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{u} &= -\frac{1}{2} r \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \frac{dh}{d\tau} = 2 \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}_1 \mathbf{i} + \mathbf{q}_2 \mathbf{j} + \mathbf{q}_3 \mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \mathbf{p}_\xi = p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь $\text{scal}(\cdot)$ — скалярная часть кватернионного произведения $\bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{q}$, $\mathbf{p}_\xi$ — кватернион действующих возмущений.

Регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в модифицированных переменных Кустаанхеймо—Штифеля. Автором статьи также получены другие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и ИСЗ в новых четырехмерных переменных: модифицированных переменных Кустаанхеймо—Штифеля [51] (см. также [27, 55]). Эти уравнения обладают всеми достоинствами выше приведенных матричных и кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, но имеют более простую и симметричную структуру для движения второго тела (космического аппарата (спутника)) в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная, но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники [51, 59].

Введение модифицированных переменных основано на выше приведенных геометрической и кинематической интерпретациях регуляризующего преобразования Кустаанхеймо—Штифеля и их билинейного соотношения. В случае Кустаанхеймо—Штифеля ось η_1 ранее введенной нами вращающейся системы координат η направляется по радиус-вектору $\mathbf{r}$ центра масс второго тела (спутника). Координаты ξ_k тела в инерциальной системе координат ξ связаны с переменными Кустаанхеймо—Штифеля u_j скалярными соотношениями

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1 u_2 - u_0 u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2)$$

и кватернионным соотношением

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}$$

Нами предложено направить по радиус-вектору $\mathbf{r}$ не ось η_1 системы координат η , а ось η_3 . В этом случае все вышеприведенные кватернионные уравнения задачи двух тел сохраняют свой вид, лишь вместо орта $\mathbf{i}$ необходимо взять орт $\mathbf{k}$ (это, кстати, демонстрирует удобство использования кватернионных моделей астродинамики). Новые переменные u_{jm} , определяемые через параметры Эйлера λ_{jm} , как и в случае Кустаанхеймо—Штифеля, формулами

$$u_{0m} = r^{1/2} \lambda_{0m}, \quad u_{im} = r^{1/2} \lambda_{im}; \quad i = 1, 2, 3,$$

будут связаны с координатами ξ_k соотношениями

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2r(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) = 2(u_{1m} u_{3m} - u_{0m} u_{2m}) \\ \xi_2 &= 2r(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) = 2(u_{2m} u_{3m} + u_{0m} u_{1m}) \\ \xi_3 &= r(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = u_{0m}^2 - u_{1m}^2 - u_{2m}^2 + u_{3m}^2, \end{aligned}$$

которые отличны от выше приведенных соотношений и в кватернионной записи имеют вид

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = r \lambda \circ \mathbf{k} \circ \bar{\lambda} = \bar{\mathbf{u}}_m \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u}_m,$$

где новая кватернионная переменная $\mathbf{u}_m = u_{0m} + u_{1m} \mathbf{i} + u_{2m} \mathbf{j} + u_{3m} \mathbf{k}$ имеет смысл, отличный от кватернионной переменной $\mathbf{u}$, использованной нами в случае Кустаанхеймо—Штифеля.

Расстояние r , по-прежнему, находится через новые переменные u_{jm} по формуле

$$r = \|\mathbf{u}_m\|^2 = \mathbf{u}_m \circ \bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{u}}_m \circ \mathbf{u}_m = u_{0m}^2 + u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + u_{3m}^2,$$

а отображение $\mathbf{v}_\xi$ вектора скорости $\mathbf{v}$ на инерциальный базис — по другой формуле

$$\mathbf{v}_\xi = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k} = d\mathbf{r}_\xi/dt = 2\bar{\mathbf{u}}_m \circ \mathbf{k} \circ d\mathbf{u}_m/dt = 2r^{-1} \bar{\mathbf{u}}_m \circ \mathbf{k} \circ d\mathbf{u}_m/d\tau$$

Модифицированные переменные u_{jm} связаны с переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j соотношениями

$$\begin{aligned} u_{0m} &= (1/2)(u_0 + u_1 + u_2 + u_3), & u_{1m} &= -(1/2)(u_0 - u_1 - u_2 + u_3) \\ u_{0m} &= -(1/2)(u_0 + u_1 - u_2 - u_3), & u_{1m} &= -(1/2)(u_0 - u_1 + u_2 - u_3) \end{aligned}$$

и являются их линейными композициями.

В кватернионной записи эти соотношения принимают вид ортогонального преобразования

$$\mathbf{u}_m = \pi \circ \mathbf{u}, \quad \pi = (1/2)(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

Билинейное соотношение для модифицированных переменных u_j имеет другой вид:

$$u_{1m}u'_{0m} - u_{0m}u'_{1m} + u_{3m}u'_{2m} - u_{2m}u'_{3m} = 0$$

Полученные [51, 59] кватернионные уравнения движения спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных u_{jm} обладают всеми достоинствами уравнений движения спутника в переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_j [51, 59], но имеют более простую и симметричную структуру. Это обусловлено тем, что выражения переменной $\gamma = \sin \varphi$ (φ — геоцентрическая широта), от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через модифицированные переменные u_{jm} могут быть представлены в двух различных, более компактных симметричных формах

$$\gamma = 1 - 2r^{-1}(u_{1m}^2 + u_{2m}^2) = 2r^{-1}(u_{0m}^2 + u_{3m}^2) - 1, \quad r = u_{0m}^2 + u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + u_{3m}^2,$$

в сравнении с ее представлением

$$\gamma = 2r^{-1}(u_1u_3 + u_0u_2), \quad r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, что и позволяет получить более простые и симметричные, чем в случае использования переменных Кустаанхеймо–Штифеля, уравнения движения спутника.

Более простые и симметричные структуры уравнений приводят к более эффективным вычислительным алгоритмам при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения спутника. Удобство и эффективность использования полученных уравнений движения спутника в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля для аналитического исследования движения спутника показано на примере движения спутника в гравитационном поле Земли [59], в описании которого учитываются его центральная (ньютоновская) и зональные гармоники. Найдены первые интегралы уравнений движения спутника в модифицированных переменных в указанном случае, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, системы уравнений четвертого и третьего порядков.

Автором статьи были также предложены [54, 55] регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в кватернионных оскулирующих элементах (т.е. в медленно изменяющихся переменных). Эти уравнения являются кватернионным аналогом уравнений пространственной задачи двух тел в регулярных элементах, полученных Штифелем и Шейфеле [19]. Отметим следующие достоинства этих уравнений: во-первых, они регулярны, во-вторых, их правые части в случае возмущенного эллиптического движения — равномерно и медленно изменяющиеся функции, в случае же невозмущенного кеплеровского движения интегрирование уравнений производится без методических ошибок. К недостаткам этих уравнений относится то, что область их применения ограничена движениями эллиптического типа (когда $h < 0$).

В работе [47] показано, что регуляризация дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел достигается и в том случае, когда смысл преобразований исходных уравнений этой задачи остается прежним, но переменные Кустаанхеймо–Штифеля не используются: уравнения записываются во вращающейся системе координат η , ось η_1 которой направляется вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела, для описания ориентации этой системы координат используются параметры Эйлера λ_j (кватернион ориентации λ), в качестве дополнительной переменной используется кеплеровская энергия h , а в качестве независимой переменной новое “время” τ , связанное с реальным временем t дифференциальным соотношением $dt = r d\tau$. Полученные в этом случае регулярные дифференциальные уравнения первого порядка не являются линейными в случае кеплеровского движения, но имеют простой и наглядный вид.

В развитие этого подхода получены [55] регулярные кватернионные уравнения задачи двух тел, в которых используются параметры Эйлера, а не переменные Кустаанхеймо–Штифеля, в другой, более простой и наглядной форме.

В работах [49, 51] предложен способ однозначного нахождения значений параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо–Штифеля по заданным в рассматриваемый момент времени значениям декартовых координат и их первых производных (проекциям вектора скорости). Этот способ имеет в сравнении со способом неоднозначного нахождения переменных Кустаанхеймо–Штифеля, описанном Штифелем и Шейфелем в [19], существенные преимущества.

6. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения. Во всех работах по проблеме регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, известных автору статьи, рассматривается регуляризация уравнений движения центра масс второго (изучаемого) тела, описывающих движение этого тела относительно системы координат, движущейся в инерциальной системе координат поступательно, т.е. рассматривается регуляризация уравнений абсолютного движения центра масс изучаемого тела. В недавней работе автора [58] предложено кватернионное решение задачи регуляризации уравнений движения центра масс изучаемого тела, описывающих движение тела в системе координат, вращающейся относительно инерциальной системы координат по произвольно заданному закону, т.е. предложена регуляризация уравнений относительного движения изучаемого тела.

В курсах теоретической механики для сложения движений с использованием векторного способа описания движения и для получения векторной формы уравнений относительного движения материальной точки используется векторная операция сложения переносного и относительного движений (в виде суммы двух векторов, описывающих переносное и относительное движения), т.е. используется аддитивная форма сложения движений. Для сложения движений с использованием кватернионного способа описания движения нами используется кватернионная операция сложения движений в виде кватернионного произведения двух кватернионов, один из которых характеризует переносное движение, а другой — относительное движение, т.е. используется мультипликативная форма сложения движений. Это кардинальное отличие векторного и кватернионного способов описания движения приводит к существенным отличиям в способах получения векторных и кватернионных дифференциальных уравнений динамики относительного движения материальной точки.

Векторный способ получения векторного дифференциального уравнения относительного движения материальной точки основан на подстановке в векторное дифференциальное уравнение абсолютного движения материальной точки вместо вектора абсолютного ускорения векторной суммы переносного, относительного и кориолисова ускорений (в соответствии с теоремой о сложении ускорений), полученной в результате последовательного дифференцирования векторной суммы двух векторов,

описывающих переносное и относительное движения (с использованием понятий абсолютной и локальной производных от вектора), и последующего введения сил инерции.

Наш способ получения кватернионного дифференциального уравнения относительного движения материальной точки основан на подстановке в полученное нами кватернионное дифференциальное уравнение абсолютного движения материальной точки вместо кватерниона, характеризующего положение точки в инерциальной системе координат, кватернионного произведения двух кватернионов, один из которых характеризует переносное движение, а другой — относительное движение, и последующий учет кватернионного кинематического уравнения переносного вращения.

Будем рассматривать движение второго (изучаемого) тела относительно системы координат ζ , вращающейся относительно инерциальной системы координат с угловой скоростью ω_e (ω_e — переносная угловая скорость). Эта система координат характеризует собой переносное движение. Начало системы координат ζ совместим с началом системы координат ξ , движущейся относительно инерциальной системы координат поступательно, а ее ориентацию в инерциальной системе координат (и в системе координат ξ) будем задавать нормированным кватернионом $\mu = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$. Ориентацию ранее введенной системы координат η , ось η_1 которой направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс изучаемого тела, во вращающейся системе координат ζ будем задавать нормированным кватернионом $\mathbf{v} = v_0 + v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Нормы кватернионов μ и $\mathbf{v}$ равны единице, а их компоненты μ_j и v_j ($j = 0, 1, 2, 3$) являются параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона), характеризующими ориентации систем координат ζ и η в системах координат ξ и ζ соответственно. Ориентацию системы координат η в инерциальной системе координат будем, по-прежнему, задавать нормированным кватернионом $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}$ (этот кватернион характеризует собой абсолютное движение в инерциальной системе координат).

Будем считать, что все введенные кватернионы являются собственными [9, 10]: каждый из них определен своими компонентами в своей, преобразуемой этим кватернионом, системе координат. Тогда в соответствии с кватернионной формулой сложения двух конечных поворотов [9–11] собственные кватернионы λ , μ и $\mathbf{v}$ будут связаны соотношением

$$\lambda = \mu \circ \mathbf{v} \quad (6.1)$$

Эта формула является кватернионной формулой сложения переносного и относительного вращений.

Введем кватернионы

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = r^{1/2}(\lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}) = r^{1/2}\bar{\lambda}, \quad \lambda = r^{-1/2}\bar{\mathbf{u}} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{s} = s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k} = r^{1/2}(v_0 - v_1\mathbf{i} - v_2\mathbf{j} - v_3\mathbf{k}) = r^{1/2}\bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} = r^{-1/2}\bar{\mathbf{s}} \quad (6.3)$$

Компоненты u_j и s_j ($j = 0, 1, 2, 3$) кватернионов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{s}$ связаны с параметрами Эйлера λ_j и v_j и расстоянием r от центра масс второго тела до центра притяжения (центра масс первого (центрального) тела) соотношениями

$$u_0 = r^{1/2}\lambda_0, \quad u_k = -r^{1/2}\lambda_k, \quad k = 1, 2, 3; \quad u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = r$$

$$s_0 = r^{1/2}v_0, \quad s_k = -r^{1/2}v_k, \quad k = 1, 2, 3; \quad s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = r$$

Эти компоненты являются переменными Кустанхеймо–Штифеля, связанными с декартовыми координатами ξ_k и ζ_k центра масс изучаемого тела в системе координат ξ и во вращающейся системе координат ζ соотношениями

$$\begin{aligned}\xi_1 &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, & \xi_2 &= 2(u_1u_2 - u_0u_3), & \xi_3 &= 2(u_1u_3 + u_0u_2) \\ \varsigma_1 &= s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2, & \varsigma_2 &= 2(s_1s_2 - s_0s_3), & \varsigma_3 &= 2(s_1s_3 + s_0s_2)\end{aligned}\quad (6.4)$$

В кватернионной записи соотношения (6.4) имеют вид

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{r}_\varsigma = \varsigma_1 \mathbf{i} + \varsigma_2 \mathbf{j} + \varsigma_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} \quad (6.5)$$

Из соотношений (6.1)–(6.3) следует соотношение

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}},$$

которым устанавливается связь основных кватернионных (четырёхмерных) переменных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{s}$, характеризующих абсолютное и относительное движения точки (кватернион $\boldsymbol{\mu}$ характеризует переносное вращение).

Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения (движения изучаемого тела относительно системы координат ζ , вращающейся в инерциальной системе координат ξ по произвольно заданному закону $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t)$) в переменных Кустаанхеймо–Штифеля имеют (во времени τ) вид уравнений [58]

$$\mathbf{s}'' + \mathbf{s} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}'' \circ \boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{s}' \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}' \circ \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}h\mathbf{s} = -\frac{1}{2}r\mathbf{q}^* \quad (6.6)$$

$$h' = 2 \text{scal}((\bar{\mathbf{s}}' + \bar{\boldsymbol{\mu}} \circ \boldsymbol{\mu}' \circ \bar{\mathbf{s}}) \circ \mathbf{q}^*) \quad (6.7)$$

$$t' = r = \|\mathbf{s}\| = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (6.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^* &= -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_\varsigma, & \mathbf{p}_\varsigma &= \bar{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathbf{p}_\xi \circ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{p}_\varsigma &= p_{\varsigma_1} \mathbf{i} + p_{\varsigma_2} \mathbf{j} + p_{\varsigma_3} \mathbf{k}, & \mathbf{p}_\xi &= p_{\xi_1} \mathbf{i} + p_{\xi_2} \mathbf{j} + p_{\xi_3} \mathbf{k},\end{aligned}\quad (6.9)$$

$\mathbf{p}_\varsigma$ и $\mathbf{p}_\xi$ — отображения вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на оси вращающейся ζ и инерциальной (или ξ) систем координат, p_{ς_k} и p_k — проекции вектора $\mathbf{p}$ на оси систем координат ζ и ξ соответственно.

Производные в новом времени τ от кватерниона $\boldsymbol{\mu}$, характеризующие угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения, имеют вид

$$\boldsymbol{\mu}' = r(d\boldsymbol{\mu}(t)/dt), \quad \boldsymbol{\mu}'' = r'(d\boldsymbol{\mu}(t)/dt) + r^2(d^2\boldsymbol{\mu}(t)/dt^2)$$

В уравнениях (6.6)–(6.9) в качестве переменных выступают кватернион $\mathbf{s}$, компонентами которого являются регулярные переменные s_j , кеплеровская энергия h и время t . Кватернион $\mathbf{s}$ характеризует относительное движение центра масс изучаемого тела. Эти уравнения, также как и уравнения (4.5)–(4.7) или (5.7) возмущенной пространственной задачи двух тел для абсолютного движения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, регулярны в центре притяжения. Они сложнее уравнений для абсолютного движения, но, в отличие от них, позволяют непосредственно изучать движение второго тела относительно не инерциальной, а выбранной вращающейся системы координат, связанной, например, с той или иной планетой.

Для нахождения декартовых координат ζ_k изучаемого тела во вращающейся системе координат ζ и проекций $v_{rk} = d\zeta_k/dt$ его вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на оси этой системы координат служат второе соотношение (6.5) и соотношения

$$\mathbf{v}_{r\zeta} = v_{r1} \mathbf{i} + v_{r2} \mathbf{j} + v_{r3} \mathbf{k} = d\mathbf{r}_\zeta/dt = \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{s}/dt) + (d\bar{\mathbf{s}}/dt) \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} = r^{-1}(\bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}' + \bar{\mathbf{s}}' \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}),$$

где $\mathbf{v}_{r\zeta}$ — отображение вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на вращающийся базис ζ .

Используя кватернионное кинематическое уравнение переносного вращения

$$2\dot{\mu}' = r\dot{\mu} \circ \omega_{e\zeta},$$

где $\omega_{e\zeta}$ — отображение вектора угловой скорости ω_e вращающейся системы координат ζ на ее же координатные оси, запишем уравнения (6.6)–(6.8) относительного движения в другом виде [58]:

$$\mathbf{s}'' - r\mathbf{s}' \circ \omega_{e\zeta} - \frac{1}{2}\mathbf{s} \circ (r'\omega_{e\zeta} + \varepsilon_{e\zeta}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\omega_e^2 r^2 + h\right)\mathbf{s} = -\frac{1}{2}r\mathbf{q}^* \quad (6.10)$$

$$h' = \text{scal}((2\bar{\mathbf{s}}' + r\omega_{e\zeta} \circ \bar{\mathbf{s}}) \circ \mathbf{q}^*), \quad t' = r = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (6.11)$$

Здесь $r' = 2(s_0s_0' + s_1s_1' + s_2s_2' + s_3s_3')$, $\varepsilon_{e\zeta} = d\omega_{e\zeta}/dt$ — отображение вектора углового ускорения ε_e вращающейся системы координат ζ на ее же координатные оси, $\omega_e = |\omega_e|$.

В основном регулярном кватернионном дифференциальном уравнении (6.10) первое слагаемое $\mathbf{s}''$ в левой части уравнения характеризует относительное ускорение центра масс изучаемого тела во вращающейся системе координат ζ , сумма слагаемых

$$-\frac{1}{2}\mathbf{s} \circ (r'\omega_{e\zeta} + \varepsilon_{e\zeta}) - \frac{1}{4}\omega_e^2 r^2 \mathbf{s},$$

характеризует переносное ускорение, а слагаемое $-r\mathbf{s}' \circ \omega_{e\zeta}$ характеризует ускорение Кориолиса (напомним, что движение рассматривается в новом времени τ , определяемом дифференциальным соотношением $dt = r d\tau$).

Из уравнений (6.10), (6.11) следуют регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения изучаемого (второго) тела относительно Земли, принимаемой за центральное тело, в переменных Кустаанхеймо–Штифеля s_j , когда кватернион $\mu = \mu_0 + \mu_3\mathbf{k}$

$$\mathbf{s}'' - \Omega_E r \mathbf{s}' \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}\Omega_E r' \mathbf{s} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Omega_E^2 r^2 + h\right)\mathbf{s} = \frac{1}{2}r\mathbf{q}^* \quad (6.12)$$

$$h' = \text{scal}((2\bar{\mathbf{s}}' + \Omega_E r \mathbf{k} \circ \bar{\mathbf{s}}) \circ \mathbf{q}^*), \quad t' = r = \|\mathbf{s}\| = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (6.13)$$

Здесь

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_\zeta, \quad \mathbf{p}_\zeta = (\mu_0 - \mu_3\mathbf{k}) \circ \mathbf{p}_\xi \circ (\mu_0 + \mu_3\mathbf{k}); \quad r' = 2(s_0s_0' + s_1s_1' + s_2s_2' + s_3s_3')$$

$$\mu_0 = \cos((\chi_0 + \Omega_E t)/2), \quad \mu_3 = \sin((\chi_0 + \Omega_E t)/2),$$

$\chi_0 = \text{const}$ — значение угла χ разворота системы координат ζ , связанной в этом случае с Землей, относительно системы координат ξ вокруг оси ξ_3 , направленной вдоль оси вращения Земли, в начальный момент времени, $\Omega_E = \omega_e = \text{const}$ — угловая скорость суточного вращения Земли.

Замечание. Уравнение (4.7) работы [58] для кеплеровской энергии h , приведенное в этой работе, содержит ошибку: из правой части этого уравнения нужно убрать выражение, заключенное в квадратные скобки (это уравнение должно иметь вид уравнения (6.13) нашей статьи).

Заключение. Кватернионные и бикватернионные методы и модели относятся к основным современным методам и моделям аналитической механики. Они широко используются для решения многих актуальных задач механики, навигации и управления движением в силу их достоинств. Кватернионная регуляризация уравнений небесной механики и механики космического полета (астродинамики) является одной из наиболее эффективных регуляризаций особенностей классических ньютоновских уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых гравитационными силами.

Кватернионный метод регуляризации, основанный на использовании для описания орбитального движения параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо–Штифеля, уникален в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем.

Выше были изложены кватернионные и бикватернионные методы описания движения, модели теории конечных перемещений и регулярной кинематики твердого тела. Кватернионные и бикватернионные модели кинематики, в отличие от классических моделей, в которых для описания движения используются углы Эйлера–Крылова и их дуальные аналоги, не имеют особенностей типа деления на ноль и не содержат тригонометрических функций, что повышают эффективность аналитического исследования и численного решения задач механики, навигации и управления движением. Рассмотрена проблема регуляризации особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых гравитационными силами, с помощью использования четырехмерных параметров Эйлера, переменных Кустаанхеймо–Штифеля и их модификаций, кватернионов Гамильтона. Приведены основные регуляризирующие соотношения и регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенные Кустаанхеймо, Штифелем и Шейфеле, а также кватернионные регуляризирующие соотношения и регулярные кватернионные уравнения этой задачи, как для абсолютного, так и относительного движения изучаемого тела, предложенные автором статьи. Приведены предложенные им геометрические и кинематические интерпретации регуляризирующих преобразований классических уравнений в декартовых координатах, более общие (в сравнении с широко известными уравнениями Кустаанхеймо–Штифеля) регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, построенные с использованием четырехмерных кватернионных матриц (первый вариант уравнений) или кватернионов Гамильтона (второй вариант уравнений).

Также приведены полученные авторами [69] и другими исследователями (Штифель, Шейфеле, Бордовицына, Шарковский, Авдюшев и Фукушима) результаты численного исследования точности численного интегрирования регулярных кватернионных и других форм регуляризованных уравнений небесной механики и астеродинамики в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и ньютоновских уравнений в декартовых координатах, показывающие, что точность численного интегрирования уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля (в частности, уравнений задачи о движении искусственного спутника Земли по орбитам с большими эксцентриситетами) значительно выше (на несколько порядков) точности численного интегрирования ньютоновских уравнений. Это говорит о целесообразности использования для прогноза и коррекции орбитального движения небесных и космических тел регулярных кватернионных моделей орбитального движения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, построенных в рамках уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00218.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile // *Novi Comm. Acad. Sci. Imper. Petrop.* 1770. V. 15. P. 75–106.
2. *Rodrigues O.* Des lois geometriques qui regissent les déplacements d'un systems olide dans l'espace, et de la variation des coordonnee sprovenant de ses déplacement sconsideeres independamment des causes qui peuvent les produire // *J. Math. Pureset Appl.* 1840. V. 5. P. 380–440.
3. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ НКТИ СССР, 1937. 500 с.
4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
5. *Челноков Ю. Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // *ПММ.* 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.

6. Челноков Ю.Н. Об одном винтовом методе описания движения твердого тела // в: Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 129–138.
7. Челноков Ю.Н. Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 20–28.
8. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions. Dublin: Hodges&Smith, 1853. 382 p.
9. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
10. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 511 с.
11. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
12. Clifford W. Preliminary sketch of biquaternions // Proc. London Math. Soc. 1873. № 4. P. 381–395.
13. Котельников А.П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань: 1895. 215 с.
14. Котельников А.П. Винты и комплексные числа // Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском ун-те. 1896. Сер. 2. № 6. С. 23–33.
15. Котельников А.П. Теория векторов и комплексные числа // в сб.: Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.: Гостехиздат, 1950. С. 7–47.
16. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
17. Gibbs J.W. Scientific Papers. New York: Dover, 1961.
18. Gibbs J.W. Vector Analysis. New York: Scribners, 1901.
19. Stiefel E.L., Scheifele G. Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p.
20. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.
21. Ickes B.F. A new method for performing digital control system attitude computations using quaternions // AIAA J. 1970. № 8. P. 13–17.
22. Плотников П.К., Челноков Ю.Н. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела // в: Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 122–129.
23. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.
24. Челноков Ю.Н. Об устойчивости решений бикватернионного кинематического уравнения винтового движения твердого тела // в: Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. М.: Высшая школа, 1983. Вып. 13. С. 103–109.
25. Челноков Ю.Н. Исследование некоторых алгоритмических задач определения ориентации объекта бесплатформенными инерциальными навигационными системами. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук, Ленинградский электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина), Ленинград: 1974, 20 с.
26. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные методы в задачах механики твердого тела и материальных систем. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-матем. наук, Институт проблем механики АН СССР, Москва: 1987. 36 с.
27. Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
28. Velte W. Concerning the regularizing KS-transformation // Celest. Mech. 1978. V. 17. P. 395–403.
29. Vivarelli M.D. The KS-transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. 1983. V. 29. P. 45–50.
30. Vivarelli M.D. Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 359–370.
31. Vivarelli M.D. On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 1991. V. 50. P. 109–124.
32. Шагов О.Б. О двух видах уравнений движения искусственного спутника Земли в осцилляторной форме // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 3–8.
33. Deprit A., Eliepe A., Ferrer S. Linearization: Laplace vs. Stiefel // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 1994. V. 58. P. 151–201.
34. Vrbik J. Celestial mechanics via quaternions // Canad. J. Phys. 1994. V. 72. P. 141–146.
35. Vrbik J. Perturbed Kepler problem in quaternionic form // J. Phys. A: Math.&General. 1995. V. 28. P. 193–198.

36. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2006. V. 95. P. 201–212.
37. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // *Mech.&Dyn. Astron.* 2008. V. 102. № 1. P. 149–162.
38. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 2009. V. 400. P. 228–231.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x>. arXiv:0803.4441
39. *Zhao L.* Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // *R&C Dyn.* 2015. V. 20. № 1. P. 19–36.
<https://doi.org/10.1134/S1560354715010025>
40. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454.
<https://doi.org/10.1093/mnras/stw780>. arXiv:1604.06673
41. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2017. V. 127. P. 343–368.
42. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2017. V. 128. P. 323–342.
43. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2018. V. 130. Art. No. 68.
<https://doi.org/10.1007/s10569-018-9862-4>
44. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2019. V. 131. Art. No. 9.
<https://doi.org/10.1007/s10569-019-9887-3>
45. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-map. An interpretation through symmetry // *J. Geom. Mech.* 2018. V. 10. № 3. P. 359–372.
46. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1981. № 6. С. 12–21.
47. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 1. С. 151–158.
48. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М.: Деп. в ВИНТИ 13.12.85. № 218628-В, 1985. 36 с.
49. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. М.: Деп. в ВИНТИ 13.22.85. № 8629-В, 1985. 18 с.
50. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // *Космич. исслед.* 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
51. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // *Космич. исслед.* 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
52. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // *Изв. РАН. МТТ.* 1993. № 1. С. 20–30.
53. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // *Изв. РАН. МТТ.* 1993. № 2. С. 3–11.
54. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2007. № 5. С. 18–44.
55. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астеродинимике и управление траекторным движением. I // *Космич. исслед.* 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401.
<https://doi.org/10.7868/S0023420613050026>
56. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астеродинимике и управление траекторным движением. II // *Космич. исслед.* 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336.
<https://doi.org/10.7868/S0023420614030029>
57. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астеродинимике и управление траекторным движением. III // *Космич. исслед.* 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446.
<https://doi.org/10.7868/S0023420615050040>

58. Челноков Ю.Н. Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 721–733.
<https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9>
59. Челноков Ю.Н. Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли // Космич. исслед. 2019. Т. 57. № 2. С. 117–131.
<https://doi.org/10.1134/S002342061902002X>
60. Chelnokov Yu.N. Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math.&Mech. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80.
<https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
61. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
62. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
63. Fukushima T. Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // Astron. J. 2005. V. 129. № 5. Art. No. 2496.
<https://doi.org/10.1086/429546>
64. Fukushima T. Numerical comparison of two-body regularizations // Astron. J. 2007. V. 133. № 6. Art. No. 2815.
65. Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A. A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2007. V. 97. P. 131–150.
<https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3>
66. Baù G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E. Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2015. V. 454. P. 2890–2908.
67. Amato D., Bombardelli C., Baù G., Morand V., Rosengren A.J. Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2019. V. 131. Art. No. 21.
<https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1>
68. Baù G., Roa J. Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2020. V. 132. Art. No. 10.
<https://doi.org/10.1007/s10569-020-9952-y>
69. Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю. Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сб. матер.: XXVIII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург, 2021. С. 292–295.
70. Челноков Ю.Н., Сапунков Я.Г., Логинов М.Ю., Шекутьев А.Ф. Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и изохронных производных // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 124–156.
71. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.
72. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
73. Levi-Civita T. Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. Mat. Pura Appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
74. Levi-Civita T. Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144.
<https://doi.org/10.1007/BF02418577>
75. Levi-Civita T. Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // Opere Math. 1956. № 2. P. 411–417.
76. Kustaanheimo P. Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
<https://doi.org/10.1086/518165>
77. Kustaanheimo P., Stiefel E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
78. Брумберг В.А. Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 208 с.
79. Musen P. On Stromgren’s method of special perturbations // J. Astron. Sci. 1961. V. 8. P. 48–51.

80. *Musen P.* // NASA TN D-2301. 1964. P. 24.
81. *Hopf H.* Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche // *Math. Ann.* 1931. V. 104. P. 637–665.
82. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois corps // *Acta Math.* 1912. V. 36. P. 105–179.
83. *Bohlin K.* Note sur le probleme des deux corps et sur une integration nouvelle dans le problem des trois corps // *Bull. Astron.* 1911. V. 28. P. 113–119.
84. *Burdet C.A.* Theory of Kepler motion: The general perturbed two body problem // *Zeitschrift für angewandte Math. und Phys.* 1968. V. 19. P. 345–368.
85. *Burdet C.A.* Le mouvement Keplerien et les oscillateurs harmoniques // *J. für die reine und angewandte Math.* 1969. V. 238. P. 71–84.
86. *Study E.* Von der Bewegungen und Umlegungen // *Math. Annal.* 1891. V. 39. P. 441–566.

Quaternion and Biquaternion Methods and Regular Models of Analytical Mechanics (Review)

Yu.N. Chelnokov^{a,#}

^a*Institute of Precision Mechanics and Control Problems of the RAS, Saratov, Russia*

[#]*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

The work is of a survey analytical nature. The first part of the work presents quaternion and biquaternion methods for describing motion, models of the theory of finite displacements and regular kinematics of a rigid body based on the use of four-dimensional real and dual Euler (Rodrigues–Hamilton) parameters. These models, in contrast to the classical models of kinematics in Euler–Krylov angles and their dual counterparts, do not have division-by-zero features and do not contain trigonometric functions, which increases the efficiency of analytical research and numerical solution of problems in mechanics, inertial navigation, and motion control.

The problem of regularization of differential equations of the perturbed spatial two-body problem, which underlies celestial mechanics and space flight mechanics (astrodynamics), is discussed using the Euler parameters, four-dimensional Kustaanheimo–Stiefel variables, and Hamilton quaternions: the problem of eliminating singularities (division by zero), which are generated by the Newtonian gravitational forces acting on a celestial or cosmic body and which complicate the analytical and numerical study of the motion of a body near gravitating bodies or its motion along highly elongated orbits. The history of the regularization problem and the regular Kustaanheimo–Stiefel equations, which have found wide application in celestial mechanics and astrodynamics, are presented. We present the quaternion methods of regularization, which have a number of advantages over Kustaanheimo–Stiefel matrix regularization, and various regular quaternion equations of the perturbed spatial two-body problem (for both absolute and relative motion). The results of a comparative study of the accuracy of numerical integration of various forms of regularized equations of celestial mechanics and astrodynamics in Kustaanheimo–Stiefel variables and Newtonian equations in Cartesian coordinates are presented, showing that the accuracy of numerical integration of regularized equations in Kustaanheimo–Stiefel variables is much higher (by several orders of magnitude) than the accuracy of numerical integration Newtonian equations.

Keywords: analytical mechanics, motion geometry, regular kinematics, space flight mechanics (astrodynamics), perturbed spatial problem of two bodies, regularization of singularities generated by gravitational forces, equations of orbital motion, Euler (Rodrigues–Hamilton) parameters, Kustaanheimo–Stiefel variables, quaternions

REFERENCES

1. *Euler L.* Problema Algebraicum ob Affectiones Prorsus Singulares Memorabile // *Novi Comm. Acad. Sci. Imper. Petrop.*, 1770, vol. 15, pp. 75–106.
2. *Rodrigues O.* Des lois geometriques qui regissent les déplacements d'un systems olide dans l'espace, et de la variation des coordonnee sprovenant de ses déplacement sconsideeres independamment des causes qui peuvent les produire // *J. des Math. Pureset Appl.*, 1840, vol. 5, pp. 380–440.

3. *Whittaker E.T.* A Treatise on the Analytical Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1927.
4. *Lurie A.I.* Analytical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 1961. 824 p.
5. *Chelnokov Yu.N.* On integration of kinematic equations of a rigid body's screw-motion // Appl. Math.&Mech., 1980, vol. 44, no. 1, pp. 19–23.
6. *Chelnokov Yu.N.* On one helical method for describing the motion of a rigid body // in: *Sat. Sci. Meth. Art. on Theoret. Mech.* Moscow: Higher School, 1981. Iss. 11. pp. 129–138.
7. *Chelnokov Yu.N.* One form of the equations of Inertial navigation // *Mech. Solids.*, 1981, vol. 16, no. 5, pp. 16–23.
8. *Hamilton W.R.* Lectures on Quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853. 382 p.
9. *Branets V.N., Shmyglevsky I.P.* Application of Quaternions in Problems of Orientation of a Rigid Body. Moscow: Nauka, 1973. 320 p.
10. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Rigid Body Mechanics and Their Applications. Geometry and Kinematics of Motion. Moscow: Fizmatlit, 2006. 511 p.
11. *Zhuravlev V.F.* Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2008. 304 p.
12. *Clifford W.* Preliminary sketch of biquaternions // *Proc. London Math. Soc.*, 1873, no. 4, pp. 381–395.
13. *Kotelnikov A.P.* Screw Calculus and Some of Its Applications to Geometry and Mechanics. Kazan: 1895. 215 p.
14. *Kotelnikov A.P.* Screws and complex numbers // *Izv. Phys.-Math. Society at Kazan Univ.*, 1896, Ser. 2, no. 6, pp. 23–33.
15. *Kotelnikov A.P.* Theory of vectors and complex numbers // in: *Some Applications of Lobachevsky's Ideas in Mechanics and Physics.* Moscow: Gostekhizdat, 1950. pp. 7–47.
16. *Branets V.N., Shmyglevsky I.P.* Introduction to the Theory of Strapdown Inertial Navigation Systems. Moscow: Nauka, 1992. 280 p.
17. *Gibbs J.W.* Scientific Papers. N.Y.: Dover, 1961.
18. *Gibbs J.W.* Vector Analysis. N.Y.: Scribners, 1901.
19. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p.
20. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N.Y.: McGraw-Hill. 1960.
21. *Ickes B.F.* A New method for performing digital control system attitude computations using quaternions // *AIAA J.*, 1970, no. 8, pp. 13–17.
22. *Plotnikov P.K., Chelnokov Yu.N.* Application of quaternion matrices in the theory of finite rotation of a rigid body // in: *Sb. Sci.&Meth. Art. on Theoret. Mech.* Moscow: Higher School, 1981. Iss. 11, pp. 122–129.
23. *Dimentberg F.M.* Theory of Screws and Its Applications. Moscow: Nauka, 1978. 328 p.
24. *Chelnokov Yu.N.* On the stability of solutions to the biquaternion kinematic equation of the helical motion of a rigid body // in: *Sb. Sci.&Meth., Art. on Theoret. Mech.* Moscow: Higher School, 1983. Iss. 13, pp. 103–109.
25. *Chelnokov Yu.N.* Study of some algorithmic problems of determining the orientation of an object by strapdown inertial navigation systems. Abstract of the dissertation for the degree of Cand. tech. Sciences. Leningrad Electrotechnical Institute named after V.I. Ulyanov (Lenin). Leningrad: 1974. 20 p.
26. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and biquaternion methods in problems of rigid body mechanics and material systems. Abstract of the dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Institute for Problems in Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR. Moscow: 1987. 36 p.
27. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Models and Methods of Dynamics, Navigation and Motion Control. Moscow: Fizmatlit, 2011. 560 p.
28. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // *Celest. Mech.*, 1978, vol. 17, pp. 395–403.
29. *Vivarelli M.D.* The KS-transformation in hypercomplex form // *Celest. Mech.*, 1983, vol. 29, pp. 45–50.
30. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // *Celest. Mech.*, 1988, vol. 41, pp. 359–370.
31. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 1991, vol. 50, pp. 109–124.
32. *Shagov O.B.* On two types of equations of motion of an artificial Earth satellite in oscillatory form // *Mech. Solids*, 1990, no. 2, pp. 3–8.

33. *Deprit A., Elipe A., Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 1994, vol. 58, pp. 151–201.
34. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // *Canad. J. Phys.*, 1994, vol. 72, pp. 141–146.
35. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // *J. Phys. A: Math.&General*, 1995, vol. 28, pp. 193–198.
36. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech.&Dyn. Astr.*, 2006, vol. 95, pp. 201–212.
37. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // *Celest. Mech.&Dyn. Astr.*, 2008, vol. 102, no. 1, pp. 149–162.
38. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2009, vol. 400, pp. 228–231. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x. arXiv:0803.4441
39. *Zhao L.* Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // *R.&C. Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 1, pp. 19–36. DOI: 10.1134/S1560354715010025
40. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2016, vol. 459, no. 3, pp. 2444–2454. DOI: 10.1093/mnras/stw780. arXiv:1604.06673
41. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2017 vol. 127 pp. 343–368.
42. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2017, vol. 128, pp. 323–342.
43. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2018, vol. 130, art. no. 68. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
44. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2019, vol. 131, art. no. 9. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
45. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-map. an interpretation through symmetry // *J. Geom. Mech.*, 2018, vol. 10, no. 3, pp. 359–372.
46. *Chelnokov Yu.N.* On regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // *Mech. Solids*, 1981, vol. 16, no. 6, pp. 1–10.
47. *Chelnokov Yu.N.* Regular equations of the three-dimensional two body problem // *Mech. Solids*, 1984, vol. 19, no. 1, pp. 1–7.
48. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Methods in Problems of Perturbed Motion of a Material Point. Pt. 1. General Theory. Applications to Problem of Regularization and to Problem of Satellite Motion. Moscow: VINITI, 1985. no. 8628-B.
49. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Methods in Problems of Perturbed Motion of a Material Point. Pt. 2. Three-Dimensional Problem of Unperturbed Central Motion. Problem with Initial Conditions. Moscow: VINITI, 1985. no. 8629-B.
50. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // *Cosmic Res.*, 1992, vol. 30, no. 6, pp. 612–621.
51. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // *Cosmic Res.*, 1993, vol. 31, no. 3, pp. 409–418.
52. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I // *Mech. Solids*, 1993, vol. 28, no. 1, pp. 16–25.
53. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II // *Mech. Solids*, 1993, vol. 28, no. 2, pp. 1–12.
54. *Chelnokov Yu.N.* Analysis of optimal motion control for a material points in a central field with application of quaternions // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 688–713.
55. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // *Cosmic Res.*, 2013, vol. 51, no. 5, pp. 353–364. DOI: 10.1134/S001095251305002X
56. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. II // *Cosmic Res.*, 2014, vol. 52, no. 4, pp. 350–361. DOI: 10.1134/S0010952514030022
57. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III // *Cosmic Res.*, 2015, vol. 53, no. 5, pp. 394–409.
58. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial two-body problem: regular quaternion equations of relative motion // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 169–178. DOI: 10.3103/S0025654419030075

59. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion equations of disturbed motion of an artificial earth satellite // *Cosmic Res.*, 2019, vol. 57, no. 2, pp. 101–114. DOI: 10.1134/S0010952519020023
60. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // *Appl. Math.&Mech.*, 2022, vol. 43, no. 1, pp. 21–80. DOI: 10.1007/s10483-021-2797-9
61. *Bordovitsyna T.V.* Modern Numerical Methods in Problems of Celestial Mechanics. Moscow: Nauka, 1984. 136 p.
62. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* Theory of Motion of Artificial Satellites of the Earth. Analytical and Numerical Methods. Tomsk: Tomsk Univ., 2007. 178 p.
63. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // *The Astronomical J.*, 2005, vol. 129, no. 5. 2496. DOI: 10.1086/429546
64. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // *The Astronomical J.*, 2007, vol. 133, no. 6. 2815.
65. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2007, vol. 97, pp. 131–150. DOI: 10.1007/s10569-006-9056-3
66. *Baù G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2015, vol. 454, pp. 2890–2908.
67. *Amato D., Bombardelli C., Baù G., Morand V., Rosengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2019, vol. 131, no. 21. DOI: 10.1007/s10569-019-9897-1
68. *Baù G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2020, vol. 132, no. 10. DOI: 10.1007/s10569-020-9952-y
69. *Chelnokov Y.N., Loginov M.Y.* New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space // 28th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst., 2021, 9470806.
70. *Chelnokov Yu.N., Sapunkov Ya.G., Loginov M.Yu., Shchekutiev A.F.* Forecast and correction of spacecraft orbital motion using regular quaternion equations and their solutions in Kustaanheimo–Stiefel variables and isochronic derivatives // *PMM*, 2023, vol. 87, iss. 2, pp. 124–156.
71. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 613–639. DOI: 10.3103/S0025654417060036
72. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // *Nov. Comm. Petrop.*, 1765, vol. 11, pp. 144–151.
73. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1904, vol. 9, pp. 1–32.
74. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // *Acta Math.*, 1920, vol. 42, pp. 99–144. DOI:10.1007/BF02418577
75. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // *Opere Math.*, 1956, no. 2, pp. 411–417.
76. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // *Ann. Univ. Turku*, 1964, vol. 73, pp. 3–7. DOI: 10.1086/518165
77. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // *J. Reine Angew. Math.*, 1965, vol. 218, pp. 204–219.
78. *Brumberg V.A.* Analytical Algorithms of Celestial Mechanics. Moscow: Nauka, 1980. 208 p.
79. *Musen P.* On Stromgren’s method of special perturbations // *J. Astron. Sci.*, 1961, vol. 8, pp. 48–51.
80. *Musen P.* // NASA TN D-2301, 1964, pp. 24.
81. *Hopf H.* Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche // *Math. Ann.*, 1931, vol. 104, pp. 637–665.
82. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois corps // *Acta Math.*, 1912, vol. 36, pp. 105–179.
83. *Bohlin K.* Note sur le probleme des deux corps et sur une integration nouvelle dans le problem des trois corps // *Bull. Astron.*, 1911, vol. 28, pp. 113–119.
84. *Burdet C.A.* Theory of Kepler motion: The general perturbed two body problem // *Zeitschrift für angewandte Math. und Phys.*, 1968, vol. 19, pp. 345–368.
85. *Burdet C.A.* Le mouvement Keplerien et les oscillateurs harmoniques // *J. für die reine und angewandte Math.*, 1969, vol. 238, pp. 71–84.
86. *Study E.* Von der Bewegungen und Umlegungen // *Math. Annal.*, 1891, vol. 39, pp. 441–566.

УДК 531

ОСОБЕННОСТИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ТЯЖЕЛОГО ЭЛЛИПСОИДА НА ШЕРОХОВАТОЙ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. Г. М. Розенблат^{1,*}¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
Москва, Россия

*e-mail: gr51@mail.ru

Поступила в редакцию 14.04.2023 г.

После доработки 15.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

В статье рассматриваются задачи о равновесиях и стационарных вращениях тяжелого тела-эллипсоида на абсолютно шероховатой наклонной плоскости. Контакт тела с плоскостью является точечным и происходит без проскальзывания (неголономная связь). Найдены все положения равновесия эллипсоида, показана их неустойчивость в пространственном случае, когда возмущения тела могут происходить с вращением. Показано, что стационарные вращения тела на шероховатой наклонной плоскости не могут быть реализованы.

Ключевые слова: эллипсоид, абсолютно шероховатая плоскость, равновесие, устойчивость, стационарные вращения

DOI: 10.31857/S0032823523040124, EDN: ZXRGBV

“Имеется одна особенность, которая привносит большие трудности в механику, физику, химию, технику, астрономию и биологию. Эта особенность заключается в том, что устойчивое равновесие при непрерывном изменении параметров системы может стать неустойчивым, а непрерывный процесс с течением времени может стать разрывным”.

Дж. Лайтхилл

1. Введение и основные обозначения. Рассмотрим твердое тело, представляющее собой тяжелый уравновешенный (центр масс совпадает с геометрическим центром) трехосный эллипсоид, который помещается на шероховатую наклонную плоскость (см. рис. 1). На рис. 1 введены обозначения: $Oxyz$ — неподвижная система координат, C — центр масс эллипсоида, K — точка контакта, $C\xi\eta\zeta$ — система координат, жестко связанная с телом, n — единичный вектор нормали наклонной плоскости, w — единичный вектор восходящей вертикали.

Требуется определить все возможные положения равновесия эллипсоида и исследовать их устойчивость. Пусть наклонная плоскость Π образует угол α с горизонтальной плоскостью Γ (точнее, α — двугранный угол, образуемый плоскостями Π и Γ). Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ следующим образом. Начало системы O — произвольная точка плоскости Π , координатная плоскость Oxy совпадает с плоскостью Π , причем ось Ox направлена вниз по линии наибольшего ската наклонной

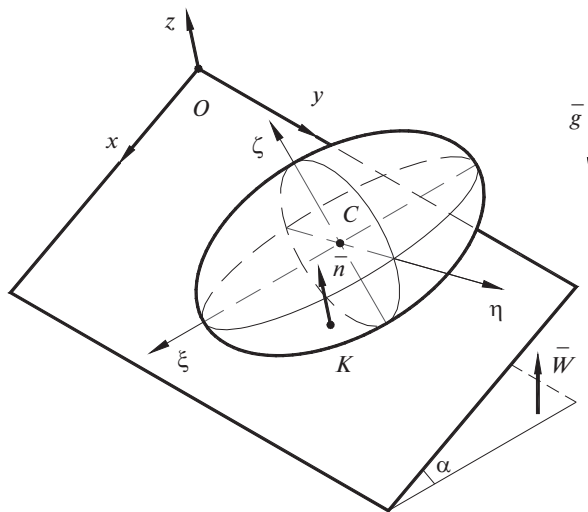


Рис. 1. Эллипсоид на наклонной плоскости.

плоскости Π , ось Oy — параллельно откосу, т.е. прямой пересечения плоскостей Π и Γ . Ось Oz направлена вверх по нормали к наклонной плоскости Π так, что система координат $Oxyz$ является правой. Далее, введем подвижную правую систему координат $C\xi\eta\zeta$, которая жестко связана с телом, где C — центр масс тела, который совпадает с центром эллипсоида. Оси этой системы координат выбраны таким образом, что уравнение поверхности эллипсоида в системе $C\xi\eta\zeta$ имеет следующий канонический вид

$$k_1\xi^2 + k_2\eta^2 + k_3\zeta^2 = 1 \quad (1.1)$$

$$k_1 = 1/a^2, \quad k_2 = 1/b^2, \quad k_3 = 1/c^2; \quad a \leq b \leq c \quad (k_1 \geq k_2 \geq k_3)$$

В уравнении (1.1) a, b, c — полуоси эллипсоида. Ориентацию подвижной системы $C\xi\eta\zeta$ относительно неподвижной системы $Oxyz$ будем задавать тремя углами Эйлера φ, ψ, θ , причем : 1) φ — угол собственного вращения тела вокруг оси $C\zeta$, 2) ψ — угол пререссии, т.е. угол, образуемый линией узлов с неподвижной осью Ox , в данном случае, линия узлов — это линия пересечения плоскости $C\xi\eta\zeta$ наклонной плоскостью Π (т.е. с плоскостью Oxy), 3) θ — угол нутации, т.е. угол, образуемый осью $C\zeta$ с нормалью к плоскости Π , являющейся также осью Oz .

Ортогональная матрица A перехода от координат векторов в системе $C\xi\eta\zeta$ к координатам векторов в системе $Oxyz$ (точнее, в кениговой системе $Cx_1y_1z_1$) представляется в виде [1]:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta \\ a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, & a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, & a_{32} &= \cos \varphi \sin \theta \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta, & a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta, & a_{33} &= \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Пусть n — единичный вектор нормали плоскости Π , направленный вдоль оси Oz , а w — единичный вектор восходящей вертикали, являющийся также нормалью к горизонтальной плоскости Γ (см. рис. 1). В системе $Oxyz$ эти векторы имеют вид

$$n = (0, 0, 1)^T, \quad w = (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)^T \quad (1.3)$$

Для вычисления проекций этих векторов в системе $C\xi\eta\zeta$ необходимо векторы из (1.3) умножить слева на матрицу A^T , получающуюся транспонированием матрицы A из (1.2). Используя формулы (1.2), получим следующие выражения

$$\begin{aligned} n_\xi &= \sin \varphi \sin \theta, \quad n_\eta = \cos \varphi \sin \theta, \quad n_\zeta = \cos \theta \\ w_\xi &= -(\cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) \sin \alpha + (\sin \varphi \sin \theta) \cos \alpha \\ w_\eta &= (\cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) \sin \alpha + (\cos \varphi \sin \theta) \cos \alpha \\ w_\zeta &= -(\sin \psi \sin \theta) \sin \alpha + (\cos \theta) \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, в частности, что $(n \cdot w) = \cos \alpha$.

Поставим задачу: найти все положения равновесия эллипсоида (разд. 2) на абсолютно шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α , а затем исследовать их устойчивость (разд. 3). Кроме того, в данной работе исследуется вопрос о существовании стационарных вращений тела на шероховатой наклонной плоскости (разд. 4).

2. Задача о поиске возможных положений равновесия эллипсоида на абсолютно шероховатой наклонной плоскости. На тяжелый эллипсоид действует только одна активная сила — сила тяжести $m\vec{g}$, которая приложена в центре масс C и направлена строго противоположно вектору восходящей вертикали $\vec{w}$. В точке контакта K поверхности эллипсоида с наклонной плоскостью Π действует сила реакции, состоящая из нормальной реакции N и касательной силы трения покоя $F_{\text{тр}}$. Если предполагать, что коэффициент трения достаточно большой (напомним, что необходимым условием равновесия тяжелого тела на шероховатой наклонной плоскости с конечным коэффициентом трения f и углом наклона α является известное неравенство $\tan \alpha < f$, а предельное значение $\alpha = \alpha_0 = \arctg f$ называется углом трения), то равновесие тела будет обеспечено тогда и только тогда, когда сила тяжести проходит через точку опоры K (в противном случае, будет нарушено условие равенства нулю моментов всех внешних сил относительно точки контакта K). Следовательно, при равновесии радиус-вектор CK направлен строго противоположно вектору восходящей вертикали $\vec{w}$. Пусть проекции вектора CK на оси системы $C\xi\eta\zeta$ (т.е. координаты точки контакта K в системе $C\xi\eta\zeta$) суть ξ, η, ζ . Тогда для этих величин выполнено уравнение (1.1), а единичный нормальный вектор к поверхности тела в рассматриваемой точке (в системе $C\xi\eta\zeta$), направленный внутрь эллипсоида, дается соотношениями

$$n = -\lambda^{-1} (k_1 \xi, k_2 \eta, k_3 \zeta)^T, \quad \text{где} \quad \lambda = (k_1^2 \xi^2 + k_2^2 \eta^2 + k_3^2 \zeta^2)^{1/2} \quad (2.1)$$

Ясно, что, в силу условий контакта, этот вектор совпадает с единичным нормальным вектором к наклонной плоскости, проекции которого (в системе $C\xi\eta\zeta$) даются первой строчкой соотношений (1.4). На основании этого мы можем написать следующие равенства

$$\begin{aligned} \sqrt{k_1} \xi &= -(\lambda/\sqrt{k_1}) \sin \varphi \sin \theta, \quad \sqrt{k_2} \eta = -(\lambda/\sqrt{k_2}) \cos \varphi \sin \theta \\ \sqrt{k_3} \zeta &= -(\lambda/\sqrt{k_3}) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

В соотношениях (2.2) величина λ дается формулой из (2.1). Возводя равенства из (2.2) в квадраты, а затем, складывая их и учитывая (1.1), получим соотношение

$$\lambda = \mu^{-1}, \quad \mu = \left[(k_1^{-1} \sin^2 \varphi + k_2^{-1} \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + k_3^{-1} \cos^2 \theta \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

Таким образом, соотношения (2.2) приобретают вид

$$\xi = -\frac{\sin \varphi \sin \theta}{k_1 \mu}, \quad \eta = -\frac{\cos \varphi \sin \theta}{k_2 \mu}, \quad \zeta = -\frac{\cos \theta}{k_3 \mu} \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.4) величина μ задается выражением из (2.3). Соотношения (2.3), (2.4) совпадают с формулами, полученными в [2].

Все точки (ξ, η, ζ) на поверхности эллипсоида, заданные параметрическими соотношениями (2.4), во-первых, удовлетворяют уравнению поверхности эллипсоида (1.1), во-вторых, касательная плоскость к эллипсоиду в этих точках совпадает с самой наклонной плоскостью Π , и, следовательно, внутренняя нормаль к эллипсоиду в этой точке совпадает с нормалью к наклонной плоскости, которая образует с вектором восходящей вертикали w угол α . Это можно установить и непосредственно, используя формулы (1.4). При равновесии радиус-вектор $KC = -(\xi, \eta, \zeta)^T$ обязательно должен быть коллинеарен вектору w восходящей вертикали. Отсюда следуют, с учетом соотношений (1.4) и (2.2), равенства

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sin \theta &= k_1 v [-(\cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) \sin \alpha + (\sin \varphi \sin \theta) \cos \alpha] \\ \cos \varphi \sin \theta &= k_2 v [(\cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) \sin \alpha + (\cos \varphi \sin \theta) \cos \alpha] \\ \cos \theta &= k_3 v [-(\sin \psi \sin \theta) \sin \alpha + (\cos \theta) \cos \alpha] \\ v &= \left[(k_1^{-2} \sin^2 \varphi + k_2^{-2} \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + k_3^{-2} \cos^2 \theta \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из геометрических соображений следует, что уравнения (2.5) разрешимы тогда и только тогда, когда угол между радиус-вектором $KC = -(\xi, \eta, \zeta)^T$ и нормалью n наклонной плоскости Π равен α . Действительно, для доказательства этого факта нужно учесть, что угол прецессии ψ характеризует отклонение в наклонной плоскости Π линии узлов системы $C\xi\eta\zeta$, связанной с телом, от линии наибольшего ската, т.е. оси Ox . Изменение угла ψ (при фиксированных углах φ, θ) реализуется при помощи вращения тела в точке его контакта K вокруг оси, совпадающей с нормальным вектором n наклонной плоскости Π . При этом радиус-вектор $KC = -(\xi, \eta, \zeta)^T$ замечает круговой конус с осью симметрии, совпадающей с вектором n и углом раствора равным 2α . Ввиду того, что восходящая вертикаль w в точке контакта K , образующая угол α с осью n , тоже принадлежит поверхности этого конуса, будет существовать такое (единственное) значение угла поворота ψ , для которого радиус-вектор $KC = -(\xi, \eta, \zeta)^T$ и упомянутый вектор w совпадут. В результате получаем однозначное решение системы (2.5).

Таким образом, для реализации равновесия эллипсоида углы φ, θ необходимо должны удовлетворять равенству

$$(n \cdot KC) = -(\xi n_\xi + \eta n_\eta + \zeta n_\zeta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \cos \alpha.$$

Используя формулы (1.4), (2.4), последнее равенство можно переписать в компактном виде

$$\begin{aligned} \mu^2 &= v \cos \alpha \\ \mu^2 &= (k_1^{-1} \sin^2 \varphi + k_2^{-1} \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + k_3^{-1} \cos^2 \theta \\ v^2 &= (k_1^{-2} \sin^2 \varphi + k_2^{-2} \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + k_3^{-2} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

Правая и левая части уравнения из (2.6) от угла ψ не зависят и являются функциями только двух переменных φ, θ .

Итак, уравнение (2.6) (если его решения существуют) определяет все возможные значения углов φ, θ в положении равновесия эллипсоида на абсолютно шероховатой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту равным α . Значение же угла ψ при равновесии однозначно определяется первым или вторым из уравнений системы (2.5).

Отметим, что соотношение (2.6) может быть получено также из первых двух равенств системы (2.5) путем исключения переменной ψ (доказательство см. ниже). Далее, можно исследовать безусловный экстремум функции $\cos \alpha$ из (2.6) по φ, θ и найти максимальный угол наклона $\alpha = \alpha^*$, при котором еще возможно равновесие эллипсоида при условии абсолютной шероховатости наклонной плоскости. Однако вычисления здесь получаются достаточно громоздкими. Проще поступить следующим образом. Несложно показать, что в положении равновесия эллипсоида необходимо соблюдается равенство

$$\cos^2 \alpha = G(w_\xi, w_\eta, w_\zeta) = \frac{(k_1 w_\xi^2 + k_2 w_\eta^2 + k_3 w_\zeta^2)^2}{k_1^2 w_\xi^2 + k_2^2 w_\eta^2 + k_3^2 w_\zeta^2},$$

при условии $w_\xi^2 + w_\eta^2 + w_\zeta^2 = 1$, где (w_ξ, w_η, w_ζ) – проекции единичного вектора w восходящей вертикали на оси системы $C\xi\eta\zeta$.

Далее решаем задачу Лагранжа на условный экстремум. Получим, что точки экстремума достигаются лишь при $w_\xi = 0$, или при $w_\eta = 0$, или при $w_\zeta = 0$. Затем задача сводится к плоской, решение которой является элементарным.

Сформулируем здесь окончательный результат: значения функции

$$G(w_\xi, w_\eta, w_\zeta) = \frac{(k_1 w_\xi^2 + k_2 w_\eta^2 + k_3 w_\zeta^2)^2}{k_1^2 w_\xi^2 + k_2^2 w_\eta^2 + k_3^2 w_\zeta^2},$$

при условии $w_\xi^2 + w_\eta^2 + w_\zeta^2 = 1$ заключаются в следующих границах

$$\min \left\{ \frac{4k_1^{-1}k_3^{-1}}{(k_1^{-1} + k_3^{-1})^2}, \frac{4k_1^{-1}k_2^{-1}}{(k_1^{-1} + k_2^{-1})^2}, \frac{4k_2^{-1}k_3^{-1}}{(k_2^{-1} + k_3^{-1})^2} \right\} \leq G(w_\xi, w_\eta, w_\zeta) \leq 1$$

Причем, указанные границы достижимы. Отсюда следует, что решения уравнения (2.6) (при соблюдении неравенств для полуосей из (1.1)) существуют тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\frac{4k_1^{-1}k_3^{-1}}{(k_1^{-1} + k_3^{-1})^2} = \frac{4(ac)^2}{(a^2 + c^2)^2} \leq \cos^2 \alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = \arccos \frac{2ac}{a^2 + c^2}. \quad (2.7)$$

Таким образом, равновесие эллипсоида на абсолютно шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α возможно только при соблюдении неравенства (2.7). При его нарушении равновесие эллипсоида невозможно (независимо от того, попадает ли направление вектора силы тяжести тела в конус трения для точки контакта K или нет).

Рассмотрим систему трех уравнений (2.5) более подробно. Прежде всего заметим, что три уравнения системы (2.5) не являются независимыми: из выполнения, например, первых двух уравнений системы (2.5) следует автоматическое выполнение тре-

того уравнения. Для доказательства перепишем первые два уравнения системы (2.5) в виде

$$\begin{aligned} k_1^{-1} \sin \varphi \sin \theta &= v [-(\cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) \sin \alpha + (\sin \varphi \sin \theta) \cos \alpha] \\ k_2^{-1} \cos \varphi \sin \theta &= v [(\cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) \sin \alpha + (\cos \varphi \sin \theta) \cos \alpha] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Возводя левые и правые части полученных уравнений в квадраты и складывая их, после простых тригонометрических преобразований, получим третье уравнение системы (2.5), обе части которого возведены в квадрат.

Далее, разрешая уравнения (2.8) относительно $\sin \psi$, $\cos \psi$ и используя соотношение (2.6) ($\cos \alpha = \mu^2/v$), получим, в предположении $\cos \theta \neq 0$, следующие два уравнения

$$\begin{aligned} v \sin \alpha \cos \psi &= (k_2^{-1} - k_1^{-1}) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \\ v \sin \alpha \sin \psi &= \sin \theta \cos \theta (k_2^{-1} \cos^2 \varphi + k_1^{-1} \sin^2 \varphi - k_3^{-1}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $v^2 = (k_1^{-2} \sin^2 \varphi + k_2^{-2} \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + k_3^{-2} \cos^2 \theta$.

Таким образом, в трех углах Эйлера $\{\varphi, \theta, \psi\}$, все положения равновесия эллипсоида на наклонной абсолютно шероховатой плоскости являются решениями системы (2.9). Ясно, что эти положения равновесия образуют одномерное многообразие, которое представляет из себя некоторую кривую на поверхности эллипсоида, параметризованную параметром ψ — углом прецессии.

Исключая из (2.9) угол ψ при невырожденной ситуации $\cos \theta \neq 0$, можно показать, что соотношение (2.6) является следствием уравнений (2.9).

При вырожденной же ситуации, когда $\cos \theta = 0$ ($\theta = \pm\pi/2$), уравнение (2.6) и первое уравнение системы (2.9) совместно дают решение $\cos^2 \psi = 1$, $\sin \psi = 0$ (т.е. угол прецессии $\psi = 0$ или $\psi = \pi$), второе уравнение системы (2.9) тогда также удовлетворяется, а угол φ определяется из уравнения (2.6), которое в данном вырожденном случае имеет вид

$$(k_1^{-2} \sin^2 \varphi + k_2^{-2} \cos^2 \varphi) \cos^2 \alpha = (k_1^{-1} \sin^2 \varphi + k_2^{-1} \cos^2 \varphi)^2 \quad (2.10)$$

Угол φ также может быть определен из первого уравнения системы (2.9), в котором надо положить $\cos \psi = \pm 1$, $\sin \theta = \pm 1$, и которое является следствием уравнения (2.10). Уравнение (2.10) является квадратным относительно переменной $x = \cos^2 \varphi$, $x \in [0, 1]$ и всегда имеет в точности два решения на отрезке $0 \leq x \leq 1$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{4k_1^{-1}k_2^{-1}}{(k_1^{-1} + k_2^{-1})^2} = \frac{4(ab)^2}{(a^2 + b^2)^2} \leq \cos^2 \alpha \leq 1$$

Итак, при невырожденной ситуации имеем $\cos \theta \neq 0$, а из уравнений (2.9) получим два соотношения

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{1}{v \sin \alpha} (k_2^{-1} - k_1^{-1}) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi &= \frac{1}{v \sin \alpha} \sin \theta \cos \theta (k_1^{-1} \sin^2 \varphi + k_2^{-1} \cos^2 \varphi - k_3^{-1}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для корректной разрешимости системы (2.11) (в силу тождества $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} & \left[(k_2^{-1} - k_1^{-1}) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \right]^2 + \\ & + \left[\sin \theta \cos \theta (k_2^{-1} \cos^2 \varphi + k_1^{-1} \sin^2 \varphi - k_3^{-1}) \right]^2 = v^2 \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (2.12)$$

Алгебраические преобразования показывают, что соотношение (2.12) приводится к равенству (2.6), обе части которого возведены в квадрат. Соотношение же (2.6) предполагается выполненным (напомним, что (2.6) эквивалентно равенству угла между векторами n и KC углу α наклона опорной плоскости Π).

Таким образом, уравнения (2.11) корректно и однозначно определяют также и угол прецессии ψ , который характеризует отклонение оси эллипсоида от линии наибольшего ската наклонной плоскости при равновесии. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть наклонная абсолютно шероховатая плоскость имеет угол наклона $\alpha \neq 0$. Тогда все положения равновесия тяжелого эллипсоида на этой плоскости находятся из соотношения (2.6) (или (2.12)) для углов $\{\varphi, \theta\}$ и первого или второго из уравнений системы (2.11), определяющих ориентацию, угол прецессии, ψ эллипсоида относительно линии наибольшего ската опорной плоскости. Эти положения равновесия образуют одномерное многообразие, представляющее собой кривую на поверхности эллипсоида, параметризованную углом прецессии ψ . Причем, это многообразие равновесий не пусто тогда и только тогда, когда угол наклона α опорной плоскости удовлетворяет неравенствам (2.7).

Замечание 1. Пусть $\alpha = 0$, т.е. плоскость опоры горизонтальна. Тогда исходные уравнения (2.5) принимают вид

$$\begin{aligned} k_1^{-1} \sin \varphi \sin \theta &= v \sin \varphi \sin \theta, & k_2^{-1} \cos \varphi \sin \theta &= v \cos \varphi \sin \theta \\ k_3^{-1} \cos \theta &= v \cos \theta \end{aligned} \quad (2.13)$$

В этом случае угол ψ из рассмотрения выпадает. При выполнении строгих неравенств $k_1 > k_2 > k_3$ решения уравнений (2.13) (т.е. положения равновесия эллипсоида) суть только следующие:

- 1) $\cos \theta = 0, \quad \sin \theta = \pm 1, \quad \sin \varphi = 0$
- 2) $\cos \theta = 0, \quad \sin \theta = \pm 1, \quad \cos \varphi = 0$
- 3) $\cos \theta = \pm 1, \quad \sin \theta = 0.$

Заметим, что при $\sin \theta \neq 0, \cos \theta \neq 0$ положения равновесия существуют лишь при $k_2 = k_3$ или $k_1 = k_3$, т.е. тело либо эллипсоид вращения, либо шар. Подставляя полученные решения в формулы (2.4), мы находим ровно 6 точек равновесия, которые являются вершинами эллипсоида (концами его полуосей). Отметим, что при любом $\alpha \neq 0$ (в частности, малом), как показано в утверждении 1, число точек равновесия становится бесконечным и образует одномерное многообразие. Таким образом, здесь возникает особенность, известная как некорректность в смысле Адамара (подробнее см. [3, 4]).

Замечание 2. Пусть $\alpha \neq 0$. Из первого уравнения системы (2.11) следует, что $\cos \psi = 0$, (т.е. $\psi = \pi/2$) в следующих случаях.

1) $k_1 = k_2$, т.е. тело является эллипсоидом вращения — осесимметричным сфероидом. В этом случае для всех положений возможного равновесия сфероид всегда устанавливается так, что его плоскость симметрии (перпендикулярная его круглым сечениям) является параллельной линии наибольшего ската наклонной плоскости. Тогда задача сводится к плоской задаче о равновесии эллипса на шероховатой прямой. В этом случае несложно показать, что многообразия положений равновесия представ-

ляют собой четыре симметричных окружности, перпендикулярные упомянутой плоскости симметрии.

2) $\sin \varphi = 0$, т.е. согласно формулам (2.4), $\xi = 0$ и трехосный эллипсоид устанавливается так, что одна из его экваториальных плоскостей является параллельной линии наибольшего ската. Этот случай также соответствует плоскому случаю равновесия эллипса на наклонной прямой и является элементарным.

3) $\cos \varphi = 0$, т.е. согласно формулам (2.4), $\eta = 0$ и ситуация аналогична случаю 2).

Случай же $\sin \theta = 0$ явно не реализуется, т.к., тогда из (2.10) следует, что $\sin \psi = \cos \psi = 0$, чего быть не может.

Таким образом, “косые” (т.е. не параллельные и не перпендикулярные линии наибольшего ската) положения равновесия трехосного (невырожденного) эллипсоида на шероховатой наклонной плоскости реализуются во всех возможных нетривиальных и невырожденных случаях этих положений (т.е. когда одновременно $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\zeta \neq 0$).

Отметим, однако, что при предельных углах наклона плоскости $\alpha = \alpha_1$, (см. (2.7)), когда трехосный эллипсоид только-только начинает терять свое состояние равновесия, он устанавливается всегда вдоль линии наибольшего ската (т.е. его состояние равновесия становится вырожденным). Этот факт следует из решения соответствующей экстремальной задачи, которая была сформулирована выше для $\cos \alpha$ из (2.6).

Замечание 3. Можно предложить следующую геометрическую интерпретацию для описания многообразия области равновесия эллипсоида на наклонной плоскости.

Для этого обозначим $x = \xi^2 > 0$, $y = \eta^2 > 0$, $z = \zeta^2 > 0$. Тогда имеем из (1.1) $k_1x + k_2y + k_3z = 1$, уравнение (2.6) для области равновесия примет вид

$$(x + y + z)(k_1^2x + k_2^2y + k_3^2z) = \sigma, \quad \sigma = 1/\cos^2 \alpha; \quad \sigma \in (1, \infty)$$

Делаем линейное преобразование по формулам

$$x + y + z = u_1, \quad k_1x + k_2y + k_3z = u_2, \quad k_1^2x + k_2^2y + k_3^2z = u_3$$

Тогда область равновесия в пространстве переменных $\{u_1, u_2, u_3\}$ описывается следующими двумя равенствами и тремя неравенствами

$$u_2 = 1, \quad u_1u_3 = \sigma, \quad u_1k_2k_3 + u_3 \geq k_2 + k_3, \quad u_1k_1k_3 + u_3 \geq k_1 + k_3 \\ u_1k_2k_1 + u_3 \geq k_1 + k_2$$

Анализ показывает, что область равновесий в плоскости переменных $\{u_1, u_3\}$ представляет собой ту часть гиперболы $u_3 = \sigma/u_1$, которая содержится внутри треугольника ABC на плоскости $\{u_1, u_3\}$, вершины которого находятся в точках $A(k_3^{-1}, k_3)$, $B(k_1^{-1}, k_1)$, $C(k_2^{-1}, k_2)$. Непустое пересечение получается только при условии $\alpha \leq \alpha_1$ (см. (2.7)). Решая соответствующие квадратные уравнения, можно описать эту часть гиперболы в аналитическом виде. Однако эти результаты, ввиду их громоздкости, здесь не приводятся.

Замечание 4. Аналогично изложенному выше может быть решена задача о нахождении положений равновесия однородной (или неоднородной) полусферы (точнее, половины или части шара) на шероховатой наклонной плоскости (игрушка “ванька-встанька”). В результате решения такой задачи получаются, вообще говоря, два положения равновесия (с точностью до поворотов вокруг оси динамической симметрии полусферы, т.е. оси, проходящей через геометрический центр сферы и ее центр масс). Подобного типа задача рассматривалась в учебнике Н.Б. Делоне ([5], стр. 237), где, однако, было найдено лишь одно положение равновесия. Кроме того, в [5] была показа-

на устойчивость этого положения равновесия в плоском случае. Отметим, что такой плоский случай соответствует, на самом деле, задаче о равновесии на наклонной плоскости усеченного цилиндрического тела (типа распиленного бревна), сечение которого представляет собой полуокружность (часть окружности). В этом случае контакт тела с плоскостью осуществляется уже по целой прямой, а не в одной точке, как предполагается в исходной постановке задачи о равновесии. Аналогичное утверждение об устойчивости в плоском случае для тела типа “ванька-встанька” на наклонной плоскости было высказано в статье [6].

Как будет показано в разд. 3, в пространственном случае равновесие тела-части шара, контактирующего с опорной плоскостью только одной точкой, является неустойчивым. Отметим, кроме того, что в плоском случае эта система является голономной (кинематическая связь интегрируема), а в пространственном случае она является неголономной (соответствующие кинематические связи не интегрируемы). Подробные выкладки (аналогичные вышеизложенным в случае тела-эллипсоида) для решения этой задачи о равновесии тела-части шара на наклонной плоскости здесь не приводятся.

3. Исследование устойчивости положений равновесия эллипсоида на наклонной плоскости. В данном пункте исследуется устойчивость найденных в разд. 2 положений равновесия эллипсоида на абсолютно шероховатой наклонной плоскости. Будем предполагать, что все возможные движения тела происходят без проскальзывания, т.е. выполнено условие равенства нулю скорости точки контакта K : $v_K = 0$. Любое положение эллипсоида на наклонной плоскости может быть задано пятью независимыми координатами: $x, y, \theta, \varphi, \psi$, где x, y — координаты точки контакта K в системе $Oxyz$ (отметим, что при безотрывном движении $z \equiv 0$). Три последние переменные суть углы Эйлера для системы $C\xi\eta\zeta$, которые были введены выше.

Условие отсутствия проскальзывания точки контакта $v_K = 0$ приводит к двум неинтегрируемым уравнениям дифференциальных связей, из которых $\dot{x}, \dot{y}$ однозначно выражаются через $\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$. Поэтому устойчивость рассматриваемого положения равновесия тела, при указанной неголономной связи, можно определить следующим образом.

Пусть определена функция $H = H(x, y, \theta, \varphi, \psi)$ — возвышение центра тяжести тела над горизонтальной плоскостью. Ясно, что от y (для введенной системы координат $Oxyz$) функция H не зависит. Отметим, что при $\alpha = 0$ (тело на горизонтальной плоскости) функция H зависит только от θ и φ . Это и накладывает определенные особенности при изучении устойчивости тела на наклонной плоскости (при $\alpha \neq 0$).

Определение. 1. Положение равновесия $x, y, \theta, \varphi, \psi$ устойчиво, если при любых бесконечно малых приращениях $\delta x, \delta y, \delta \theta, \delta \varphi, \delta \psi$ этих координат, удовлетворяющих соответствующим уравнениям дифференциальных неголономных связей (т.е. реализуемых без проскальзывания) и совершаемых из этого положения равновесия, соответствующее приращение ΔH функции $H = H(x, \theta, \varphi, \psi)$ является положительным.

2. Положение равновесия $x, y, \theta, \varphi, \psi$ неустойчиво, если существуют такие бесконечно малые приращения $\delta x, \delta y, \delta \theta, \delta \varphi, \delta \psi$ этих координат, удовлетворяющие уравнениям неголономных связей и совершаемых из этого положения равновесия, что соответствующее приращение ΔH функции $H = H(x, \theta, \varphi, \psi)$ является отрицательным.

Согласно этому определению, устойчивость положения равновесия $x, y, \theta, \varphi, \psi$ эллипсоида эквивалентна следующим условиям

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 H}{dt^2} > 0, \quad \text{для любых } \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$$

Производные в последних уравнениях берутся в точке равновесия x, y, θ, ϕ, ψ при произвольных значениях $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ и соблюдении неголономных связей для $\dot{x}, \dot{y}$. Первое из последних соотношений должно соблюдаться в силу условия равновесия тела, а второе обеспечивает локальный минимум потенциальной энергии в рассматриваемом положении равновесия. Если одно из этих условий для каких-либо $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ нарушено, то рассматриваемое положение x, y, θ, ϕ, ψ либо не является положением равновесия, либо это положение равновесия неустойчиво в смысле приведенного определения.

Утверждение 2. Любое положение равновесия эллипсоида на абсолютно шероховатой наклонной плоскости является неустойчивым в смысле приведенного выше определения.

Доказательство. Пусть x, y, θ, ϕ, ψ — положение равновесия эллипсоида. Введем радиус-вектор ρ по формуле $\rho = KC = -(\xi, \eta, \zeta)^T$, где ξ, η, ζ — координаты точки контакта K в системе $C\xi\eta\zeta$. Тогда, как это было показано в [7] (см. задачу 50.15 на стр. 52), условие отсутствия скольжения в точке контакта $v_K = 0$ эквивалентно (в системе $Oxyz$) равенствам

$$(\dot{x}, \dot{y}, 0)^T = -A\tilde{\rho} = A(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})^T, \quad (3.1)$$

где матрица A определена формулами (1.2), а $\tilde{\rho}$ означает локальную производную вектора ρ в системе координат $C\xi\eta\zeta$. Умножим обе части равенства (3.1) скалярно на единичный вектор $w = (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)^T$ восходящей вертикали (в системе $Oxyz$). Получим соотношение

$$-\dot{x} \sin \alpha = -(w \cdot A\tilde{\rho}) = -(A^T w \cdot \tilde{\rho}) \quad (3.2)$$

Далее, запишем выражение для возвышения H центра масс C тела над горизонтальной плоскостью Γ

$$H = H_O - x \sin \alpha + (\rho \cdot w) \quad (3.3)$$

В (3.3) H_O — возвышение начала координат O системы $Oxyz$ над горизонтальной плоскостью Γ .

Для того, чтобы функция H из (3.3) достигала в некотором положении тела стационарного значения необходимо и достаточно, чтобы вдоль любого допустимого в данный момент времени процесса качения тела, исходящего из этого положения и удовлетворяющего условию (3.1), производная по времени от функции из (3.3) равнялась нулю. Дифференцируя обе части (3.3) по времени и используя равенства $\dot{w} = 0$, $\dot{\rho} = \tilde{\rho} + [\omega \times \rho]$, получим

$$\dot{H} = -\dot{x} \sin \alpha + (\tilde{\rho} \cdot A^T w) + ([\omega \times \rho] \cdot w) = 0, \quad (3.4)$$

где ω — реализующийся в результате такого качения вектор угловой скорости, который является произвольным вектором (он линейно зависит от трех произвольных скоростей $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ для углов Эйлера). Обозначение “ $\tilde{\rho}$ ” в (3.4) это локальная производная вектора ρ .

В силу условия (3.1) и вытекающего из него тождества (3.2), получим равенство

$$\dot{H} = ([\omega \times \rho] \cdot w) = 0 \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) выполняется для любого вектора ω тогда и только тогда, когда векторы ρ и w параллельны. Таким образом, в стационарной точке для высоты H обязательно соблюдается векторное равенство

$$\rho = kw, \quad (3.6)$$

где $k = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} > 0$ – положительная скалярная функция, зависящая от углов Эйлера θ, φ . Соотношение (3.6) следует также из элементарных законов статики.

Далее, для устойчивости положения равновесия необходимо, чтобы стационарная точка была точкой минимума для всех возможных векторов угловой скорости ω . Для этого вычисляем вторую производную по времени от функции H из (3.3), или же первую производную по времени от функции $\dot{H}$, которая дается, согласно (3.2), (3.4), выражением $\dot{H} = ([\omega \times \rho] \cdot w)$. Тогда получим, учитывая, что $\dot{w} = 0$ и $\dot{\rho} = \tilde{\rho} + [\omega \times \rho]$,

$$\dot{H} = ([\omega \times \rho] \cdot w) + ([\omega \times \tilde{\rho}] \cdot w) + ([\omega \times [\omega \times \rho]] \cdot w) \quad (3.7)$$

Далее, надо подсчитать значение $\dot{H}$ в стационарной точке, для которой выполнено равенство (3.6), поэтому первое слагаемое в (3.7) обращается в нуль для любого вектора ω . Используя (3.6), из (3.7) получим

$$\dot{H} = ([\omega \times \tilde{\rho}] \cdot w) + k([\omega \times [\omega \times w]] \cdot w) \quad (3.8)$$

Для второго слагаемого в правой части равенства (3.8) имеем

$$([\omega \times [\omega \times w]] \cdot w) = -|\omega|^2 + (\omega \cdot w)^2 = -|\omega|^2 + |\omega|^2 \cos^2(\omega \hat{w}) < 0 \quad (3.9)$$

В (3.9) $\omega \hat{w}$ – угол между векторами ω и w , а неравенство всегда строгое, если только вектор угловой скорости ω не параллелен вектору восходящей вертикали w . Первое слагаемое в правой части (3.8) можно сделать нулевым, выбрав вектор ω специальным способом. Положим, например, $\omega = ln$, где l – скалярная константа, а n – единичный нормальный вектор для наклонной плоскости. В этом случае происходит элементарное вращение тела вокруг неподвижной точки контакта K вдоль оси, перпендикулярной наклонной плоскости. При этом изменяется лишь эйлеров угол ψ , а углы θ, φ остаются постоянными. Следовательно, $\rho = \text{const}$ в подвижной системе $C\xi\eta\zeta$ и поэтому $\tilde{\rho} = 0$. Тогда $\omega \hat{w} = \alpha \neq 0$, и мы получаем из (3.8) и (3.9) соотношение $\dot{H} = -kl^2 \sin^2 \alpha < 0$. Последнее неравенство свидетельствует о неустойчивости любого положения равновесия эллипсоида на абсолютно шероховатой наклонной плоскости. Что и требовалось доказать.

Замечание 5. Приведенное утверждение 2, как это следует из доказательства, является справедливым для любого твердого тела, ограниченного произвольной гладкой и выпуклой поверхностью.

Замечание 6. Для однородного эллипсоида при $\alpha = 0$ из формул (3.8), (3.9) следует, что при опоре на вершину меньшей полуоси a соблюдается неравенство $\dot{H} > 0$, т.е. получается известный результат об устойчивости такого положения равновесия [8].

4. О стационарных вращениях твердого тела на абсолютно шероховатой наклонной плоскости. Движение твердого тела массы $m = 1$, ограниченного гладкой и выпуклой поверхностью, по абсолютно шероховатой наклонной плоскости определяется следующими уравнениями

$$\begin{aligned}\tilde{v} + [\omega \times v] &= -gw + R, & J\dot{\omega} + [\omega \times J\omega] &= [\rho \times R], & \tilde{n} + [\omega \times n] &= 0 \\ \tilde{w} + [\omega \times w] &= 0, & v + [\omega \times \rho] &= 0, & (n \cdot w) &= \cos \alpha \quad (\alpha \neq 0) \\ f(\rho) &= 0, & n &= -\text{grad } f(\rho)/|\text{grad } f(\rho)|\end{aligned}\quad (4.1)$$

где обозначено: v — скорость центра масс C тела, ω — угловая скорость тела, $\rho = CK$ — радиус-вектор точки контакта K , J — матрица центрального тензора инерции тела в системе $C\xi\eta\zeta$, w — единичный вектор восходящей вертикали, n — единичный вектор нормали наклонной плоскости, R — реакция плоскости в точке контакта, $f(\rho)$ — уравнение поверхности тела в системе координат, связанной с телом. Все указанные векторы и их локальные производные здесь и далее рассматриваются в жестко связанной с телом системе координат $C\xi\eta\zeta$.

Исключая в системе (4.1) реакцию R и скорость v , получим уравнение

$$J\dot{\omega} + [\omega \times J\omega] + \rho \times [\dot{\omega} \times \rho] + \rho \times [\omega \times [\omega \times \rho]] = g[\rho \times w] - \rho \times [\omega \times \rho] \quad (4.2)$$

В системе (4.2) векторы ρ, w, ω однозначно выражаются через три угла Эйлера φ, θ, ψ (для ρ, w) и их первые производные (для ω). Таким образом, система (4.2) имеет три степени свободы, а в качестве обобщенных координат для нее могут быть взяты три угла Эйлера φ, θ, ψ . Эта система является консервативной, т.е. для нее может быть записан интеграл энергии (который мало, что дает, т.к., зависит не только от обобщенных координат и скоростей, но и от x, y — координат точки контакта на наклонной плоскости). Однако, в отличие от случая горизонтальной плоскости, когда $\alpha = 0 \rightarrow w = n$, система не имеет циклических координат (интегралов Рауса), т.к., здесь потенциальная энергия (пропорциональная высоте возвышения центра масс тела над горизонтальной плоскостью) зависит от всех трех углов φ, θ, ψ , а также и от координаты x точки контакта. Эти обстоятельства приводят к определенным особенностям в движении тела по наклонной плоскости.

Стационарные вращения тела, которые традиционно рассматриваются при движении тела по горизонтальной плоскости (см., например, [9–11]), характеризуются, во-первых, неизменностью точки контакта K (как в теле, так и на наклонной плоскости), и, во-вторых, постоянством вектора угловой скорости тела $\omega = \text{const}$. Из первого свойства следует неизменность вектора $\rho = CK$ в системе $C\xi\eta\zeta$, жестко связанной с твердым телом. Тогда, согласно последнему уравнению системы (4.1), получаем постоянство вектора n относительно системы $C\xi\eta\zeta$. Отсюда следует, с учетом третьего уравнения системы (4.1), равенство $\omega = \omega_0 n$, где $\omega_0 \neq 0$ — скалярная постоянная. Подставляя полученные значения в уравнение (4.2), приходим к соотношению

$$\omega_0^2 \{ [n \times Jn] + m\rho \times [n \times [n \times \rho]] \} = mg[\rho \times w] \quad (4.3)$$

В векторном равенстве (4.3) левая часть является постоянной в системе $C\xi\eta\zeta$, значит постоянна и правая часть в той же системе. Следовательно, $w = \text{const}$ также и относительно подвижной системы $C\xi\eta\zeta$. Используя этот факт, из 4-го уравнения системы (4.1) получаем $[\omega \times w] = [(\omega_0 n) \times w] = 0$. Однако $\|[(\omega_0 n) \times w]\| = |\omega_0| \sin \alpha \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что на шероховатой наклонной плоскости стационарных вращений традиционного типа для твердого тела не существует. Таким образом, мы доказали справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. На абсолютно шероховатой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha \neq 0$ не реализуются стационарные вращения традиционного типа никакого твердого тела, имеющего гладкую и выпуклую поверхность.

Замечание 7. Отметим, что из соотношения (4.3) при $\omega_0 = 0$ следует равенство (3.6), означающее коллинеарность векторов ρ и w в положении равновесия. Кроме того, си-

стему (4.2) несложно линеаризовать в малой окрестности точки $\omega = 0$, $\rho = \lambda\omega$ (т.е. в окрестности ее положения равновесия). В результате получается линейная система 6-го порядка с постоянными коэффициентами относительно малых возмущений углов Эйлера и их производных: $\theta_1, \phi_1, \psi_1, \dot{\theta}_1, \dot{\phi}_1, \dot{\psi}_1$. Эту систему несложно проинтегрировать и получить результат о ее неустойчивости. Однако эта неустойчивость не является экспоненциальной (решения растут пропорционально времени t). Поэтому здесь теорема Ляпунова о неустойчивости исходной нелинейной системы (4.2) неприменима и приходится использовать утверждение 2 из предыдущего пункта 3. Подробные выкладки в данной статье не приводятся ввиду их громоздкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. О нелинейных колебаниях трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 784–800.
2. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2014. 496 с.
3. Журавлёв В.Ф. О некорректных задачах механики // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 36–41.
4. Журавлёв В.Ф., Розенблат Г.М. Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. М.: Ленанд, 2017. 240 с.
5. Делоне Н.Б. Курс теоретической механики для техников и инженеров. М.: Ленанд. 2021. 432 с.
6. Иванов А.П. Об устойчивости равновесия в системах с трением // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 3. С. 427–438.
7. Журавлёв В.Ф., Розенблат Г.М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского: Системы с качением. Неголономные связи. М.: Либроком, 2013. 192 с.
8. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
9. Bizyaev I.A., Mamaev I.S. Permanent rotations in nonholonomic mechanics. omnirotational ellipsoid // R&C Dyn. 2022. V. 27. № 6. P. 587–612.
10. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных вращений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.
11. Карапетян А.В. Устойчивость и бифуркация движений. М.: Изд. МГУ, 2020. 186 с.

Peculiarities of Statics and Dynamics of the Heavy Ellipsoid on the Rough Inclined Plane

G. M. Rozenblat^{a, #}

^aMoscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Moscow, Russia

[#]e-mail: gr51@mail.ru

The problems of equilibria and steady rotations of the heavy body-ellipsoid on the rough inclined plane are considered in this paper. The body makes point contact with this plane without slippage (nonholonomic constraint). All positions of equilibria of the ellipsoid are found. In this paper is shown that all these positions are not stable in the spatial case when perturbations of the body can occur with spinning. Besides, as is shown in this paper, steady rotations of the heavy body-ellipsoid on the rough inclined plane cannot be realized.

Keywords: equilibrium, steady rotations, rough plane, nonholonomic constraint, stability

REFERENCES

1. Markeev A.P. On nonlinear oscillations of a triaxial ellipsoid on a smooth horizontal plane // PММ, 2022, vol. 86, no. 6, pp. 784–800. (in Russian)
2. Markeev A.P. Dynamics of a Body in Contact with a Solid Surface. Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Res.; Nauka, 2014. 496 p. (in Russian)
3. Zhuravlev V.Ph. Ill-posed problems in mechanics // Mech. Solids, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 538–541.

4. *Zhuralev V.Ph., Rozenblat G.M.* Paradoxes, Counterexamples and Mistakes in Mechanics. Moscow: Lenand, 2017. 240 p. (in Russian)
5. *Delone N.B.* Cours of Theoretical Mechanics for Technicians and Engineers. Moscow: Lenand, 2021. 432 p. (in Russian)
6. *Ivanov A.P.* The stability of equilibrium in systems with friction // JAMM, 2007, vol. 71, iss. 3, pp. 385–395.
7. *Zhuralev V.F., Rozenblat G.M.* Theoretical Mechanics in Decisions of Problems from Book by I.V. Meschersky: Systems with Rolling. Nonholonomic Constraints. Moscow: Librokom, 2013. 192 p. (in Russian)
8. *Rubanovsky V.N., Samsonov V.A.* Stability of Steady Rotations in Examples and Problems. Moscow: Nauka, 1988. 304 p. (in Russian)
9. *Bizyaev I.A., Mamaev I.S.* Permanent rotations in nonholonomic mechanics. omnirotational ellipsoid // R&C Dyn., 2022, vol. 27, no. 6, pp. 587–612.
10. *Karapetyan A.V.* Stability of the Permanent Rotations. M.: “Editorial URSS”, 1998. 168 p. (in Russian)
11. *Karapetyan A.V.* Stability and Bifurcation of the Motion. Moscow: MSU Publ., 2020. 186 c. (in Russian)

УДК 531.381

РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСТАТА В ТРЕХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

© 2023 г. В. Ю. Ольшанский^{1,*}¹ИПТМУ РАН, Саратов, Россия

*e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru

Поступила в редакцию 12.01.2023 г.

После доработки 26.04.2023 г.

Принята к публикации 20.05.2023 г.

В статье приведено решение задачи о возможных условиях регулярной прецессии при движении гиростата вокруг неподвижной точки под действием двух однородных и одного неоднородного поля. Для известного случая с равными скоростями прецессии и собственного вращения указаны новые решения с осью прецессии, отклоненной от оси симметрии неоднородного поля. Найдены новые случаи регулярной прецессии, когда отношение скоростей прецессии и собственного вращения равно двум либо одной второй. Рассмотрено применение результатов для прецессии в ортогональных полях и для прецессии твердого тела.

Ключевые слова: твердое тело и гиростат, суперпозиция однородных и неоднородных полей, регулярная прецессия

DOI: 10.31857/S0032823523040100, EDN: MEVCBL

1. Введение. Задача о вращении гиростата под действием сил различной природы имеет свою историю и остается объектом исследований в настоящее время. После нахождения [1] новых решений для твердого тела в однородных гравитационном и магнитном полях, в ряде работ рассмотрено вращение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, движение тела в идеальной жидкости [2–5]. Наиболее исследованным является случай, когда силовые поля имеют общую ось симметрии [6]. Обзор решений для важного частного случая таких движений – регулярных и нерегулярных прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, при движении в жидкости, при движении в магнитном поле, приведен в [7]. Изучается движение гиростата с переменным гироскопическим моментом, построено решение, описывающее регулярные прецессии относительно оси симметрии силовых полей [8].

Случай, когда направления полей задаются двумя или тремя векторами в инерциальном пространстве, изучен в меньшей степени. Первые примеры регулярной прецессии вокруг невертикальной оси несимметричного твердого тела и гиростата в суперпозиции двух и трех однородных полей были построены Яхья [9, 10]. В указанных прецессиях ось собственного вращения ортогональна оси прецессии и скорость прецессии равна скорости собственного вращения; эти решения можно считать аналогами известной прецессии Грюли [11] твердого тела в однородном поле тяжести. В наших работах задачи о регулярной прецессии твердого тела и гиростата в двух [12] и трех неприводимых [13] однородных полях решены в общей постановке, описаны все возможные случаи. Получено обобщение условий Яхья, когда скорости прецессии и собственного вращения равны друг другу. Найден новый случай, когда скорость пре-

цессии вдвое больше скорости собственного вращения и ось прецессии не ортогональна оси собственного вращения.

В работе [14] рассмотрена более общая задача — регулярная прецессия гиростата в трех (гравитационном, электрическом и магнитном) полях, одно из которых — неоднородное и изучен частный случай, когда скорости собственного вращения и прецессии равны, поля ортогональны и ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля. Получены, с использованием методов компьютерной алгебры, условия регулярной прецессии, связывающие параметры системы.

В настоящей работе для названной [14] суперпозиции трех полей проведено полное исследование возможных случаев регулярной прецессии гиростата. Показано, что если ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, то возможны два случая — когда скорость прецессии равна или вдвое больше скорости собственного вращения, а если ось прецессии отклонена от оси симметрии поля, то регулярная прецессия может происходить при скорости прецессии равной или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для всех случаев найдены конфигурационные условия и центры приведения сил. Выделен случай твердого тела; показано, в частности, что скорость прецессии может быть вдвое меньше скорости собственного вращения, только если угол между осями прецессии и собственного вращения задан равенством $\sin \theta = 4/5$.

2. Постановка задачи. Для описания движения гиростата вокруг неподвижной точки под действием трех полей используем уравнения [14]

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \times (\mathbf{u}_3 + \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}_3) \quad (2.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha}_i = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Здесь $(\cdot)^{\cdot}$ — производная по времени в системе отсчета, связанной с телом; векторы $\mathbf{u}_i$ постоянны в этой системе, $\mathbf{u}_i = \rho_i \mathbf{OC}_i$, C_i — центры приведения сил. Единичные векторы $\boldsymbol{\alpha}_i$, задающие направления сил каждого из полей, постоянны в инерциальной системе. Симметричные операторы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{K}$ имеют различный физический смысл в различных моделях [2, 3, 6, 7], $\mathbf{I}$ — оператор инерции тела в неподвижной точке, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела-носителя, $\boldsymbol{\sigma}$ — гиросtatический момент.

При $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ получаем известные [2, 3] уравнения, описывающие вращение гиростата под действием гироскопических и потенциальных сил; систематический обзор известных случаев регулярной и нерегулярной прецессии приведен в монографиях [6, 7]. При $\mathbf{J} = \mathbf{K} = \mathbf{0}$ получаем описание вращения в двух (при $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$) или трех однородных полях [9, 10, 12, 13]; если еще $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, то имеем классические уравнения Эйлера — Пуассона для гиростата в однородном поле тяжести.

Регулярная прецессия тела задается равенством

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{m} + \omega_p \boldsymbol{\rho} \quad (2.3)$$

Здесь векторы $\mathbf{m}$ и $\boldsymbol{\rho}$ постоянны, соответственно, в подвижной и инерциальной системах; $|\mathbf{m}| = |\boldsymbol{\rho}| = 1$. Величины ω_r и ω_p — это скорости собственного вращения (относительная скорость) и прецессии (переносная скорость).

Ниже решается следующая задача: при заданных в инерциальной системе отсчета направлениях полей $\boldsymbol{\alpha}_i$ и оси прецессии $\boldsymbol{\rho}$ определить гиросtatический момент, операторы $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ и векторы $\mathbf{u}_i$, при которых тело может совершать регулярную прецессию.

Векторные функции $\boldsymbol{\rho}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}_i(t)$, как и ранее [13], задаются в связанном с телом ортонормированном базисе $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ равенствами (здесь θ — постоянный угол между осями собственного вращения и прецессии):

$$\boldsymbol{\rho} = \sin \theta (\sin \tau \mathbf{l}_1 + \cos \tau \mathbf{l}_2) + \cos \theta \mathbf{l}_3; \quad \tau = \omega_r t + \text{const}, \quad \mathbf{l}_3 = \mathbf{m} \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega (\kappa \sin \theta (\sin \tau \mathbf{l}_1 + \cos \tau \mathbf{l}_2) + (1 + \kappa \cos \theta) \mathbf{l}_3); \quad \kappa = \omega_p / \omega_r, \quad \Omega = \omega_r \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -\mathbf{R}\mathbf{s}_i; \quad i = 1, 2, 3, \quad \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{R}\mathbf{l}_3 \quad (2.6)$$

$$\mathbf{s}_i = \sin \theta_i (\cos \varphi_i \mathbf{l}_1 + \sin \varphi_i \mathbf{l}_2) + \cos \theta_i \mathbf{l}_3; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

Из формул (2.6), (2.7) следует [13], что θ_i — угол между осью прецессии $\boldsymbol{\rho}$ и направлением $\boldsymbol{\alpha}_i$ поля номер i .

Элементы матрицы оператора поворота $\mathbf{R}$ в базисе $(\mathbf{l}_i)$ следующие [13]:

$$\begin{aligned} r_{11} &= -\cos \tau \cos \kappa \tau + \cos \theta \sin \tau \sin \kappa \tau, & r_{12} &= \cos \tau \sin \kappa \tau + \cos \theta \sin \tau \cos \kappa \tau \\ r_{13} &= -\sin \theta \sin \tau, & r_{21} &= \sin \tau \cos \kappa \tau + \cos \theta \cos \tau \sin \kappa \tau \\ r_{22} &= -\sin \tau \sin \kappa \tau + \cos \theta \cos \tau \cos \kappa \tau, & r_{23} &= -\sin \theta \cos \tau \\ r_{31} &= -\sin \theta \sin \kappa \tau, & r_{32} &= -\sin \theta \cos \kappa \tau, & r_{33} &= -\cos \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

Зададим векторы $\mathbf{n}_i$ и оператор $\mathbf{G}$ равенствами

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3}{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle} (1 \ 2 \ 3) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{G}\mathbf{n}_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

Здесь $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $(1 \ 2 \ 3)$ — знак циклической перестановки.

Всюду в работе рассматриваем случай неприводимых полей и считаем векторы $\boldsymbol{\alpha}_i$ некомпланарными, тогда, в силу равенств (2.6), $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle \neq 0$.

Учитывая равенства (2.6) и (2.10), запишем

$$\sum_i \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{u}_i = \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{G}\mathbf{n}_i = \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{G} \left(\sum_j n_i^{(j)} \mathbf{l}_j \right) = - \sum_j \left(\sum_i n_i^{(j)} \mathbf{R}\mathbf{s}_i \right) \times \mathbf{G}\mathbf{l}_j$$

Здесь, в силу равенств (2.9), $\sum_i n_i^{(j)} \mathbf{s}_i = \mathbf{l}_j$ и получаем формулу

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{G}\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}\mathbf{l}_1 + \mathbf{G}\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}\mathbf{l}_2 + \mathbf{G}\mathbf{l}_3 \times \mathbf{R}\mathbf{l}_3 \quad (2.11)$$

Ниже при анализе тригонометрических тождеств, находим ограничения, налагаемые на операторы $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, гиростатический момент $\boldsymbol{\sigma}$, постоянный угол нутации θ между осями собственного вращения и прецессии и находим матрицу $\mathbf{G}$. Эти ограничения, как и матрица $\mathbf{G}$, не зависят от значений параметров θ_i , φ_i и, следовательно, не зависят от взаимного расположения силовых линий $\boldsymbol{\alpha}_i$. Затем из формулы (2.10) находим векторы $\mathbf{u}_i$, определяющие центры приведения сил.

3. Предварительный анализ. Оператор $\mathbf{R}(t)$ содержит [13] гармоники с аргументами $(\kappa \mp 1)\tau$, $\kappa\tau$, τ , запишем его в виде

$$\mathbf{R} = \sum_{i=0}^4 \mathbf{A}_{1i} \cos q_i \tau + \mathbf{A}_{2i} \sin q_i \tau \quad (3.1)$$

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = \kappa, \quad q_{3,4} = \kappa \mp 1 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A}_{10} = -\cos \theta \mathbf{A}'_{00}, \quad \mathbf{A}_{ij} = -\sin \theta \mathbf{A}'_{ij}; \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{A}_{ij} = \frac{\cos \theta + (-1)^j}{2} \mathbf{A}'_{ij}; \quad j = 3, 4$$

$$\mathbf{A}'_{i1}\mathbf{x} = x^{(3)}\mathbf{l}_{3-i}, \quad \mathbf{A}'_{i2}\mathbf{x} = x^{(3-i)}\mathbf{l}_3; \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{A}'_{i3}\mathbf{x} = x^{(1)}\mathbf{l}_1 + x^{(2)}\mathbf{l}_2 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{A}'_{23}\mathbf{x} = -x^{(2)}\mathbf{l}_1 + x^{(1)}\mathbf{l}_2, \quad \mathbf{A}'_{i4}\mathbf{x} = -x^{(1)}\mathbf{l}_1 + x^{(2)}\mathbf{l}_2, \quad \mathbf{A}'_{24}\mathbf{x} = x^{(2)}\mathbf{l}_1 + x^{(1)}\mathbf{l}_2$$

При регулярной прецессии угловая скорость тела задается формулой (2.5), векторная функция α_3 – формулой (2.6), где оператор $\mathbf{R}$ задан формулой (3.1). Это позволяет записать левую часть $\mathbf{L}$ уравнения (2.1) в виде

$$\mathbf{L} = \sum_{i=0}^7 \mathbf{a}_{li} \cos p_i \tau + \mathbf{a}_{2i} \sin p_i \tau \quad (3.4)$$

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = \kappa, \quad p_{4,5} = \kappa \mp 1, \quad p_{6,7} = \kappa \mp 2 \quad (3.5)$$

Для векторных параметров $\mathbf{a}_{ij}$ при использовании обозначений

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{h} = \sum h_i \mathbf{l}_i, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma} + (\Omega \mathbf{I} + \cos \theta \mathbf{N}) \mathbf{l}_3, \quad \mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \Omega \mathbf{I} + h_3 \mathbf{K} \\ \mathbf{v}_1 &= h_1 \mathbf{l}_1 + h_2 \mathbf{l}_2, \quad \mathbf{v}_2 = -h_2 \mathbf{l}_1 + h_1 \mathbf{l}_2, \quad \mathbf{v}_3 = h_1 \mathbf{l}_1 - h_2 \mathbf{l}_2, \quad \mathbf{v}_4 = h_2 \mathbf{l}_1 + h_1 \mathbf{l}_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

получим формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{10} &= \Omega \mathbf{l}_1 \times \left((1 + \kappa \cos \theta) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\kappa \sin^2 \theta}{2} \mathbf{N} \mathbf{l}_3 \right) \\ \mathbf{a}_{i1} &= \Omega \sin \theta \left(\kappa \mathbf{l}_{3-i} \times \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + (1 + \kappa \cos \theta) \mathbf{l}_3 \times \mathbf{N} \mathbf{l}_{3-i} + (-1)^{i+1} \kappa \Omega \mathbf{I} \mathbf{l}_i \right) \\ \mathbf{a}_{i2} &= \kappa \Omega \frac{\sin^2 \theta}{2} \left((-1)^i \mathbf{l}_1 \times \mathbf{N} \mathbf{l}_i + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{N} \mathbf{l}_{3-i} \right) \\ \mathbf{a}_{i3} &= \Omega \sin \theta \left(\left(1 + \frac{3}{2} \kappa \cos \theta \right) h_{3-i} \mathbf{l}_3 \times \mathbf{K} \mathbf{l}_3 + \frac{\kappa}{2} h_i (-1)^i (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{K} \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_2 \times \mathbf{K} \mathbf{l}_1) \right) \\ \mathbf{a}_{i4} &= \Omega \frac{1 - \cos \theta}{2} \left((1 + \kappa \cos \theta) \mathbf{l}_3 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_i + \kappa (1 + \cos \theta) \mathbf{v}_i \times \mathbf{K} \mathbf{l}_3 \right) \\ \mathbf{a}_{i5} &= \Omega \frac{1 + \cos \theta}{2} (-1)^i \left(\kappa (1 - \cos \theta) \mathbf{v}_{i+2} \times \mathbf{K} \mathbf{l}_3 - (1 + \kappa \cos \theta) \mathbf{l}_3 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_{i+2} \right) \\ \mathbf{a}_{i6} &= \kappa \Omega \sin \theta \frac{1 - \cos \theta}{4} \left((-1)^{i+1} \mathbf{l}_1 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_{3-i} + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_i \right) \\ \mathbf{a}_{i7} &= \kappa \Omega \sin \theta \frac{1 + \cos \theta}{4} \left(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_{5-i} + (-1)^{i+1} \mathbf{l}_2 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_{i+2} \right); \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Правую часть $\mathbf{M}$ уравнения (2.1), учитывая равенства (2.6) и (2.11), запишем в виде

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{G} \mathbf{l}_i \times \mathbf{R} \mathbf{l}_i + \mathbf{R} \mathbf{h} \times \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{h}; \quad \mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{s}_3 \quad (3.8)$$

Получим некоторые ограничения для оператора $\mathbf{J}$ и вектора $\mathbf{h}$.

Будем далее считать $\kappa > 0$. В уравнении (2.1) гармоники с частотами $2\kappa + 2$ имеются только в слагаемом $\mathbf{R} \mathbf{h} \times \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{h}$. Приравнявая коэффициенты при этих гармониках нулю, получим, учитывая равенство (3.1), условия

$$\mathbf{A}_{14} \mathbf{h} \times \mathbf{J} \mathbf{A}_{14} \mathbf{h} - \mathbf{A}_{24} \mathbf{h} \times \mathbf{J} \mathbf{A}_{24} \mathbf{h} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_{14} \mathbf{h} \times \mathbf{J} \mathbf{A}_{24} \mathbf{h} + \mathbf{A}_{24} \mathbf{h} \times \mathbf{J} \mathbf{A}_{14} \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Учитывая формулы (3.3), эти условия преобразуем к виду

$$\left(h_1^2 - h_2^2 \right) \mathbf{C}_1 - 2h_1 h_2 \mathbf{C}_2 = \mathbf{0}, \quad 2h_1 h_2 \mathbf{C}_1 + \left(h_1^2 - h_2^2 \right) \mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$$

Здесь $\mathbf{C}_1 = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{J} \mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2 \times \mathbf{J} \mathbf{l}_2$, $\mathbf{C}_2 = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{J} \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{J} \mathbf{l}_1$. Полученные условия при $\mathbf{J} = \mathbf{J}^T$ могут быть выполнены только в двух случаях:

$$J_{ij} = 0; \quad i \neq j, \quad J_{11} = J_{22} \quad (3.9)$$

$$h_1 = h_2 = 0 \quad (3.10)$$

В обоих случаях в суммарном моменте сил $\mathbf{M}$ равны нулю и коэффициенты при $\cos(2\kappa - 2)\tau$ и $\sin(2\kappa - 2)\tau$.

При условиях (3.10) $\mathbf{s}_3 = \mathbf{l}_3$ и, учитывая формулы (2.6), получим $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$, ось прецессии совпадает с направлением $\boldsymbol{\alpha}_3$. Если $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, то должны выполняться условия (3.9), оператор $\mathbf{J}$ имеет в этом случае осевую симметрию (два собственных значения совпадают $J_1 = J_2$) и ось прецессии совпадает с осью симметрии оператора $\mathbf{J}$.

Формулу (3.8) для функции $\mathbf{M}$ в обоих случаях можно записать в виде

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{G}\mathbf{l}_i \times \mathbf{R}\mathbf{l}_i + \sum_{k=0}^4 \mathbf{b}_{1k} \cos g_k \tau + \mathbf{b}_{2k} \sin g_k \tau \quad (3.11)$$

При условиях (3.9) получим

$$g_0 = 1, \quad g_{1,2} = \kappa \mp 1, \quad g_{3,4} = 2\kappa \mp 1 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{1k} &= (J_{33} - J_{11}) \mathbf{b}'_{1k}, \quad \mathbf{b}_{2k} = (-1)^{k+1} \mathbf{l}_3 \times \mathbf{b}_{1k}, \quad \mathbf{b}'_{10} = \frac{\sin 2\theta}{4} (2h_3^2 - h_1^2 - h_2^2) \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{b}'_{11} &= h_3 \frac{(\cos \theta - 1)(1 + 2 \cos \theta)}{2} \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{b}'_{12} = h_3 \frac{(\cos \theta + 1)(1 - 2 \cos \theta)}{2} \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{b}'_{13} &= \frac{\sin \theta (\cos \theta - 1)}{4} (h_1 \mathbf{v}_1 + h_2 \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{b}'_{14} = \frac{\sin \theta (\cos \theta + 1)}{4} (h_1 \mathbf{v}_3 - h_2 \mathbf{v}_4) \end{aligned} \quad (3.13)$$

При условиях (3.10) имеем равенства

$$g_0 = 0, \quad g_1 = 1, \quad g_2 = 2 \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \mathbf{l}_3 \times \mathbf{J}\mathbf{l}_3, \quad \mathbf{b}_{1i} = \sin \theta \cos \theta (\mathbf{l}_{3-i} \times \mathbf{J}\mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{J}\mathbf{l}_{3-i}) \\ \mathbf{b}_{i2} &= \frac{\sin^2 \theta}{2} \left((-1)^i \mathbf{l}_1 \times \mathbf{J}\mathbf{l}_i + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{J}\mathbf{l}_{3-i} \right), \quad \mathbf{b}_{i3} = \mathbf{b}_{i4} = 0; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Определим теперь, какие отношения скоростей прецессии и собственного вращения возможны при прецессии гиростата в рассмотренной в работе суперпозиции трех полей. Набор частот, которые могут присутствовать в левой части уравнения (2.1), задан формулой (3.5). Далее рассмотрим по отдельности случаи $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha}_3$ и $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$. Для правой части уравнения (2.1) используем формулу (3.11).

При $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, то есть при выполнении условий (3.9), набор частот в правой части уравнения (2.1), получим, объединив наборы частот (3.2) и (3.12). Следовательно, момент $\mathbf{M}$ может содержать только гармоники с частотами 0, 1, κ , $\kappa \mp 1$, $2\kappa \mp 1$. Будем далее считать $\kappa > 0$. Если $\kappa \neq 1$, $\kappa \neq 1/2$, то гармоники с частотой $2\kappa + 1$ присутствуют только в моменте $\mathbf{M}$ и, учитывая формулу (3.11), получим условия $\mathbf{b}_{14} = \mathbf{b}_{24} = \mathbf{0}$. Из формул (3.13) следует, что эти условия могут быть выполнены, в частности, если $J_{33} = J_{11}$. В этом случае оператор $\mathbf{J}$ пропорционален тождественному оператору (учитываем условия (3.9)) и нелинейные члены в моменте сил в правой части уравнения (2.1) отсутствуют. Если же $\mathbf{J} \neq c\mathbf{E}$, то из формул (3.6) и (3.13) следует, что условия $\mathbf{b}_{14} = \mathbf{b}_{24} = \mathbf{0}$ могут быть выполнены, только если $h_1 = h_2 = 0$, что невозможно в рассматриваемом случае $\boldsymbol{\rho} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$. Таким образом, в случае, когда ось прецессии не коллинеарна направлению $\boldsymbol{\alpha}_3$, анализ возможности регулярной прецессии под действием комбинации однородных и неоднородного поля следует проводить только для скорости собственного вращения равной или вдвое большей скорости прецессии.

Рассмотрим теперь случай $\rho = \alpha_3$, при этом $s_3 = \mathbf{h} = \mathbf{I}_3$ и выполнены условия (3.10). В соответствии с формулами (3.1), (3.2), (3.11) и (3.14) правая часть уравнения (2.1) может содержать гармоники с частотами 0, 1, 2, κ , $\kappa \mp 1$. При $h_1 = h_2 = 0$ из формул (3.6), (3.7) получим $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{0}$, $i = 1, 2$, $j = 3-7$. Из формулы (3.4) тогда следует, что в левой части уравнения (2.1) присутствуют только гармоники с частотами 0, 1, 2.

Если $\kappa > 0$ и $\kappa \neq 1$, $\kappa \neq 2$, то и правая часть уравнения не должна содержать гармоники с частотами $q_2 = \kappa$, $q_4 = \kappa + 1$. В соответствии с формулами (3.1), (3.11) и (3.14) это возможно только при выполнении условий

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{G} \mathbf{I}_i \times \mathbf{A}_{mn} \mathbf{I}_i = 0; \quad m = 1, 2, \quad n = 2, 4$$

Учитывая формулы (3.1) и (3.3), получаем условия

$$\mathbf{I}_1 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_i + (-1)^i \mathbf{I}_2 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_{3-i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{I}_3 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_i = \mathbf{0}; \quad i = 1, 2 \quad (3.16)$$

Отсюда следует $G_{31} = G_{32} = G_{12} = G_{21} = G_{11} = G_{22} = 0$. Для любого вектора $\mathbf{w}$ получим $\mathbf{G} \mathbf{w} = w^{(3)} \mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_0 = (G_{13}, G_{23}, G_{33})^T$. Из формулы (2.10) получим $\mathbf{u}_i = n_i^{(3)} \mathbf{w}_0$. Так как $s_3 = \mathbf{I}_3$ при $\rho = \alpha_3$, то из формул (2.9) следует $n_1^{(3)} = n_2^{(3)} = 0$, тогда $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ и получаем приводимый случай.

Таким образом, при оси прецессии, коллинеарной направлению α_3 , регулярная прецессия гиростата в трех полях возможна только для скорости прецессии равной или вдвое большей скорости собственного вращения.

Ниже рассмотрены все указанные выше возможные случаи регулярной прецессии:

а) $\rho \nparallel \alpha_3$, $\omega_r = \omega_p$ или $\omega_r = 2\omega_p$;

б) $\rho \parallel \alpha_3$, $\omega_p = \omega_r$ или $\omega_p = 2\omega_r$.

Замечание. При $\kappa = 1$ оператор поворота $\mathbf{R}$ — симметрический [13]. При добавлении к матрице $\mathbf{G}$ пропорционального единичной матрице слагаемого суммарный момент внешних сил, заданный формулой (3.8), не изменится, так как при любом симметрическом операторе $\mathbf{R}$ имеем $\sum \mathbf{I}_i \times \mathbf{R} \mathbf{I}_i = \mathbf{0}$. Из формулы (2.10) тогда следует, что искомые векторы $\mathbf{u}_i$ могут быть записаны в виде (λ — произвольная постоянная):

$$\mathbf{u}_i = \lambda \mathbf{n}_i + \mathbf{G} \mathbf{n}_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.17)$$

Получаем, что в случае $\omega_r = \omega_p$, при заданных в инерциальном пространстве направлениях α_i силовых линий и оси прецессии ρ , заданных операторах $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, существуют различные расположения центров приведения сил и различные величины сил, для которых прецессионное движение будет совпадающим. Это свойство ранее [13] отмечено для трех однородных полей. В случаях $\kappa = 2$ и $\kappa = 1/2$ оператор $\mathbf{R}(t)$ не является симметрическим и аналогичное свойство отсутствует.

4. Случай $\rho \nparallel \alpha_3$, $\omega_r = \omega_p$. Имеем условия (3.9) и $\kappa = 1$. Формулы (3.2), (3.5), (3.12) дают наборы частот: $p_0 = p_4 = 0$, $p_1 = p_3 = -p_6 = 1$, $p_2 = p_5 = 2$, $p_7 = 3$, $q_0 = q_3 = 0$, $q_1 = q_2 = 1$, $q_4 = 2$, $g_1 = 0$, $g_0 = g_3 = 1$, $g_2 = 2$, $g_4 = 3$.

Учитывая формулы (3.1), (3.4) и (3.11), получаем условия выполнения тождества $\mathbf{L} \equiv \mathbf{M}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i7} &= \mathbf{b}_{i4}, \quad \mathbf{a}_{i2} + \mathbf{a}_{i5} = \mathbf{b}_{i2} + \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times \mathbf{A}_{i4} \mathbf{I}_j; \quad i = 1, 2 \\ \mathbf{a}_{i1} + \mathbf{a}_{i3} - (-1)^i \mathbf{a}_{i6} &= \mathbf{b}_{i0} + \mathbf{b}_{i3} + \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times (\mathbf{A}_{i1} + \mathbf{A}_{i2}) \mathbf{I}_j \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{a}_{10} + \mathbf{a}_{14} = \mathbf{b}_{11} + \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times (\mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}_{13}) \mathbf{I}_j$$

Первое условие (4.1) при учете формул (3.6), (3.7), (3.13) примет вид

$$\mathbf{I}_1 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_4 + \mathbf{I}_2 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_3 = \mu (h_1 \mathbf{v}_3 - h_2 \mathbf{v}_4), \quad \mathbf{I}_2 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_4 - \mathbf{I}_1 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_3 = \mu (h_1 \mathbf{v}_4 + h_2 \mathbf{v}_3)$$

Здесь

$$\mu = (J_3 - J_1) / \Omega \quad (4.2)$$

В проекциях на $\mathbf{I}_i$ получаем условия

$$h_1 (K_{12} + K_{21}) + h_2 (K_{11} - K_{22}) = 0, \quad h_2 (K_{12} + K_{21}) - h_1 (K_{11} - K_{22}) = 0$$

$$h_1 K_{31} - h_2 K_{32} = \mu (h_1^2 - h_2^2), \quad h_2 K_{31} + h_1 K_{32} = 2\mu h_1 h_2$$

При $h_1^2 + h_2^2 > 0$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ отсюда следует

$$K_{11} = K_{22}, \quad K_{12} = 0, \quad K_{3j} = \mu h_j; \quad j = 1, 2 \quad (4.3)$$

Второе условие (4.1), учитывая формулы (3.3), (3.6), (3.7), (3.13) и условия (4.3), преобразуем к виду

$$\mathbf{I}_1 \times \mathbf{G}' \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 \times \mathbf{G}' \mathbf{I}_2 = 2(\cos \theta - 1) \Omega \mu h_1 h_2 \mathbf{I}_3 + \mathbf{v} \mathbf{v}_4, \quad \mathbf{G}' = \mathbf{G} + \Omega^2 (1 - \cos \theta) \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I}_2 \times \mathbf{G}' \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_1 \times \mathbf{G}' \mathbf{I}_2 = (\cos \theta - 1) \Omega \mu (h_2^2 - h_1^2) \mathbf{I}_3 - \mathbf{v} \mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{v} = \mu \Omega h_3 \cos \theta + \Omega ((1 - \cos \theta) K_{33} + (1 + \cos \theta) K_{11}) \quad (4.4)$$

В проекциях на $\mathbf{I}_i$ получаем условия

$$G_{3j} = -\mathbf{v} h_j - (1 - \cos \theta) \Omega^2 I_{3j}; \quad j = 1, 2 \quad (4.5)$$

$$G_{11} - G_{22} = -(1 - \cos \theta) \Omega (\Omega (I_{11} - I_{22}) + \mu (h_1^2 - h_2^2)) \quad (4.6)$$

$$G_{12} + G_{21} = -2\Omega (1 - \cos \theta) (\Omega I_{12} + \mu h_1 h_2) \quad (4.7)$$

Третье равенство (4.1) при учете условий (4.3) записывается в виде

$$G_{12} = G_{21} = \Omega (2 + \cos \theta) (\Omega I_{12} + \mu h_1 h_2) \quad (4.8)$$

$$G_{j3} = \Omega (\tilde{\sigma}_j - \Omega I_{3j} + K_{11} h_j); \quad j = 1, 2 \quad (4.9)$$

$$G_{33} - G_{mm} = \Omega (\tilde{\sigma}_3 - h_3 (1 + \cos \theta) K_{11} + \Omega (I_{nn} - (1 + \cos \theta) I_{mm}) + \mu (-\cos \theta h_3^2 - (1 + \cos \theta) h_m^2 + h_n^2)); \quad (4.10)$$

$$m = 1, 2, \quad n = 1, 2, \quad m \neq n$$

Сравнивая равенства (4.7) и (4.8), получим условия

$$G_{12} = G_{21} = 0 \quad (4.11)$$

$$I_{12} = -\frac{\mu}{\Omega} h_1 h_2 \quad (4.12)$$

Четвертое равенство (4.1) при учете условий (4.3) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \cos \theta \mathbf{I}_3 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_3 + \frac{1 - \cos \theta}{2} (\mathbf{I}_1 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_2) = \Omega \left((1 + \cos \theta) \mathbf{I}_3 \times \tilde{\sigma} - \right. \\ \left. - \Omega \frac{\sin^2 \theta}{2} \mathbf{I}_3 \times \mathbf{I}_3 + \frac{1}{2} (\sin^2 \theta (K_{11} - K_{33}) + \mu h_3 \cos \theta (1 - \cos \theta)) \mathbf{v}_2 \right) \end{aligned}$$

При умножении данного равенства на I_3 получим, при условиях (4.11), тождество. При умножении равенства на I_1 и I_2 получим условия

$$\begin{aligned} \cos \theta G_{j3} = & \frac{1 - \cos \theta}{2} G_{3j} + \Omega \left((1 + \cos \theta) \tilde{\sigma}_j - \Omega \frac{\sin^2 \theta}{2} I_{3j} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\sin^2 \theta (K_{11} - K_{33}) + \mu h_3 \cos \theta (1 - \cos \theta)) h_j \right); \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Подставив в равенство (4.13) выражения для v, G_{3j}, G_{j3} из формул (4.4), (4.5) и (4.9), найдем компоненты гиристатического момента

$$\sigma_j = -3\Omega \cos \theta I_{3j} + (\cos \theta K_{11} + (1 - \cos \theta) K_{33} - \mu h_3 \cos \theta) h_j; \quad j = 1, 2 \quad (4.14)$$

Из формул (4.9) и (4.14) получим

$$G_{j3} = \Omega (-2\Omega \cos \theta I_{3j} + ((1 + \cos \theta) K_{11} + (1 - \cos \theta) K_{33}) h_j); \quad j = 1, 2 \quad (4.15)$$

Из равенств (4.6) и (4.10) получим условия

$$I_{11} - I_{22} = -\frac{\mu}{\Omega} (h_1^2 - h_2^2) \quad (4.16)$$

$$G_{11} = G_{22} \quad (4.17)$$

Условия (4.10) и (4.17) позволяют представить диагональные элементы матрицы $\mathbf{G}$ в виде

$$\begin{aligned} G_{11} = G_{22} = \lambda, \quad G_{33} = \lambda + \Omega \left(\sigma_3 + \Omega \left((1 + \cos \theta) I_{33} - \cos \theta \frac{I_{11} + I_{22}}{2} \right) - \right. \\ \left. - \mu \cos \theta \frac{1 + h_3^2}{2} + h_3 (\cos \theta K_{33} - (1 + \cos \theta) K_{11}) \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

В рассмотренном выше случае ($\mathbf{p} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, $\omega_r = \omega_p$) условия регулярной прецессии задаются формулами (3.9), (4.3), (4.14) и (4.16). Матрица $\mathbf{G}$ определена формулами (4.5), (4.11), (4.15) и (4.18).

Из формулы (4.18) следует равенство $\mathbf{G} = \lambda \mathbf{E} + \mathbf{G}'$ и, как отмечено в Замечании к разд. 3, векторы $\mathbf{u}_i$ могут быть записаны в виде (3.17). Матрица $\mathbf{G}'$ — вырожденная и векторы $\mathbf{G}' \mathbf{n}_i$ компланарны.

В частном случае, когда $\mathbf{K} = \mathbf{J} = \mathbf{0}$, условия прецессии совпадают с полученными ранее [13] условиями регулярной прецессии в трех однородных полях в случае $\kappa = 1$.

5. Случай $\mathbf{p} \nparallel \boldsymbol{\alpha}_3$, $\omega_r = 2\omega_p$. В данном случае $\kappa = 1/2$ и должны быть выполнены условия (3.9). Равенства (3.2), (3.5) и (3.12) дают наборы частот

$$\begin{aligned} q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = -q_3 = \frac{1}{2}, \quad q_4 = \frac{3}{2} \\ g_0 = 1, \quad g_1 = -\frac{1}{2}, \quad g_2 = \frac{3}{2}, \quad g_3 = 0, \quad g_4 = 2 \\ p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = -p_4 = \frac{1}{2}, \quad p_5 = -p_6 = \frac{3}{2}, \quad p_7 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Условия выполнения тождества $\mathbf{L} \equiv \mathbf{M}$ получаем из формул (3.1), (3.4) и (3.11):

$$\mathbf{a}_{j7} = 0, \quad \mathbf{a}_{i2} = \mathbf{b}_{i4}, \quad \mathbf{a}_{i5} - (-1)^i \mathbf{a}_{i6} - \mathbf{b}_{i2} = \sum_j \mathbf{G} I_j \times \mathbf{A}_{i4} I_j$$

$$\mathbf{a}_{i3} - (-1)^i (\mathbf{a}_{i4} - \mathbf{b}_{i1}) = \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times (\mathbf{A}_{i2} - (-1)^i \mathbf{A}_{i3}) \mathbf{I}_j \quad (5.1)$$

$$\mathbf{a}_{i1} - \mathbf{b}_{i0} = \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times \mathbf{A}_{i1} \mathbf{I}_j, \quad \mathbf{a}_{i0} - \mathbf{b}_{i3} = \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times \mathbf{A}_{i0} \mathbf{I}_j; \quad i = 1, 2$$

Учитывая формулы (3.6), (3.7) и (3.13), из первого условия (5.1) получим

$$\mathbf{I}_1 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_4 + \mathbf{I}_2 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_3 = 0, \quad \mathbf{I}_2 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_4 - \mathbf{I}_1 \times \mathbf{K} \mathbf{v}_3 = 0$$

При $h_1^2 + h_2^2 > 0$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ эти условия могут быть выполнены, только если

$$K_{11} = K_{22}, \quad K_{ij} = 0; \quad i \neq j \quad (5.2)$$

Второе условие (5.1) записывается в виде ($j = 1, 2$)

$$(-1)^j \mathbf{I}_1 \times \mathbf{N} \mathbf{I}_{3-j} - \mathbf{I}_2 \times \mathbf{N} \mathbf{I}_j = \mu \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} (2h_1 h_2 \mathbf{I}_j - (-1)^j (h_1^2 - h_2^2) \mathbf{I}_{3-j})$$

Из этих равенств, при учете формул (5.2) и (3.6), получим условия

$$I_{11} = I_{22}, \quad I_{12} = 0, \quad I_{13} = -\frac{4\mu}{\Omega} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} h_1 h_2, \quad I_{23} = \frac{2\mu}{\Omega} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} (h_1^2 - h_2^2) \quad (5.3)$$

Запишем теперь третье условие (5.1). Так как при условиях (5.2) имеем $\mathbf{a}_{16} = \mathbf{a}_{26} = 0$, то получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_1 &= v' \Omega \mathbf{v}_4, \quad \mathbf{I}_2 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_1 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_2 = v' \Omega \mathbf{v}_3 \\ v' &= \mu h_3 (1 - 2 \cos \theta) - \frac{1 - \cos \theta}{2} K_{33} - \left(1 + \frac{\cos \theta}{2}\right) K_{11} \end{aligned} \quad (5.4)$$

В проекциях на оси $\mathbf{I}_i$ имеем равенства

$$G_{12} + G_{21} = 0, \quad G_{11} = G_{22}, \quad G_{3j} = v' \Omega h_j; \quad j = 1, 2 \quad (5.5)$$

Четвертое условие (5.1) с учетом формул (5.2) запишем в виде ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \mathbf{I}_3 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_j + \mathbf{I}_1 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_{3-j} + (-1)^j \mathbf{I}_2 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_j &= \Omega \left(v'' \mathbf{v}_j - (-1)^j \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} h_{3-j} K_{11} \mathbf{I}_3 \right) \\ v'' &= \mu h_3 (1 + 2 \cos \theta) - \frac{1 + \cos \theta}{2} K_{33} + \left(1 + \frac{\cos \theta}{2}\right) K_{11} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Полученные векторные равенства в проекциях на оси $\mathbf{I}_i$ дают условия

$$G_{12} = -G_{21} = \frac{\Omega}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} K_{11} h_1, \quad G_{11} = G_{22} = \frac{\Omega}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} K_{11} h_2 \quad (5.7)$$

$$(1 - \cos \theta) G_{3j} = \Omega ((1 + \cos \theta) K_{11} - (1 - \cos \theta) v'') h_j; \quad j = 1, 2 \quad (5.8)$$

Первые два условия (5.5) при этом выполнены. Условия (5.8) совместны с третьим и четвертым условиями (5.5), только если

$$(1 - \cos \theta) K_{33} + (1 + \cos \theta) K_{11} = 2\mu (1 - \cos \theta) h_3 \quad (5.9)$$

При выполнении условия (5.9) получим

$$v' = -\mu h_3 \cos \theta - \frac{1}{2} K_{11} \quad (5.10)$$

Пятое условие (5.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_j \times \mathbf{G} \mathbf{I}_3 &= \frac{\Omega}{2} \mathbf{I}_j \times \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\mu \Omega \cos \theta}{2} (3h_3^2 - 1) \mathbf{I}_3 \times \mathbf{I}_j + \Omega h_3 \left(1 + \frac{\cos \theta}{2}\right) \mathbf{I}_3 \times \mathbf{K} \mathbf{I}_j + \\ &+ \frac{\Omega^2}{2} \left(\mathbf{I} (\mathbf{I}_j \times \mathbf{I}_3) + \left(1 + \frac{\cos \theta}{2}\right) \mathbf{I}_3 \times \mathbf{I}_j \right); \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

При умножении равенств (5.11) на I_j получим, учитывая условия (5.2) и (5.3), тождества. При умножении равенств на I_3 получим условия

$$G_{j3} = \frac{\Omega}{2}(\tilde{\sigma}_j - \Omega I_{3j}); j = 1, 2$$

Полагая в равенстве (5.11) $j = 1$ и умножая его на I_2 , получим условие (такое же условие получим при $j = 2$ и умножении на I_1)

$$G_{33} = \frac{\Omega}{2}(\tilde{\sigma}_3 + \mu \cos \theta (1 - 3h_3^2) - \frac{\Omega}{2} \cos \theta I_{11} - h_3 (2 + \cos \theta) K_{11})$$

Найденные условия перепишем, используя выражение (3.6) $\tilde{\sigma}$ через гиростатический момент σ и условие (5.9)

$$G_{j3} = \frac{\Omega}{2}(\sigma_j + \Omega \cos \theta I_{3j}); j = 1, 2 \quad (5.12)$$

$$G_{33} = \frac{\Omega}{2}(\sigma_3 + \frac{\Omega}{2}((1 + \frac{\cos \theta}{2})I_{33} - \cos \theta I_{11}) + h_1(K_{33} - K_{11}) + \mu(\cos \theta(1 - h_3^2) - 2h_3^2)) \quad (5.13)$$

Учитывая условия (5.2), запишем шестое условие (5.1)

$$\cos \theta I_3 \times \mathbf{G} I_3 = \Omega \left(I_3 \times \left(\frac{2 + \cos \theta}{2} \tilde{\sigma} - \Omega \frac{\sin^2 \theta}{8} \mathbf{I} I_3 \right) + \mu \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{4} (h_1 \mathbf{v}_1 + h_2 \mathbf{v}_2) \right)$$

В проекциях это равенство дает условия

$$\cos \theta G_{13} = \frac{\Omega}{2} \left((2 + \cos \theta) \sigma_1 + \Omega \frac{2(2 + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta}{4} I_{13} + \mu \sin \theta (1 - \cos \theta) h_1 h_2 \right)$$

$$\cos \theta G_{23} = \frac{\Omega}{2} \left((2 + \cos \theta) \sigma_2 + \Omega \frac{2(2 + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta}{4} I_{23} - \mu \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{2} (h_1^2 - h_2^2) \right)$$

Подставляя сюда G_{j3} из формулы (5.12) и учитывая равенства (5.3), получим следующие выражения для компонент гиростатического момента

$$\sigma_j = -\frac{3 + 5 \cos \theta}{4} \Omega I_{3j}; j = 1, 2 \quad (5.14)$$

Формулы (5.12) можно теперь записать в виде

$$G_{j3} = -\frac{3}{8} (1 + \cos \theta) \Omega^2 I_{3j}; j = 1, 2 \quad (5.15)$$

Таким образом, для случая $\kappa = 1/2$, $\rho \nparallel \alpha_3$ получены условия, заданные формулами (3.9), (5.2), (5.3), (5.9) и (5.14). Элементы матрицы $\mathbf{G}$ определены формулами (5.5), (5.7), (5.10), (5.13) и (5.15).

Если рассмотреть прецессию в трех однородных полях, то условия (3.9), (5.2) и (5.9) при $\mathbf{K} = \mathbf{J} = \mathbf{0}$ выполнены. Условия (5.3), (5.14) и формулы (5.7), (5.10) и (5.15) принимают вид

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad I_{11} = I_{22}, \quad I_{ij} = 0; \quad G_{11} = G_{22} = 0, \quad G_{ij} = 0; \quad i \neq j$$

В этом случае $\mathbf{u}_i = G_{33} h_i^{(3)} I_3$, $i = 1, 2, 3$. Векторы $\mathbf{u}_i$ коллинеарны оси собственного вращения I_3 . Следовательно, в неприводимом случае регулярная прецессия при $\mathbf{K} = \mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\kappa = 1/2$ невозможна.

Для твердого тела и гиростата с коллинеарным оси собственного вращения гирос-
статическим моментом из условий (5.14) при $\sigma_{1,2} = 0$ получим

$$(3 + 5 \cos \theta) I_{3j} = 0; \quad j = 1, 2$$

Если $I_{13} = I_{23} = 0$, то из условий (5.3) следует $h_1 = h_2 = 0$ и $\rho = \alpha_3$.

Следовательно, при $\rho \nparallel \alpha_3$ регулярная прецессия твердого тела (и гиростата, у кото-
рого $\sigma \parallel I_3$) со скоростью собственного вращения вдвое большей скорости прецессии
возможна, только если угол нутации задан равенствами

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}, \quad \sin \theta = \frac{4}{5} \quad (5.16)$$

При $\kappa = -1/2$, то есть при $\omega_p = -2\omega_r$ получим $\cos \theta = 3/5$.

6. Случай $\rho = \alpha_3$, $\omega_p = \omega_r$. В данном случае $\kappa = 1$ и равенства (3.2), (3.5) и (3.14) да-
ют наборы частот: $q_0 = q_3 = 0$, $q_1 = q_2 = 1$, $q_4 = 2$, $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $p_0 = p_4 = 0$,
 $p_1 = p_3 = -p_6 = 1$, $p_2 = p_5 = 2$, $p_7 = 3$.

При $h_{1,2} = 0$ из формул (3.6), (3.7) получим $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{0}$; $i = 1, 2$, $j = 3-7$.

Запишем условия выполнения тождества $\mathbf{L} \equiv \mathbf{M}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i2} - \mathbf{b}_{i2} &= \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times \mathbf{A}_{i4} \mathbf{I}_j, \quad \mathbf{a}_{i1} - \mathbf{b}_{i1} = \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times (\mathbf{A}_{i1} + \mathbf{A}_{i2}) \mathbf{I}_j \\ \mathbf{a}_{i0} - \mathbf{b}_{i0} &= \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times (\mathbf{A}_{i0} + \mathbf{A}_{i3}) \mathbf{I}_j; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Первое условие (6.1) при учете формул (3.3), (3.6), (3.7) и (3.15) представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 \times \mathbf{H} \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 \times \mathbf{H} \mathbf{I}_2 &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{I}_1 \times \mathbf{H} \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2 \times \mathbf{H} \mathbf{I}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{G} + (1 - \cos \theta) \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \Omega^2 \mathbf{I} + \Omega \mathbf{K} - \mathbf{J} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Полученные векторные условия эквивалентны системе

$$G_{11} - G_{22} = (\cos \theta - 1)(P_{11} - P_{22}), \quad G_{12} + G_{21} = -2(1 - \cos \theta) P_{12} \quad (6.3)$$

$$G_{3j} = (\cos \theta - 1) P_{3j}; \quad j = 1, 2 \quad (6.4)$$

Обозначим $\mathbf{G}'' = \mathbf{G} + \cos \theta \mathbf{J}$ и запишем второе условие (6.1):

$$\mathbf{I}_j \times \mathbf{G}'' \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_3 \times \mathbf{G}'' \mathbf{I}_j = \Omega \mathbf{I}_j \times \tilde{\sigma} + \Omega(1 + \cos \theta) \mathbf{I}_3 \times \mathbf{N} \mathbf{I}_j + \Omega^2 \mathbf{I}(\mathbf{I}_j \times \mathbf{I}_3); \quad j = 1, 2$$

В проекциях на оси получаем

$$G_{j3} = \Omega \tilde{\sigma}_j - \Omega^2 I_{3j} - \cos \theta J_{3j}; \quad j = 1, 2 \quad (6.5)$$

$$G_{12} = G_{21} = \Omega(1 + \cos \theta) N_{12} + \Omega^2 I_{12} - \cos \theta J_{12} \quad (6.6)$$

$$G_{33} - G_{jj} = \Omega \tilde{\sigma}_3 - \Omega(1 + \cos \theta) N_{jj} + \Omega^2 I_{3-j,3-j} + \cos \theta (J_{jj} - J_{33}); \quad j = 1, 2 \quad (6.7)$$

Из равенств (6.3), (6.6) и (6.7) получим

$$3\Omega^2 I_{12} + 2\Omega K_{12} - J_{12} = 0 \quad (6.8)$$

$$G_{12} = G_{21} = (\cos \theta - 1) P_{12} \quad (6.9)$$

$$3\Omega^2 (I_{11} - I_{22}) + 2\Omega (K_{11} - K_{22}) - (J_{11} - J_{22}) = 0 \quad (6.10)$$

В условии (6.5) перейдем к компонентам гирос-статического момента

$$G_{j3} = \Omega \sigma_j + \cos \theta (\Omega^2 I_{3j} + \Omega K_{3j} - J_{3j}); \quad j = 1, 2 \quad (6.11)$$

Третье условие (6.1) записывается в виде

$$\begin{aligned}\Omega \mathbf{I}_3 \times \left((1 + \kappa \cos \theta) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\sin^2 \theta}{2} \mathbf{N} \mathbf{I}_3 \right) - \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \mathbf{I}_3 \times \mathbf{J} \mathbf{I}_3 = \\ = \cos \theta \mathbf{I}_3 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_3 + \frac{1 - \cos \theta}{2} (\mathbf{I}_1 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_2)\end{aligned}$$

При умножении на $\mathbf{I}_3$ получим, при учете условия (6.9), тождество. Умножая на $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$, получим равенства ($j = 1, 2$)

$$\cos \theta G_{j3} - \frac{1 - \cos \theta}{2} G_{3j} = \Omega (1 + \cos \theta) \tilde{\sigma}_j - \frac{\sin^2 \theta}{2} \Omega (K_{3j} + \Omega I_{3j}) + \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{2} J_{3j}$$

Подставим сюда G_{j3} из формулы (6.11) и G_{3j} из формулы (6.4) и получим выражения для компонент гиросtatического момента

$$\Omega \sigma_j = -\cos \theta (3\Omega^2 I_{3j} + 2\Omega K_{3j} - J_{3j}) + \Omega K_{3j} - J_{3j}; \quad j = 1, 2 \quad (6.12)$$

Формулы (6.7) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}G_{jj} = \lambda' + (\cos \theta - 1) (\Omega^2 I_{jj} + \Omega K_{jj} - J_{jj}); \quad j = 1, 2, \quad G_{33} = \lambda' + \Omega \sigma_3 + \\ + \cos \theta (\Omega^2 I_{33} + \Omega K_{33} - J_{33}) + \Omega^2 \left(I_{33} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2} \right) - \Omega (K_{11} + K_{22}) + \frac{J_{11} + J_{22}}{2}\end{aligned} \quad (6.13)$$

Условия (6.10) можно записать в виде (v — произвольная постоянная)

$$J_{jj} = v + 3\Omega^2 I_{jj} + 2\Omega K_{jj}; \quad j = 1, 2 \quad (6.14)$$

Таким образом, имеем условия (6.8), (6.12) и (6.14). Из формул (6.4), (6.9), (6.11) и (6.13) получим выражения для элементов матрицы $\mathbf{G}$

$$\begin{aligned}G_{12} = G_{21} = (\cos \theta - 1) P_{12}, \quad G_{3j} = (\cos \theta - 1) P_{3j}, \quad G_{j3} = \Omega \sigma_j + \cos \theta P_{3j} \\ G_{jj} = \lambda' + (\cos \theta - 1) P_{jj}; \quad j = 1, 2, \quad G_{33} = \lambda' + v + \Omega \sigma_3 + \cos \theta P_{33} + \Omega^2 \operatorname{tr} \mathbf{I}\end{aligned} \quad (6.15)$$

Как и в разд. 4, имеем $\mathbf{G} = \lambda' \mathbf{E} + \mathbf{G}'$, где λ' — произвольная постоянная. Центры приведения, как и всюду в работе, после построения матрицы $\mathbf{G}$ находятся по формуле (2.10).

7. Случай $\rho = \alpha_3$, $\omega_p = 2\omega_r$. В данном случае $\kappa = 2$ и равенства (3.2), (3.5) и (3.14) дают наборы частот: $q_0 = 0$, $q_1 = q_3 = 1$, $q_2 = 2$, $q_4 = 3$, $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $p_0 = p_6 = 0$, $p_1 = p_4 = 1$, $p_2 = p_3 = 2$, $p_5 = 3$, $p_7 = 4$.

Получаем систему условий

$$\begin{aligned}\sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times \mathbf{A}_{i4} \mathbf{I}_j = 0, \quad \mathbf{a}_{i2} - \mathbf{b}_{i2} = \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times \mathbf{A}_{i2} \mathbf{I}_j \\ \mathbf{a}_{i1} - \mathbf{b}_{i1} = \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times (\mathbf{A}_{i1} + \mathbf{A}_{i3}) \mathbf{I}_j, \quad \mathbf{a}_{i0} - \mathbf{b}_{i0} = \sum_j \mathbf{G} \mathbf{I}_j \times \mathbf{A}_{i0} \mathbf{I}_j; \quad i = 1, 2\end{aligned} \quad (7.1)$$

Первое условие (7.1) приводит к первому условию (3.16), следовательно

$$G_{11} = G_{22}, \quad G_{12} + G_{21} = 0, \quad G_{31} = G_{32} = 0 \quad (7.2)$$

Второе условие (7.1) можно записать в виде

$$\mathbf{I}_3 \times \mathbf{G} \mathbf{I}_i = \sin \theta (\mathbf{I}_2 \times \mathbf{Q} \mathbf{I}_i - (-1)^i \mathbf{I}_1 \times \mathbf{Q} \mathbf{I}_{3-i}); \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{Q} = 2\Omega^2 \mathbf{I} + \Omega \mathbf{K} - \frac{1}{2} \mathbf{J}$$

Эквивалентная скалярная система условий имеет вид

$$G_{11} = G_{22} = -\sin \theta Q_{23}, \quad G_{12} = -G_{21} = \sin \theta Q_{13} \quad (7.3)$$

$$Q_{11} = Q_{22}, \quad Q_{12} = 0 \quad (7.4)$$

Третье условие (7.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_i \times \mathbf{G}\mathbf{l}_3 + \frac{1 - \cos \theta}{2 \sin \theta} \left((-1)^i \mathbf{l}_1 \times \mathbf{G}\mathbf{l}_{3-i} + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{G}\mathbf{l}_i \right) = 2\Omega \mathbf{l}_i \times \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + 2(-1)^i \Omega^2 \mathbf{l}_{3-i} + \\ + \Omega(1 + 2 \cos \theta) \mathbf{l}_3 \times \mathbf{N}\mathbf{l}_i - \cos \theta (\mathbf{l}_i \times \mathbf{J}\mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{J}\mathbf{l}_i); \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

В соответствии с формулой (3.6) в рассматриваемом случае, то есть при $\kappa = 2$, $h_3 = 1$, имеем $\mathbf{N} = 2\Omega\mathbf{I} + \mathbf{K}$. Умножая, при $i = 1$, равенство (7.5) на $\mathbf{l}_1$, получим, при учете условий (7.2) и (7.4), условие

$$K_{12} = -4\Omega I_{12} \quad (7.6)$$

Из условий (7.4) и (7.6) следует

$$J_{12} = -4\Omega^2 I_{12} \quad (7.7)$$

Умножая, при $i = 1$ равенство (7.5) на $\mathbf{l}_2$, и при $i = 2$ на $\mathbf{l}_1$, получим две формулы для G_{33} ($i = 1, 2$)

$$G_{33} = 2\Omega \tilde{\sigma}_3 + 2\Omega^2 I_{3-i,3-i} - \Omega(1 + 2 \cos \theta)(2\Omega I_{ii} + K_{ii}) + \cos \theta (J_{ii} - J_{33}) \quad (7.8)$$

Складывая равенства (7.8) с $i = 1$ и $i = 2$, получим

$$G_{33} = 2\Omega \sigma_3 + 2\Omega^2 I_{33} - \Omega \frac{K_{11} + K_{22}}{2} + \cos \theta (2Q_{33} - Q_{11} - Q_{22}) \quad (7.9)$$

Вычитая равенства (7.8), получим равенство

$$2 \cos \theta (Q_{11} - Q_{22}) + 4\Omega^2 (I_{11} - I_{22}) + \Omega (K_{11} - K_{22}) = 0$$

Учитывая условие (7.4), отсюда найдем условия

$$K_{11} - K_{22} = -4\Omega (I_{11} - I_{22}), \quad J_{11} - J_{22} = -4\Omega^2 (I_{11} - I_{22}) \quad (7.10)$$

Умножая равенства (7.5) на $\mathbf{l}_3$, получим формулы

$$G_{j3} = 2\Omega \tilde{\sigma}_j - (1 - \cos \theta) Q_{3j} - 2\Omega^2 I_{3j} - \cos \theta J_{3j}; \quad j = 1, 2 \quad (7.11)$$

Четвертое условие (7.1) записывается в виде

$$\mathbf{l}_3 \times \left(\Omega(1 + 2 \cos \theta) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \Omega \sin^2 \theta (2\Omega \mathbf{I}\mathbf{l}_3 + \mathbf{K}\mathbf{l}_3) + \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{2} \mathbf{J}\mathbf{l}_3 - \cos \theta \mathbf{G}\mathbf{l}_3 \right) = \mathbf{0}$$

В проекциях получаем условия

$$\Omega(1 + 2 \cos \theta) \tilde{\sigma}_j - \Omega \sin^2 \theta (2\Omega I_{3j} + K_{3j}) + \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{2} J_{3j} = \cos \theta G_{j3}; \quad j = 1, 2$$

Отсюда, учитывая формулы (3.6) и (7.11) находим

$$\Omega \sigma_j = \Omega^2 (1 - 6 \cos \theta) I_{3j} + \Omega(1 - 2 \cos \theta) K_{3j} + \frac{\cos \theta - 1}{2} J_{3j}; \quad j = 1, 2 \quad (7.12)$$

Формулы (7.11) можно, при учете формул (7.12), записать в виде

$$G_{j3} = -6\Omega^2 \cos \theta I_{3j} + \Omega(1 - \cos \theta) K_{3j} - \frac{\cos \theta + 1}{2} J_{3j}; \quad j = 1, 2 \quad (7.13)$$

Таким образом, имеем условия (7.6), (7.7), (7.10) и (7.12). Элементы матрицы $\mathbf{G}$ заданы формулами (7.2), (7.3), (7.9) и (7.13). Центры приведения определяются формулами (2.10).

Если выделить случай трех однородных полей, то получим условия и векторы $\mathbf{u}_i$, найденные ранее [13] для случая $\kappa = 2$.

8. Случай ортогональных полей. При анализе условий регулярной прецессии гиростата в трех однородных полях (т.е. при $\mathbf{K} = 0$, $\mathbf{J} = c\mathbf{E}$) для произвольных заданных в инерциальном пространстве направлениях силовых линий α_i и любом заданном направлении ρ оси прецессии можно перейти к ортогональному базису (β_i) такому, что ρ совпадает с одним из β_i . При этом система (2.1), (2.2) сохранит свой вид с новыми центрами приведения сил. Обычно предполагается, что соответствующие преобразования выполнены и векторы α_i взаимно перпендикулярны и, например, $\rho = \alpha_3$. Эти предположения не ограничивают общности задачи, но затрудняют интерпретацию результатов, поскольку как взаимное расположение силовых линий полей, так и направление оси прецессии могут быть любыми. В нашей работе [13] задача решается для произвольных заданных углов между силовыми линиями полей.

В случае, когда $\mathbf{K} \neq 0$ или $\mathbf{J} \neq c\mathbf{E}$ приведение к ортогональным полям с сохранением вида системы (2.1), (2.2) возможно, только если положить $\beta_3 = \alpha_3$ (иначе, в частности, $\omega \times \mathbf{K}\alpha_3 \neq \omega \times \mathbf{K}\beta_3$). Выбрать ортогональную систему (β_i) так, чтобы ось прецессии ρ совпадала с одной из осей β_i здесь в общем случае невозможно.

В работе [14] полагают “без ограничения общности” векторы α_i ортогональными и ось прецессии – совпадающей с направлением α_3 . Как отмечено выше, этот случай не эквивалентен общему. Случаи, когда $\rho \nparallel \alpha_3$ рассмотрены в разд. 4 и 5 и показано, что прецессия возможна с отношениями скоростей $\kappa = 1$ и $\kappa = 1/2$. В случае $\rho = \alpha_3$ (разд. 6 и 7) возможны только значения $\kappa = 1$ и $\kappa = 2$ ($\kappa = \omega_p/\omega_r$).

Несмотря на то, что в общем случае переход к ортогональному базису невозможен, случай ортогональных полей представляет самостоятельный интерес. Кроме того, рассмотрение этого случая необходимо для сравнения с известным частным результатом [14].

Выделим в полученных выше условиях разд. 4–7 случай ортогональных полей. Пусть единичные векторы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ образуют правую ортогональную тройку, тогда, в соответствии с формулами (2.6), единичные векторы s_1, s_2, s_3 образуют левую ортогональную тройку. Из формул (2.9) получим

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{s}_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.1)$$

Рассмотрим теперь, для сравнения с результатами работы [14], частный случай $\rho = \alpha_3$. Из формул (2.6) в этом случае получим $s_3 = I_3$. Всюду выше векторы I_1, I_2 правого ортогонального базиса пока не определены. Так как (s_i) – левая тройка, то можно положить $I_1 = s_1$, $I_2 = -s_2$, $I_3 = s_3$. Из формулы (8.1) тогда получим $\mathbf{n}_1 = I_1$, $\mathbf{n}_2 = -I_2$, $\mathbf{n}_3 = I_3$.

Центры приведения сил заданы равенствами (2.10), следовательно

$$u_1^{(j)} = G_{j1}, \quad u_2^{(j)} = -G_{j2}, \quad u_3^{(j)} = G_{j3}; \quad j = 1, 2, 3 \quad (8.2)$$

Данные формулы для координат центров приведения можно использовать вместе с формулами для G_{ij} , приведенными в разд. 6 (для случая $\omega_p = \omega_r$ этот случай рассмотрен в работе [14]) и в разд. 7 (для случая $\omega_p = 2\omega_r$).

Полученные в разд. 6 условия (6.10), (6.12) и (6.14) совпадают с приведенными в работе [14]. Из формул (6.7) и (8.2) получим

$$u_1^{(1)} - u_3^{(3)} = G_{11} - G_{33}, \quad u_2^{(2)} + u_3^{(3)} = G_{33} - G_{22} \quad (8.3)$$

Проверка показывает, что второе условие (8.3) и условия (8.2), не содержащие величин $u_1^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(3)}$, совпадают с соответствующими условиями [14]. Квадратное урав-

нение, используемое в работе [14] для определения Ω , эквивалентно первому условию (8.3).

Таким образом, в работе [14] для движения гиростата в поле трех сил, описываемом системой (2.1), (2.2), найдены условия регулярной прецессии при следующих ограничениях: 1) скорость прецессии равна скорости собственного вращения; 2) ось прецессии коллинеарна вектору α_3 , задающему направление неоднородного поля; 3) направления трех полей α_i взаимно перпендикулярны.

9. Прецессия твердого тела. Условия в главных осях в случае равных скоростей прецессии и собственного вращения и $\rho \parallel \alpha_3$. Условия для данного случая приведены в разд. 4 в базисе (I_j). Запишем эти условия в базисе собственных векторов e_i оператора $\mathbf{K}$. Из условий (4.3) следует, что собственным вектором оператора $\mathbf{K}$ с собственным значением K_{11} является вектор $I_3 \times \mathbf{h}$. Пронумеруем собственные векторы так, что $e_1 \parallel I_3 \times \mathbf{h}$. Вектор I_3 совпадает с осью собственного вращения $\mathbf{m}$, а ортогональные ему векторы I_1 и I_2 можно выбрать каким-то удобным способом. Положим

$$\mathbf{m} = I_3 = \cos \xi e_3 + \sin \xi e_2, \quad I_1 = e_1, \quad I_2 = -\sin \xi e_3 + \cos \xi e_2 \quad (9.1)$$

При таком выборе базиса (I_j) $K_{12} = K_{13} = 0$ и из условия (4.3) следует $h_1 = 0$. В формуле (2.10) следует положить $\varphi_3 = \pi/2$. Имеем также следующие связи

$$K_{33} = K_2 + K_3 - K_1, \quad K_{23} = (K_2 - K_3) \sin \xi \cos \xi \quad (9.2)$$

$$\cos^2 \xi = \frac{K_1 - K_3}{K_2 - K_3}, \quad \sin^2 \xi = \frac{K_2 - K_1}{K_2 - K_3} \quad (9.3)$$

Здесь и далее K_i, I_i, J_i — собственные значения операторов $\mathbf{K}, \mathbf{I}, \mathbf{J}$. Необходимо условие $(K_1 - K_3)(K_2 - K_1) \geq 0$. При этом значение K_1 находится между двумя другими собственными значениями K_i .

Третье условие (4.3) дает $K_{23} = \mu h_2$. Так как $\mathbf{h} = \mathbf{s}_3$, то из формулы (2.7) при $\varphi_3 = \pi/2$ получим $h_2 = \sin \theta_3$. Напомним (см. разд. 2), что θ_3 — угол между осью прецессии и вектором α_3 , задающим направление неоднородного поля.

Второе условие (9.2) можно теперь записать в виде

$$(K_2 - K_3) \sin \xi \cos \xi = \mu \sin \theta_3, \quad (9.4)$$

или, учитывая равенства (4.2) и (9.3), в виде

$$(K_1 - K_3)(K_2 - K_1) \Omega^2 = (J_3 - J_1)^2 \sin^2 \theta_3 \quad (9.5)$$

Условия (4.12) и (4.16) принимают вид

$$I_{12} = 0, \quad I_{11} - I_{22} = \frac{\mu}{\Omega} \sin^2 \theta_3 \quad (9.6)$$

Из формул (4.2), (9.5) и (9.6) получим условие

$$(J_3 - J_1)(I_{11} - I_{22}) = (K_1 - K_3)(K_2 - K_1) \quad (9.7)$$

Выделим случай, когда система является твердым телом, либо гиростатом с гиростатическим моментом, коллинеарным оси собственного вращения, то есть будем считать выполненными условия

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad (9.8)$$

При $\cos \theta = 0$ из условий (9.8) и (4.14) следует $K_{33} = 0$, тогда из формул (9.2) получим $K_1 = K_2 + K_3$ и условие $(K_1 - K_3)(K_2 - K_1) \geq 0$ может быть выполнено, только ес-

ли $K_2 K_3 \leq 0$. Случай, когда собственные значения оператора $\mathbf{K}$ имеют разные знаки, не будем рассматривать, тогда $\cos \theta \neq 0$.

Условия (4.14) при учете равенств (4.2) и (9.2) запишем в виде

$$I_{3j} = ch_j, \quad j = 1, 2, \quad c = \frac{1}{3\Omega} \left(\frac{J_1 - J_3}{\Omega} \cos \theta_3 + K_2 + K_3 + \frac{K_1 - K_2 - K_3}{\cos \theta} \right) \quad (9.9)$$

При выполнении условий (4.12), (4.16) и (9.9) вектор $I_3 \times \mathbf{h}$ является собственным вектором не только оператора $\mathbf{K}$, но и оператора $\mathbf{I}$. Два других собственных вектора оператора $\mathbf{I}$ получим поворотом векторов $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ вокруг $\mathbf{e}_1$ на угол, определяемый условиями (4.16) и (9.9).

Рассмотрим частный случай, когда собственные векторы операторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{K}$ совпадают. Используя формулы (9.1), получим

$$\begin{aligned} I_{12} = I_{13} = 0, \quad I_{11} = I_1, \quad I_{23} = (I_2 - I_3) \sin \xi \cos \xi \\ I_{33} = \sin^2 \xi I_2 + \cos^2 \xi I_3, \quad I_{22} = \cos^2 \xi I_2 + \sin^2 \xi I_3 \end{aligned} \quad (9.10)$$

Условия (4.16) и (9.9) перепишем в виде

$$(I_2 - I_3) \sin 2\xi = 2c \sin \theta_3, \quad (I_2 - I_3) \cos 2\xi = 2I_1 - I_2 - I_3 - 2\frac{\mu}{\Omega} \sin^2 \theta_3 \quad (9.11)$$

Из равенств (4.2) и (9.5) следует

$$\frac{\mu}{\Omega} \sin^2 \theta_3 = \frac{(K_1 - K_3)(K_2 - K_1)}{J_3 - J_1} \quad (9.12)$$

Если во втором равенстве (9.11) использовать формулу (9.12) и $\cos 2\xi$ определить при помощи формул (9.3), то получим следующую связь

$$\sum_{j=1}^3 I_j \Delta K_j = \frac{\Delta K_1 \Delta K_2 \Delta K_3}{J_3 - J_1}, \quad \Delta K_1 \stackrel{\text{def}}{=} K_2 - K_3 (1, 2, 3) \quad (9.13)$$

Так как собственные векторы операторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{K}$ совпадают, то можно записать ($\mathbf{E}$ – тождественный оператор)

$$\mathbf{I} = \chi_0 \mathbf{E} + \chi_1 \mathbf{K} + \chi_2 \mathbf{K}^2 \quad (9.14)$$

Если обозначить $S_n = \sum K_j^n \Delta K_j$, то $S_0 = S_1 = 0$, $S_2 = -\Delta K_1 \Delta K_2 \Delta K_3$. Из условия (9.13) тогда найдем

$$\chi_2 = 1 / (J_1 - J_3) \quad (9.15)$$

Найдем теперь параметр χ_1 . Из первого условия (9.11) получаем

$$(\chi_1 (K_2 - K_3) + \chi_2 (K_2^2 - K_3^2)) \sin \xi \cos \xi = c \sin \theta_3$$

При $\sin 2\xi = 0$ базисы (I_j) и $(\mathbf{e}_j)$ совпадают. Тогда $c = 0$; из формул (9.3) и (9.14) следует $K_1 = K_2$, $I_1 = I_2$. При $\sin 2\xi \neq 0$ из формул (9.15) и (9.4) получим

$$\chi_1 = (K_2 + K_3 + \Omega c) / (J_3 - J_1).$$

Заключение. Задача о вращении гиростата в различных силовых полях остается в настоящее время актуальной. Регулярные прецессии гиростата достаточно хорошо изучены в случае, когда силовые поля имеют общую ось симметрии [7]. Недавно были построены [9, 10] первые примеры регулярной прецессии вокруг невертикальной оси несимметричного твердого тела и гиростата в суперпозиции двух и трех однородных полей. Показана [14] возможность прецессии в суперпозиции трех (гравитационного, электрического и магнитного) полей, одно из которых – неоднородное в частном слу-

чае, когда скорости прецессии и собственного вращения равны, поля ортогональны и ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля. Для анализа громоздких условий использовались [14] методы компьютерной алгебры.

В наших работах [12, 13] описаны все возможные случаи регулярной прецессии твердого тела и гиростата под действием двух и трех неприводимых однородных полей. Получено обобщение условий [9, 10] для равных скоростей прецессии и собственного вращения и найдены новые случаи, когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения.

В настоящей работе аналитические методы, разработанные [13] для описания прецессии в трех однородных полях, применены для полного исследования возможных случаев регулярной прецессии гиростата в названной выше [14] суперпозиции неоднородных полей. Показано, что если ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, то возможны два случая — когда скорость прецессии равна или вдвое больше скорости собственного вращения. Если ось прецессии отклонена от оси симметрии поля, то прецессия может происходить при скорости прецессии равной или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для всех случаев найдены конфигурационные условия и центры приведения сил. Выделен случай твердого тела; показано, в частности, что скорость прецессии может быть вдвое меньшей скорости собственного вращения, только если угол между осями прецессии и собственного вращения задан равенством $\sin \theta = 4/5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.* 1984. V. 95. P. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // *J. Theor. & Appl. Mech.* 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
3. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // *J. Theor. & Appl. Mech.* 1986. V. 5. № 5. P. 755–762.
4. *Kharlamov M.P.* Periodic motions of the Kowalevski gyrost at in two constant fields // *J. Phys. A.* 2008. V. 41. Iss. 27.
5. *Yehia H.M., El-Kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrost at with principal axes on a circular orbit // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7 (4). P. 2120–2128.
6. *Горп Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
7. *Горп Г.В., Мазнев А.В., Шетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДНГУ. 2009.
8. *Горп Г.В., Мазнев А.В.* Прецессии гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 801–813.
9. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015. V. 2. Iss. 3. P. 200–205.
10. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrost at) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.* 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216–219.
11. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. Mat. Pura e Appl.* 1947. V. 26. Iss. 3–4. P. 271–281.
12. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // *Mech. Res. Commun.* 2023. V. 127. Art. No. 104041.
13. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 872–886.
14. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2019. V. 15. Iss. 3. P. 285–292.

Regular Precession of a Gyrostat in Three Force Fields

V. Yu. Ol'shanskii^{a, #}

^a*IPTMU RAS, Saratov, Russia*

[#]*e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

The article gives a solution to the problem of possible conditions of regular precession in the motion of a gyrostat around a fixed point under the action of two uniform and one inhomogeneous field. For the known case with equal precession and proper rotation velocities, new solutions are indicated with the precession axis deviated from the symmetry axis of the inhomogeneous field. New cases of regular precession are found, when the ratio of precession and proper rotation velocities is equal to two or one second. Application of the results to precession in orthogonal fields and to precession of a solid are considered.

Keywords: solid and gyrostat, superposition of uniform and inhomogeneous fields, regular precession

REFERENCES

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.*, 1984, vol. 95, pp. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // *J. Theor.&Appl. Mech.*, 1986, vol. 5, no. 5, pp. 747–754.
3. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // *J. Theor.&Appl. Mech.*, 1986, vol. 5, no. 5, pp. 755–762.
4. *Kharlamov M.P.* Periodic motions of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // *J. Phys. A*, 2008, vol. 41, iss. 27.
5. *Yehia H.M., El-Kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrostat with principal axes on a circular orbit // *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, vol. 7 (4), pp. 2120–2128.
6. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyev: Naukova Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
7. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession Motions in Rigid Body Dynamics and Dynamics of Linked Rigid Bodies Systems. Donetsk: Donetsk Nat. Univ., 2009. 222 p. (in Russian)
8. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Precessions of a gyrostat under the action of a potential and gyroscopic forces in the case of a variable gyrostatic momentum // *Prikl. Matem. i Mekh.*, 2022, vol. 86, iss. 6, pp. 801–813.
9. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.*, 2015, vol. 2, iss. 3, pp. 200–205.
10. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.*, 2017, vol. 25, iss. 2, pp. 216–219.
11. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. Mat. Pura e Appl.*, 1947, vol. 26, iss. 3–4, pp. 271–281.
12. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // *Mech. Res. Commun.*, 2023, vol.127, art. no. 104041.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a gyrostat in three uniform fields // *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, iss. 8, pp. 1873–1884.
14. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 285–292.

УДК 531.1:521.1

**О РЕЗОНАНСНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ В БЛИЗКОЙ
К КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ**

© 2023 г. А. П. Маркеев^{1,*}

¹Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

*e-mail: anat-markeev@mail.ru

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.

После доработки 07.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Рассматривается ограниченная задача трех тел (материальных точек), движущихся под действием гравитационного притяжения по закону Ньютона. Орбиты основных притягивающих тел считаются эллипсами с малым эксцентриситетом, а пассивно гравитирующее тело может совершать произвольное пространственное движение вблизи треугольной точки либрации. Для функции Гамильтона, отвечающей такому движению, указана структура нормальной формы в случае резонансов третьего порядка. С точностью до второй степени эксцентриситета получены уравнения резонансных кривых для всех резонансов плоской ограниченной задачи трех тел до шестого порядка включительно.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, треугольные точки либрации, резонанс

DOI: 10.31857/S0032823523040082, **EDN:** DZRUBV

Точки либрации — точные решения ограниченной задачи трех тел открыты более 250-ти лет назад Эйлером [1] и Лагранжем [2]. В решении Эйлера три тела располагаются вдоль одной прямой (прямолинейные точки либрации), а в решениях Лагранжа они образуют равносторонний треугольник, лежащий в плоскости орбит основных притягивающих тел (треугольные точки либрации).

Анализу задачи об устойчивости точек либрации и о характере близких к ним движений посвящена обширная литература. Обсуждение основных полученных научных результатов и достаточно подробную библиографию можно найти, например, в [3–13]. Проведенный анализ и полученные результаты важны не только с общетеоретической точки зрения. Существуют проекты (некоторые из них уже осуществлены [14–16]) запуска космических аппаратов в окрестности точек либрации Солнечной системы (и, в частности, системы Земля–Луна) с целью решения практических задач космических исследований.

Пространственная ограниченная задача обладает характерной только для нее особенностью, состоящей в том, что она всегда является резонансной, так как период кеплеровского движения основных притягивающих тел равен периоду линейных колебаний пассивно гравитирующего тела вдоль направления нормали к плоскости их орбит.

Исследованию нелинейной задачи об устойчивости треугольных точек либрации в близкой к круговой ограниченной пространственной задаче трех тел посвящены рабо-

ты [12, 13]. В этих работах предполагалось, что отсутствуют резонансы плоской ограниченной задачи до шестого порядка включительно. При помощи методов классической теории возмущений и КАМ-теории в [12, 13] показана устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий и указана оценка Нехорошева времени устойчивости для траекторий, начинающихся в дополнении к упомянутому большинству начальных условий.

В данной статье обсуждаются вопросы, связанные с нерассмотренными в [12, 13] резонансами. Для всех резонансов плоской ограниченной задачи до шестого порядка включительно получено аналитическое представление с точностью до второй степени эксцентриситета орбит основных притягивающих тел. Описана также структура нормальной формы Биркгофа функции Гамильтона в случае резонансов третьего порядка.

1. Введение. Функция Гамильтона возмущенного движения. Рассмотрим материальные точки P_i с массами m_i ($i = 1, 2, 3$), движущиеся под действием гравитационного притяжения по закону Ньютона. Считаем, что масса точки P_3 пренебрежимо мала по сравнению с массами точек P_1 и P_2 , поэтому орбита точки P_2 относительно точки P_1 определяется из задачи двух тел. Предположим, что она является эллипсом с эксцентриситетом e .

Для описания движения точки P_3 будем использовать безразмерные координаты Нехвилла, а в качестве независимой переменной примем истинную аномалию v в эллиптическом движении точки P_2 . Дифференциальные уравнения движения точки P_3 можно получить [7, 8, 12] в форме канонических уравнений с функцией Гамильтона Γ вида

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + p_x y - p_y x + \frac{e \cos v}{2(1 + e \cos v)}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{1 + e \cos v} \Pi \\ \Pi &= -\frac{1-\mu}{R_1} - \frac{\mu}{R_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \left(0 < \mu \leq \frac{1}{2}\right) \\ R_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}\quad (1.1)$$

Соответствующие этой функции канонические уравнения движения допускают решение

$$x_0 = \frac{1-2\mu}{2}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_0 = 0, \quad p_{x_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{y_0} = \frac{1-2\mu}{2}, \quad p_{z_0} = 0,$$

отвечающее треугольной точке либрации. Если по формулам

$$x = x_0 + u_1, \quad y = y_0 + u_2, \quad z = u_3, \quad p_x = p_{x_0} + v_1, \quad p_y = p_{y_0} + v_2, \quad p_z = v_3,$$

ввести возмущения u_j, v_j , ($j = 1, 2, 3$), то точке либрации будет отвечать положение равновесия $u_j = v_j = 0$.

Разложив функцию (1.1) в ряд по степеням u_j, v_j и отбросив в нем слагаемое, не зависящее от u_j, v_j , получим функцию Гамильтона возмущенного движения в виде ряда

$$\Gamma = \sum_{m=2}^{\infty} \Gamma_m, \quad (1.2)$$

где Γ_m — форма степени m относительно u_j, v_j с 2π -периодическими по v коэффициентами. Первые пять форм получаются такими:

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + u_2 v_1 - u_1 v_2 + \frac{1}{8}u_1^2 - k u_1 u_2 - \frac{5}{8}u_2^2 + \frac{1}{2}(u_3^2 + v_3^2) + \\ &+ \frac{e \cos v}{8(1 + e \cos v)}(3u_1^2 + 8k u_1 u_2 + 9u_2^2)\end{aligned}\quad (1.3)$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{1 + e \cos v} \left[-\frac{7\sqrt{3}k}{36} u_1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{16} u_1^2 u_2 + \frac{11\sqrt{3}k}{12} u_1 u_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16} u_2^3 - \left(\frac{\sqrt{3}k}{3} u_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} u_2 \right) u_3^2 \right] \quad (1.4)$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{1 + e \cos v} \left[\frac{37}{128} u_1^4 + \frac{25k}{24} u_1^3 u_2 - \frac{123}{64} u_1^2 u_2^2 - \frac{15k}{8} u_1 u_2^3 - \frac{3}{128} u_2^4 + \left(\frac{3}{16} u_1^2 + \frac{5k}{2} u_1 u_2 + \frac{33}{16} u_2^2 \right) u_3^2 - \frac{3}{8} u_3^4 \right] \quad (1.5)$$

$$\Gamma_5 = \frac{1}{1 + e \cos v} \left[\frac{23\sqrt{3}k}{576} u_1^5 - \frac{285\sqrt{3}}{256} u_1^4 u_2 - \frac{215\sqrt{3}k}{288} u_1^3 u_2^2 + \frac{345\sqrt{3}}{128} u_1^2 u_2^3 + \frac{185\sqrt{3}k}{192} u_1 u_2^4 - \frac{33\sqrt{3}}{256} u_2^5 + \left(\frac{25\sqrt{3}k}{72} u_1^3 - \frac{45\sqrt{3}}{32} u_1^2 u_2 - \frac{85\sqrt{3}k}{24} u_1 u_2^2 - \frac{45\sqrt{3}}{32} u_2^3 \right) u_3^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}k}{12} u_1 + \frac{15\sqrt{3}}{16} u_2 \right) u_3^4 \right] \quad (1.6)$$

$$\Gamma_6 = \frac{1}{1 + e \cos v} \left[-\frac{331}{1024} u_1^6 + \frac{49k}{128} u_1^5 u_2 + \frac{6105}{1024} u_1^4 u_2^2 - \frac{35k}{64} u_1^3 u_2^3 - \frac{7965}{1024} u_1^2 u_2^4 - \frac{119k}{128} u_1 u_2^5 + \frac{383}{1024} u_2^6 + \left(-\frac{285}{256} u_1^4 - \frac{35k}{16} u_1^3 u_2 + \frac{1395}{128} u_1^2 u_2^2 + \frac{175k}{16} u_1 u_2^3 + \frac{555}{256} u_2^4 \right) u_3^2 - \left(\frac{45}{64} u_1^2 + \frac{35k}{8} u_1 u_2 + \frac{255}{64} u_2^2 \right) u_3^4 + \frac{5}{16} u_3^6 \right] \quad (1.7)$$

В (1.3)–(1.7) для краткости введено обозначение $k = 3\sqrt{3}(1 - 2\mu)/4$.

2. Линейная задача. Линейным уравнениям возмущенного движения отвечает квадратичная часть Γ_2 в разложении функции Гамильтона (1.1) в ряд по степеням u_j, v_j ($j = 1, 2, 3$). Из (1.3) видно, что движение по плоским u_j, v_j ($j = 1, 2$) и пространственным переменным u_3, v_3 разделяются, причем пространственным переменным отвечают гармонические колебания с частотой, равной единице.

Линейная система дифференциальных уравнений, соответствующая плоским переменным, имеет четвертый порядок. Характеристическое уравнение ее матрицы монодромии является возвратным и записывается в виде [3]

$$\rho^4 - a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0,$$

где a_1 — след матрицы монодромии, a_2 — сумма всех ее главных миноров второго порядка. В плоскости коэффициентов a_1, a_2 область устойчивости в первом (линейном) приближении задается [3] системой неравенств

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < \frac{1}{4}(a_2 + 2)^2 \quad (2.1)$$

В плоскости параметров μ, e область (3.2) получена в [4] (см. также рис. 12 в гл. 9 книги [8]). Для значений параметров μ, e , лежащих внутри области устойчивости, все шесть мультипликаторов имеют модули, равные единице. Сама же линейная система при помощи канонической 2π -периодической по v замены переменных

$$u_j, v_j \rightarrow y_j, \quad Y_j (j = 1, 2), \quad u_3 = y_3, \quad v_3 = Y_3, \quad (2.2)$$

может быть приведена [3, 8] к системе трех независимых один от другого гармонических осцилляторов с частотами $|\lambda_j|$ ($j = 1, 2, 3$), причем $\lambda_3 = 1$, а для любых μ из области устойчивости

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4} \quad (2.3)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \arccos \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4} & \text{при } \mu < \mu_0 \\ -1 + \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4} & \text{при } \mu > \mu_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.0285954792... \quad (2.5)$$

В случае круговой задачи ($e = 0$) точки либрации устойчивы в первом приближении, если параметр μ лежит в интервале

$$0 < \mu < \mu_* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0.0385208965... \quad (2.6)$$

При малых e из точки (2.5) этого интервала исходит область параметрического резонанса (область неустойчивости) [7, 8]. Далее будем считать, что параметр μ лежит в одном из интервалов, задаваемых неравенствами

$$0 < \mu < \mu_*, \quad \mu \neq \mu_0 \quad (2.7)$$

Тогда, если e — достаточно малая величина, то точки либрации будут устойчивы в первом (линейном) приближении, и возмущенное движение пассивно гравитирующей точки вблизи точки либрации можно описать, используя упомянутую выше замену переменных (2.2), приводящую функцию Гамильтона (1.3) к функции Гамильтона H_2 трех гармонических осцилляторов:

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \lambda_j (y_j^2 + Y_j^2) \quad (2.8)$$

Для строгого же анализа возмущенного движения необходим нелинейный анализ.

При $e = 0$ частоты малых колебаний в окрестности точек либрации равны ω_1 , ω_2 и 1, где

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}} \quad (2.9)$$

Величины ω_1 и ω_2 являются корнями биквадратного уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{4} \mu(1 - \mu) = 0 \quad (2.10)$$

Для них в рассматриваемых интервалах (2.7) изменения параметра μ справедливы неравенства

$$0 < \omega_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \omega_1 < 1, \quad \omega_2 \neq 1/2 \quad (2.11)$$

Для осуществления нелинейного анализа целесообразно сначала, при помощи сходящихся при малых e рядов, построить каноническое преобразование $u_j, v_j \rightarrow y_j, Y_j$ ($j = 1, 2$) из (2.2), одновременно получив разложения величин λ_j по степеням e :

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} + e\lambda_1^{(1)} + e^2\lambda_1^{(2)} + \dots, \quad \lambda_2 = \lambda_2^{(0)} + e\lambda_2^{(1)} + e^2\lambda_2^{(2)} + \dots \quad (2.12)$$

В [8, 17] преобразование $u_j, v_j \rightarrow y_j, Y_j$ ($j = 1, 2$) найдено с точностью до второй степени на e включительно и показано, что в разложении (2.12)

$$\lambda_1^{(0)} = \omega_1, \quad \lambda_2^{(0)} = -\omega_2, \quad \lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 0 \quad (2.13)$$

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{\omega_1\omega_2^2(6\omega_1^2 - 7)}{4(4\omega_1^2 - 1)(2\omega_1^2 - 1)}, \quad \lambda_2^{(2)} = \frac{\omega_2\omega_1^2(6\omega_2^2 - 7)}{4(4\omega_2^2 - 1)(2\omega_2^2 - 1)} \quad (2.14)$$

Если параметры μ, e таковы, что $s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 + s_3\lambda_3 = n$, где s_1, s_2, s_3, n — целые числа, причем $|s_1| + |s_2| + |s_3| = s$, то имеет место резонанс порядка s . Изучаемая пространственная задача при любых μ, e является резонансной, так как $\lambda_3 = 1$. В плоской задаче $s_3 = 0$ и резонанс порядка s реализуется при значениях параметров μ, e , для которых

$$s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 = n \quad (|s_1| + |s_2| = s) \quad (2.15)$$

В нелинейной задаче наиболее существенны резонансы низких порядков. В [12, 13] нелинейная задача изучалась в предположении об отсутствии резонансов (2.15) до шестого порядка включительно.

Вычисления показывают, что в интервалах (2.7) изменения параметра μ в случае плоской эллиптической задачи малого эксцентриситета e возможны 5 резонансов (2.15) третьего, 8 резонансов четвертого, 16 резонансов пятого и 18 резонансов шестого порядков (см. Приложение). Из (2.12)–(2.15) можно получить, что в плоскости μ, e этим 47-ми резонансам отвечают мало отличающиеся от парабол кривые

$$\mu = \mu^{(0)} + e^2\mu^{(2)} + \dots \quad (2.16)$$

Здесь $\mu^{(0)}$ — порождающая точка, из которой на оси абсцисс $O\mu$ начинается резонансная кривая (2.15), а $\mu^{(2)}$ — задается равенством

$$\mu^{(2)} = \frac{s_1\lambda_1^{(2)} + s_2\lambda_2^{(2)}}{s_2 \frac{d\omega_2}{d\mu} - s_1 \frac{d\omega_1}{d\mu}}, \quad (2.17)$$

правая часть которого вычисляется при резонансном значении $\mu = \mu^{(0)}$. Число порождающих точек равно 38-ми, так как из трех из них исходят несколько резонансных кривых.

При $e = 0$ среди 47-ми резонансов (2.15) до шестого порядка включительно имеются кратные. Им отвечают три значения $\mu^{(0)}$ из рассматриваемых интервалов (2.7).

а) $\mu^{(0)} = 1/2 - \sqrt{237849}/1014 = 0.0190358459\dots$ Здесь $\omega_1 = 12/13$, $\omega_2 = 5/13$ и при малых e из точки $\mu^{(0)}$ исходят четыре резонансных кривых: $2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3$, $3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2$, $\lambda_1 + 5\lambda_2 = -1$, $5\lambda_1 - \lambda_2 = 5$.

б) $\mu^{(0)} = 1/2 - \sqrt{674889}/1734 = 0.0262305184\dots$ Для этого $\mu^{(0)}$ имеем $\omega_1 = 15/17$, $\omega_2 = 8/17$, а при малых e есть две резонансные кривые $\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1$ и $4\lambda_1 - \lambda_2 = 4$.

в) $\mu^{(0)} = 1/2 - \sqrt{4857}/150 = 0.0353854644\dots$ Здесь $\omega_1 = 4/5$, $\omega_2 = 3/5$, а из точки $\mu^{(0)}$ исходят шесть резонансных кривых: $3\lambda_1 - \lambda_2 = 3$, $5\lambda_1 = 4$, $2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$, $5\lambda_2 = -3$, $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$.

Если же величина e отлична от нуля, но достаточно мала, то все 47 рассматриваемых резонансных кривых не пересекаются и, следовательно, каждый из резонансов (2.15) до шестого порядка включительно в плоской эллиптической задаче является однократным.

Помимо отмеченной кратности резонансов круговой задачи, к вычислительным трудностям анализа нелинейной задачи может привести также “густота” расположения порождающих точек $\mu^{(0)}$ вблизи значений $\mu = 0$ и $\mu = \mu_*$, являющихся границами области (2.6) устойчивости при $e = 0$.

Заключение. Укажем задачи, которые следует решить в продолжение начатого в статье исследования.

1. Получение нормальной формы функции Гамильтона возмущенного движения пространственной задачи при всех 47-ми резонансах 3-го–6-го порядков с точностью до второй степени e включительно, а, может быть (если потребуется) и до более высоких степеней e .

2. Детальный анализ приближенной системы, получаемой отбрасыванием в нормализованной функции Гамильтона членов выше четвертой степени по q_j, p_j ($j = 1, 2, 3$) (при резонансах третьего порядка) или членов выше шестой степени при резонансах 4-го–6-го порядков.

3. Изучение возможности распространения результатов анализа приближенной системы на полную систему.

4. Исследование случая значений эксцентриситета, не являющихся малыми.

Приложение

П1. О резонансах третьего порядка

Перечислим резонансы третьего порядка и выпишем соответствующие им значения $\omega_1, \omega_2, \mu^{(0)}$ и $\mu^{(2)}$.

$$\begin{aligned} 1) \quad 3\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \omega_2 = \frac{1}{3} \\ \mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6177}}{162} = 0.0148525130..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{304\sqrt{6177}}{277965} = -0.0859552225... \end{aligned} \quad (\text{П1.1})$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1833}}{90} = 0.0242938971..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{184\sqrt{1833}}{27495} = -0.2865136593... \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

$$\begin{aligned} 3) \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \\ \mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = \frac{2336\sqrt{4857}}{1578525} = 0.1031348463... \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \lambda_1 - 2\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \\ \mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = \frac{2272\sqrt{4857}}{526175} = 0.3009277022... \end{aligned} \quad (\text{П1.4})$$

$$\begin{aligned}
 & 5) \quad 3\lambda_2 = -2, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \omega_2 = \frac{2}{3} \\
 & \mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5601}}{162} = 0.0380257471..., \quad \mu^{(2)} = \frac{520\sqrt{5601}}{352863} = 0.1102884435...
 \end{aligned} \tag{П1.5}$$

В основе исследования нелинейной задачи лежит анализ движений, задаваемых нормальной формой функции Гамильтона $H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, \nu; \mu, e)$. Она находится при помощи близкого к тождественному преобразования Биркгофа $y_j, Y_j \rightarrow q_j, p_j$ ($j = 1, 2, 3$), которое 2π — периодически по ν , аналитично по e и по новым канонически сопряженным переменным q_j, p_j .

Отметим, что в исходной функции (1.2) переменная ν_3 не содержится в формах Γ_m выше второй степени, а переменная u_3 входит только в четных степенях. Учтем еще, что величины λ_j ($j = 1, 2, \dots$) из (2.3), (2.4) внутри области устойчивости в первом приближении удовлетворяют неравенству $0 < |\lambda_j| < 1$. Принимая это во внимание, можно, следуя [8], показать, что наличие тождественного резонанса $\lambda_3 = 1$ пространственной задачи не влияет на структуру нормальной формы членов третьей степени относительно новых переменных q_j, p_j ($j = 1, 2, 3$). Они будут такими же как и в случае плоской эллиптической задачи.

Если положить $q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$, $p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ ($j = 1, 2, 3$), то функцию Гамильтона, нормализованную до членов четвертой степени включительно относительно q_j, p_j ($j = 1, 2, 3$), можно записать в виде

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + r_3 + H_3 + H_4 + O\left((r_1 + r_2 + r_3)^{5/2}\right)$$

Члены четвертой степени H_4 выписываются по формуле, аналогичной формуле (3.4) из главы 10 книги [8]. Укажем структуру членов третьей степени H_3 при резонансах (2.15) третьего порядка.

$$\begin{aligned}
 & 1) \quad 3\lambda_2 = -1, \quad H_3 = r_2^{3/2} [f_{0,3}^{(-1)} \sin(3\varphi_2 + \nu) + g_{0,3}^{(-1)} \cos(3\varphi_2 + \nu)]; \\
 & 2) \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad H_3 = r_1^{1/2} r_2 [f_{1,2}^{(0)} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + g_{1,2}^{(0)} \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2)]; \\
 & 3) \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad H_3 = r_1 r_2^{1/2} [f_{2,1}^{(1)} \sin(2\varphi_1 + \varphi_2 - \nu) + g_{2,1}^{(1)} \cos(2\varphi_1 + \varphi_2 - \nu)]; \\
 & 4) \quad \lambda_1 - 2\lambda_2 = 2, \quad H_3 = r_1^{1/2} r_2 [f_{1,-2}^{(2)} \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2 - 2\nu) + g_{1,-2}^{(2)} \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 - 2\nu)]; \\
 & 5) \quad 3\lambda_2 = -2, \quad H_3 = r_2^{3/2} [f_{0,3}^{(-2)} \sin(3\varphi_2 + 2\nu) + g_{0,3}^{(-2)} \cos(3\varphi_2 + 2\nu)].
 \end{aligned}$$

В выражениях для H_3 величины $f_{s_1, s_2}^{(n)}, g_{s_1, s_2}^{(n)}$ — функции от μ и e , имеющие порядок $e^{|n|}$.

П2. Резонансы четвертого порядка

$$1) \quad 4\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \omega_2 = \frac{1}{4} \tag{П2.1}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{139}}{24} = 0.0087572448..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{265\sqrt{139}}{80064} = -0.0390225809...$$

$$2) \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{10}}{10} \tag{П2.2}$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{213}}{30} = 0.0135160160..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{62\sqrt{213}}{13845} = -0.0653564615...$$

$$3) \quad \lambda_1 - 3\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{1}{5} + \frac{3\sqrt{6}}{10}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10} \quad (\text{П2.3})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5101 + 64\sqrt{6}}}{150} = 0.0165969087...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{2(8456 - 12841\sqrt{6})\sqrt{41593(5101 - 64\sqrt{6})}}{5381094375} = -0.12257646673...$$

$$4) \quad 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (\text{П2.4})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{12} = 0.0212864461..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{25\sqrt{33}}{1056} = -0.1359981687...$$

$$5) \quad 3\lambda_1 + \lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{5} + \frac{3\sqrt{6}}{10} \quad (\text{П2.5})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5101 - 64\sqrt{6}}}{150} = 0.0312317484...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{2(8456 + 12841\sqrt{6})\sqrt{41593(5101 + 64\sqrt{6})}}{5381094375} = 0.2193566513...$$

$$6) \quad 3\lambda_1 - \lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \quad (\text{П2.6})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{2144\sqrt{4857}}{1578525} = -0.0946580096...$$

$$7) \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \quad (\text{П2.7})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = \frac{11488\sqrt{4857}}{4735575} = 0.1690657982...$$

$$8) \quad 4\lambda_1 = 3, \quad \omega_1 = \frac{3}{4}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (\text{П2.8})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{123}}{24} = 0.0378943122..., \quad \mu^{(2)} = \frac{203\sqrt{123}}{39360} = 0.0571996674...$$

П3. Резонансы пятого порядка

$$1) \quad 5\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \omega_2 = \frac{1}{5} \quad (\text{П3.1})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5497}}{150} = 0.0057216258..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{2704\sqrt{5497}}{8657775} = -0.0231559850...$$

$$2) \quad \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{17}}{17} \quad (\text{П3.2})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{22641}}{306} = 0.0082703726..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{9376\sqrt{22641}}{41500953} = -0.0339943961...$$

$$3) \quad \lambda_1 - 4\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{2}{17} + \frac{4\sqrt{13}}{17}, \quad \omega_2 = \frac{8}{17} - \frac{\sqrt{13}}{17} \quad (\text{П3.3})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{682377 + 11520\sqrt{13}}}{1734} = 0.0093248318...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{40(2262155 - 2045476\sqrt{13})\sqrt{617161(682377 - 11520\sqrt{13})}}{2820437222656677} = -0.0456022641...$$

$$4) \quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{2}{13} + \frac{6\sqrt{3}}{13}, \quad \omega_2 = -\frac{3}{13} + \frac{4\sqrt{3}}{13} \quad (\text{П3.4})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{232217 + 7040\sqrt{3}}}{1014} = 0.0124467036...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{80(420 - 1093\sqrt{3})\sqrt{1882849(232217 - 7040\sqrt{3})}}{1451953357803} = -0.0522421439...$$

$$5) \quad 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{12}{13}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} \quad (\text{П3.5})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237849}}{1014} = 0.0190358459..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{14317600\sqrt{237849}}{34207205331} = -0.2041283360...$$

$$6) \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{12}{13}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} \quad (\text{П3.6})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237849}}{1014} = 0.0190358459...$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{18200800\sqrt{237849}}{102621615993} = -0.0864972485...$$

$$7) \quad 5\lambda_2 = -2, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{21}}{5}, \quad \omega_2 = \frac{2}{5} \quad (\text{П3.7})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5177}}{150} = 0.0203241835..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{8456\sqrt{5177}}{3494475} = -0.1741093599...$$

$$8) \quad \lambda_1 + 4\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{15}{17}, \quad \omega_2 = \frac{8}{17} \quad (\text{П3.8})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{674889}}{1734} = 0.0262305184...$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{28476800\sqrt{674889}}{39723741577} = -0.5889212320...$$

$$9) \quad 4\lambda_1 - \lambda_2 = 4, \quad \omega_1 = \frac{15}{17}, \quad \omega_2 = \frac{8}{17} \quad (\text{П3.9})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{674889}}{1734} = 0.0262305184...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{89737600\sqrt{674889}}{119171224731} = 0.6186132565...$$

$$10) \quad 4\lambda_1 + \lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{12}{17} + \frac{2\sqrt{2}}{17}, \quad \omega_2 = -\frac{3}{17} + \frac{8\sqrt{2}}{17} \quad (\text{П3.10})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5986833 + 34560\sqrt{2}}}{5202} = 0.0277262898...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{80(1738235 - 24462756\sqrt{2})\sqrt{47679001(5986833 - 34560\sqrt{2})}}{79958550479979159} = -0.5531455483...$$

$$11) \quad \lambda_1 - 4\lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{3}{17} + \frac{8\sqrt{2}}{17}, \quad \omega_2 = \frac{12}{17} - \frac{2\sqrt{2}}{17} \quad (\text{П3.11})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5986833 - 34560\sqrt{2}}}{5202} = 0.0315662209...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{80(1738235 + 24462756\sqrt{2})\sqrt{47679001(5986833 + 34560\sqrt{2})}}{79958550479979159} = 0.6166855225...$$

$$12) \quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \omega_2 = \frac{2\sqrt{13}}{13} \quad (\text{П3.12})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1329}}{78} = 0.0326224068..., \quad \mu^{(2)} = \frac{2936\sqrt{1329}}{397371} = 0.2693533444...$$

$$13) \quad 5\lambda_1 = 4, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \quad (\text{П3.13})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = \frac{2528\sqrt{4857}}{4735575} = 0.0372038943...$$

$$14) \quad 5\lambda_2 = -3, \quad \omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} \quad (\text{П3.14})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4857}}{150} = 0.0353854644..., \quad \mu^{(2)} = \frac{352\sqrt{4857}}{121425} = 0.2020312742...$$

$$15) \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{3}{13} + \frac{4\sqrt{3}}{13}, \quad \omega_2 = -\frac{2}{13} + \frac{6\sqrt{3}}{13} \quad (\text{П3.15})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{232217 - 7040\sqrt{3}}}{1014} = 0.0374097834...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{80(420 + 1093\sqrt{3})\sqrt{1882849(232217 + 7040\sqrt{3})}}{1451953357803} = 0.0864580524...$$

$$16) \quad \lambda_1 + 4\lambda_2 = -2, \quad \omega_1 = -\frac{2}{17} + \frac{4\sqrt{13}}{17}, \quad \omega_2 = \frac{8}{17} + \frac{\sqrt{13}}{17} \quad (\text{П3.16})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{682377 - 11520\sqrt{13}}}{1734} = 0.0383359381...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{40(2262155 + 2045476\sqrt{13})\sqrt{617161(682377 + 11520\sqrt{13})}}{2820437222656677} = 0.0913561732...$$

П4. Резонансы шестого порядка

$$1) \quad 6\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{35}}{6}, \quad \omega_2 = \frac{1}{6} \quad (\text{П4.1})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1614}}{81} = 0.0040170511..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{1435\sqrt{1614}}{3718656} = -0.0155030683...$$

$$2) \quad \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{5\sqrt{26}}{26}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{26}}{26} \quad (\text{П4.2})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13389}}{234} = 0.0055092029..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{3550\sqrt{13389}}{19320327} = -0.0212612087...$$

$$3) \quad \lambda_1 - 5\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{1}{13} + \frac{5\sqrt{22}}{26}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} - \frac{\sqrt{22}}{26} \quad (\text{П4.3})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237453 + 2880\sqrt{22}}}{1014} = 0.0059561391...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{2(25504 - 6583\sqrt{22})\sqrt{218641(237453 - 2880\sqrt{22})}}{93669084015} = -0.0253855879...$$

$$4) \quad 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{19}}{5}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{19}}{10} \quad (\text{П4.4})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1284 + 18\sqrt{19}}}{75} = 0.0078464230...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{(175427 - 71171\sqrt{19})\sqrt{73(1284 - 18\sqrt{19})}}{1331520000} = -0.0300327459...$$

$$5) \quad 2\lambda_1 - 4\lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{3}{10} + \frac{\sqrt{11}}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{11}}{10} \quad (\text{П4.5})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11976 + 54\sqrt{11}}}{225} = 0.0099992897...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{(2133\sqrt{11} - 122573)\sqrt{6373(11976 - 54\sqrt{11})}}{18354240000} = -0.0545627701...$$

$$6) \quad 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2, \quad \omega_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{14}}{6}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{14}}{6} \quad (\text{П4.6})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6261}}{162} = 0.0115649319..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{400\sqrt{6261}}{732537} = -0.0432068174...$$

$$7) \quad 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{11}}{10}, \quad \omega_2 = -\frac{3}{10} + \frac{\sqrt{11}}{5} \quad (\text{П4.7})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11976 - 54\sqrt{11}}}{225} = 0.0172731312...$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{(122573 + 2133\sqrt{11})\sqrt{6373(11976 + 54\sqrt{11})}}{18354240000} = -0.06216965547...$$

$$8) \quad \lambda_1 + 5\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = \frac{12}{13}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} \quad (\text{П4.8})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237849}}{1014} = 0.0190358459...$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{3122400\sqrt{237849}}{11402401777} = -0.1335496835...$$

$$9) \quad 5\lambda_1 - \lambda_2 = 5, \quad \omega_1 = \frac{12}{13}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} \quad (\text{П4.9})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237849}}{1014} = 0.0190358459..., \quad \mu^{(2)} = \frac{10434400\sqrt{237849}}{34207205331} = 0.1487649263...$$

$$10) \quad \lambda_1 - 5\lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{3}{26} + \frac{5\sqrt{17}}{26}, \quad \omega_2 = \frac{15}{26} - \frac{\sqrt{17}}{26} \quad (\text{П4.10})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2044257 + 17280\sqrt{17}}}{3042} = 0.0218680746...$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{16(20451221 + 8794683\sqrt{17})\sqrt{16237801(2044257 - 17280\sqrt{17})}}{20932161203883735} = -0.2453657301...$$

$$11) \quad 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 4, \quad \omega_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad \omega_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \quad (\text{П4.11})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5973}}{162} = 0.0229309496..., \quad \mu^{(2)} = -\frac{17150\sqrt{5973}}{2526579} = -0.5245990498...$$

$$12) \quad 5\lambda_1 + \lambda_2 = 4, \quad \omega_1 = \frac{10}{13} + \frac{\sqrt{10}}{26}, \quad \omega_2 = -\frac{2}{13} + \frac{5\sqrt{10}}{26} \quad (\text{П4.12})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{226029 + 1920\sqrt{10}}}{1014} = 0.0248834579...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{10(10703 - 26746\sqrt{10})\sqrt{198609(226029 - 1920\sqrt{10})}}{1412445440601} = -0.1093191450...$$

$$13) \quad 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{6} + \frac{17}{6} \quad (\text{П4.13})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5793}}{162} = 0.0301743214..., \quad \mu^{(2)} = \frac{5600\sqrt{5793}}{677781} = 0.6288548301...$$

$$14) \quad 6\lambda_1 = 5, \quad \omega_1 = \frac{5}{6}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{11}}{6} \quad (\text{П4.14})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1434}}{81} = 0.0324914511..., \quad \mu^{(2)} = \frac{4675\sqrt{1434}}{6607872} = 0.0267913482...$$

$$15) \quad \lambda_1 + 5\lambda_2 = -2, \quad \omega_1 = -\frac{1}{13} + \frac{5\sqrt{22}}{26}, \quad \omega_2 = \frac{5}{13} + \frac{\sqrt{22}}{26} \quad (\text{П4.15})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{237453 - 2880\sqrt{22}}}{1014} = 0.0333058630...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{2(25504 + 6583\sqrt{22})\sqrt{218641(237453 + 2880\sqrt{22})}}{93669084015} = 0.2819913682...$$

$$16) \quad 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1, \quad \omega_1 = -\frac{1}{10} + \frac{\sqrt{19}}{5}, \quad \omega_2 = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{19}}{10} \quad (\text{П4.16})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1284 - 18\sqrt{19}}}{75} = 0.0370548736...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{(175427 + 71171\sqrt{19})\sqrt{73(1284 - 18\sqrt{19})}}{1331520000} = 0.1150277940...$$

$$17) \quad \lambda_1 - 5\lambda_2 = 4, \quad \omega_1 = \frac{2}{13} + \frac{5\sqrt{10}}{26}, \quad \omega_2 = \frac{10}{13} - \frac{\sqrt{10}}{26} \quad (\text{П4.17})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{226029 - 1920\sqrt{10}}}{1014} = 0.0374791018...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{10(10703 + 26746\sqrt{10})\sqrt{198609(226029 + 1920\sqrt{10})}}{1412445440601} = 0.1448349796...$$

$$18) \quad 5\lambda_1 + \lambda_2 = 3, \quad \omega_1 = \frac{15}{26} + \frac{\sqrt{17}}{26}, \quad \omega_2 = -\frac{3}{26} + \frac{5\sqrt{17}}{26} \quad (\text{П4.18})$$

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2044257 - 17280\sqrt{17}}}{3042} = 0.0382515946...$$

$$\mu^{(2)} = \frac{16(-20451221 + 8794683\sqrt{17})\sqrt{16237801(2044257 + 17280\sqrt{17})}}{20932161203883735} = 0.0708293815...$$

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum // *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* 1767. V. 11. P. 144–151.

2. *Lagrange J.L.* Essai sur le Problème des Trois Corps // Oeuvres de Lagrange J. V. 6. Paris: Gauthier Villars, 1873. P. 229–324.
3. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 327–401.
4. *Danby J.M.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Astron. J. 1964. V. 69. Iss. 2. P. 165–172.
5. *Giacaglia G.E.O.* Characteristics exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies // Celest. Mech. & Dyn. Astron. 1971. V. 4. Iss. 3/4. P. 468–489.
6. *Nayfeh A.H., Kamel A.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // AIAA J. 1970. V. 8. Iss. 2. P. 221–223.
7. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978. 456 с.
8. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
9. *Юмагулов М.Г., Беликова О.Н.* Бифуркация 4 π -периодических решений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // Астрон. ж. 2009. Т. 86. № 2. С. 170–174.
10. *Kovacs T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2013. V. 430. Iss. 4. P. 2755–2760.
11. *Исанбаева Н.Р.* О построении границ областей устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // Вестн. Башкирского ун-та. Математика и механика. 2017. Т. 22. № 1. С. 5–9.
12. *Маркеев А.П.* Об устойчивости лагранжевых решений в пространственной близкой к круговой ограниченной задаче трех тел // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 4. С. 503–515.
13. *Markeev A.P.* On the metric stability and the nekhoroshev estimate of the velocity of Arnold diffusion in a special case of the three-body problem // R&C Dyn. 2021. V. 26. № 4. P. 321–330.
14. *Конonenko А.* Точки либрации системы Земля–Луна // Авиация и космон. 1968. № 5. С. 71–73.
15. *Аверкиев Н.Ф., Васков С.А., Салов В.В.* Баллистическое построение систем космических аппаратов связи и пассивной радиолокации лунной поверхности // Изв. вузов. Приборостроение. 2008. Т. 51. № 12. С. 66–72.
16. *Salazar F., Winter O., Macau E., Masdemont J., Gomez G.* Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem in the Earth – Moon System (IAC-14-C1. 1. 13. x25737) // The 65th Int. Astron. Congress. Toronto, Canada. September 29 – October 3, 2014. 14 p.
17. *Маркеев А.П.* О нормальных координатах в окрестности лагранжевых точек либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Т. 30. № 4. С. 657–671.

On Resonant Values of Parameters in the Problem on the Stability of Lagrangian Solutions in the Near-Circular Restricted Three-Body Problem

A. P. Markeev^{a, #}

^aMoscow Aviation Institute, Moscow, Russia

[#]e-mail: anat-markeev@mail.ru

The restricted problem of three bodies (material points) moving under the action of gravitational attraction according to Newton's law is considered. The orbits of the main attracting bodies are considered to be ellipses with a small eccentricity, and a passively gravitating body can perform arbitrary spatial motion near the triangular libration point. For the Hamiltonian function corresponding to such a motion, the structure of the normal form is pointed in the cases of third-order resonances. In the planar restricted three-body problem, the equations up to the second degree of eccentricity for resonance curves for all resonances up to the sixth order inclusive are obtained.

Keywords: restricted three-body problem, triangular libration points, resonance

REFERENCES

1. *Euler L.* De Motu Rectilineo Trium Corporum se Mutuo Attrahentum. Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 1767, vol. 11, pp. 144–151.
2. *Lagrange J.L.* Essai sur le Problème des Trois Corps // Oeuvres de Lagrange J., vol. 6, Paris: Gauthier Villars, 1873. pp. 229–324.
3. *Lyapunov A.M.* On the stability of motion in one particular case of the three-body problem // in: Coll. Works. Vol. 1, Moscow; Leningrad: USSR Acad. of Sci. Pub. House, 1956, pp. 327–401.
4. *Danby J.M.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Astron. J., 1964, vol. 69, no. 2, pp. 165–172.
5. *Giacaglia G.E.O.* Characteristics exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1971, vol. 4, no. 3/4, pp. 468–489.
6. *Nayfeh A.H., Kamel A.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // AIAA J., 1970, vol. 8, no. 2, pp. 221–223.
7. *Duboshin G.N.* Celestial Mechanics. Analytical and Qualitative Methods. Moscow: Nauka, 1978. 456 p. (in Russian)
8. *Markeev A.P.* Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics. Moscow: Nauka, 1978, 312 p. (in Russian)
9. *Yumagulov M.G., Belikova O.N.* Bifurcation of 4π -periodic solutions of the planar, restricted, elliptic three-body problem // Astron. Rep., 2009, vol. 86, no. 2, pp. 148–152.
10. *Kovacs T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Mon. Not. R. Astron. Soc., 2013, vol. 430, no. 4, pp. 2755–2760.
11. *Isanbaeva N.R.* On the construction of the boundaries of stability regions of triangular libration points of a planar bounded elliptic three-body problem // Vestn. Bashk. univ. Matematika i mekhanika, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 5–9. (in Russian)
12. *Markeev A.P.* On the stability of Lagrange solutions in the spatial near-circular restricted three-body problem // Mech. Solids, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1541–1549.
13. *Markeev A.P.* On the metric stability and the Nekhoroshev estimate of the velocity of Arnold diffusion in a special case of the three-body problem // R&C Dyn., 2021, vol. 26, no. 4, pp. 321–330.
14. *Kononenko A.* Libration points of the Earth–Moon system // Aviatsiya i Kosmon., 1968, no. 5, pp. 71–73. (in Russian)
15. *Averkiev N.F., Vaskov S.A., Salov V.V.* Ballistic construction of communication spacecraft systems and passive radar of the lunar surface // Izv. vuzov. Priborostr., 2008, vol. 51, no. 12, pp. 66–72. (in Russian)
16. *Salazar F., Winter O., Macau E., Masdemont J., Gomez G.* Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem in the Earth–Moon System (IAC-14-C1. 1. 13. x25737) // The 65th Int. Astron. Congress. Toronto, Canada. September 29 – October 3, 2014. 14 p.
17. *Markeev A.P.* On normal coordinates in the vicinity of the Lagrangian libration points of the restricted elliptic three-body problem // Vestn. Udmurt. Univ. Matem. Mekh. Komp'yut. Nauki, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 657–671. (in Russian)

УДК 517.977

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИЛОЙ ТЯГИ ПРИ СКОРОСТНОМ
МАНЕВРИРОВАНИИ В УСЛОВИЯХ СУХОГО ТРЕНИЯ**© 2023 г. С. А. Решмин^{1,*}¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия***e-mail: reshmin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.

После доработки 22.05.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Рассматривается задача управления направлением силы тяги при движении инерционного объекта. Максимально возможная величина силы тяги постоянна и определяется максимальной силой сухого трения. На конечном интервале времени рассматривается задача о выводе объекта на заданную прямолинейную траекторию с одновременной максимизацией скорости в соответствующем направлении.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, закон дробно-линейного тангенса, сухое трение, колесные системы, скоростной маневр, движение в плоскости

DOI: 10.31857/S0032823523040112, EDN: MKNJAE

1. Введение. В данной работе в качестве объекта управления ради простоты рассматривается материальная точка постоянной массы при ее движении в горизонтальной плоскости и выведении на прямолинейную траекторию. Сила тяги постоянна и максимальна по величине. Тяга реального объекта может создаваться за счет вращения элементов конструкции, например ведущих колес, относительно корпуса и их взаимодействия с горизонтальной плоскостью в соответствии с законом Амонтона–Кулона. В общем случае начальная скорость не равна нулю. Задача состоит в управлении направлением тяги таким образом, чтобы перевести объект на заданную прямую в плоскости движения и по возможности максимизировать скорость, направленную вдоль выбранного направления на указанной прямой. Такая задача может возникнуть при необходимости совершения скоростного маневра в случае внезапного возникновения препятствия. Далее в статье предложено несколько видов эффективного управления рассматриваемым объектом: непрерывное оптимальное и релейное субоптимальное.

При решении целесообразно использовать принцип максимума [1, 2]. Оказалось, что задачи управления для систем с трением тесно связаны с задачами управления для систем с реактивной тягой. Ранее задачи оптимального управления с переменной реактивной тягой рассматривались в [3]. Оптимальное решение аналогичной задачи в случае постоянной реактивной тяги, отсутствия внешних сил и нулевой начальной скорости приведено в [4, 5]. В [4] приведено также субоптимальное решение.

Отметим, что существенно более сложные математические модели, описывающие неточечный контакт двух взаимодействующих твердых тел при наличии двумерного сухого трения, рассматриваются в работах академика В.Ф. Журавлёва, см. [6–9].

Недавно получены новые аналитические результаты по оптимальному изменению ориентации двухмассовой системы за счет относительного движения составляющих систему тел [10]. Управление осуществлялось путем изменения направления силы взаимодействия основного несущего тела и несомой материальной точки.

2. Постановка задачи. Рассматривается движение управляемого объекта в горизонтальной плоскости. Сила тяги F ограничена максимальной величиной силы трения в соответствии с законом Амонтона–Кулона:

$$|F| \leq fF_N, \quad F_N = mg, \quad (2.1)$$

где f – коэффициент сухого трения, F_N – сила нормальной реакции, m – масса объекта, g – ускорение свободного падения. Из (2.1) следует ограничение на модуль возможного ускорения:

$$\left| \frac{F}{m} \right| \leq a, \quad a = fg \quad (2.2)$$

Далее предполагаем, что движение происходит с проскальзыванием или на грани проскальзывания:

$$\left| \frac{F}{m} \right| = a \quad (2.3)$$

При этом уравнения движения в горизонтальной плоскости в прямоугольной системе координат xu имеют вид

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = a \cos u, \quad \dot{v}_y = a \sin u, \quad (2.4)$$

где u – угол, отсчитываемый от оси абсцисс, на который ограничений не накладываем и считаем кусочно-непрерывной функцией.

Считаем заданными начальные координаты и начальные проекции скорости:

$$x(0) = x_0 = 0, \quad y(0) = y_0 = 0, \quad v_x(0) = v_{x0}, \quad v_y(0) = v_{y0} \quad (2.5)$$

Здесь нулевые значения координат выбраны ради определенности. В фиксированный конечный момент T задано неотрицательное значение координаты y , проекция скорости v_y считается нулевой:

$$y(T) = h \geq 0, \quad v_y(T) = 0, \quad (2.6)$$

величины $x(T)$, $v_x(T)$ не заданы. Сформулируем задачу управления.

Задача 1. За счет выбора допустимого управления $u(t)$ требуется перевести систему (2.4) за время T из начального состояния (2.5) в конечное состояние (2.6) и одновременно максимизировать проекцию скорости v_x :

$$v_x(T) \rightarrow \max \quad (2.7)$$

Замечание 1. Очевидно, что не следует дополнительно рассматривать любые режимы движения с переменным по величине ускорением, т. е. такие, при которых модуль ускорения не достигает своего максимально возможного значения a (см. (2.2)) на каких-то временных участках, так как они не обеспечивают максимальный разгон вдоль оси x . Действительно, можно увеличить в указанные моменты проекцию силы тяги вдоль оси x так, чтобы модуль ускорения стал максимально возможным в соответствии с (2.3). Так как проекция ускорения на ось y не изменится, то краевые условия (2.6) останутся выполненными. Функционал (2.7) при этом только увеличится.

Замечание 2. Если требуется получить решение при $y(0) > y(T)$, то предварительно следует сделать замену переменных

$$x := x, \quad y := -y,$$

которая соответствует отражению относительно оси абсцисс x , и привести начальные и конечные условия к виду (2.5), (2.6).

Замечание 3. Если требуется рассмотреть другую задачу, в которой развиваемая скорость в конце процесса, наоборот, минимизируется: $v_x(T) \rightarrow \min$, то соответствующее оптимальное управление получается из решения исходной задачи 1 (с условием (2.7)) путем преобразования

$$u(t) := \pi - u(t)$$

3. Соотношения принципа максимума. Переформулируем задачу оптимального управления так, чтобы к ней можно было применить теорему 3 для автономных систем с подвижными концами из книги [1]. Введем две вспомогательные переменные x_0, x_5 такие, что

$$\dot{x}_0 = -a \cos u, \quad x_0(0) = 0, \quad \dot{x}_5 = 1, \quad x_5(0) = 0$$

Условие (2.7) трансформируется в $x_0(T) - v_{x_0} \rightarrow \min$, в котором не влияющую на оптимальное решение постоянную v_{x_0} можно опустить. Иными словами, требуется минимизировать интегральный функционал типа Лагранжа:

$$J = x_0(\tau) = -a \int_0^{\tau} \cos u dt \rightarrow \min,$$

причем в силу соотношения

$$x_5(t) \equiv t$$

формально верхний предел интегрирования τ можно считать нефиксированным, если потребовать выполнение дополнительного ограничения

$$x_5(\tau) = T \quad (3.1)$$

Введем обозначения

$$h_1(y) = y - h, \quad h_2(v_y) = v_y, \quad h_3(x_5) = x_5 - T$$

Тогда ограничения (2.6), (3.1), задающие терминальное многообразие на правом конце траектории, примут вид

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0 \quad (t = \tau)$$

Введем в рассмотрение сопряженные переменные $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$, соответствующие всем фазовым переменным x_0, x, y, v_x, v_y, x_5 , и функцию Гамильтона

$$H = p_0(-a \cos u) + p_1 v_x + p_2 v_y + p_3 a \cos u + p_4 a \sin u + p_5$$

Полагая $p_0 = -1$, получим

$$H = p_1 v_x + p_2 v_y + (p_3 + 1)a \cos u + p_4 a \sin u + p_5$$

Максимум гамильтониана по u достигается, если

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -(p_3 + 1)a \sin u + p_4 a \cos u = 0 \quad (3.2)$$

Поэтому

$$u = \operatorname{arctg} \frac{p_4}{p_3 + 1} \quad (3.3)$$

Определим знак второй производной гамильтониана в точке его экстремума, определяемой равенством (3.2):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -\left(p_3 + 1 + \frac{p_4^2}{p_3 + 1}\right)a \cos u < 0$$

Здесь учтено, что $\cos u > 0$ и $p_3 \equiv 0$ (это равенство доказано ниже). Таким образом, пришли к выводу о том, что управление (3.3) действительно обеспечивает максимум гамильтониана в процессе разгона вдоль оси x .

Запишем сопряженную систему:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, & \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, & \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial v_x} = -p_1 \\ \dot{p}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial v_y} = -p_2, & \dot{p}_5 &= -\frac{\partial H}{\partial x_5} = 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

Условия трансверсальности имеют вид:

$$\begin{aligned}p_1(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x} = 0, & p_2(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial y} = \mu_1 \\ p_3(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial v_x} = 0, & p_4(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial v_y} = \mu_2, & p_5(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x_5} = \mu_3,\end{aligned}\quad (3.5)$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — некоторые постоянные. Интегрируя (3.4) при начальных условиях (3.5), получим

$$p_1(t) = 0, \quad p_2(t) = \mu_1, \quad p_3(t) = 0, \quad p_4(t) = -\mu_1(t - T) + \mu_2$$

В этом случае закон управления (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned}u &= \arctg p_4 = \arctg(-Ct + \tg u_0), \quad C = \mu_1 \\ u_0 &= \arctg(\mu_1 T + \mu_2) \quad (u_0 = u(0))\end{aligned}\quad (3.6)$$

Здесь для удобства вместо μ_1, μ_2 использованы две другие неизвестные константы интегрирования C, u_0 . Следовательно, угол u должен изменяться по так называемому закону дробно-линейного тангенса, который часто встречается в задачах управления движением инерционных объектов с ограниченной тягой [3–5].

Подставляя его в уравнения движения (2.4) и интегрируя их, получим

$$v_y = \frac{a}{C}(\sec u_0 - \sec u) + v_{y0} \quad (3.7)$$

$$y = \frac{a}{2C^2} \left[(\tg u_0 - \tg u) \sec u_0 - (\sec u_0 - \sec u) \tg u - \ln \frac{\tg u_0 + \sec u_0}{\tg u + \sec u} \right] + v_{y0}t + y_0 \quad (3.8)$$

Формулы (3.7), (3.8) являются обобщением аналогичных формул из книги [4] на случай ненулевой начальной скорости.

Постоянные C, u_0 определяются из уравнений

$$v_y(T) = 0, \quad y(T) = h \quad (3.9)$$

Первое из равенств (3.9) разрешимо относительно C :

$$C = \frac{2a(aT \sin u_0 + v_{y0})}{\cos u_0(a^2T^2 - v_{y0}^2)} \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) во второе равенство (3.9), получим трансцендентное уравнение для нахождения u_0 . Таким образом, как и в случае ненулевых начальных скоростей (см. [4]), определение двух констант интегрирования сводится к численному решению только одного трансцендентного уравнения для u_0 , хотя выражение (3.10), связывающее C с u_0 , оказалось более сложным.

4. Аналитическое решение в предельном случае. Задача 1 имеет решение, только если время T достаточно велико. Оказалось, что в предельном случае, когда задано мини-

мально допустимое время $T = T_{\min}$ существует только оптимальное решение. Оно релейно, так как закон дробно-линейного тангенса вырождается и теряет свойство непрерывности. При этом сила тяги всегда направлена вдоль или против направления оси y . Вдоль оси x разгона нет, но движение все же может происходить по инерции с постоянной скоростью v_{x0} .

Выражение для проекции тяги на ось y строится также (аналогично), как и известное оптимальное решение в двухточечной задаче быстрогодействия при управлении инерционным объектом, движущимся вдоль одной прямой [1, 2], и приведении его в заданную точку с нулевой скоростью:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v_y, \quad \dot{v}_y = u_y, \quad |u_y(t)| \leq a, \quad T \rightarrow \min \\ y(0) &= y_0 = 0, \quad v_y(0) = v_{y0}, \quad y(T) = h, \quad v_y(T) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

В указанной двойственной задаче ограниченное по модулю оптимальное управление релейно, принимает свои предельные значения и имеет не более одного переключения. Кривая переключений в фазовой плоскости состоит из двух параболических ветвей и проходит через терминальную фазовую точку. В общем случае движение разбивается на два этапа. Сначала оно происходит при постоянном управлении до тех пор, пока фазовая точка не попадет на кривую переключений. Далее после смены знака управления движение происходит вдоль кривой переключений в терминальное состояние.

Для того чтобы использовать это решение в задаче 1 с фиксированным временем окончания процесса $T = T_{\min}$, нужно сперва, рассматривая проекцию траектории на плоскость yv_y , построить кривую переключений $\psi = 0$ так, чтобы ее центральная точка совпала с точкой $(h, 0)$ в указанной плоскости:

$$\psi(y, v_y) = a(y - h) + \frac{v_y |v_y|}{2} \quad (4.2)$$

После этого строится управление тягой, действующей только по оси y . Направление тяги зависит от расположения точки (y, v_y) относительно кривой переключений.

Ниже приведены выражения для минимально возможного времени $T_{\min}$, полученные на основе результатов решения двойственной задачи быстрогодействия и анализа функции Беллмана [2], и выражения для соответствующего релейного оптимального управления $u(t)$ в задаче 1:

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{\pi}{2}, & \tau < t \leq T_{\min}, \end{cases} \quad \text{при} \quad \psi(y_0, v_{y0}) \geq 0 \\ \tau &= \frac{aT_{\min} + v_{y0}}{2a}, \quad T_{\min} = \frac{v_{y0}}{a} + \frac{2}{a} \sqrt{a(y_0 - h) + \frac{v_{y0}^2}{2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -\frac{\pi}{2}, & \tau < t \leq T_{\min}, \end{cases} \quad \text{при} \quad \psi(y_0, v_{y0}) < 0 \\ \tau &= \frac{aT_{\min} - v_{y0}}{2a}, \quad T_{\min} = -\frac{v_{y0}}{a} + \frac{2}{a} \sqrt{-a(y_0 - h) + \frac{v_{y0}^2}{2}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Теорема 1. Если $T \geq T_{\min}$, то задача 1 имеет решение.

Доказательство. При $T = T_{\min}$ оптимальное решение $u(t)$ существует и определяется соотношениями (4.3), (4.4). При $T > T_{\min}$ существуют траектории, удовлетворяющие краевым условиям (2.5), (2.6). Например, можно составить соответствующее управление так, чтобы оно состояло из двух этапов. Сначала за время $T_{\min}$ переводим систему в состояние (2.6), используя управление (4.3), (4.4). Далее полагаем $u(t) \equiv 0$ и ускоряем систему в течение оставшегося времени $T - T_{\min}$ только вдоль оси x . Максимальное число переключений такого релейного управления равно двум, причем оно может принимать три разных (дискретных) значения: $\{\pm\pi/2, 0\}$. Очевидно, что из всего множества допустимых управлений можно выбрать оптимальное.

5. Субоптимальное управление. Построим теперь субоптимальное релейное управление, которое во время всего процесса длительностью $T \geq T_{\min}$ может принимать только два значения, отличающиеся знаком: $\pm u_1$ ($0 < u_1 \leq \pi/2$), и имеющее максимум одно переключение. При этом потребуем, чтобы проекция траектории системы (2.4) на плоскость uv_y при субоптимальном управлении совпадала с оптимальной фазовой траекторией двойственной системы (4.1) в случае, когда в ограничении на управление u_y параметр a заменен на меньшую постоянную величину: $a \sin u_1$. Отметим, что для случая нулевых начальных скоростей управление с аналогичными свойствами было предложено в [4].

Обозначим через X новый неизвестный параметр:

$$X = a \sin u_1, \quad (5.1)$$

а через ψ_1 — функцию переключений:

$$\psi_1(X, y, v_y) = X(y - h) + \frac{v_y |v_y|}{2} \quad (5.2)$$

Структуру субоптимального релейного управления с требуемыми свойствами зададим в следующем виде (заменяя в (4.3), (4.4) $\pi/2$ на u_1 , $T_{\min}$ на T , a на X , ψ на ψ_1):

$$u(t) = \begin{cases} -u_1, & 0 \leq t \leq \tau \\ u_1, & \tau < t \leq T \end{cases} \quad \text{при} \quad \psi_1(X, y_0, v_{y0}) \geq 0 \quad (5.3)$$

$$\tau = \frac{XT + v_{y0}}{2X}, \quad T = \frac{v_{y0}}{X} + \frac{2}{X} \sqrt{X(y_0 - h) + \frac{v_{y0}^2}{2}}$$

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & 0 \leq t \leq \tau \\ -u_1, & \tau < t \leq T, \end{cases} \quad \text{при} \quad \psi_1(X, y_0, v_{y0}) < 0 \quad (5.4)$$

$$\tau = \frac{XT - v_{y0}}{2X}, \quad T = -\frac{v_{y0}}{X} + \frac{2}{X} \sqrt{-X(y_0 - h) + \frac{v_{y0}^2}{2}}$$

Здесь в соответствии с (5.1)

$$u_1 = \arcsin\left(\frac{X}{a}\right), \quad (5.5)$$

а функция переключений ψ_1 и момент переключения τ также зависят от параметра X , который в свою очередь неявно зависит от времени управления T .

Лемма 1. Пусть X — параметр субоптимального закона управления (5.3), (5.4), соответствующий заданному времени процесса T . Тогда функция $T(X)$ монотонно убывает, а следовательно

$$0 < X \leq a, \quad T \geq T_{\min} \quad (5.6)$$

Доказательство. Предположим, что значения параметра управления принадлежат допустимой области (5.6). Отдельно рассмотрим три диапазона начальных скоростей.

При $v_{y0} \geq \sqrt{-2X(y_0 - h)}$ согласно (5.2), (5.6) выполнено неравенство $\psi_1(X, y_0, v_{y0}) \geq 0$. Поэтому из (5.2), (5.3) получим выражение, связывающее время управления с функцией переключения, подсчитанной в начале процесса:

$$T = \frac{v_{y0}}{X} + \frac{2}{X} \sqrt{\psi_1(X, y_0, v_{y0})}$$

Найдем частную производную $\partial T / \partial X$ и определим ее знак:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial X} &= -\frac{v_{y0}}{X^2} < 0 \quad \text{при} \quad \psi_1(X, y_0, v_{y0}) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial X} &= -\frac{v_{y0}}{X^2} - \frac{\sqrt{\psi_1(X, y_0, v_{y0})}}{X^2} - \frac{v_{y0}^2}{X^2 \sqrt{\psi_1(X, y_0, v_{y0})}} < 0 \quad \text{при} \quad \psi_1(X, y_0, v_{y0}) > 0 \end{aligned}$$

При $v_{y0} \leq 0$ согласно (5.2) выполнено неравенство $\psi_1(X, y_0, v_{y0}) < 0$. Поэтому из (5.2), (5.4) получим выражение, связывающее время управления с функцией переключения, подсчитанной в начале процесса:

$$T = -\frac{v_{y0}}{X} + \frac{2}{X} \sqrt{-\psi_1(X, y_0, v_{y0})}$$

Найдем частную производную $\partial T / \partial X$ и определим ее знак:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{v_{y0}}{X^2} - \frac{1}{X^2} \sqrt{-\psi_1(X, y_0, v_{y0})} - \frac{v_{y0}^2}{X^2 \sqrt{-\psi_1(X, y_0, v_{y0})}} < 0$$

При $0 < v_{y0} < \sqrt{-2X(y_0 - h)}$ согласно (5.2) выполнено неравенство $\psi_1(X, y_0, v_{y0}) < 0$. Поэтому из (5.2), (5.4) получим выражение, связывающее время управления с функцией переключения, подсчитанной в начале процесса:

$$T = -\frac{v_{y0}}{X} + \frac{2}{X} \sqrt{-\psi_1(X, y_0, v_{y0}) + v_{y0}^2}$$

Найдем частную производную $\partial T / \partial X$ и определим ее знак:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{v_{y0}}{X^2} - \frac{\sqrt{-\psi_1(X, y_0, v_{y0}) + v_{y0}^2}}{X^2} - \frac{v_{y0}^2}{2X^2 \sqrt{-\psi_1(X, y_0, v_{y0}) + v_{y0}^2}} < 0$$

Здесь второе слагаемое отрицательно и превосходит по модулю первое.

Таким образом, во всех трех рассмотренных диапазонах начальных скоростей функция $T(X)$ монотонно убывающая. Выше было установлено, что $T(a) = T_{\min}$. При постепенном увеличении T параметр X будет уменьшаться. Следовательно, левая параболическая ветвь кривой переключений (5.2) будет приближаться ближе к оси абсцисс на фазовой плоскости. Очевидно, что при этом возможен переход начальной точки (y_0, v_{y0}) из области $\psi_1(X, y_0, v_{y0}) < 0$ в область $\psi_1(X, y_0, v_{y0}) \geq 0$. Однако, параметр X при таком переходе меняется непрерывно, т. е. скачка нет, так как при $\psi_1(X, y_0, v_{y0}) \rightarrow 0$ формулы (5.3), (5.4) дают одинаковый результат: $T \rightarrow v_{y0}/X$. Поэтому ограничение (5.6) будет выполнено.

Предложим теорему, позволяющую правильно выбрать последовательность знаков управления, а именно (5.3) или (5.4), и явную процедуру определения параметров X для трех разных диапазонов начальных скоростей.

Теорема 2. В случае малых положительных начальных скоростей существует пороговая длительность процесса

$$T_* = -\frac{2(y_0 - h)}{v_{y0}}, \quad (5.7)$$

разбивающая полубесконечный интервал допустимых значений $T \geq T_{\min}$ на две части с разными вариантами переключения управления (5.3), (5.4):

$$u(0) = \begin{cases} -u_1, & T \geq T_*, \\ u_1, & T < T_*, \end{cases} \quad \text{при } 0 < v_{y0} < \sqrt{-2a(y_0 - h)} \quad (5.8)$$

В случае больших положительных начальных скоростей существует только один вариант переключения:

$$u(0) = -u_1 \quad \text{при } v_{y0} \geq \sqrt{-2a(y_0 - h)} \quad (5.9)$$

В случае неположительных начальных скоростей существует только один вариант переключения:

$$u(0) = u_1 \quad \text{при } v_{y0} \leq 0 \quad (5.10)$$

Формулы (5.15) и (5.19) позволяют найти параметр X в случаях, когда должно быть $u(0) = -u_1$ и $u(0) = u_1$ соответственно.

Доказательство. Предположим, что

$$\Psi_1(X, y_0, v_{y0}) \geq 0 \quad (5.11)$$

(В области неположительных начальных скоростей (5.10) предположение (5.11) не выполнено в силу ограничения (5.6)). Тогда из (5.3) следует равенство

$$XT - v_{y0} = 2\sqrt{X(y_0 - h) + \frac{v_{y0}^2}{2}} \quad (5.12)$$

Левая его часть неотрицательна, если

$$X \geq \frac{v_{y0}}{T} \quad (v_{y0} > 0) \quad (5.13)$$

Возведем в квадрат обе части равенства (5.12) и получим квадратное относительно X уравнение:

$$X^2 T^2 - 2X[Tv_{y0} + 2(y_0 - h)] - v_{y0}^2 = 0 \quad (5.14)$$

По теореме Виета корни уравнения (5.14) имеют разные знаки. Положительный корень находится по формуле

$$X = \frac{Tv_{y0} + 2(y_0 - h) + \sqrt{[Tv_{y0} + 2(y_0 - h)]^2 + T^2 v_{y0}^2}}{T^2} \quad (5.15)$$

Из (5.13), (5.15) следует ограничение $T \geq T_*$, которое, в отличие от (5.13), уже не зависит от X (см. (5.7)) и гарантирует выполнение предположения (5.11). Его следует учитывать в области малых положительных начальных скоростей (5.8). В области больших положительных начальных скоростей (5.9) неравенство (5.13) выполнено при всех допустимых T , так как

$$T_* \leq T_{\min} \quad (v_{y0} \geq \sqrt{-2a(y_0 - h)})$$

Предположим теперь, что

$$\Psi_1(X, y_0, v_{y0}) < 0 \quad (5.16)$$

(В области больших положительных начальных скоростей (5.9) предположение (5.16) не выполнено в силу ограничения (5.6)). Тогда из (5.4) следует равенство

$$XT + v_{y0} = 2\sqrt{-X(y_0 - h) + \frac{v_{y0}^2}{2}} \quad (5.17)$$

При $v_{y0} > 0$ положительность его левой части обеспечивается. Возведем в квадрат обе части (5.17) и получим квадратное относительно X уравнение:

$$X^2 T^2 + 2X[Tv_{y0} + 2(y_0 - h)] - v_{y0}^2 = 0 \quad (5.18)$$

По теореме Виета корни уравнения (5.18) имеют разные знаки. Положительный корень находится по формуле

$$X = \frac{-[Tv_{y0} + 2(y_0 - h)] + \sqrt{[Tv_{y0} + 2(y_0 - h)]^2 + T^2 v_{y0}^2}}{T^2} \quad (5.19)$$

Это решение должно удовлетворять дополнительному условию:

$$X < \frac{v_{y0}}{T} \quad (v_{y0} > 0), \quad (5.20)$$

которое следует из (5.16). Из (5.19), (5.20) вытекает неравенство $T < T_*$, которое, в отличие от (5.20), уже не зависит от X (см. (5.7)). Его следует учитывать в области малых положительных начальных скоростей (5.8). В области неположительных начальных скоростей (5.10) согласно (5.19) при всех допустимых T выполнено неравенство

$$X \geq -\frac{v_{y0}}{T} \quad (v_{y0} \leq 0),$$

которое гарантирует, что левая часть (5.17) положительна, а также, что предположение (5.16) выполнено.

Наконец, существование порогового значения T_* в области малых положительных начальных скоростей (5.8) вытекает из соотношения

$$T_* > T_{\min} \quad (0 < v_{y0} < \sqrt{-2a(y_0 - h)})$$

6. Определение констант интегрирования в законе дробно-линейного тангенса. Покажем, как можно использовать результаты предыдущего раздела для нахождения констант интегрирования в оптимальном законе управления (3.6). Сначала исследуем зависимость решения от длительности процесса. Обозначим через T_0 значение T , которое было задано при постановке задачи 1. Теперь будем считать T переменной величиной и исследуем, как константа u_0 , определяющая оптимальное решение, зависит от параметра T . Подсчитаем производную этой неявной функции при условии, что все требуемые в (2.5), (2.6) начальные и конечные значения фазовых координат не меняются:

$$\frac{du_0}{dT} = f_0(u_0, T) = -\frac{\partial y}{\partial T} / \frac{\partial y}{\partial u_0} \quad (6.1)$$

При этом учитываем, что согласно (3.6), (3.8), (3.10) величина y , достигаемая в конце процесса, сложным образом зависит от T , u_0 :

$$y = y(T, u_0, C(T, u_0), u(T, u_0, C(T, u_0)))$$

Имеем следующее выражение для частной производной в числителе (6.1):

$$\frac{\partial y}{\partial T} = v_y(T) + \frac{[v_{y0} + v_y(T)]T + 2[y_0 - y(T)]}{C} \frac{\partial C}{\partial T} \quad (6.2)$$

Здесь использовано вспомогательное соотношение

$$\frac{\partial C}{\partial T} = - \frac{2a^2[(T^2 a^2 + v_{y0}^2) \sin u_0 + 2v_{y0}Ta]}{\cos u_0(T^2 a^2 - v_{y0}^2)^2} \quad (6.3)$$

Имеем следующее выражение для частной производной в знаменателе (6.1):

$$\frac{\partial y(T)}{\partial u_0} = \frac{v_{y0} - v_y(T) + aT \sin u_0}{C \cos^2 u_0} + \frac{[v_{y0} + v_y(T)]T + 2[y_0 - y(T)]}{C} \frac{\partial C}{\partial u_0} \quad (6.4)$$

Здесь использовано вспомогательное соотношение

$$\frac{\partial C}{\partial u_0} = \frac{2a(aT + v_{y0} \sin u_0)}{\cos^2 u_0(T^2 a^2 - v_{y0}^2)} \quad (6.5)$$

В результате из равенств (3.10), (6.1)–(6.5) получаем конкретное выражение для функции f_0 :

$$f_0 = \frac{2a^2 \cos u_0(v_{y0}T - 2y(T)) \left[(a^2 T^2 + v_{y0}^2) \sin u_0 + 2v_{y0}aT \right]}{(v_{y0} + aT \sin u_0)(a^2 T^2 - v_{y0}^2)^2 + 2a(v_{y0}T - 2y(T))(aT + v_{y0} \sin u_0)(a^2 T^2 - v_{y0}^2)} \quad (6.6)$$

Из (6.1) следует интегральное уравнение

$$u_0(T_0) = u_0(T_{\min}) + \int_{T_{\min}}^{T_0} f_0(u_0(T), T) dT \quad (6.7)$$

Здесь $T_{\min}$ – минимально возможное T , при котором у задачи 1 существует решение. Оно было определено в (4.3), (4.4). При этом также было найдено первое слагаемое в (6.7). Таким образом, определение константы $u_0(T_0)$ сведено к решению задачи Коши. На самом деле, в процессе интегрирования находится множество значений $u_0(T)$, $T \in [T_{\min}, T_0]$, которые можно использовать при решении задач с другими моментами окончания, не обязательно равными T_0 .

При $u_0 = u_0(T_{\min})$ и $T = T_{\min}$ (см. (4.3), (4.4)) функция f_0 в правой части дифференциального уравнения (6.1) (или интегрального уравнения (6.7)) имеет особенность из-за того, что $\cos u_0(T_{\min}) = 0$. Отступая вправо от $T_{\min}$ на малую величину ΔT , определим субоптимальное управление $u_{\text{subopt}}(t)$ для процесса с моментом окончания $T = T_{\min} + \Delta T$, используя теорему 2. Выберем начальное значение этого субоптимального управления в качестве приближенного начального значения константы u_0 при решении рассматриваемой задачи Коши:

$$u_0(T_{\min} + \Delta T) \approx u_{\text{subopt}}(0) \quad (6.8)$$

Уравнение (6.7) принимает вид

$$u_0(T_0) \approx u_{\text{subopt}}(0) + \int_{T_{\min} + \Delta T}^{T_0} f_0(u_0(T), T) dT \quad (6.9)$$

Отметим, что при такой аппроксимации $y(T) \approx h$. Из-за этого в выражение для f_0 (см. (6.6)) следует подставлять значение функции $y(T)$, подсчитываемое по формуле (3.8).

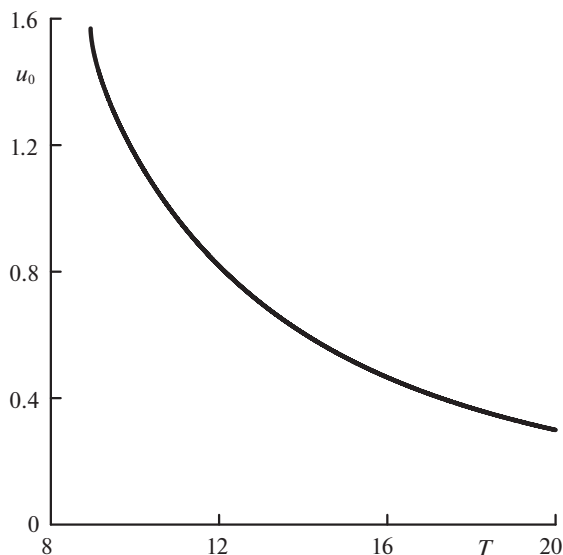


Рис. 1. Зависимость u_0 от T .

Результаты численного решения уравнения (6.9) представлены для следующих параметров управляемой системы:

$$a = 0.5, \quad T_0 = 20, \quad h = 10, \quad v_{y0} = 0 \quad (6.10)$$

Использовался метод Эйлера – простейший численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В условии (6.8) полагалось

$$\Delta T = 0.00001$$

Шаг интегрирования по T также был равен этому числу. При параметрах (6.10) оказалось, что $\psi(y_0, v_{y0}) < 0$ (см. (4.2)), поэтому используем формулу (4.4) для подсчета минимально допустимого времени процесса:

$$T_{\min} = 8.94427191$$

Необходимое условие $T_0 \geq T_{\min}$ обеспечено. Так как $v_{y0} = 0$, то очевидно, что выполнено неравенство $\psi_1(X, y_0, v_{y0}) < 0$ (см. (5.2)), поэтому для расчета субоптимального управления нужно использовать формулы (5.4), (5.5), (5.19), согласно которым оказалось, что

$$u_{\text{subopt}}(0) = u_1 = 1.5686815856 \quad (u_1 < \pi/2)$$

На рис. 1 показана зависимость u_0 от T . При каждом T другая константа из закона оптимального управления подсчитывается по формуле (3.10). Для контроля точности на рис. 2 представлена зависимость погрешности определения терминального значения координаты y , т. е. величины $\delta y_T = y(T) - h$, от длительности процесса T .

Заключение. Исследовано управляемое движение инерционного объекта при скоростном маневре в горизонтальной плоскости. Построены эффективные режимы управления тягой, создаваемой за счет действия силы сухого трения, в том числе в случае ненулевой начальной скорости объекта. Найдено минимально допустимое время движения, зависящее от начальных условий. В случае оптимального управления по

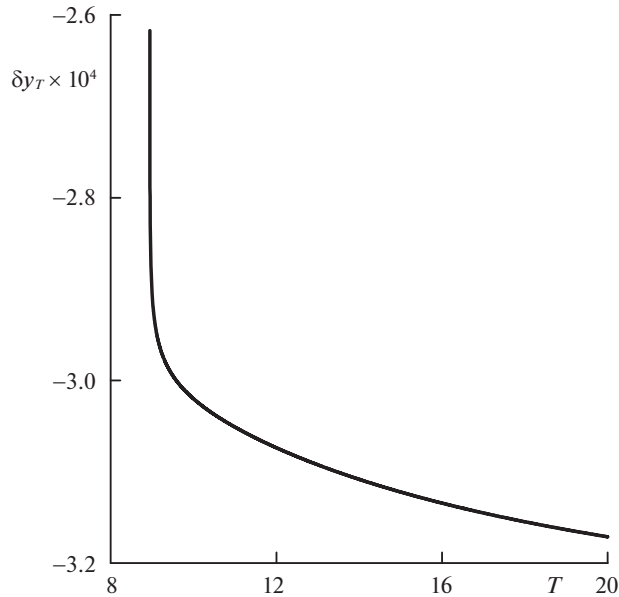


Рис. 2. Зависимость погрешности δy_T от T .

закону дробно-линейного тангенса предложена процедура определения констант интегрирования. В результате численное решение соответствующего трансцендентного уравнения сведено к решению задачи Коши. При этом сразу вычисляются константы интегрирования для множества задач с разными временами окончания процесса.

Дополнительно предложен алгоритм определения параметров релейного субоптимального управления, имеющего максимум одно переключение. Так как амплитуда субоптимального управления оказалась меньше, чем исходное ограничение, то остается некоторый запас по управлению. Появляется возможность построить управление по обратной связи и учесть внешние возмущения, используя игровой подход [11–13]. Возникающие при этом скользящие режимы можно устранить за счет использования функции насыщения [14]. При больших длительностях процесса субоптимальное управление является близким по эффективности к оптимальному управлению, так как отношение соответствующих значений функционала качества стремится к единице.

Аналогичные результаты могут быть получены в более общем случае, когда действуют постоянные проекции внешних сил на плоскость движения, например силы тяжести. Указанная ситуация соответствует скоростному маневру при движении по наклонной плоскости. При этом прямая, на которую требуется перевести траекторию движения, лежит в этой плоскости и может быть ориентирована в произвольном направлении.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00128, <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 396 с.

3. *Исаев В.К.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22. Вып. 8. С. 986–1001.
4. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
5. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
6. *Журавлёв В.Ф.* Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81–88.
7. *Журавлёв В.Ф.* О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел // Успехи механики. 2005. № 3. С. 58–76.
8. *Андронов В.В., Журавлёв В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных исследований”, 2010. 184 с.
9. *Журавлёв В.Ф.* Плоская динамика однородного параллелепипеда с сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 3–5.
10. *Розенблат Г.М.* Об оптимальном повороте твердого тела при помощи внутренних сил // Докл. РАН. 2022. Т. 505. № 1. С. 92–99.
11. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
12. *Решмин С.А.* Синтез управления двузвенным манипулятором // Изв. РАН. ТиСУ. 1997. № 2. С. 146–150.
13. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Синтез управления в нелинейной динамической системе на основе декомпозиции // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 121–128.
14. *Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Непрерывное управление механической системой на основе метода декомпозиции // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 4. С. 3–17.

Optimal Traction Control during High-Speed Maneuvering in Dry Friction Conditions

S. A. Reshmin^{a, #}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: reshmin@ipmnet.ru*

The problem of controlling the direction of the traction force during the motion of an inertial object is considered. The maximal possible value of the traction force is constant and is determined by the maximal dry friction force. At a finite time interval, the problem of bringing an object to a given rectilinear trajectory with simultaneous velocity maximization in the appropriate direction is considered.

Keywords: optimal control, maximum principle, bilinear tangent law, dry friction, wheel systems, high-speed maneuver, motion in a plane

REFERENCES

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Gordon&Breach, 1986. xxiv+360 p.
2. *Roitenberg Ya.N.* Automatic Control. Moscow: Nauka, 1971. 396 p. (in Russian)
3. *Isaev V.K.* L.S. Pontryagin's maximum principle and optimal programming of rocket thrust // Automation & Remote Control, 1961, vol. 22, no. 8, pp. 881–893.
4. *Bryson A.E., Ho Y.-C.* Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control. Waltham, Mass.: Blaisdell Pub. Co., 1969. 481 p.
5. *Afanas'ev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R.* Mathematical Theory of Control System Design. Moscow: Vysshaya shkola, 2003. 614 p. (in Russian)
6. *Zhuravlev V.Ph.* Friction laws in the case of combination of slip and spin // Mech. Solids, 2003, vol. 38, no. 4, pp. 52–58.
7. *Zhuravlev V.Ph.* On the dry frictions model in the rigid body dynamics problems // Uspekhi Mekh., 2005, no. 3, pp. 157–168.
8. *Andronov V.V., Zhuravlev V.Ph.* Dry Friction in Problems of Mechanics. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2010. 184 p. (in Russian)

-
9. *Zhuravlev V.Ph.* Flat dynamics of a homogeneous parallelepiped with dry friction // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 1, pp. 1–3.
 10. *Rozenblat G.M.* On optimal rotation of a rigid body by applying internal forces // *Dokl. Math.*, 2022, vol. 106, no. 1, pp. 291–297.
 11. *Krasovskii N.N.* Game-Theoretic Problems on the Encounter of Motions. Moscow: Nauka, 1970. 420 p. (in Russian)
 12. *Reshmin S.A.* Synthesis of control of a manipulator with two links // *J. Computer & Syst. Sci. Int.*, 1997, vol. 36, no. 2, pp. 299–303.
 13. *Reshmin S.A., Chernousko F.L.* Control synthesis in a nonlinear dynamic system based on a decomposition // *JAMM*, 1998, vol. 62, no. 1, pp. 115–122.
 14. *Anan'evskii I.M., Reshmin S.A.* Decomposition-based continuous control of mechanical systems // *J. Computer & Syst. Sci. Int.*, 2014, vol. 53, no. 4, pp. 473–486.

УДК 531.36

О ГИБКОСТИ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОПОРЫ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

© 2023 г. М. З. Досаев^{1,*}¹НИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: dosayev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 05.04.2023 г.

После доработки 15.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Рассмотрено плоское тело на шарнирных опорах. Одна из опор соединена с телом с помощью скользящей заделки. Гибкость опорных стержней моделируется шарниром со спиральной пружиной достаточно большой жесткости, препятствующей относительно повороту. Показано, что линеаризация уравнений равновесия не дает возможности оценить положение равновесия. Положение равновесия ищется в виде ряда по величине обратной коэффициенту жесткости спиральной пружины. Показано, что при стремлении коэффициента жесткости спиральной пружины к бесконечности величина момента спиральной пружины, моделирующей внутренние усилия в стержнях на изгиб, стремится к бесконечности. Для случая вертикального равновесия дана оценка тангенциальной реакции в опорном шарнире, возникающей при введении дополнительных нагрузок и в случае возникновения малых колебаний. Во всех рассмотренных случаях реакция, которая возникает в опорах, намного превышает вес тела.

Ключевые слова: скользящая заделка, упругая пружина, положение равновесия, реакция в опоре

DOI: 10.31857/S0032823523040045, EDN: WHZHGY

1. Введение. В некоторых строительных конструкциях [1–4] применяются скользящие сочленения, например для защиты здания от сейсмических разрушений. Исследование таких типов соединений может представлять практический интерес.

Для борьбы с температурными расширениями креплений металлической кровли применяются скользящие сочленения. Перспективная модель такого скользящего соединения с увеличенным перемещением опоры предложена в [5].

Возможность применения гибридной скользящей качающейся колонны в качестве поддерживающей системы приподнятого резервуара исследована в работе [6]. Результаты показывают, что гибридные скользящие качающиеся колонны более эффективны, чем другие решения, в снижении сдвига основания конструкции при землетрясениях.

В работе [7, 8] описаны проблемы, связанные с определением силы скользящих опорных систем. Представлены метод идентификации силы на основе конечных элементов и процедура выбора точки измерения деформации для идентификации сил скольжения без какой-либо информации об их начальных положениях и величинах. Задача квадратичного программирования с линейными ограничениями и, в некоторых случаях, нелинейный метод наименьших квадратов используются для идентифи-

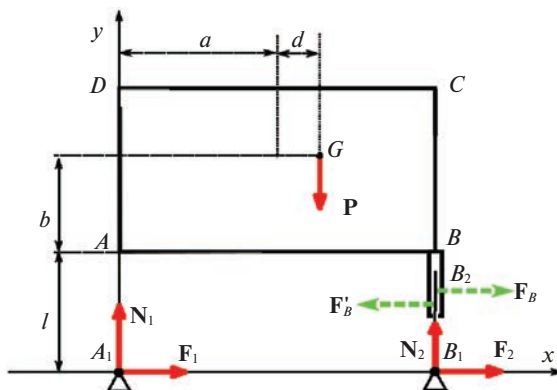


Рис. 1. Плоская механическая система с жесткими фиксированной и скользящей опорами.

кации либо сосредоточенных сил скольжения, либо равномерно распределенных скользящих нагрузок.

Инновационное скользящее угловое соединение “косынка” было предложено в [9, 10] для решения проблем в соединениях раскосов с элементами каркаса. По сравнению со сварным косыночным соединением, скользящее косыночное соединение уменьшило пластическую деформацию элементов рамы при сейсмических нагрузках.

В [11] рассмотрена задача о равновесии тела, опирающегося жесткими и телескопическими опорами на неподвижные шарниры. Показано, что добавление такого, казалось бы, потенциально скользящего сочленения может не придать подвижности в конструкцию. При этом величина реакций опор может оказаться критически большой.

Постановка, предложенная в [11] предусматривает абсолютную жесткость опорных стержней системы. В реальной практике, конечно, эти опорные элементы допускают некоторый изгиб. Представляет интерес рассмотреть задачу влияния гибкости элементов конструкции на поведение таких типов соединений.

Рассматривается плоская механическая система (рис. 1), опирающаяся на два цилиндрических шарнира A_1 и B_1 , расположенных на одной высоте.

Система состоит из тяжелого прямоугольного тела $ABCD$ ($AB = 2a$, $AD = 2b$) массой m , жестко связанных с ним невесомых стержня AA_1 длиной l и направляющих, параллельных AA_1 , по которым может скользить без трения невесомый телескопический стержень B_1B_2 . Таким образом, стержень B_1B_2 соединен с телом $ABCD$ посредством вертикальной скользящей заделки. Центр масс прямоугольника G смещен от его геометрического центра вдоль стороны AB на расстояние d .

Опишем внешние силы, действующие на систему. Кроме силы тяжести $mg = P$, на систему действуют реакции в шарнирах, которые мы разложим на нормальные N_1 , N_2 и тангенциальные F_1 , F_2 реакции. Среди внутренних сил отметим силы между направляющей F_B , F'_B и стержнем B_1B_2 . Эти силы перпендикулярны стержню B_1B_2 . Как показано в [11], механическая система не может сдвинуться из своего вертикального положения (рис. 1), несмотря на наличие потенциально подвижного сочленения.

Введем для удобства систему координат $A_1x_1y_1$. Ось A_1x_1 направим по горизонтали, а ось A_1y_1 по вертикали.

В реальной практике опорные элементы не являются абсолютно жесткими и допускают некоторый изгиб. В данной работе дана оценка влияния гибкости скользящего упругого сочленения на величины усилий в элементах конструкции и тангенциальной

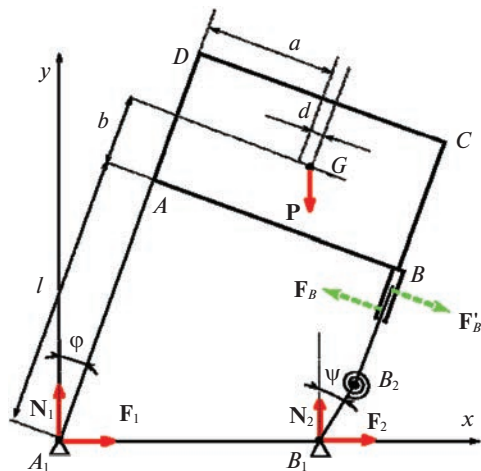


Рис. 2. Имитация гибкости скользящей опоры с помощью спиральной пружины.

реакции в опоре. Будем имитировать гибкость различных опорных элементов конструкции с помощью дополнительных шарниров и упругих пружин.

2. Гибкость скользящей опоры. Внесем в постановку задачи некоторую гибкость скользящей опоры. Для этого добавим в рассмотрение дополнительный шарнир, оснастив его пружиной достаточно большой жесткости, препятствующей повороту этого шарнира.

Разобьем невесомый стержень B_1B_2 на два невесомых стержня: стержень B_1B_3 длиной l_1 и телескопический стержень B_3B_2 (рис. 2). Стержни B_1B_3 и B_3B_2 соединены друг с другом цилиндрическим шарниром B_3 и спиральной пружиной жесткостью c , препятствующей повороту этого шарнира. Пружина находится в равновесии, когда стержни B_1B_3 и B_3B_2 сонаправлены.

К внутренним силам, действующим на систему, добавился момент T от спиральной пружины.

Несмотря на добавление степени подвижности стержня B_1B_2 , у рассматриваемой механической системы есть только одна степень свободы. При необходимости можно рассмотреть динамику системы и найти характеристики колебаний, например, с помощью метода [12] или прямого численного интегрирования [13]. В рамках данной статьи мы ограничимся расчетом положений равновесия, а также дадим оценку усилиям в опорных стержнях на изгиб и величине тангенциальной реакции в опоре без интегрирования уравнений движения.

Положение системы зададим обобщенной координатой: φ – угол между стержнем AA_1 и вертикалью. Для удобства введем дополнительную переменную: угол ψ между вертикалью и прямой B_1B_3 .

Найдем зависимость $\psi = \psi(\varphi)$. Для этого запишем разными способами горизонтальную и вертикальную координаты точки B :

$$\begin{aligned} x_B &= l \sin \varphi + 2a \cos \varphi = 2a + l_1 \sin \psi + |B_3B| \sin \varphi \\ y_B &= l \cos \varphi - 2a \sin \varphi = l_1 \cos \psi + |B_3B| \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из (2.1) получим:

$$\psi = \psi(\varphi) = \varphi + \arcsin [2a(1 - \cos \varphi)/l_1] \quad (2.2)$$

Величина момента T определяется следующим образом: $T = c(\psi - \varphi)$.

2.1. *Уравнения для положения равновесия.* Дадим оценку величины момента спиральной пружины в положении равновесия. Будем искать равновесие вблизи вертикального положения опоры AA_1 , то есть для малых значений угла φ . Потенциальная энергия системы Π может быть записана следующим образом:

$$\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_T, \quad \Pi_{mg} = mgy_G, \quad \Pi_T = \frac{c}{2}(\psi - \varphi)^2, \quad (2.3)$$

где высота y_G центра масс G системы определяется следующим соотношением: $y_G = (l + b) \cos \varphi - (a + d) \sin \varphi$, а разность углов задается формулой (2.2): $\psi - \varphi = \arcsin(2a(1 - \cos \varphi)/l_1) = a\varphi^2/l_1 + o(\varphi^4)$.

Отметим, что потенциальная энергия спиральной пружины (как и в работе [14]) зависит от угла φ в четвертой степени, поэтому процедура линеаризации уравнений равновесия здесь бесполезна.

Уравнение для положения равновесия системы:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mg(-(l + b) \sin \varphi - (a + d) \cos \varphi) + \frac{2ca \sin \varphi \arcsin\left(2\frac{a}{l_1}(1 - \cos \varphi)\right)}{l_1 \sqrt{1 - 4\left(\frac{a}{l_1}\right)^2(1 - \cos \varphi)^2}} = 0 \quad (2.4)$$

Разложим уравнение (2.4) в ряд Тейлора по углу φ и отбросим в нем члены выше третьего порядка малости:

$$-mg(a + d) - mg(l + b)\varphi + \frac{1}{2}mg(a + d)\varphi^2 + \frac{1}{6}\left[mg(l + b) + 12c\left(\frac{a}{l_1}\right)^2\right]\varphi^3 = 0 \quad (2.5)$$

Отметим, что в (2.5) параметр c появляется лишь при члене третьего порядка малости по углу φ . Считая параметр c достаточно большой величиной, будем искать решение уравнения (2.5) в следующем виде:

$$\varphi = \frac{a_1}{c^{1/3}} + \frac{a_2}{c^{2/3}} + \frac{a_3}{c}, \quad (2.6)$$

где коэффициенты должны быть определены.

Подставим решение (2.6) в уравнение (2.5) и отбросим члены разложения уравнения порядка меньше, чем $1/c$. На неизвестные коэффициенты разложения a_1, a_2, a_3 получим три уравнения:

$$\begin{aligned} a_1^3 &= \frac{1}{2}mg(a + d)\left(\frac{l_1}{a}\right)^2 \\ a_2 &= mg\frac{l + b}{6a_1}\left(\frac{l_1}{a}\right)^2 \\ a_3 &= \frac{1}{a_1}\left[mg\frac{2(l + b)a_2 - (a + d)a_1^2}{12a_1}\left(\frac{l_1}{a}\right)^2 - a_2^2\right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что разложение величины момента T в ряд Тейлора приводит к следующему соотношению:

$$T = \frac{ac}{l_1}\varphi^2 + o(\varphi^4) \quad (2.8)$$

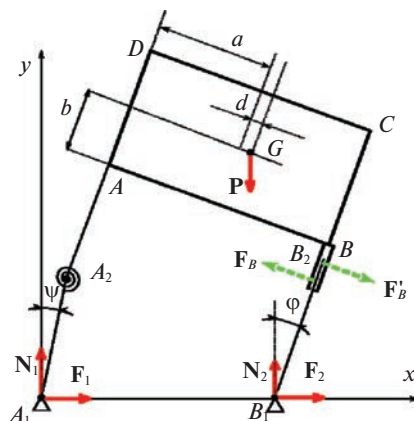


Рис. 3. Имитация гибкости фиксированной опоры с помощью спиральной пружины.

Подставим в (2.8) решение (2.6)–(2.7):

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{2l_1}{a} \right)^{1/3} \left[(mg)^2 \frac{(a+d)^2}{c} \right]^{1/3} + \frac{mg}{3a} l l_1 + o(c^{-1/3}) \quad (2.9)$$

Очевидно, при устремлении c к бесконечности величина момента T также стремится к бесконечности. Таким образом, с ростом жесткости скользящего стержня нагрузка на его изгиб также растет. На практике это означает, что при условии жесткости остальных связей достаточно жесткая скользящая опора просто переломится при установке!

3. Гибкость фиксированной опоры. Смоделируем теперь гибкость левой фиксированной опоры A_1A . Пусть правая телескопическая опора представляет собой жесткий невесомый стержень B_1B_2 , скользящий по направляющим. Стержень A_1A разделим на два одинаковых (для простоты) стержня AA_2 и A_1A_2 , соединенных цилиндрическим шарниром A_2 и спиральной пружиной жесткостью c , препятствующей повороту этого шарнира (рис. 3). Пружина находится в равновесии, когда стержни AA_2 и A_1A_2 сонаправлены.

У системы, по-прежнему, одна степень свободы. Положение системы зададим углом φ между стержнем B_1B_2 и вертикалью. Для удобства введем дополнительную переменную: угол ψ между вертикалью и прямой A_1A_2 . В этом случае, величина момента T вновь пропорциональна разности углов φ и ψ : $T = c(\psi - \varphi)$, и потенциальная энергия системы задается формулой (2.3).

Найдем зависимость $\psi = \psi(\varphi)$. Получим разными способами горизонтальную и вертикальную координаты точки B :

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{l}{2} (\sin \varphi + \sin \psi) + 2a \cos \varphi = 2a + |B_1B| \sin \varphi \\ y_B &= \frac{l}{2} (\cos \varphi + \cos \psi) - 2a \sin \varphi = |B_1B| \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из (3.1) получим:

$$\psi = \psi(\varphi) = \varphi + \arcsin \left[4 \frac{a}{l} (\cos \varphi - 1) \right] = \varphi + o(\varphi^2) \quad (3.2)$$

Потенциальная энергия системы Π выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi = mgl \cos \left(\varphi + \frac{1}{2} \arcsin \left[4 \frac{a}{l} (\cos \varphi - 1) \right] + \left(\frac{l}{2} + b \right) \cos \varphi - (a + d) \sin \varphi \right) + \\ + \frac{a}{2} \arcsin^2 \left[4 \frac{a}{l} (\cos \varphi - 1) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Левая часть уравнения для определения положения равновесия системы, получаемая как частная производная от (3.3) по углу φ , достаточно громоздкая, и это уравнение здесь не приводится. Однако, разложив это уравнение в ряд Тейлора по углу φ и отбросив в нем члены выше третьего порядка малости, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -mg(a + d) - mg(l + b)\varphi + \frac{1}{2}mg(7a + d)\varphi^2 + \\ + \frac{48ca^2 - 24a^2lmg + (l + b)l^2mg}{6l^2}\varphi^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отметим, что в (3.4), как и в (2.5), коэффициент жесткости пружины c появляется лишь при члене третьего порядка малости по углу φ . Найдём решение уравнения (3.4) в виде ряда (2.6).

Подставим получившийся ряд в уравнение (3.4) и отбросим члены разложения уравнения порядка меньше, чем $1/c$. Коэффициенты разложения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1^3 &= \frac{mg}{8}(a + d)\left(\frac{l}{a}\right)^2 \\ a_2 &= \frac{mg}{24} \frac{l + b}{a_1} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \\ a_3 &= \frac{1}{a_1} \left\{ \frac{mg}{48a_1} \left(\frac{l}{a}\right)^2 [2la_2 - (7a + d)a_1^2 + 2ba_2] - a_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Разложение величины момента T в ряд Тейлора по углу φ приводит к следующему соотношению:

$$T = -\frac{2ca}{l}\varphi^2 + o(\varphi^4) \quad (3.6)$$

Подставим в (3.6) решение (2.6) с коэффициентами (3.5):

$$T = -\frac{1}{2} \left(\frac{l}{a} \right)^{1/3} [mg(a + d)]^{2/3} c^{1/3} - mg \frac{l + b}{6a} l + o(c^{-1/3}) \quad (3.7)$$

Вновь, как и в предыдущем случае (для (2.9)), формула (3.7) содержит член, зависящий от $c^{1/3}$. При устремлении коэффициента c к бесконечности модуль величины момента T также стремится к бесконечности. Таким образом, при абсолютной жесткости скользящей опоры, в фиксированной опоре большой жесткости возникают нагрузки, намного превышающие вес тела, которые также как и в предыдущем рассмотренном случае, скорее всего, приведут к поломке конструкции.

4. Упругое соединение скользящей опоры. Обычно на практике для лучшего крепления скользящей опоры ее соединяют с телом дополнительной пружиной. Добавим пружину жесткости k в соединение стержня B_3B_2 с концом направляющей (рис. 4). Для определенности выберем, что пружина находится в равновесии при выполнении следующего условия: $|B_3B| = l - l_1$.

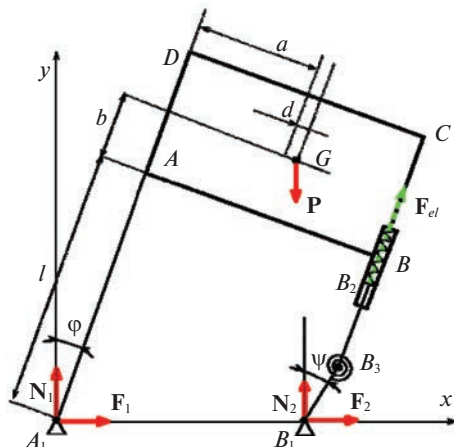


Рис. 4. Упругое закрепление гибкой скользящей опоры с помощью спиральной пружины.

Величина упругой силы F_{el} , действующей между стержнем и телом, зависит от удлинения пружины: $F_{el} = k(l - l_1 - BB_3)$, где длина отрезка BB_3 может быть получена из формул (2.1):

$$BB_3 = l - 2a \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{2a}{l_1} \cos \varphi \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} - l_1 \sqrt{1 - \left[\frac{2a}{l_1} (1 - \cos \varphi) \right]^2} \quad (4.1)$$

Потенциальная энергия системы Π по сравнению с пунктом 2 увеличилась на одно слагаемое и может быть записана следующим образом: $\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_T + \Pi_{F_{el}}$, $\Pi_{F_{el}} = k(l - l_1 - |B_3 B|)^2$.

Уравнение для определения положения равновесия системы, как и в предыдущем случае, достаточно громоздко. Разложим это уравнение в ряд Тейлора по углу φ и отбросив в нем члены выше третьего порядка малости, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -mg(a + d) + \left[2ka^2 - mg(l + b) + 4 \frac{ka^2}{l_1} + 2 \frac{ka^2}{l_1^2} \right] \varphi + \frac{mg}{2} (a + d) \varphi^2 + \\ + \frac{1}{6} \left[4ka^2 + mg(l + b) - 16ka \frac{a}{l_1} + 4(3c - 5k) \left(\frac{a}{l_1} \right)^2 \right] \varphi^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

В (4.2), как в (2.5) и в (3.4), коэффициент жесткости пружины c появляется лишь при члене третьего порядка малости по углу φ . Найдем решение уравнения (4.2) в виде ряда (2.6).

Подставим получившийся ряд в уравнение (4.2) и отбросим члены разложения уравнения порядка меньше, чем $1/c$. Коэффициенты разложения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1^3 &= mg \frac{(a + d)^2}{2} \left(\frac{l_1}{a} \right) \\ a_2 &= \frac{1}{3a_1} \left[mg \frac{(l + b)}{2} \left(\frac{l_1}{a} \right)^2 - k(l_1 + 1)^2 \right] \\ a_3 &= \frac{1}{12a_1^2} \left[mg \left(\frac{l_1}{a} \right)^2 \left(2(l + b)a_2 - (a + d)a_1^2 \right) - 4ka_2(l_1^2 + 1) - 8ka_2l_1 - 12a_1a_2^2 \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Разложим величину момента T в ряд Тейлора по углу φ и подставим в него решение (2.6, 4.3):

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{2lc}{a} \right)^{1/3} (mg(a+d))^{2/3} + \frac{1}{3al_1} (mgl_1^2 - 2k(l_1+1)^2 a^2) + o(c^{-1/3}) \quad (4.4)$$

По-прежнему, как и в (2.9) и (3.7), формула (4.4) содержит член, зависящий от $c^{1/3}$. Жесткость пружины крепления k входит только в слагаемое, не зависящее от жесткости c спиральной пружины, моделирующей гибкость опорного стержня. С увеличением коэффициента c растет и величина момента T независимо от величины параметра k . Соединяющая линейная пружина не может предотвратить поломку скользящей опоры!

5. Оценка тангенциальной реакции упругой скользящей опоры. До этого мы рассматривали достаточно произвольное положение равновесия. Пусть теперь положению равновесия системы соответствует вертикальное положение опорных стержней. Отметим, что в случае вертикального равновесия возникает уникальная ситуация для исследуемой задачи: в положении равновесия тангенциальная реакция F_2 равна нулю. Оценим величину тангенциальной силы в случае небольших возмущений этой механической системы, а также в случае малых колебаний около положения равновесия.

Для упрощения демонстрации динамики системы заменим невесомый стержень B_2B_3 на однородный стержень массой m_1 с центром масс G_1 и длиной l_2 .

Запишем горизонтальную и вертикальную координаты центра масс G_1 стержня B_2B_3 в зависимости от угла наклона тела:

$$\begin{aligned} x_{G_1} &= l \sin \varphi + 2a \cos \varphi - BB_3 \sin \varphi + \frac{1}{2} l_2 \sin \varphi \\ y_{G_1} &= l_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} l_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.1)$$

Величина упругой силы F_{el} , действующей между стержнем и телом, в положении вертикального равновесия определяется из равновесия моментов сил, действующих на тело, относительно точки A_1 : $F_{el} = mg(a+d)/(2a)$. Удлинение линейной пружины в положении равновесия: $\Delta l|_{\varphi=0} = mg(a+d)/(2ak)$. Отсюда получим зависимость упругой силы в наклонном положении системы: $F_{el} = k(\Delta l|_{\varphi=0} + l - l_1 - BB_3)$, где длина отрезка BB_3 определена формулой (4.1).

5.1. Введение дополнительной нагрузки. Введем в такую постановку задачи некоторое возмущение, например, увеличим массу тела, добавив дополнительную массу Δm , считая эту величину малой по сравнению с массой тела. В этом случае конструкция немного просядет, перейдя в новое положение равновесия. В опорах появятся тангенциальные нагрузки. Проследим, как нагрузка F_2 зависит от величины Δm возмущения.

В отличие от предыдущего параграфа потенциальная энергия системы Π состоит из энергии силы тяжести тела, двух пружин и силы тяжести стержня B_2B_3 : $\Pi = \Pi_{(m+\Delta m)g} + \Pi_{m_1g} + \Pi_T + \Pi_{F_{el}}$, где $\Pi_{m_1g} = m_1 y_{G_1}$.

Считая φ малой величиной, а параметр c достаточно большим, выпишем уравнение равновесия с точностью до главных членов:

$$\Delta mg(a+d) = - \left[\Delta mg(b+l) + mg(b+l) + m_1 g \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) - 4ka^2 \right] \varphi + 2 \left(\frac{a}{l_1} \right)^2 c \varphi^3 \dots \quad (5.2)$$

Определим величину нормальной реакции из уравнения равновесия системы:

$$N_2 = \frac{(m + \Delta m)gx_G + m_1gx_{G_1}}{2a}$$

Получим величину тангенциальной силы F_2 из уравнения равновесия стержня:

$$F_2 = \frac{N_2(x_{G_1} - 2a) - T}{y_{G_1}} = \frac{g((m + \Delta m)(a + d) + 2am_1)}{2a} \varphi - 2 \frac{c}{2l_1 + l_2} \frac{a}{l_1} \varphi^2 + \dots \quad (5.3)$$

Проведем анализ полученных результатов. Правая часть уравнения равновесия (5.2) содержит два слагаемых: одно линейно по φ , другое зависит от φ^3 . Допустим, что решение этого уравнения имеет порядок $1/c$. В этом случае в правой части уравнения (5.2) определяющим является член при φ , и такой же порядок будет у левой части уравнения (и соответственно у величины Δm). В этом случае величина F_2 (5.3) тоже будет порядка $1/c$.

Теперь рассмотрим случай, когда порядок решения уравнения (5.2) составляет $c^{-0.5}$. Такой же будет и порядок величины Δm . Порядок F_2 определится слагаемым при φ^2 , F_2 является конечной величиной.

Наконец, предположим, что порядок решения уравнения (5.2) составляет $c^{-0.4}$. Порядок правой части уравнения (5.2), а значит и порядок Δm , определяет член при φ^3 . В этом случае $\Delta m \sim c^{-0.2}$. А величина F_2 оказывается порядка $c^{0.2}$.

В результате получаем следующий вывод: с ростом Δm величина тангенциальной силы растет. Причем даже для малой дополнительной нагрузки, например для $\Delta m \sim c^{-0.2}$, величина тангенциальной силы F_2 становится достаточно большой (гораздо больше веса всей конструкции).

5.2. Колебания около вертикального равновесия. Зададимся теперь целью оценить величину тангенциальной силы F_2 в условиях малых колебаний системы. Вначале мысленно освободимся от связи: заменим правый опорный шарнир соответствующими силами реакции N_2 и F_2 и предоставим возможность точке B_1 скользить по опорной поверхности (рис. 5). Система в общем случае обладает двумя степенями свободы. В качестве обобщенных координат возьмем угол φ между стержнем AA_1 и вертикалью и угол ψ между вертикалью и прямой B_1B_3 . Когда опорная точка B_1 телескопической (правой) ноги останавливается, у системы остается одна степень свободы. Если точка B_1 останавливается на расстоянии $2a$ от точки A_1 , то между углами φ и ψ сохраняется зависимость (2.2).

Определим величину BB_3 в зависимости от двух обобщенных координат. Для этого воспользуемся условием постоянства вертикальной координаты точки B_1 : $y_{B_1} = -2a \sin \varphi + l \cos \varphi - BB_3 \cos \varphi - l_1 \cos \psi = 0$. Отсюда получим величину BB_3 в наклонном положении: $BB_3 = (l \cos \varphi - 2a \sin \varphi - l_1 \cos \psi) / \cos \varphi$.

Когда правая нога скользит по опорной плоскости, скорость точки опоры может быть определена в следующем виде:

$$\dot{x}_{B_1} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} [(2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi) \dot{\varphi} - l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi) \dot{\psi}] \quad (5.4)$$

Запишем кинетическую энергию системы:

$$K = \frac{J \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_{G_1}^2 + \dot{y}_{G_1}^2 + \frac{l_2^2}{12} \dot{\varphi}^2 \right), \quad (5.5)$$

где J — момент инерции тела относительно неподвижной точки A_1 , $\dot{x}_{G_1}, \dot{y}_{G_1}$ — горизонтальная и вертикальная скорости точки G_1 .

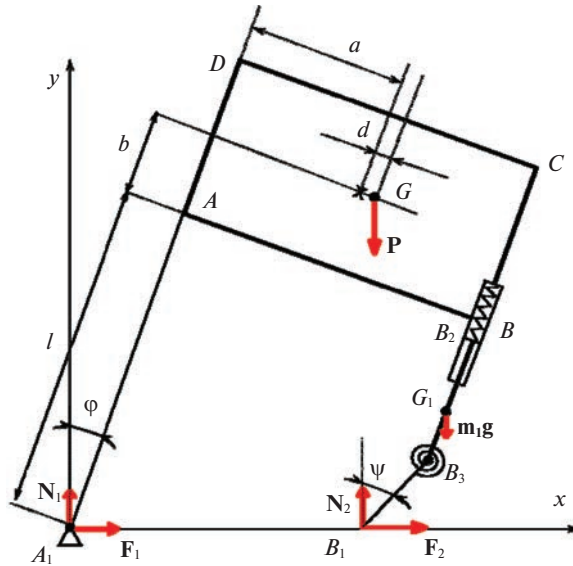


Рис. 5. Плоское тело на одном шарнире и гибкой телескопической опоре.

Кроме потенциальных сил необходимо в качестве активной силы учитывать тангенциальную реакцию F_2 . Элементарная работа этой реакции:

$$dA_{F_2} = F_2 dx_{B_1} = F_2 \left[\frac{2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi}{\cos^2 \varphi} d\varphi - l_1 \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos \varphi} d\psi \right] = Q_\varphi d\varphi + Q_\psi d\psi,$$

где Q_φ, Q_ψ — соответствующие обобщенные силы. Уравнения движения системы получим с помощью Лагранжева формализма. Они достаточно громоздки, и здесь не приводятся.

Вспомним теперь, что точка B_1 неподвижна по условию задачи.

Из (5.4) имеем следующее соотношение:

$$\dot{\psi} = \frac{2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi}{l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi)} \dot{\varphi} \quad (5.6)$$

Продифференцировав (5.6) по времени и подставив в полученное соотношение (5.6) получим зависимость между угловыми ускорениями:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & \ddot{\varphi} (2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi) / (l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi)) + \\ & + \dot{\varphi} (2a \dot{\varphi} \cos \varphi - l_1 \dot{\psi} \sin \psi) / (l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi)) + \\ & + \dot{\varphi}^2 (2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi) \sin \varphi / (l_1 \cos^2 \varphi \cos(\varphi - \psi)) + \\ & + \dot{\varphi} (2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi) \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin(\varphi - \psi) / (l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi)^2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Наконец, подставив соотношения (2.2), (5.6) и (5.7) в уравнения Лагранжа получим систему двух уравнений на две неизвестные: угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ и величину опорной реакции F_2 .

Решив эту систему, получим одно дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение консервативной системы и зависимость реакции F_2 от фазо-

вых переменных $\varphi, \dot{\varphi}$ в процессе этого движения. В случае малых отклонений от положения равновесия консервативная система совершает относительно него малые колебания.

Запишем главные члены разложения полученной реакции F_2 по малым величинам $\varphi, \dot{\varphi}$:

$$F_2 = \frac{1}{2a} [((m + 2m_1)a + md)g] \varphi - \frac{ca}{l_1^2} \dot{\varphi}^2 + \dots \quad (5.8)$$

Формула (5.8) дает оценку величине тангенциальной силы при малых колебаниях системы. Напомним, что величина c достаточно большая, и проведем анализ этой формулы. Если амплитуда малых колебаний будет порядка $1/c$, то тангенциальная составляющая реакции будет того же порядка малости. Рассмотрим ситуацию, когда амплитуда колебаний достигнет величины $c^{-0.5}$. В этом случае для оценки тангенциальной реакции необходимо учитывать второе слагаемое формулы (5.8). Тангенциальная реакция становится конечной величиной. Наконец, если амплитуда еще увеличится, например, достигнет величины $c^{-0.4}$, оставаясь при этом малой величиной. Порядок тангенциальной реакции будет $c^{0.2}$, то есть F_2 может стать критически большой в практическом смысле.

Даже относительно малые амплитуды колебаний конструкций, содержащих скользящее сочленение, могут привести к разрушению опоры!

Заключение. Рассмотрены различные варианты имитации гибкости опорных стержней, входящих в конструкцию, содержащую скользящее сочленение. Во всех рассмотренных случаях усилие в стержнях в положениях равновесия близких к вертикали растет с увеличением жесткости опорных стержней. В частности, это усилие зависит от геометрических параметров конструкции, в том числе растет с увеличением параметра d (с увеличением асимметрии распределения массы конструкции).

Во всех рассмотренных случаях усилия, которые возникают в опорах, намного превышают вес тела.

Для вертикального равновесия конструкции с упругой скользящей опорой показано, что тангенциальная опорная реакция быстро и критически растет с возникновением колебаний конструкции и в случае появления дополнительных массовых нагрузок.

Таким образом, если конструкция с подвижным сочленением может выдержать расчетные нагрузки в обычных условиях, то возникновение дополнительных (даже малых) нагрузок может привести к поломке конструкции!

Например, при покрытии крыши здания мокрым снегом вес крыши может увеличиться в два раза. При этом нагрузка на опоры возрастает кратно, и это может привести к разрушению здания. Поэтому нельзя производить расчеты прочности конструкции, содержащей скользящее соединение, используя традиционные подходы (например, [15]) к оценкам опорных реакций и изгибающих моментов, основанные на расчете опорного давления.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда № 22-21-00303.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu Y.Q., Liang F., Au Francis T.K. Experimental study of durable low-friction concrete contacts for precast segmental columns with resettable sliding joints // Construction and Building Materials. 2022. V. 318. 126192. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.126192>
2. Jiang Yu.-F., Guo Z.-X., Basha S.H., Chai Z.-L. Sliding bed joint for seismic response control of ashlar stone masonry structures // Engng. Struct. 2021. V. 244. P. 112734. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112734>

3. Di Trapani F., Bolis V., Basone F., Cavaleri L., Preti M. Traditional vs. sliding-joint masonry infilled frames: Seismic reliability and EAL // Proc. Struct. Integrity. 2020. V. 26. P. 383–392.
<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.06.049>
4. Morandi P., Milanesi R.R., Magenes G. Innovative solution for seismic-resistant masonry infills with sliding joints: in-plane experimental performance // Engng. Struct. 2018. V. 176. P. 719–733.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.09.018>
5. Min Q., Li N., Zhang Y., Lu Q., Liu X. A novel wind resistance sliding support with large sliding displacement and high tensile strength for metal roof system // Engng. Struct. 2021. V. 243. P. 112670.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112670>
6. Atashfaraz B., Taiyari F., Hayati Raad H., Formisano A. Efficiency investigation of hybrid sliding rocking columns as elevated reservoirs supporting systems // Soil Dyn.&Earthquake Engng. 2020. V. 136. P. 106222.
<https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2020.106222>
7. Zhao X., Xu Y.L. Finite element-based force identification of sliding support systems: Part I – Theory // Finite Elements in Analysis and Design. 2006. V. 42 (4). P. 229–248.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2005.06.004>
8. Xu Y.L., Zhao X. Finite element-based force identification of sliding support systems: Part II – Numerical investigation // Finite Elements in Analysis and Design. 2006. V. 42 (4). P. 249–282.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2005.06.006>
9. Zhao J., Chen R., Wang Z., Pan Y. Sliding corner gusset connections for improved buckling-restrained braced steel frame seismic performance: Subassemblage tests // Engng. Struct. 2018. V. 172. P. 644–662.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.031>
10. Zhao J., Li Y., Wang C., Chen R., Yan L., Gong C. Sliding corner gusset connections in concentrically braced frames using BRBs: Numerical analysis and practical design. // Engng. Struct. 2021. V. 246. P. 113055. DOI: j.engstruct.2021.113055
11. Досаев М.З., Самсонов В.А. Особенности равновесия тела на шарнирных опорах и скользящей заделке // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 4. С. 3–12.
12. Klimina L.A. Method for finding periodic trajectories of centrally symmetric dynamical systems on the plane // Diff. Equat. 2019. V. 55. P. 159–168.
<https://doi.org/10.1134/S0012266119020022>
13. Selyutskiy Y.D. On dynamics of an aeroelastic system with two degrees of freedom // Appl. Math. Model. 2019. V. 67. P. 449–455.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.010>
14. Досаев М.З., Самсонов В.А. Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением // ПММ. 2021. Т. 85. № 4. С. 426–435.
15. Труш Л.И., Ломунов А.К. Расчет элементов каменных конструкций многоэтажного производственного здания. Н. Новгород: ННГАСУ, 2017. 59 с.

On Flexibility of a Sliding Vertical Support of a Flat Structure

M. Z. Dosaev^{a,#}

^a*Institute of Mechanics of Lomonosov MSU, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: dosayev@imec.msu.ru*

A flat body on hinged supports is considered. One of the supports is connected to the body by means of a slipping attachment. A flexibility of the support rods is modeled by a hinge with a helical spring of sufficient stiffness to prevent relative rotation. It is shown that the linearization of the equilibrium equations makes it impossible to estimate the equilibrium position. The equilibrium position is sought in the form of a series in terms of the reciprocal of the stiffness coefficient of the helical spring. It is shown that as the coefficient of stiffness of the helical spring tends to infinity, the moment of the helical spring, which models the internal bending forces in the rods, tends to infinity. For the case of vertical equilibrium, an estimate is given for a tangential reaction in the support hinge, which occurs when additional loads are introduced and in the case of small oscillations.

In all the cases considered, the reaction that occurs in the supports is much greater than the weight of the body.

Keywords: slipping attachment, elastic spring, equilibrium position, reaction in the support

REFERENCES

1. *Liu Y.Q., Liang F., Au Francis T.K.* Experimental study of durable low-friction concrete contacts for precast segmental columns with resettable sliding joints // *Constr.&Building Mater.*, 2022, vol. 318, pp. 126192. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2021.126192
2. *Jiang Yu.-F., Guo Z.-X., Basha S.H., Chai Z.-L.* Sliding bed joint for seismic response control of ashlar stone masonry structures // *Engng. Struct.*, 2021, vol. 244, pp. 112734. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.112734
3. *Di Trapani F., Bolis V., Basone F., Cavaleri L., Preti M.* Traditional vs. sliding-joint masonry infilled frames: Seismic reliability and EAL // *Proc. Struct. Integrity*, 2020, vol. 26, pp. 383–392. DOI: 10.1016/j.prostr.2020.06.049
4. *Morandi P., Milanese R.R., Magenes G.* Innovative solution for seismic-resistant masonry infills with sliding joints: in-plane experimental performance // *Engng. Struct.*, 2018, vol. 176, pp. 719–733. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.09.018
5. *Min Q., Li N., Zhang Y., Lu Q., Liu X.* A novel wind resistance sliding support with large sliding displacement and high tensile strength for metal roof system // *Engng. Struct.*, 2021, vol. 243, pp. 112670. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.112670
6. *Atashfaraz B., Taiyari F., Hayati Raad H., Formisano A.* Efficiency investigation of hybrid sliding rocking columns as elevated reservoirs supporting systems // *Soil Dyn.&Earthquake Engng.*, 2020, vol. 136, pp. 06222. DOI: 10.1016/j.soildyn.2020.106222
7. *Zhao X., Xu Y.L.* Finite element-based force identification of sliding support systems: Part I – Theory. // *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006, vol. 42 (4), pp. 229–248. DOI: 10.1016/j.finel.2005.06.004
8. *Xu Y.L., Zhao X.* Finite element-based force identification of sliding support systems: Part II – Numerical investigation // *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006, vol. 42 (4), pp. 249–282. DOI: 10.1016/j.finel.2005.06.006
9. *Zhao J., Chen R., Wang Z., Pan Y.* Sliding corner gusset connections for improved buckling-restrained braced steel frame seismic performance: Subassemblage tests // *Engng. Struct.*, 2018, vol. 172, pp. 644–662. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.06.031
10. *Zhao J., Li Y., Wang C., Chen R., Yan L., Gong C.* Sliding corner gusset connections in concentrically braced frames using BRBs: Numerical analysis and practical design. // *Engng. Struct.*, 2021, vol. 246, pp. 113055. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113055
11. *Dosaev M.Z., Samsonov V.A.* Peculiarities of body balance on hinged supports and sliding closure // *Mech. Solids*, 2023. (in Press)
12. *Klimina L.A.* Method for finding periodic trajectories of centrally symmetric dynamical systems on the plane // *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, pp. 159–168. DOI: 10.1134/S0012266119020022
13. *Selyutskiy Y.D.* On dynamics of an aeroelastic system with two degrees of freedom // *Appl. Math. Model.*, 2019, vol.67, pp. 449–455. DOI: 10.1016/j.apm.2018.11.010
14. *Dosaev M.Z., Samsonov V.A.* Singularities in dynamic systems involving elastic elements and dry friction // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1473–1481.
15. *Trush L.I., Lomunov A.K.* Calculation of Elements of Stone Structures of a Multi-Storey Industrial Building. Nizhny Novgorod: NNGASU, 2017. 59 p. (in Russian)

УДК 531.31

**ОГРАНИЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ
СВЕРХЗВУКОВОГО НЕМАНЕВРЕННОГО САМОЛЕТА**© 2023 г. С. А. Кумакшев^{1,*}, А. М. Шматков¹¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: kumak@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 14.02.2023 г.

После доработки 13.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Рассмотрено влияние фазовых и иных ограничений на метод поиска траекторий гражданского сверхзвукового летательного аппарата, оптимальных по расходу топлива. На основании найденных методом динамического программирования решений, учитывающих многочисленные условия, которым должны удовлетворяться высота полета, угол тангажа, нормальная перегрузка, скорость самолета, сила тяги двигателей и т.д., показано, что почти все эти условия во время начального этапа вычислений можно игнорировать, поскольку оптимальное решение на них не выходит. Следовательно, можно сначала применять принцип максимума, а метод динамического программирования использовать лишь в тех случаях, когда значительная часть ограничений оказывается существенна.

Ключевые слова: сверхзвуковой самолет, оптимальная траектория, фазовое ограничение, метод динамического программирования, принцип максимума

DOI: 10.31857/S0032823523040070, EDN: WIGEBL

1. Введение. Поиск оптимального решения в рамках математической модели, учитывающей множество ограничений, которые связаны с техническими особенностями определенного типа устройств – сложная задача. Можно выделить два основных подхода к ее решению. Первый основан на принципе максимума Л.С. Понтрягина [1], а второй – на методе динамического программирования Р. Беллмана [2]. Первый подход, как правило, оказывается более сложным с точки зрения применяемой математической теории, но требует меньше вычислительных ресурсов, поскольку предполагает решение краевой задачи применительно к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для чего существует много разнообразных численных методов. Вторым подход проще с точки зрения математического содержания, но для его использования в большинстве случаев необходимы значительные вычислительные мощности, поскольку в своей основе он представляет собой метод перебора всех возможных решений. Однако с ростом числа и сложности ограничений ситуация меняется, потому что для применения принципа максимума в этом случае нужны чрезвычайно громоздкие системы уравнений, а в рамках метода динамического программирования увеличение количества ограничений приводит, вообще говоря, к существенному уменьшению количества тех вариантов решений, среди которых нужно делать выбор. Следовательно, целесообразно применять оба подхода, опираясь на свойства конкретных решений. Далее на примере вычисления оптимальных по расходу топлива траекторий неманевренного сверхзвукового летательного аппарата будет показано, как можно реализовать такую комбинацию.

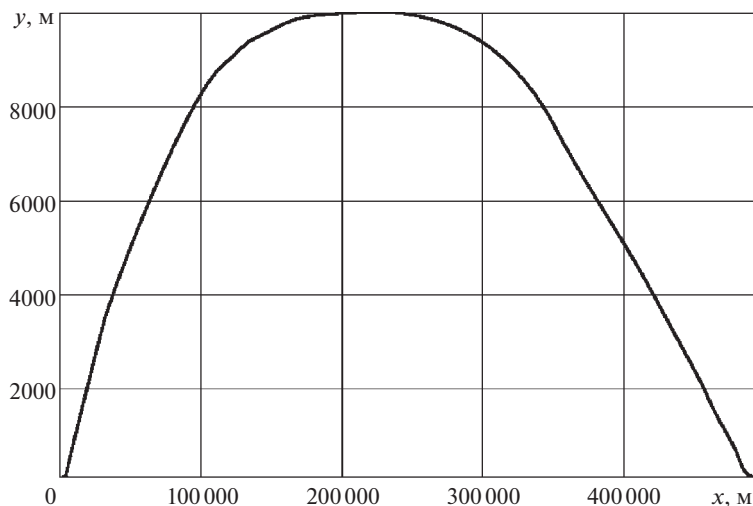


Рис. 1.

В настоящее время применяют, в основном, локальную оптимизацию отдельных участков полета самолета [3]. В качестве таковых часто выделяют взлет, крейсерский режим и посадку [4, 5]. Далее решение для всего перелета формируют на основе комбинации из этих участков [6, 7], для чего используют различные численные методы [8, 9]. С увеличением мощности бортовых компьютеров появилась возможность оптимизировать траекторию по расходу топлива во время полета, учитывая текущие воздушные потоки [10, 11]. В данном исследовании воспользуемся результатами работы [12], где была реализована глобальная оптимизация всей траектории целиком, без выделения отдельных участков.

При поиске параметров движения гражданского самолета необходимо учитывать много ограничений [13], часть из которых основана на технических характеристиках конкретного аппарата, а часть — на особенностях управления воздушным движением в целом. Влияние последних хорошо заметно на примере обычной формы траектории [4] для дозвукового воздушного судна. Эта форма существенно отличается от той, которая необходима для экономии топлива (см., например, [14]) и показана на рис. 1, хотя такая экономия исключительно важна с коммерческой точки зрения. Причина в том, что для снижения расхода горючего необходимо, как видно из рис. 1, набрать максимально возможную высоту сразу после взлета и затем постепенно снижаться по мере приближения к аэропорту назначения, а такое снижение повышает вероятность столкновений воздушных судов друг с другом. По этой причине реальные полеты проходят, как правило, на одной из заранее оговоренных высот, а переходы с одной такой высоты на другую редки. Выяснилось [12], что в случае сверхзвукового гражданского лайнера траектории, оптимальные по расходу топлива, весьма похожи на традиционные траектории дозвуковых воздушных судов, а потому их можно использовать на практике. Следовательно, изучение таких решений актуально.

2. Уравнения движения. Численные значения большинства используемых далее постоянных, описывающих математическую модель сверхзвукового самолета, приведены в работе [12]. В данной статье они опущены для краткости изложения.

Ограничимся рассмотрением траекторий движения самолета, полностью лежащих в вертикальной плоскости. Обозначим через m массу летательного аппарата в теку-

щий момент времени. Пусть x — горизонтальная, а y — вертикальная координаты центра масс аппарата в неподвижной системе отсчета, связанной с землей. Модуль вектора скорости этого центра обозначим через V , а величину угла между горизонтальной осью и этим вектором — через θ . Кроме того, пусть данный вектор всегда коллинеарен вектору силы тяги, имеющему модуль P . Далее введем вектор, равный отношению суммы векторов тяги и полной аэродинамической силы к величине силы тяжести. Его проекцию на направление вектора скорости центра масс самолета, называемую тангенциальной перегрузкой, обозначим через n_x , а на ось, ортогональную вектору скорости и направленную к верхней части самолета — через n_y . Эту проекцию называют нормальной скоростной перегрузкой. Тогда уравнения движения аппарата можно записать в форме [15]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \theta, \quad \dot{y} = V \sin \theta, \quad \dot{V} = g(n_x - \sin \theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{g}{V}(n_y - \cos \theta), \quad \dot{m} = -Q_t(P, M, y)\end{aligned}\quad (2.1)$$

В соотношениях (2.1) функция Q_t от тяги P , числа Маха M и высоты полета y определяет величину расхода топлива за секунду, а число g равно модулю ускорения свободного падения. Число Маха M определено как $M = V/V_*$, где скорость звука V_* зависит от высоты y известным образом.

Пусть S — площадь крыла самолета, а $\rho = \rho(y)$ — зависимость плотности атмосферы от высоты. Тогда

$$n_x = \frac{P}{mg} - \frac{qSC_x}{mg}, \quad n_y = \frac{qSC_y}{mg}, \quad q = \frac{\rho(y)V^2}{2}, \quad (2.2)$$

причем в первой формуле из соотношений (2.2) учтено, что вектор скорости всегда направлен против силы лобового сопротивления. Коэффициент лобового сопротивления C_x в соотношении (2.2) зависит от числа Маха M , а также коэффициента подъемной силы C_y следующим образом:

$$\begin{aligned}C_x &= C_x(C_y, M) = (D_M + D_C)^{-1} \sum_{i=0}^4 a_i k_y^i (C_y - C_{y0})^i \\ D_M &= c_{00} + c_{01} k_M (M - M_0) + c_{02} k_M^2 (M - M_0)^2 \\ D_C &= k_y (C_y - C_{y0}) (c_{10} + c_{11} k_M (M - M_0) + c_{12} k_M^2 (M - M_0)^2) \\ a_i &= \sum_{j=0}^6 b_{ij} k_M^j (M - M_0)^j; \quad i = \overline{0, 4}\end{aligned}\quad (2.3)$$

В соотношении (2.3) использованы известные постоянные величины C_{y0} , k_y , M_0 , k_M , c_{ij} и b_{ij} .

Функция

$$Q_t = \sum_{k=0}^3 \left(\sum_{i=0}^2 \left(\sum_{j=0}^5 \chi_{kij} \zeta_P^j (P - P_q)^j \right) \zeta_M^i (M - M_q)^i \right) \zeta_y^k (y - y_q)^k \quad (2.4)$$

задает скорость расхода топлива, причем величины P_q , M_q , y_q , ζ_P , ζ_M , ζ_y , а также χ_{kij} — известные константы.

Необходимо найти функции $C_y(t)$ и $P(t)$, доставляющие минимум функционалу

$$J = \int_0^T Q_t(M(t), y(t), P(t)) dt, \quad (2.5)$$

где величина T равна заданному времени движения от известной начальной точки до известной конечной, причем начальная и конечная скорости центра масс самолета тоже заданы. Заметим, что значение функционала (2.5) равно массе израсходованного топлива за все время полета.

Заменим в (2.1) независимую переменную t на дальность x . Это допустимо, поскольку горизонтальная проекция $V \cos \theta$ скорости центра масс неманевренного самолета никогда не равна нулю. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \theta, & \frac{dV}{dx} &= \frac{g}{V} \left(\frac{n_x}{\cos \theta} - \operatorname{tg} \theta \right) \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{g}{V^2} \left(\frac{n_y}{\cos \theta} - 1 \right), & \frac{dm}{dx} &= -\frac{Q_t(M, y, P)}{V \cos \theta}, & \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{V \cos \theta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда граничные условия можно записать в форме

$$\begin{aligned} V(x_0) &= V_0, & \theta(x_0) &= \theta_0, & m(x_0) &= m_0, & t(x_0) &= 0 \\ V(x_T) &= V_T, & \theta(x_T) &= \theta_T, & t(x_T) &= T, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где x_0 — начальная горизонтальная координата центра масс самолета, а x_T — конечная. В дальнейшем будем полагать $x_0 = 0$, так как движение летательного аппарата не зависит от положения начала системы координат на оси абсцисс. Функционал (2.5), основываясь на соотношениях (2.6), перепишем в виде

$$J = \int_0^{x_T} \frac{Q_t(x)}{V \cos \theta} dx \quad (2.8)$$

Искомые управления $C_y(x)$ и $P(x)$, доставляющие минимум функционалу (2.8), были получены в статье [12] с помощью классического варианта метода динамического программирования Беллмана. Подробное описание этого варианта применительно к рассматриваемой задаче можно найти в работе [16]. Также были найдены соответствующие оптимальные траектории, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (2.6) с начальными условиями (2.7). В процессе вычислений были учтены сложные и разнообразные фазовые и иные ограничения, которые будут описаны ниже.

3. Ограничения. Разрешенные значения коэффициента подъемной силы C_y принадлежат отрезку $0 \leq C_y \leq C_{y \max}(M)$, где

$$C_{y \max}(M) = \begin{cases} C_{y1}, & M < M_c \\ C_{y1} + (M - M_c) \sum_{i=0}^4 M_{ci} M^i, & M \geq M_c \end{cases} \quad (3.1)$$

В формулах (3.1) величины C_{y1} , M_c , M_{ci} известны.

Допустимые значения величин y и V образуют замкнутую область, причем высота полета y не должна превышать 14000 м и не должна быть меньше 100 м, а модуль вектора скорости центра масс самолета V ограничен снизу функцией $V_{\min} = V_{\min}(y)$, а сверху — функцией $V_{\max} = V_{\max}(y)$:

$$V_{\min} = \sum_{j=0}^3 h_j (y - y_0)^j, \quad V_{\max} = \sum_{i=0}^4 H_i (y - y_0)^i, \quad (3.2)$$

где y_0 , H_i и h_j — известные постоянные величины.

Величина P силы тяги двигателей ограничена снизу и сверху функциями $P_{\min}$ и $P_{\max}$ соответственно. Они определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_{\min} &= D_{\min}^{-1} \sum_{i=0}^4 \left(\sum_{j=0}^2 \xi_{ij} \lambda_M^j (M - M_p)^j \right) \lambda_y^i (y - y_p)^i \\
D_{\min} &= \sum_{i=0}^3 \left(\xi_{0i}^* + \xi_{li}^* \lambda_M (M - M_p) \right) \lambda_y^i (y - y_p)^i \\
P_{\max} &= D_{\max}^{-1} \sum_{i=0}^7 \left(\sum_{j=0}^5 \eta_{ij} \lambda_M^j (M - M_p)^j \right) \lambda_y^i (y - y_p)^i \\
D_{\max} &= \sum_{i=0}^3 \left(\sum_{j=0}^2 \eta_{ji}^* \lambda_M^j (M - M_p)^j \right) \lambda_y^i (y - y_p)^i,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где λ_M , M_p , λ_y , y_p , ξ_{0i}^* , ξ_{li}^* , ξ_{ij} , η_{ji}^* и η_{ij} — известные константы.

Значение угла наклона траектории θ должно удовлетворять ограничению $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$.

Величина нормальной скоростной перегрузки должна быть неотрицательной и не превышать значения $n_y^{\max} = 4$.

Заметим, что соотношения (2.3), (2.4), (3.1)–(3.3) представляют собой численные аппроксимации экспериментальных данных.

4. Оптимальные траектории. Возьмем десять характерных оптимальных траекторий, отличающихся друг от друга длительностью полета и соответствующих граничным условиям (2.7): $V_0 = 140$ м/с, $\theta_0 = 0$, $m_0 = 6 \times 10^4$ кг, $x_T = 10^6$ м, $V_T = 140$ м/с, $\theta_T = 0$. Вычисления были проведены для площади крыла, равной $S = 110.16$ м².

На рис. 2 изображены зависимости количества времени, необходимого для удаления от начальной точки на определенное расстояние, от этого расстояния. Видно, что длительность полета находится в диапазоне от 48 до 58 мин. Чем выше находится кривая, тем больше экономия топлива на описываемой ею траектории. Заметим, что на рис. 2 показаны только находящиеся вблизи конечной точки участки графиков, что дает возможность лучше увидеть различия между полными временами полета для полученных траекторий. Сами оптимальные траектории представлены на рис. 3. Чем выше находится график на рис. 3, тем меньше время движения самолета для соответствующего решения.

Рассмотрим указанные траектории с точки зрения приведенных выше ограничений. Выберем на каждой из них множество точек, удаленных друг от друга на 5000 м. Для каждой из выбранных точек вычислим значение функции $C_y = C_y(M)$ и отобразим его на рис. 4, где показано множество, состоящее из всех этих значений для всех десяти кривых. Наиболее близкий к данному множеству участок кривой (3.1), ограничивающей максимально возможное значение коэффициента подъемной силы $C_{y\max}$, показан на рис. 4, кривая 1. Видно, что все точки лежат значительно ниже данной кривой и, следовательно, все полученные решения удовлетворяют условию (3.1).

Теперь для той же самой совокупности удаленных друг от друга на 5000 м точек всех десяти траекторий возьмем значения модуля скорости V и высоты y и поместим соответствующие точки на координатную плоскость с абсциссой V и ординатой y . Две кривые на рис. 5 показывают внешние границы допустимого множества согласно формулам (3.2), в то время как высота полета y должна удовлетворять неравенству $100 \text{ м} \leq y \leq 14000 \text{ м}$.

Из рис. 5 следует, что ограничения на модуль скорости и высоту нигде не достигаются, хотя несколько точек, соответствующих дозвуковому полету на низких высотах, находятся вблизи ограничения.

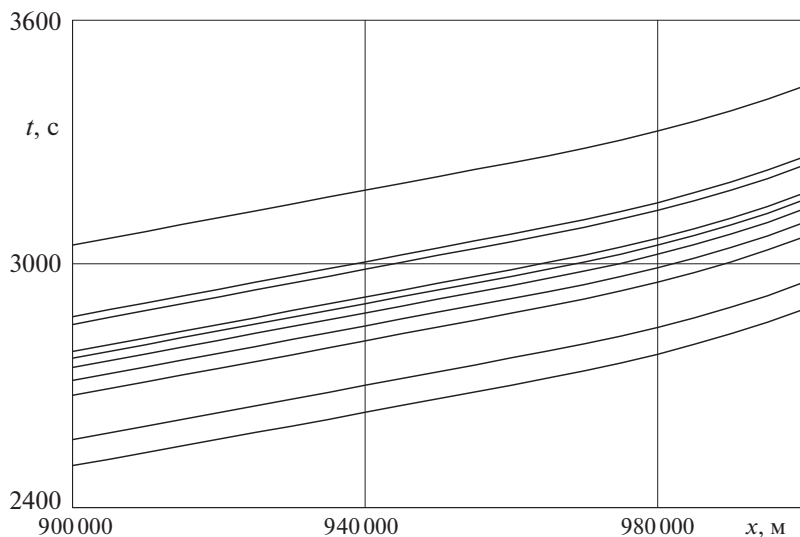


Рис. 2.

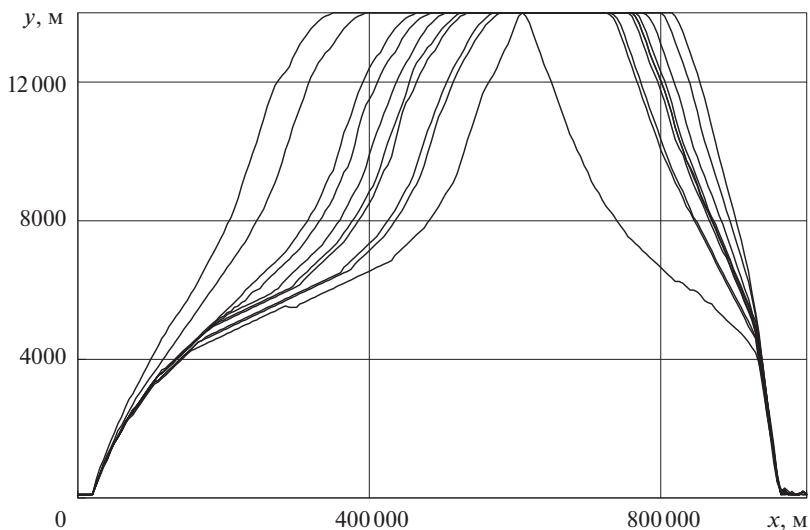


Рис. 3.

Ограничения (3.3) на величину силы тяги двигателей достигаются, часть каждого из оптимальных решений лежит на них. В качестве примеров на рис. 6–8 показаны эти ограничения и найденные оптимальные зависимости силы тяги от дальности. Данные рисунки соответствуют самой верхней, пятой и самой нижней кривым на рис. 3. На рис. 6–8 обозначено 1 – найденное решение, 2 – график $P_{\max} = P_{\max}(x)$, 3 – график $P_{\min} = P_{\min}(x)$. Видно, что решение выходит как на верхнее, так и на нижнее ограничение, причем на отрезках, которые нельзя считать малыми по сравнению с общей

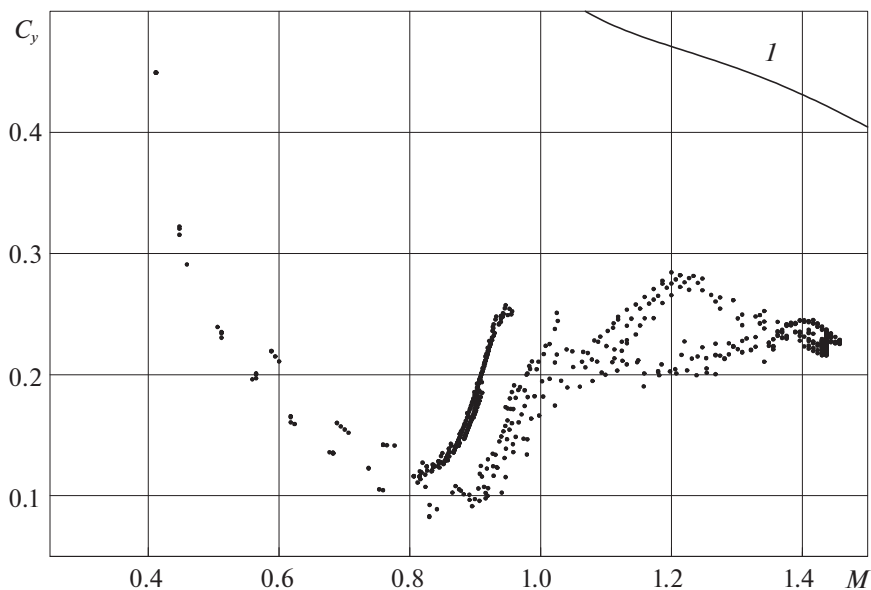


Рис. 4.

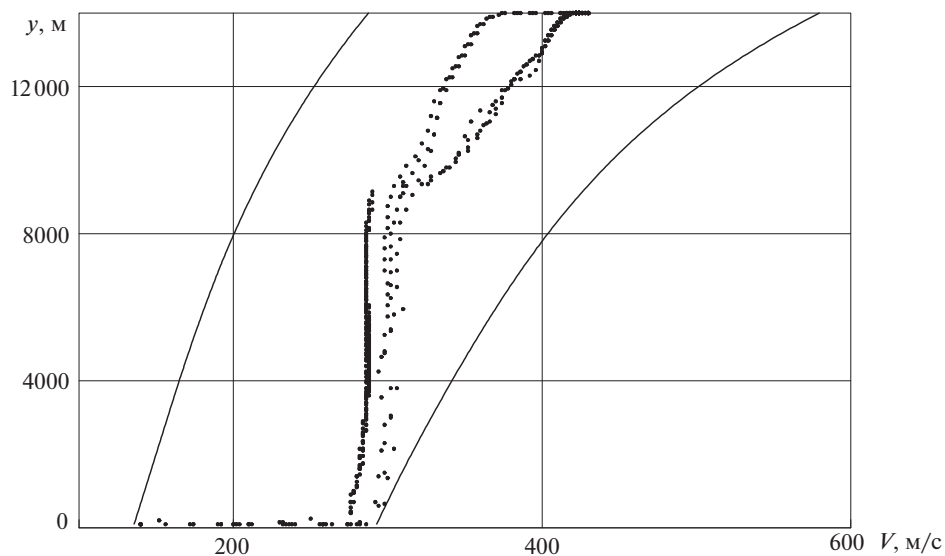


Рис. 5.

дальностью полета. Заметим, что локальные максимумы и минимумы на графиках, обозначенных I , вызваны вычислительными погрешностями. Что касается ограничений на величины угла наклона траектории θ и нормальной скоростной перегрузки n_y , то для рассматриваемых оптимальных траекторий справедливы неравенства $-11^\circ < \theta < 6^\circ$

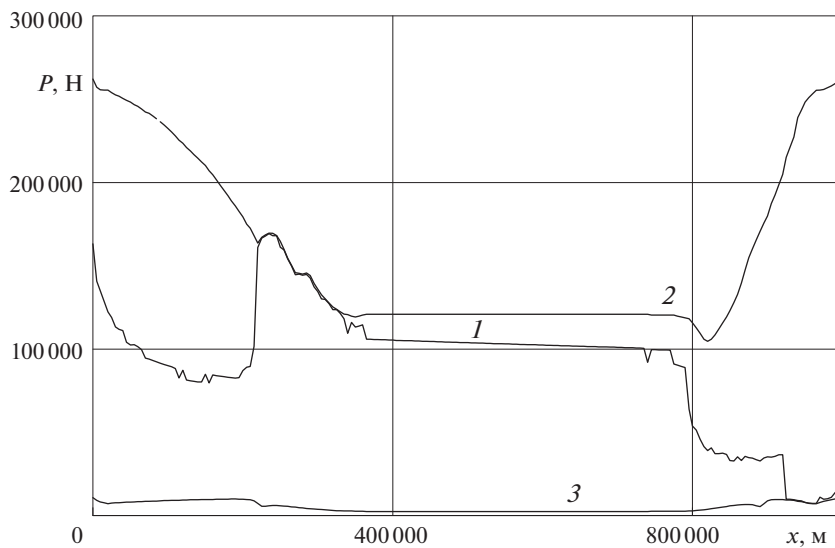


Рис. 6.

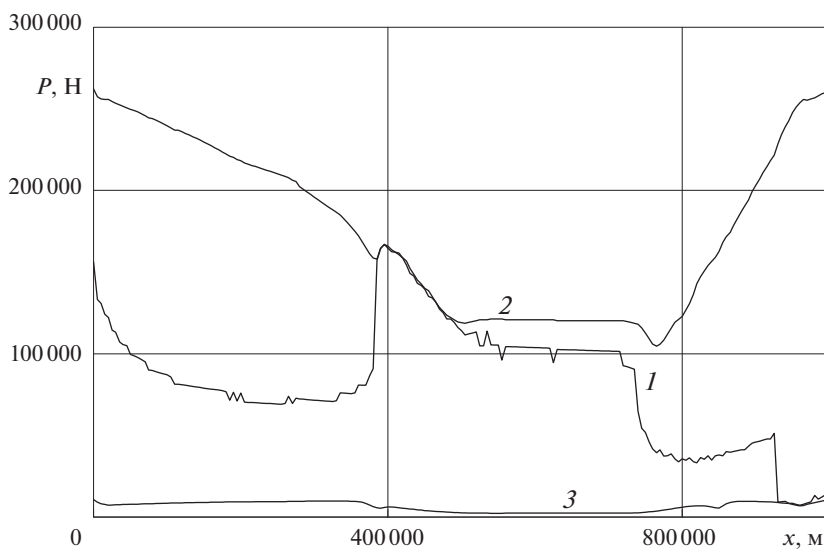


Рис. 7.

и $0.8 < n_y < 1.3$. Следовательно, указанные ограничения удовлетворены, причем выход на них отсутствует и полученные значения далеки от предельно допустимых.

Закключение. Из всех многочисленных и сложных ограничений, наложенных на оптимальные решения, существенными оказались лишь условия на высоту полета и силу тяги двигателей. Полученный результат является новым и ранее в научной литературе не упоминался. Из рис. 3 следует, что наибольшее влияние на вид оптимальной

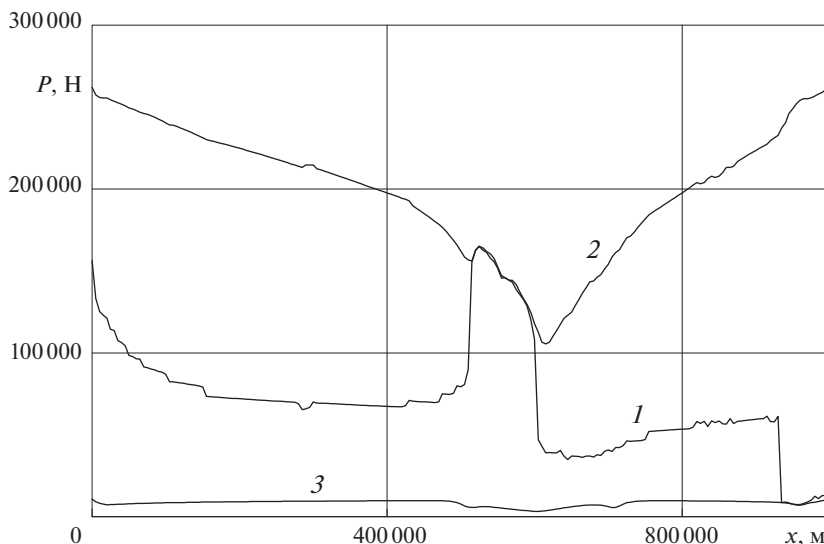


Рис. 8.

траектории оказало ограничение максимальной высоты полета. Что касается условий, наложенных на силу тяги двигателей, то можно использовать следующий стандартный способ (см., например, [17]). Введем скаляр u согласно следующим формулам:

$$U_p = \frac{1}{2}(P_{\max} + P_{\min}), \quad U_m = \frac{1}{2}(P_{\max} - P_{\min}), \quad P = U_p + uU_m; \quad |u| \leq 1$$

Это преобразование позволяет заменить управление P с ограничениями (3.3), зависящими от фазовых переменных, на управление u , ограничения на которое не зависят от фазовых переменных.

Таким образом, при вычислениях согласно принципу максимума Л.С. Понтрягина достаточно принимать во внимание лишь одно фазовое ограничение — на максимальную высоту полета. Затем необходимо убедиться в том, что все остальные условия выполнены. И только в случае, когда хотя бы одно из них нарушено, целесообразно применять методы, требующие больших вычислительных ресурсов.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 21-51-12004) и средствами государственного бюджета по теме государственного задания (госрегистрация 123021700055-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York: Wiley, 1963.
2. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton: Univ. Press, 1957.
3. Rosenow J., Strunck D., Fricke H. Trajectory optimization in daily operations // CEAS Aeronaut. J. 2020. V. 11. P. 333–343.
4. Murrieta-Mendoza A., Botez R.M. Methodology for vertical-navigation flight-trajectory cost calculation using a performance database // J. Aerosp. Inf. Syst. 2015. V. 12. № 8. P. 519–532.
5. Alligier R. Predictive distribution of mass and speed profile to improve aircraft climb prediction // J. Air Transp. 2020. V. 28. № 3. P. 114–123.
6. Franco A., Rivas D. Optimization of multiphase aircraft trajectories using hybrid optimal control // J. Guid. Control Dyn. 2015. V. 38. № 3. P. 452–467.

7. *Murrieta-Mendoza A., Romain C., Botez R.M.* 3D cruise trajectory optimization inspired by a shortest path algorithm // *Aerospace*. 2020. № 7. P. 99–119.
8. *Soler M., Olivares A., Staffetti E.* Multiphase optimal control framework for commercial aircraft four-dimensional flight-planning problems // *J. Aircr.* 2015. V. 52. № 1. P. 274–286.
9. *Garca-Heras J., Soler M., Saez F.J.* Collocation methods to minimum-fuel trajectory problems with required time of arrival in ATM // *J. Aerosp. Inf. Syst.* 2016. V. 13. № 7. P. 243–265.
10. *Langelaan J.W.* Long distance/duration trajectory optimization for small UAVs // in: *AIAA Guidance, Navigation and Control Conf.* South Carolina: Hilton Head, 2007. P. 3654–3667.
11. *Rosenow J., Lindner M., Scheiderer J.* Advanced flight planning and the benefit of in-flight aircraft trajectory optimization // *Sustainability*. 2021. V. 13. № 3. P. 1383–1401.
12. *Кумакишев С.А., Шматков А.М.* Траектории гражданского сверхзвукового самолета, оптимальные по расходу топлива // *Изв. РАН ТиСУ*. 2022. № 5. С. 118–130.
13. *Rosenow J., Förster S., Lindner M., Fricke H.* Multi-objective trajectory optimization // *Int. Transp.* 2016. V. 68. № 1. P. 40–43.
14. *Kumakshev S.A., Shmatkov A.M.* Flight Trajectory optimization without decomposition into separate stages // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2018. V. 468. № 012033.
15. *Бочкарев А.Ф., Андреевский В.В., Белоконов В.М. и др.* Аэромеханика самолета: динамика полета. М.: Машиностроение, 1985.
16. *Grevtsov N.M., Kumakshev S.A., Shmatkov A.M.* Optimization of the flight trajectory of a non-maneuvrable aircraft to minimize fuel consumption by the dynamic programming method // *JAMM*. 2017. V. 81. Iss. 5. P. 368–374.
17. *Желнин Ю.Н., Утёмов А.Е., Шматков А.М.* Оптимальный по быстрдействию маневр “петля” без потери скорости // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2012. № 6. С. 170–185.

Constraints in the Problem of Calculating Optimal Trajectories for a Supersonic Non-Maneuverable Aircraft

S. A. Kumakshev^{a,#} and A. M. Shmatkov^a

^a*Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: kumak@ipmnet.ru*

The influence of phase and other constraints on the method of searching for the trajectories of the movement of a civil supersonic aircraft, which are optimal in terms of fuel consumption, is considered. Based on the solutions found by the dynamic programming method, taking into account numerous restrictions on flight altitude, pitch angle, normal high-speed overload, aircraft speed, engine thrust, etc., it is shown that almost all of these conditions can be ignored during the initial stage of calculations, since the optimal solution does not reach them. Therefore, one can first apply the maximum principle, and use the dynamic programming method only in those cases where a substantial part of the constraints turns out to be significant.

Keywords: supersonic aircraft, optimal trajectory, phase constraint, dynamic programming method, maximum principle

REFERENCES

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Wiley, 1963.
2. *Bellman R.* Dynamic Programming. Princeton: Univ. Press, 1957.
3. *Rosenow J., Strunck D., Fricke H.* Trajectory Optimization in Daily Operations // *CEAS Aeronaut. J.*, 2020, vol. 11, pp. 333–343.
4. *Murrieta-Mendoza A., Botez R.M.* Methodology for vertical-navigation flight-trajectory cost calculation using a performance database // *J. Aerosp. Inf. Syst.*, 2015, vol. 12, no. 8, pp. 519–532.
5. *Alligier R.* Predictive distribution of mass and speed profile to improve aircraft climb prediction // *J. Air Transp.*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 114–123.

6. *Franco A., Rivas D.* Optimization of multiphase aircraft trajectories using hybrid optimal control // J. Guid. Control Dyn., 2015, vol. 38, no. 3, pp. 452–467.
7. *Murrieta-Mendoza A., Romain C., Botez R.M.* 3D cruise trajectory optimization inspired by a shortest path algorithm // Aerospace, 2020, no. 7, pp. 99–119.
8. *Soler M., Olivares A., Staffetti E.* Multiphase optimal control framework for commercial aircraft four-dimensional flight-planning problems // J. Aircr., 2015, vol. 52, no. 1, pp. 274–286.
9. *Garca-Heras J., Soler M., Saez F.J.* Collocation methods to minimum-fuel trajectory problems with required time of arrival in ATM // J. Aerosp. Inf. Syst., 2016, vol. 13, no. 7, pp. 243–265.
10. *Langelaan J.W.* Long distance/duration trajectory optimization for small UAVs // in: AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. South Carolina: Hilton Head, 2007, pp. 3654–3667.
11. *Rosenow J., Lindner M., Scheiderer J.* Advanced flight planning and the benefit of in-flight aircraft trajectory optimization // Sustainability, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 1383–1401.
12. *Kumakshev S.A., Shmatkov A.M.* Optimal fuel consumption trajectories of a civil supersonic aircraft // J. Comput. Syst. Sci. Int., 2022, vol. 61, no. 4, pp. 664–676.
13. *Rosenow J., Förster S., Lindner M., Fricke H.* Multi-objective trajectory optimization // Int. Transp., 2016, vol. 68, no. 1, pp. 40–43.
14. *Kumakshev S.A., Shmatkov A.M.* Flight trajectory optimization without decomposition into separate stages // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng., 2018, vol. 468, no. 012033.
15. *Bochkarev A.F., Andreevsky V.V., Belokonov V.M. et al.* Aircraft Aeromechanics: Flight Dynamics. Moscow: Mashinostroenie, 1985. (in Russian)
16. *Grevtsov N.M., Kumakshev S.A., Shmatkov A.M.* Optimization of the flight trajectory of a non-maneuvrable aircraft to minimize fuel consumption by the dynamic programming method // JAMM, 2017, vol. 81, iss. 5, pp. 368–374.
17. *Zhelnin Yu.N., Utemov A.E., Shmatkov A.M.* Minimum time loop maneuver with no speed loss // J. Comput. Syst. Sci. Int., 2022, vol. 51, no. 6, pp. 833–848.

УДК 531.36

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК ПОКОЯ
В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ**© 2023 г. С. В. Нестеров^{1,*}¹Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

*e-mail: bayd@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 12.04.2023 г.

После доработки 15.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Для двумерной колебательной системы с мнимыми характеристическими корнями линеаризованных уравнений предложен способ, позволяющий упростить вычисления и не нуждающийся в требованиях аналитичности правых частей уравнений. Способ основан на разложении вектор-функции правых частей уравнений на солёноидальную и потенциальную составляющие. Получены интегральные оценки устойчивости положения равновесия.

Ключевые слова: устойчивость положения равновесия, методы Ляпунова

DOI: 10.31857/S0032823523040094, **EDN:** DZLVPR

1. Постановка задачи. Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x + f_2(x, y) \quad (1.1)$$

Пусть функции f_1 и f_2 имеют непрерывные частные производные по x , y и, кроме того, удовлетворяли соотношению

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq M(x^2 + y^2)$$

При этом, система (1.1) имеет тривиальное решение, называемое точкой покоя $(0, 0)$.

В прикладных задачах часто требуется выяснить, будет ли фазовая траектория при увеличении времени покидать окрестность точки покоя или нет, иными словами, устойчива или неустойчива точка покоя. В нашем случае линеаризованная система, получаемая отбрасыванием возмущающих членов f_1 и f_2 , имеет пару чисто мнимых характеристических корней, и поэтому с помощью линейного приближения нельзя ответить на вопрос об устойчивости точки покоя.

В предположении аналитичности функций f_1 и f_2 рядом исследователей, начиная с Пуанкаре [1] и Ляпунова [2], был дан способ исследования устойчивости с помощью интегрирования системы (1.1) в виде рядов по степеням малой амплитуды начального отклонения от точки покоя. Этот способ значительно усложняется, если приходится вычислять большое число коэффициентов ряда, чтобы выяснить, устойчива точка покоя или нет.

Ниже излагается способ, позволяющий упростить вычисления и освободиться от требования аналитичности функций f_1 и f_2 .

Поскольку каждый вектор может быть представлен в виде двух составляющих соленоидальной и потенциальной, то запишем вектор $\vec{a} = \{f_1, f_2\}$ в виде

$$f_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad f_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1.2)$$

причем

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad (1.3)$$

Соотношением (1.3) функция Ψ определяется неоднозначно (с точностью до произвольного решения уравнения $\Delta \Psi = 0$). Подчиним решения уравнения (1.3) условию

$$|\Psi(x, y)| \leq M_2 (x^2 + y^2)^{3/2}$$

После того как будет выбрано некоторое частное решение уравнения (1.3), однозначно определяется потенциальная составляющая.

Выберем некоторое частное решение уравнения (1.3) Ψ , тогда система (1.1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.4)$$

В качестве невозмущенной системы будем рассматривать следующую

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система (1.5) имеет первый интеграл вида

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \Psi(x, y) \quad (1.6)$$

На фазовой плоскости (x, y) функция $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \Psi$ определяет вблизи начала координат семейство замкнутых кривых, окружающих начало координат. Будем считать (x, y) решением возмущенной системы (1.4) и проследим за изменением величины H . Имеем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\delta \Phi}{\delta y} \quad (1.7)$$

В начальный момент времени $t = 0$ величина $H = H_0$, то есть на фазовой плоскости точка (x_0, y_0) лежит на невозмущенной траектории $H_0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \Psi$. Найдём приращение величины ΔH за время $T(H_0)$, равное периоду движения фазовой точки по невозмущенной траектории, имеем

$$\begin{aligned} \Delta H &= \int_0^{T(H_0)} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\delta \Phi}{\delta y} \right) dt = \\ &= \int_0^{T(H_0)} \left[\left(\dot{x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \dot{y} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] dt = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где контурный интеграл вычисляется от начальной точки (x_0, y_0) вдоль возмущенной траектории.

Наряду с ΔH рассмотрим изменение $\Delta_1^* H$ вдоль невозмущенной траектории за то же самое время, то есть имеем

$$\Delta_1^* H = \int_0^{T(H_0)} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\delta \Phi}{\delta y} \right) dt = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \quad (1.9)$$

Кроме того, возьмем еще одно приращение вдоль невозмущенной траектории, которое определим следующим образом

$$\Delta_2^* H = \int_0^{T(H_0 + \Delta H)} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\delta \Phi}{\delta y} \right) dt = \oint_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \quad (1.10)$$

При этом Γ_1^* и Γ_2^* — фазовые траектории невозмущенной системы, соответствующие постоянным H_0 и $H_0 + \Delta H$. Рассмотрим разности $\Delta H - \Delta_1^* H$ и $\Delta_2^* H - \Delta H$

$$\begin{aligned} \Delta H - \Delta_1^* H &= - \iint_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy - \iint_{l(1,6)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \\ \Delta_2^* H - \Delta H &= - \iint_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy - \iint_{l(1,6)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \\ \Delta H &= \frac{1}{2} \left\{ \Delta_1^* H + \Delta_2^* H - \iint_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy + \iint_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy \right\} \end{aligned}$$

Далее имеем (рис. 1)

$$\iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_2} = \iint_{1,2,4,6,1} - \iint_{4,5,6,4} - \iint_{1,2,3,6,1} \quad (1.11)$$

Все подынтегральные функции интегралов, стоящих в правой части равенства (1.11), вычисляются в кольце $H_0, H_0 + \Delta H$. Если обозначить через M_3 наибольшее значение величины

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right| = \left| \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| \quad \text{в кольце} \quad H_0, H_0 + \Delta H,$$

то получим следующую оценку

$$\left| \iint_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy - \iint_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy \right| \leq 3M_3 S,$$

где S — площадь кольца.

Можно показать, что $S \leq C_1(H_0)|\Delta H|$, причем $C_1(H_0) \rightarrow 0$ при $H_0 \rightarrow 0$.

Таким образом, величина ΔH удовлетворяет неравенству

$$\Delta H \geq \frac{1}{2} \left\{ \left(\Delta_1^* H + \Delta_2^* H \right) - 3M_3 C_1 |H| \right\} \quad (1.12)$$

Неравенство (1.12) эквивалентно следующим двум неравенствам:

$$1) \quad \Delta H \geq \frac{1}{2} \frac{\Delta_1^* H + \Delta_2^* H}{1 + \frac{3}{2} M_3 C_1}, \quad \text{если} \quad \Delta H > 0$$

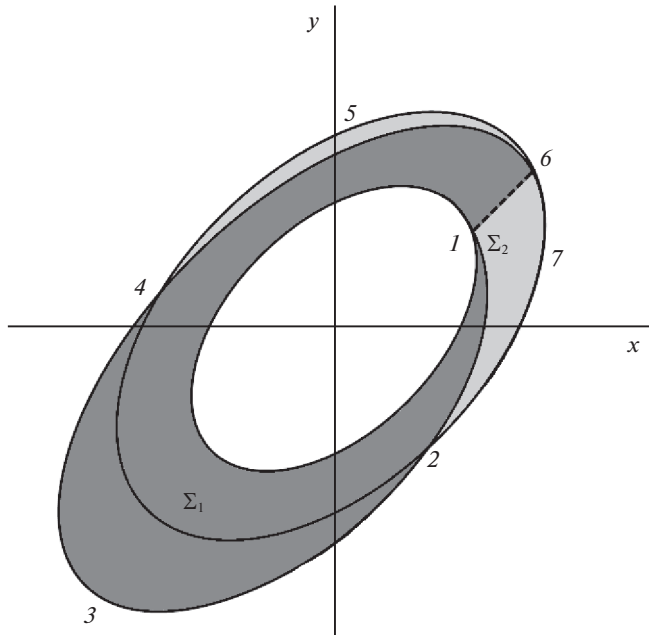


Рис. 1.

$$2) \Delta H \geq \frac{1}{2} \frac{\Delta_1^* H + \Delta_2^* H}{1 - \frac{3}{2} M_3 C_1}, \quad \text{если} \quad \Delta H < 0$$

Можно всегда выбрать такой круг радиуса r_1 , что для всех точек этого круга выполняется условие $1 > \frac{3}{2} M_3 C_1$. Далее предположим, что в круге r_2 , для всех невозмущенных траекторий выполняется условие $\Delta^* > 0$ (при $H \neq 0$). Выберем $r_0 = \min \{r_1, r_2\}$, тогда в круге радиуса r_0 $\Delta H > 0$, причем получаем оценку снизу для ΔH

$$\Delta H \geq \frac{1}{2} \frac{\Delta_1^* H + \Delta_2^* H}{1 + \frac{3}{2} M_3 C_1}$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ точка на фазовой плоскости лежит в круге радиуса $r_3 \ll r_0$. Поскольку ΔH положительна, то через конечное число периодов точка покидает круг радиуса r_3 и вернуться туда не может, то есть начало координат неустойчиво.

Замечание. Если траектория возмущенной системы $\langle n-1 \rangle$ раз пересекает невозмущенную траекторию $H_0 + \Delta H$ для ΔH получается оценка снизу

$$\Delta H \geq \frac{1}{2} \frac{\Delta_1^* H + \Delta_2^* H}{1 + \frac{n}{2} M_3 C_1}$$

Итак, доказана следующая теорема:

Теорема 1. Если в некоторой окрестности начала координат приращение функции H за период невозмущенного решения больше нуля, то начало координат неустойчиво.

Аналогично предыдущему может быть доказана теорема об асимптотической устойчивости точки покоя, если потребовать, чтобы приращение функции H за период невозмущенного решения было меньше нуля.

Возникает следующий вопрос: можно ли выбором решения однородного уравнения $\Delta\psi = 0$ (причем порядок по r должен быть не меньше, чем функции Ψ) изменить знак величин Δ_1^*H , Δ_2^*H , а, следовательно, ΔH .

Теорема 2. Если точка $(0, 0)$ неустойчива, то для любого выбора функции

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \Psi + \tilde{\psi},$$

приращение функции $\Delta\tilde{H}$ за период невозмущенного решения, соответствующего функции $\tilde{H}$, сохраняет знак.

Итак, пусть точка $(0, 0)$ неустойчива; предположим, что выбором решения уравнения $\Delta\tilde{\psi} = 0$ можно сделать приращение $\Delta_1^*\tilde{H}$ за период невозмущенного решения, соответствующего функции $\tilde{H}$, отрицательным, тогда точка $(0, 0)$ будет асимптотически устойчива в соответствии с теоремой об асимптотической устойчивости. Поскольку мы пришли к противоречию с условием о неустойчивости точки, то знак приращения $\Delta_1^*\tilde{H}$ измениться не может.

Практически вычисления могут быть проведены следующим образом: пусть выбрана функция

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \Psi$$

Приращение Δ^*H вдоль невозмущенной траектории вычисляется так

$$\Delta^*H = \oint_{\Gamma^*} \frac{\partial\Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x} dy = \oint_{\Gamma^*} f_2 dx - f_1 dy = - \iint_{\Sigma_{\Gamma^*}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.13)$$

Для облегчения вычислений целесообразно ввести полярные координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad y = -r \sin \varphi$$

Уравнение невозмущенной траектории записывается так

$$H = \frac{1}{2}r^2 + \Psi(r \cos \varphi, -r \sin \varphi),$$

или с точностью до высших степеней H

$$r = \sqrt{2H} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2H}} \Psi(\sqrt{2H} \cos \varphi, -\sqrt{2H} \sin \varphi) + \dots \right\}$$

Равенство (1.13) в полярных координатах ($x = r \cos \varphi$, $y = -r \sin \varphi$) принимает вид

$$\Delta^*H = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) r dr \quad (1.14)$$

$$\alpha = \sqrt{2H} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2H}} \Psi(\sqrt{2H} \cos \varphi, -\sqrt{2H} \sin \varphi) + \dots \right\}$$

2. Примеры

2.1. Рассмотрим устойчивость положения равновесия системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - \beta x^2 - 2\gamma xy + \alpha y^2$$

Траектории невозмущенной системы определяются соотношением

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)(\beta x + \gamma y)$$

Вычисления по формуле (1.14) приводят к результату

$$\Delta^* H = \pi(\gamma\beta + 3\alpha)H^2 + O(H^2) \quad (2.1)$$

Следовательно, начало координат устойчиво, если $\gamma\beta + 3\alpha < 0$ и неустойчиво, если $\gamma\beta + 3\alpha > 0$.

Все рассуждения непосредственно переносятся на системы вида

$$\frac{dx}{dt} = y^{2k+1} + f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x^{2m+1} + f_2(x, y),$$

где k, m — целые положительные числа, а функции f_1 и f_2 имеют непрерывные частные производные по x, y и удовлетворяют условию

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq M\sqrt{x^{2m+3} + y^{4k+3}}$$

Как и в предыдущем случае, вводим соленоидальную и потенциальную составляющие вектора $\vec{a} = (f_1, f_2)$. Тогда функции Ψ и Φ справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}, \end{aligned}$$

а невозмущенные траектории определяются соотношением

$$H = \frac{y^{2(k+1)}}{2(k+1)} + \frac{x^{2(m+1)}}{2(m+1)} + \Psi(x, y)$$

Вычисляем приращение вдоль невозмущенной траектории: если оно оказывается больше нуля, то точка $(0, 0)$ неустойчива; если меньше нуля — то точка $(0, 0)$ устойчива асимптотически.

2.2. Пусть система уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y + x^5, \quad H = \frac{1}{2}(y^2 + x^4), \quad \frac{dy}{dt} = -2x^3 + y^5$$

Вычисляем приращение вдоль невозмущенной траектории;

$$\Delta^* H = \int_{\Gamma^*} y^5 dx - x^5 dy = 4 \int_0^{\sqrt[4]{2H}} \frac{2H - x^4 + 2x^8}{\sqrt{2H - x^4}} dx > 0$$

В данном примере неустойчивость точки $(0, 0)$ легко обнаруживается с помощью второго метода Ляпунова, поскольку

$$\frac{dH}{dt} = y^6 + 2x^8 > 0,$$

если $x, y \neq 0$

2.3. Нетривиальный пример (теорема Четаева неприменима)

$$\frac{dx}{dt} = y - x^5, \quad H = \frac{1}{2}(y^2 + x^4), \quad \frac{dy}{dt} = -2x^3 + y^5$$

Второй метод Ляпунова здесь неприменим, поскольку функция $H = \frac{1}{2}(x^4 + y^2)$ не удовлетворяет условиям этого метода [3]. Применяя вышеизложенный способ, имеем

$$\Delta^* H = 4 \int_0^{\sqrt[4]{2H}} \frac{2H - x^4 - 2x^8}{\sqrt{2H - x^4}} dx = (2H)^{3/4} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)} \right\} > 0$$

Таким образом, точка $(0, 0)$ оказывается неустойчивой.

Для решения вопроса об устойчивости точки $(0, 0)$ в этом случае можно воспользоваться интегрированием системы в виде рядов методом, изложенным в работе Ляпунова [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.; Л.: ГИТТЛ, 1947.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952.
4. Ляпунов А.М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1963.

On the One Method of Analyzing the Stability of Rest Points in Critical Cases

S. V. Nesterov^{a, #}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: bayd@ipmnet.ru*

For a two-dimensional oscillatory system with imaginary characteristic roots of linearized equations, a method is proposed that simplifies calculations and does not require the analyticity of the right-hand sides of the equations. The method is based on the decomposition of the vector function of the right-hand sides of the equations into solenoidal and potential components. Integral estimates for the stability of the equilibrium position are obtained.

Keywords: equilibrium stability, Lyapunov methods

REFERENCES

1. *Poincaré H. Curves Defined by Differential Equations.* Moscow; Leningrad: GITTL, 1947. (in Russian)
2. *Lyapunov A.M. The General Problem of Stability of Motion.* Moscow; Leningrad: GITTL, 1950. 471 p. (in Russian)
3. *Malkin I.G. Theory of Motion Stability.* Moscow; Leningrad: GITTL, 1952. (in Russian)
4. *Lyapunov A.M. Investigation of One of the Special Cases of the Problem of Motion Stability.* Leningrad: Leningrad Univ. Press, 1963.

МОДЕЛИРОВАНИЕ АМПЛИТУДЫ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ УДАРЕ ПАДАЮЩЕГО ГРУЗА С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА

© 2023 г. А. А. Битюрин^{1,*}

¹Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

*e-mail: sntk_2015@maul.ru

Поступила в редакцию 11.11.2022 г.

После доработки 18.05.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Рассматривается колебательный процесс стержневой системы произвольной формы при ударном взаимодействии с падающим грузом. Система может состоять из большого числа стержней, соединенных между собой жестко или шарнирно, причем нанесение удара предполагается по одному из стержневых элементов, вызывая, таким образом, сложный колебательный процесс.

В качестве примера моделируются колебания жестко заделанной статически неопределимой плоской двухстоечной рамы, испытывающей падение груза заданной массы и предударной скорости. Одна из вертикальных стоек рамы имеет начальную кривизну, наличие которой влияет на максимальную амплитуду возникающих при ударе поперечных колебаний. Удар груза о ригель рамы моделируется при учете деформации в области контакта, что оправдано с точки зрения точности проводимых расчетов, поскольку в противном случае величина ударной силы окажется завышенной. При моделировании ударного взаимодействия груза и рассматриваемой стержневой системы принимается, что падающий груз имеет форму цилиндра с определенной длиной образующей. Используется линеаризация зависимости между усилием и деформацией цилиндрических поверхностей.

Предлагаемая методика моделирования амплитуды поперечных колебаний дает возможность дальнейшего исследования характеристик колебательного процесса в зависимости от массы падающего груза и его предударной скорости, а также от конфигурации стержневой системы. Подчеркивается актуальность работы для расчетов элементов конструкций самого различного назначения, испытывающих ударное воздействие, поскольку представленная модель может быть использована для инженерных расчетов широкого класса стержневых систем.

Ключевые слова: стержневая система, рама, стойка, ригель, прогиб, колебательный процесс, груз, скорость, масса, деформация, моделирование

DOI: 10.31857/S0032823523040021, EDN: WDGPEH

1. Введение. Применение различных стержневых систем в строительстве, машиностроении и прочих отраслях настолько широко и многообразно, что обсуждение этого вопроса излишне. В большинстве случаев системы стержней выполняют функции несущих конструкций, воспринимающих как статическую, так и динамическую нагрузки. Последняя возникает при внезапном приложении внешней силы, например при ударном нагружении.

Ударная нагрузка может возникать как в процессе эксплуатации конструкции, так и при возникновении аварийной ситуации, например при взрыве, сейсмической активности, дорожно-транспортном происшествии, и т.д.

Решение задач расчета механических систем на динамическую нагрузку имеет важнейшее значение, поскольку неучет динамического характера взаимодействия элементов конструкций существенно сказывается на точности проводимых расчетов, а нередко приводит и к неверному результату [1–5].

Как уже отмечалось в предыдущих работах [2–6], основную сложность решения динамических задач представляет их нелинейность. Решение поставленной задачи усложняется, если кроме возникающих сил инерции при динамическом нагружении, дополнительно учитываются упругие или пластические деформации в области ударного взаимодействия тех или иных элементов.

В известных исследованиях [2–6] динамический расчет реализовывался для идеальных прямолинейных стержневых элементов, не имеющих дефектов в виде кривизны, трещин в материале и т.д., и при отсутствии начальных внешних воздействий в виде изгибающего момента и поперечной силы, углового перемещения начального сечения. Однако, в реальных конструкциях практически всегда присутствуют те или иные дефекты или несовершенства в виде кривизны, различных эксцентриситетов, неоднородности материала, и прочее. В задачах для многоэлементных стержневых систем возникает дополнительная начальная нагрузка в жестких узлах соединений стержневых элементов.

Вследствие упругой деформации в зоне контакта процесс удара усложняется и возникает несколько повторных соударений. Впервые учет местных деформаций в области контакта для стержня был осуществлен С.П. Тимошенко [7]. В дальнейшем его теория была использована другими исследователями, в частности Б.М. Абрамовым и А.Б. Абрамовым [8]. В своей работе они рассматривают колебания и усилия, возникающие от удара упругого стержня о середину двухопорной балки [8]. Частным случаем является удар твердого тела о балку и продольный удар упругого стержня о жесткую преграду.

Учет пластической деформации при соударении тел требует задействования обширной теории пластичности, что дополнительно образует усложняет решение поставленной задачи.

В современных научных работах обсуждается решение задач устойчивости упругих арок при наличии стягивающих нитей [9], исследуются изгибные волны в балке, имеющей повреждения в материале [10], разрабатываются модели изгиба упругих тонких стержней с применением метода конечных элементов [11]. Исследованию колебаний и устойчивости плоских рам посвящены иностранные работы [12–15]. Как отмечено авторами работ [9–15], намеченные подходы к решению поставленных задач актуальны для повышения точности соответствующих технических расчетов.

Таким образом, проблема учета влияния тех или иных внешних воздействий, в том числе и динамических на дальнейшее поведение различного рода стержневых систем, имеющих широкое распространение, на сегодняшний день довольно ярко выражена, несмотря на нередко кажущееся ее отсутствие или несущественность.

2. Постановка задачи и методика решения. В настоящей работе разрабатывается модель расчета амплитуды поперечных колебаний стержневой системы, содержащей n жестко или шарнирно соединенных стержневых элементов длиной l , один из которых воспринимает ударное воздействие падающего груза массой m (рис. 1).

Вначале известными методами [1] вычисляется циклическая частота колебаний рассматриваемой стержневой системы. Далее, стержневой элемент, воспринимающий ударную нагрузку, представляется в виде жестко или шарнирно соединенной балки определенной длины, частота свободных поперечных колебаний которой ω

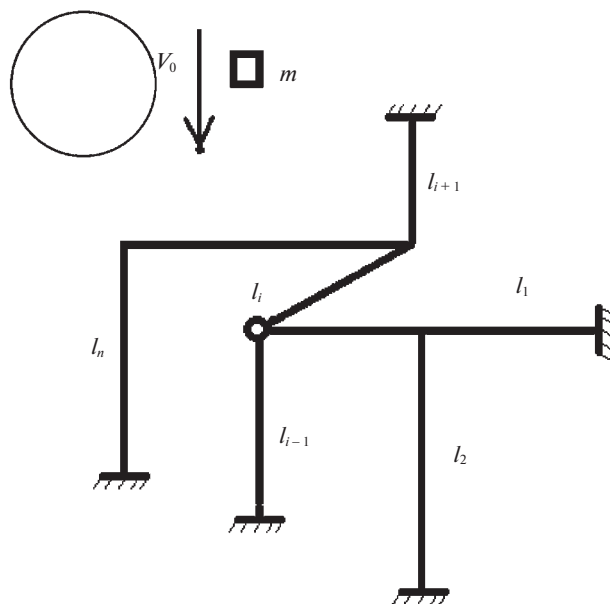


Рис. 1.

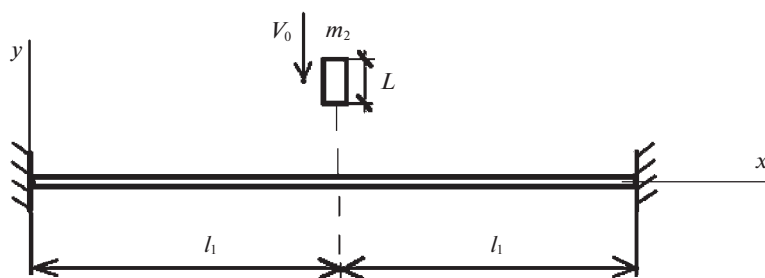


Рис. 2.

совпадает с частотой собственных колебаний исходной стержневой системы. Для построения модели взаимодействия падающего груза с рассматриваемой балкой, груз, имеющий предударную скорость V_0 , представляется в виде цилиндра с длиной образующей L , массой m_2 (рис. 2), что позволяет использовать линеаризацию зависимости между усилием и деформацией цилиндрических поверхностей [8].

Следующий этап – это решение уравнения Релея поперечных колебаний балки с учетом инерции поворота (рис. 2), но без учета поперечных сдвигов и продольных колебаний [8]:

$$\begin{aligned} \varphi^4 \left(\partial^4 y / \partial x^4 \right) + \left(\partial^2 y / \partial t^2 \right) - r^2 \left(\partial^4 y / \partial x^2 \partial t^2 \right) &= 0 \\ \varphi^4 &= E_1 I_1 / m_1, \quad 0 \leq x \leq l_1 - 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для ударного груза (стержня) справедливо волновое уравнение

$$\left(\partial^2 y / \partial t^2\right) - a^2 \left(\partial^2 y / \partial x^2\right) = 0, \quad a^2 = E_2 / \rho l_1 + 0 \leq x \leq l_1 + L, \quad (2.2)$$

где E_2 — модуль упругости материала груза; r — радиус инерции сечения балки; ρ — плотность материала падающего груза (стержня), m_1 — единичная масса балки, $E_1 I_1$ — изгибная жесткость балки, равная изгибной жесткости стержневого элемента исходной системы (рис. 1), воспринимающего удар.

Задавая соответствующие начальные и граничные условия в зависимости от предупредительного состояния балки (рис. 2), а также, опуская математические преобразования [8], и вводя обозначения $\delta_1 = (m_2 / 2m_1 l_1)$, $\delta_2 = (cl_1^3 / 6E_1 I_1)$, $(\sqrt{\omega_k} / \phi) l_1 = \phi_k$, получаем выражение для расчета ударной силы P :

$$P = \left(m_2 V_0 / l_1\right) \sqrt{E_1 I_1 / m_1} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k^2 \sin(\phi_k^2 / l_1^2) \phi^2 t}{1 + (\delta_1 \phi_k^2 / 4l_1) \int_0^{l_1} \left(\sin(\phi_k / l_1) x / \cos \phi_k - (\operatorname{sh}(\phi_k / l_1) x / \operatorname{ch} \phi_k)\right)^2 dx}, \quad (2.3)$$

где c — коэффициент пропорциональности между силой удара и местной деформацией. В дальнейшем, при известном значении ударной силы в зависимости от постановки задачи можно рассчитать различные параметры колебательного процесса рассматриваемой исходной стержневой системы (рис. 1).

На практике наиболее часто имеет место нецентрально ударное взаимодействие груза и балки со смещением от ее середины на расстояние x . Воспользуемся приближенным условием равенства максимальных прогибов $(y_{\max})_1$ при падении груза на первоначальную балку при имеющемся смещении ударного взаимодействия x от ее середины (рис. 3, а), и прогиба $(y_{\max})_2$ при падении груза в среднем сечении балки большей изгибной жесткости $E_1 I_1'$ (рис. 3, б), методика расчета ударной силы для которой известна [8].

При одинаковом материале обеих балок ($E_1 = \text{const}$), опуская ряд преобразований [20], можно рассчитать момент инерции поперечного сечения I_1' по формуле:

$$I_1' = \frac{l_1^3 I_1 (2l_1 - x)^2}{4(l_1 - x)^3 (l_1 + x)^2}, \quad (2.4)$$

при $0 \leq x \leq l_1$.

3. Пример. Рассмотрим колебательный процесс, возникающий при ударном взаимодействии падающего груза массой $m_2 = 10$ кг и имеющего предупредительную скорость $V_0 = 1$ м/с, с жестко заделанной П-образной статически неопределимой плоской рамой (рис. 4).

Длина ригеля $2l$ и высота стоек h равны 2 м, размер сечения стоек и ригеля 0.03×0.03 м², материал — сталь СТ-5. Груз имеет форму цилиндра с длиной образующей L и падает строго в среднем сечении ригеля ($x = 0$, рис. 4). Координата x точки приложения ударной силы отсчитывается от середины ригеля рамы в направлении исследуемой стойки (рис. 4). Рассматривается случай прямолинейной стойки рамы и случай начального прогиба стойки $y_0 = 5$ мм.

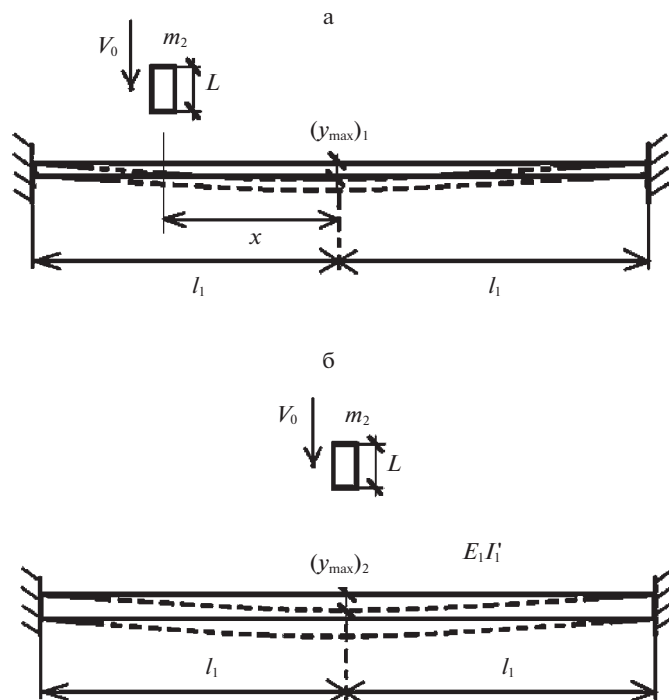


Рис. 3.

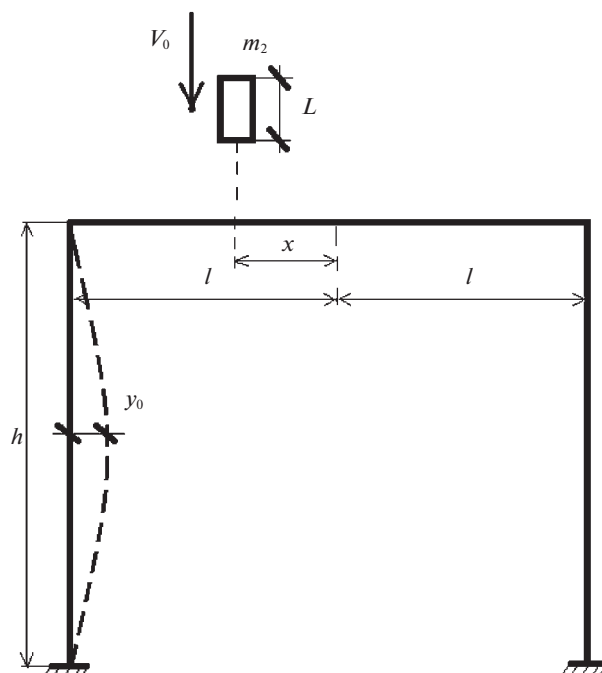


Рис. 4.

Для вычисления циклической частоты собственных колебаний рассматриваемой плоской рамы при внезапно приложенной силе P применяется метод Релея [1]:

$$\omega = \sqrt{\frac{105 \cdot 64 \cdot (2k + 1) \cdot (k + 2)}{136k^2 + 117k + 26 + 48s^2k^2\beta}} \cdot \frac{E_1 I_1}{m_1 l^4}, \quad (3.1)$$

где $s = \frac{h}{2l}$; $\beta = \frac{A_2 h}{2A_1 l}$; $k = \frac{I_1 h}{2I_2 l}$; I_1, I_2 — моменты инерции сечений ригеля и стойки относительно их продольных осей, m_1 — масса единицы длины ригеля, A_1 — площадь сечения ригеля, A_2 — площадь сечения стойки, E_1 — модуль упругости материала ригеля и стоек рамы. После подстановки исходных данных в формулу (3.1) получим значение $\omega = 149$ p/c.

Далее, реализуется замена ригеля жестко заделанной по обоим торцам балкой (рис. 2), имеющей ту же частоту собственных колебаний ω , что и исходная рама (рис. 4). Изгибная жесткость и единичная масса балки и ригеля рамы совпадают. Длина $2l_1$ балки будет в этом случае отличаться от длины ригеля $2l$. Для вычисления длины балки воспользуемся зависимостью, приведенной в [20]:

$$2l_1 = 0.75\pi \sqrt[4]{\frac{E_1 I_1}{m_1 \omega^2}}, \quad (3.2)$$

в соответствии с которой получим $2l_1 = 2.56$ м.

Введение множителя 2 при l_1 удобно для последующей процедуры моделирования. Для решения уравнений продольных и поперечных колебаний (2.1), (2.2) груза задаются соответствующие начальные и граничные условия [8]:

$$\text{а) } y = 0 \text{ при } 0 \leq x_1 \leq \alpha L; \quad \text{б) } (\partial y / \partial t) = f(x_1), \quad (3.3)$$

где $f(x_1) = 0$ при $0 \leq x_1 \leq l_1 - 0$ и $f(x_1) = v$ при $l_1 + 0 \leq x_1 \leq l_1 + \alpha L$, $\alpha = \frac{m_2}{2Lm_1}$

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k = 0; \quad \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega_k X_k = f(x_1), \quad (3.4)$$

условия для функции y и каждой функции X_k [8]:

$$\begin{aligned} \text{а) } X_k(0) = 0; \quad \text{б) } X_k''(0) = 0; \quad \text{в) } X_k'(l_1 - 0) = 0 \\ \text{г) } X_k'''(l_1 - 0) + \frac{c}{2E_1 I_1} [X_k(l_1 + 0) - X_k(l_1 - 0)] = 0 \\ \text{д) } X_k'(l_1 + 0) - \frac{c}{E_2 A_3 \alpha} [X_k(l_1 + 0) - X_k(l_1 - 0)] = 0; \quad \text{е) } X_k'(l_1 + \alpha L) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где c — коэффициент пропорциональности между силой удара и местной деформацией; A_3 — площадь сечения падающего груза [8]. Условие г) получено из выражения для скачка $\frac{\partial^3 y}{\partial x_1^3}$ в точке приложения сосредоточенной силы, которая равна $c[y(l_1 + 0) - y(l_1 - 0)]$.

Условие д) учитывает, что $\frac{\partial y(l + 0)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial y(l + 0)}{\partial x_1}$ [8].

Далее, в соответствии с зависимостью (2.3), вычисляется ударная сила P в области контакта ригеля рамы и падающего груза. При дальнейших расчетах максимального прогиба стойки рамы, мы используем полученное значение величины ударной силы, возникающей при ударном взаимодействии груза и балки (рис. 2).

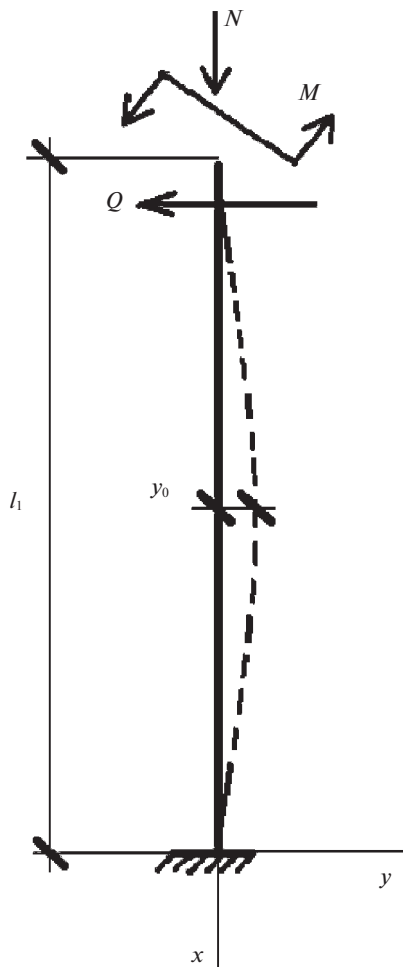


Рис. 5.

В результате падения груза на ригель рамы вертикальная стойка (рис. 5), являющаяся жестко заделанным стержнем по обоим торцам, будет испытывать воздействие продольной и поперечной нагрузки, изгибающего момента, вследствие чего возникнут поперечные колебания. Амплитуда колебаний будет рассчитана методом начальных параметров с применением волновой модели продольного удара, учитывая, что указанные выше нагрузки являются кратковременными [16–19].

Осуществляя переход к исходной раме, и учитывая вид закрепления ее ригеля, будем иметь значение продольной нагрузки, действующей на вертикальную стойку рамы N , зависящую при этом и от координаты x сечения ударного взаимодействия с грузом (рис. 4).

Применительно к стойке рамы используется новая система координат y, x (рис. 5), и задавая соответствующие граничные условия, решается дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня постоянного поперечного сечения, несущего равномерно распределенную массу [16]:

$$\left(dy^4/d\xi^4\right) + v^2 \left(d^2y/d\xi^2\right) - u^4 y = 0, \quad (3.6)$$

где y — прогиб оси стержня (стойки), $\xi = x/h$ относительная координата, $v^2 = Nh^2/E_1I_2$; $u^4 = (m_3\omega^2h^4/E_1I_2)$, N — продольная сила (положительная при сжатии), h — высота стойки, E_1I_2 — изгибная жесткость стойки, m_3 — масса единицы длины стойки, ω — частота свободных колебаний рамы.

После ряда преобразований [16] применительно к рассматриваемой плоской раме (рис. 4), для обоих случаев соответственно, будем иметь:

$$y_{\max} = (2y_0 + hv_0)F_{\xi}^{IV} - \frac{Ph^2}{12E_1I_2}F_{\xi}^{III} - \frac{0.125Ph^3}{E_1I_2}F_{\xi}^{II} \quad (3.7)$$

$$y_{\max} = hv_0F_{\xi}^{IV} - \frac{Ph^2}{12E_1I_2}F_{\xi}^{III} - \frac{0.125Ph^3}{E_1I_2}F_{\xi}^{II}, \quad (3.8)$$

где F_{ξ} — функция, зависящая от корней уравнения (3.6) и параметра ξ ; F_{ξ}^I , F_{ξ}^{II} , F_{ξ}^{III} , F_{ξ}^{IV} , F_{ξ}^V , F_{ξ}^{VI} — производные этой функции.

После проведения расчетов, получим при $y_0 = 5$ мм искомую максимальную амплитуду колебаний стойки рамы $y_{\max}^* = 0.29$ мм и при y_0 равным нулю (прямолинейная стойка) $y_{\max}^* = 0.12$ мм.

4. Анализ результатов и выводы. В работе осуществлялось моделирование максимальной амплитуды поперечных колебаний стойки рамы в зависимости от различных значений начального прогиба левой стойки y_0 (рис. 4, 5), массы падающего груза m_2 , предупредной скорости груза V_0 и координаты падения груза x . Высота стойки рамы, длина ригеля, размеры сечения и материал остаются без изменений.

Результаты моделирования иллюстрированы на графиках (рис. 6, а–г). Цифрой 1 обозначена зависимость $y_{\max}^*$ для стойки рамы, имеющей постоянный начальный прогиб $y_0 = 5$ мм, цифрой 2 — для прямолинейной стойки, при различных m_2 и V_0 .

Зависимость $y_{\max}^*$ от начального прогиба y_0 стойки (рис. 6, а) представлена для интервала изменения y_0 от 0 до 10 мм при $m_2 = 10$ кг и $V_0 = 3$ м/с.

График изменения $y_{\max}^*$ на рис. 6, б представлен в зависимости от массы груза, падающего в среднем сечении ригеля рамы ($x = 0$, рис. 4), при $V_0 = 3$ м/с.

Зависимость $y_{\max}^*$ от предупредной скорости V_0 груза $m_2 = 10$ кг, падающего на ригель в его среднем сечении (рис. 6, в) представлена для интервала изменения от 1 м/с до 10 м/с.

Зависимость $y_{\max}^*$ от координаты падения груза на ригель представлена для интервала изменения x от 0 до 0.81 в направлении исследуемой стойки рамы от среднего сечения ригеля (рис. 4). Результаты получены при $m_2 = 10$ кг и $V_0 = 1$ м/с (рис. 6, г).

На основании полученных результатов можно сформулировать следующие выводы:

1. Во всех случаях изменение амплитуды поперечных колебаний стойки $y_{\max}^*$ в зависимости от тех или иных параметров динамического процесса, имеет нелинейный характер (рис. 6, а–г).

2. При возрастании координаты x падения груза на ригель рамы амплитуда поперечных колебаний стойки, имеющей начальный прогиб, возрастает многократно быстрее в сравнении с амплитудой колебаний прямолинейной стойки, (рис. 6, г). Схожая картина имеет место и при возрастающей массе падающего груза (рис. 6, б), что вызывает немалый научный интерес.

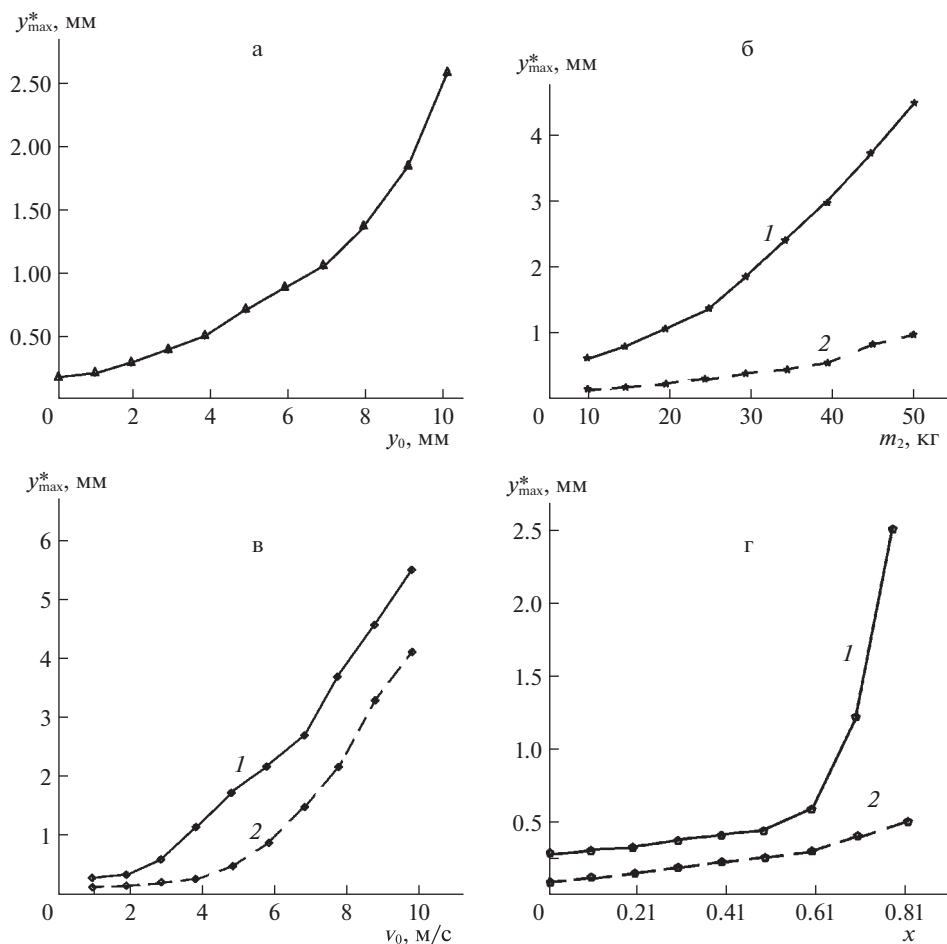


Рис. 6.

3. С ростом предупредной скорости груза амплитуды поперечных колебаний стойки в обоих исследуемых случаях возрастают практически одинаково (рис. 6, в).

Заключение. В представленной работе, с применением метода начальных параметров и подхода, учитывающего деформацию в области контакта соударяемых тел, изложена методика расчета амплитуды поперечных колебаний произвольной стержневой системы, испытывающей поперечный удар падающего груза. Учет местной деформации, как было отмечено выше, позволяет получить более точные результаты расчета ударной силы, поскольку в этом случае учитывается рассеяние энергии удара. Моделируя соударение тел, как абсолютно жестких, значения ударной силы получаются завышенными, поэтому применение методики расчета, разработанной в [8] с использованием линеаризации зависимости между усилием и деформацией цилиндрических поверхностей существенно повышает точность расчета.

Дальнейшее развитие обозначенных в работе подходов в своей совокупности даст возможность расчета более разнообразных стержневых систем и конструкций, воспринимающих ударную нагрузку. Такие задачи актуальны при моделировании воз-

действий взрывов, землетрясений, и прочих аварийных ситуаций, сопровождающихся динамическим воздействием на различные сооружения.

Необходимо отметить, что представленная модель расчета ударной силы с учетом деформации в области контакта, позволяет осуществлять моделирование динамического взаимодействия груза и стержневых элементов конструкций из самых различных материалов, применяющихся в технике и строительстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 732 с.
2. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 65. № 6. С. 112–119.
3. Малый В.И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 138–144.
4. Малый В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 181–186.
5. Малый В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 52–61.
6. Малышев Б.М. Устойчивость стержня при ударном сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 137–142.
7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 474 с.
8. Абрамов А.Б., Абрамов Б.М. Определение усилий при продольно-поперечном ударе // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1975. № 9. С. 58–64.
9. Тарасов В.Н. Об устойчивости подкрепленных арок // Вычисл. мех. сплошных сред. 2019. Т. 12. № 2. С. 202–214.
10. Бриккель Д.М., Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Распространение изгибных волн в балке, материал которой накапливает повреждения в процессе эксплуатации // Вычисл. мех. сплошных сред. 2020. Т. 13. № 1. С. 108–116.
11. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Построение модели изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью и ее реализация методом конечных элементов // Вычисл. мех. сплошных сред. 2020. Т. 13. № 3. С. 256–268.
12. Szmidla J., Wiktorowicz J. The vibration and the stability of a flat frame type Γ realizing the Eulers load taking into account the vulnerability of the structural node connecting the pole and the bolt of the system // Vibrations in Phys. Syst. 2014. V. 26. P. 297–304.
13. Szmidla J. Vibrations and stability of T-type frame loaded by longitudinal force in relation to its bolt // Thin Walled Struct. 2007. V. 45 (10–11). P. 931–935.
14. Sochacki W., Rosikon P., Topczewska S. Constructional damping mounting influence on T type frame vibrations // J. Vibroengng. 2013. V. 15 (4). P. 1866–1872.
15. Tomski L., Przybylski J., Szmidla J. Stability and vibrations of a two-bar frame under a follower force // Zeit. Ang. Math. Mech. 1996. V. S5. Iss. 76. P. 521–522.
16. Чудновский В.Г. Методы расчета колебаний стержневых систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 403 с.
17. Битюрин А.А. Моделирование амплитуды поперечных колебаний однородного стержня при ударе о жесткую преграду с учетом собственного веса // Вестн. Пермского НИПУ. Механика. 2018. № 2. С. 16–23.
18. Битюрин А.А. Моделирование максимального прогиба ступенчатого стержня, имеющего начальную кривизну при ударе о жесткую преграду // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 131–141.
19. Битюрин А.А. Моделирование максимальной амплитуды поперечных колебаний однородных стержней при продольном ударе // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 2. С. 98–109.
20. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наук. думка. 1988. 736 с.

Simulation of The Amplitude of Transverse Oscillations of the Rod System upon Impact of a Falling Load, Taking into account Deformation in the Contact Area

A. A. Bityurin^{a, #}

^a*Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia*

[#]*e-mail: snrk_2015@maul.ru*

The oscillatory process of a rod system of arbitrary shape under shock interaction with a falling load is considered. The system may consist of a large number of rods connected to each other rigidly or pivotally, and striking is assumed to be one of the core elements, thus causing a complex oscillatory process.

As an example, vibrations of a rigidly sealed statically indeterminate flat two-post frame experiencing a drop of a load of a given mass and pre-impact velocity are simulated. One of the vertical pillars of the frame has an initial curvature, the presence of which affects the maximum amplitude of transverse vibrations arising from impact. The impact of the load on the frame crossbar is modeled taking into account the deformation in the contact area, which is justified from the point of view of the accuracy of the calculations, because otherwise the magnitude of the impact force will be overestimated. When modeling the impact interaction of the load and the rod system under consideration, it is assumed that the falling load has the shape of a cylinder with a certain length of the generatrix. Linearization of the relationship between force and deformation of cylindrical surfaces is used.

The proposed method of modeling the amplitude of transverse oscillations makes it possible to further study the characteristics of the oscillatory process depending on the mass of the falling load and its pre-impact velocity, as well as on the configuration of the rod system. The relevance of the work for calculations of structural elements of various purposes experiencing impact is emphasized, since the presented model can be used for engineering calculations of a wide class of core systems.

Keywords: rod system, frame, rack, crossbar, deflection, oscillatory process, load, speed, mass, deformation, modeling

REFERENCES

1. *Filippov A.P.* Vibrations of Deformable Systems. Moscow: Mech. Engng, 1970. 732 p.
2. *Lavrent'ev M.A., Ishlinskii A.Yu.* Dynamic buckling of elastic systems // *Dokl. AN SSSR*, 1949, vol. 65, no. 6, pp. 112–119.
3. *Maly V.I.* Long-wave approximation in the problems on the loss of stability at impact // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1972, no. 4, pp. 138–144.
4. *Maly V.I.* Buckling of the rod under longitudinal impact. Small deflections // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1973, no. 4, pp. 181–186.
5. *Maly V.I.* Buckling of the rod at longitudinal impact. Large deflections // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1975, no. 1, pp. 52–61.
6. *Malyshev B.M.* Stability of a rod under shock compression // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1966, no. 4, pp. 137–142.
7. *Timoshenko S.P.* Vibrations in Engineering. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 474 p.
8. *Abramov A.B., Abramov B.M.* Determination of forces at longitudinal – transverse impact // *Izv. vuzov. Constr.&Archit.*, 1975, no. 9, pp. 58–64.
9. *Tarasov V.N.* On the stability of reinforced arches // *Comput. Mech. Contin. Media*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 202–214.
10. *Brickell D.M., Erofeev V.I., Leont'eva A.V.* Distribution of Flexural waves in a beam, the material which accumulates damage in the process of operation // *Comput. Mech. Contin. Media*, 2020, vol. 13, no. 1, pp. 108–116.
11. *Sargsyan S.O., Khachatryan M.V.* the model of the bending of micropolar elastic thin terina with a circular axis and its implementation by the finite element method // *Comput. Mech. Contin. Media*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 256–268.

12. *Szmidla J., Wiktorowicz J.* The vibration and the stability of a flat frame type Γ realizing the Eulers load taking into account the vulnerability of the structural node connecting the pole and the bolt of the system // *Vibrations in Phys. Syst.*, 2014, vol. 26, pp. 297–304.
13. *Szmidla J.* Vibrations and stability of T-type frame loaded by longitudinal force in relation to its bolt // *Thin Walled Struct.*, 2007, vol. 45 (10–11), pp. 931–935.
14. *Sochacki W., Rosikon P., Topczewska S.* Constructional damping mounting influence on T type frame vibrations // *J. Vibroengng.*, 2013, vol. 15 (4), pp. 1866–1872.
15. *Tomski L., Przybylski J., Szmidla J.* Stability and vibrations of a two-bar frame under a follower force // *Zeit. Ang. Math. Mech.*, 1996, vol. S5, iss. 76, pp. 521–522.
16. *Chudnovsky G.V.* Methods of Calculation of Fluctuations in the Core Systems. Kiev: Acad. Sci. Ukrainian SSR, 1952. 403 p.
17. *Bityurin A.A.* Modeling of the amplitude of transverse vibrations of a homogeneous rod when hitting a rigid barrier, taking into account its own weight // *Bull. Perm Nat. Res. Polytech. Univ. Mechanics*, 2018, no. 2, pp. 16–23.
18. *Bityurin A.A.* Modeling the maximum deflection speed of the rod having an initial curvature on impact with a rigid barrier // *Izv. RAS. MTT*, 2019, no. 5, pp. 131–141.
19. *Bityurin A.A.*, Modeling of the maximum amplitude of transverse vibrations of homogeneous rods under longitudinal impact // *Izv. RAS. MTT*, 2021, no. 2, pp. 98–109.
20. *Pisarenko G.S.* Handbook on the Resistance of Materials. Kiev: Naukova Dumka, 1988. 736 p.

УДК 517.956

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ
КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПО ОТЫСКАНИЮ ИСТОЧНИКА**© 2023 г. О. В. Фадеева^{1,*}¹Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

*e-mail: faoks@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.

После доработки 15.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Для уравнения колебания балки изучаются обратные задачи по отысканию правой части, т.е. источника колебаний. Решения задач методами спектрального анализа и интегральных уравнений Вольтерра построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования. При обосновании существования решения обратной задачи по определению множителя правой части, зависящей от пространственной координаты, возникает проблема малых знаменателей. В связи с этим установлены оценки знаменателей, гарантирующие их отделенность от нуля, с указанием соответствующей асимптотики. На основании этих оценок обоснована сходимость рядов в классе регулярных решений уравнения колебаний балки.

Ключевые слова: уравнение балки, обратные задачи, метод спектрального анализа, единственность, существование, интегральное уравнение Вольтерра

DOI: 10.31857/S0032823523040057, **EDN:** MMTCAD

1. Введение. В строительной механике, авиастроении, машиностроении и других областях значимую роль играют задачи о колебаниях балок, стержней и пластин. Описание таких колебательных процессов приводит к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем уравнение колебания струны ([1], с. 143–145), ([2], с. 276–277), ([3], с. 314–315), ([4], с. 34), ([5], с. 75–77).

Рассмотрим однородную балку длины l , один конец которой свободен, а другой наглухо заделан. Ее вынужденные изгибные поперечные колебания под действием непрерывной внешней силы $G(x, t)$, при отсутствии вращательного движения, описываются уравнением

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} = G(x, t),$$

где ρ — линейная плотность балки, S — площадь поперечного сечения, E — модуль упругости материала, J — момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси. Это уравнение можно переписать в виде

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = F(x, t), \quad (1.1)$$

где $\alpha^2 = EJ/\rho S$, $F(x, t) = G(x, t)/\rho S$.

Отметим, что при изучении задач расчета устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей так же приходят к уравнению (1.1) ([6], с. 326).

В данной работе рассматривается уравнение (1.1) в области

$$D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

где l и T — заданные положительные действительные числа, с граничными условиями, соответствующими консольной балке,

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_t(x, 0) = v(x); \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.3)$$

В данной работе исследуются следующие задачи.

Задача 1. В области D найти решение $u(x, t)$ уравнения (1.1), такое, что

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_{x,t}^{2,1}(\bar{D}), \quad (1.4)$$

и удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3), где $F(x, t)$, $\tau(x)$, $v(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Задача 2. Пусть $F(x, t) = f(x)g(t)$. Найти функции $f(x)$ и $u(x, t)$, удовлетворяющие уравнению (1.1) в области D , такие, что $f(x) \in C[0, l]$, а функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (1.2)–(1.4) и, кроме того,

$$u(x, t_0) = \varphi(x); \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.5)$$

где $g(t)$, $\varphi(x)$, $\tau(x)$ и $v(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, t_0 — заданная точка из $(0, T]$.

Задача 3. Пусть $F(x, t) = f(x)g(t)$. Найти функции $g(t)$ и $u(x, t)$, удовлетворяющие уравнению (1.1) в области D , такие, что $g(t) \in C[0, T]$, а функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (1.2)–(1.4) и, кроме того,

$$u(x_0, t) = h(t); \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.6)$$

где $f(x)$, $h(t)$, $\tau(x)$ и $v(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, x_0 — заданная точка из $(0, l)$.

Из постановок задач видно, что задача 1 представляет собой прямую начально-граничную задачу для неоднородного уравнения колебаний балки (1.1). Задачи 2 и 3 являются обратными, поэтому условия (1.5) и (1.6) являются дополнительными для определения соответственно сомножителей $f(x)$ и $g(t)$ правой части $F(x, t)$ уравнения (1.1).

Данная работа является продолжением исследований автора [7], посвященных обоснованию корректности постановки начально-граничной задачи 1 для уравнения (1.1). Основное внимание здесь уделяется задачам 2 и 3, постановки которых аналогичны работам [8–12], где похожие задачи изучались для уравнений теплопроводности, колебаний струны и других дифференциальных уравнений второго порядка и высоких порядков.

В данной работе на основе прямой задачи 1, изученной в [7], доказаны теоремы единственности и существования решений обратных задач 2 и 3. При этом решения построены в виде суммы рядов. Отметим, что при обосновании сходимости рядов в задаче 2 возникает проблема малых знаменателей, создающая дополнительные трудности. Установлены оценки, гарантирующие отделенность от нуля знаменателей, с указанием соответствующей асимптотики. На основании этих оценок обоснована сходимость рядов в классе регулярных решений уравнения (1.1).

2. Построение решения прямой задачи. В этом пункте кратко приведены результаты исследования задачи 1, полученные в [7], где методом интегралов энергии доказана единственность решения этой задачи. Методом разделения переменных построено

решение задачи (1.2)–(1.4) для уравнения (1.1) в явном виде как суммы ряда по системе собственных функций следующей спектральной задачи:

$$\begin{aligned} X^{IV}(x) + \lambda X(x) &= 0; \quad 0 < x < l \\ X(0) &= X'(0) = X''(l) = X'''(l) = 0 \end{aligned}$$

Собственные значения этой спектральной задачи находятся по формуле $\lambda_n = -d_n^4$, где d_n — корни уравнения $\operatorname{ch} dl \cdot \cos dl = -1$, для которых справедлива асимптотическая формула

$$d_n = \frac{\pi}{l} \left(n - \frac{1}{2} + (-1)^n \Theta_n \right), \quad \Theta_n \in \left(0, \frac{1}{2} \right), \quad \Theta_n = O\left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (2.1)$$

Система собственных функций имеет вид

$$X_n(x) = \frac{\operatorname{sh} d_n l + \sin d_n l}{\operatorname{ch} d_n l + \cos d_n l} (\operatorname{ch} d_n x - \cos d_n x) + \sin d_n x - \operatorname{sh} d_n x,$$

или

$$X_n(x) = \begin{cases} a_n \operatorname{ch} d_n \left(x - \frac{1}{2} l \right) + b_n \sin d_n \left(x - \frac{1}{2} l \right), & n = 2k - 1 \\ c_n \operatorname{sh} d_n \left(x - \frac{1}{2} l \right) + f_n \cos d_n \left(x - \frac{1}{2} l \right), & n = 2k, \end{cases}$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{d_n l}{2}}, \quad b_n = \frac{1}{\cos \frac{d_n l}{2}}, \quad c_n = -\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{d_n l}{2}}, \quad f_n = \frac{1}{\sin \frac{d_n l}{2}}.$$

Нормируя эту систему, получаем

$$Y_n(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}, \quad \|X_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{l} \operatorname{cth} \frac{d_n l}{2}, & n = 2k - 1 \\ \sqrt{l} \operatorname{th} \frac{d_n l}{2}, & n = 2k \end{cases}$$

Отметим, что система функций $Y_n(x)$ полна и образует ортонормированный базис в пространстве $L_2[0, l]$.

Тогда решение задачи 1 определяется в виде суммы ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x), \quad (2.2)$$

где $u_n(t)$ определяются по формуле

$$u_n(t) = \int_0^l u(x, t) Y_n(x) dx,$$

и после вычисления принимают вид

$$u_n(t) = \tau_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{\nu_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t + \frac{1}{\alpha d_n^2} \int_0^t F_n(s) \sin [\alpha d_n^2 (t - s)] ds, \quad (2.3)$$

$$\text{где } \tau_n = \int_0^l \tau(x) Y_n(x) dx, \quad \nu_n = \int_0^l \nu(x) Y_n(x) dx, \quad F_n(t) = \int_0^l F(x, t) Y_n(x) dx.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если функция $\tau(x)$ принадлежит классу $C^6[0, l]$, $\tau(0) = \tau'(0) = \tau''(l) = \tau'''(l) = \tau^{(4)}(0) = \tau^{(5)}(0) = 0$, функция $v(x)$ — классу $C^4[0, l]$, $v(0) = v'(0) = v''(l) = v'''(l) = 0$, а функция $F(x, t)$ — классу $C(\bar{D}) \cap C_x^4(\bar{D})$ и $F(0, t) = F_x(0, t) = F_{xx}(l, t) = F_{xxx}(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$, то существует единственное решение задачи 1 и оно определяется рядом (2.2).

Полное доказательство этой теоремы приведено в работе [7].

3. Исследование обратной задачи 2. Пусть $F(x, t) = f(x)g(t)$. В силу теоремы 1 функции $f(x)$ и $g(t)$ должны удовлетворять условиям:

$$f(x) \in C^4[0, l], \quad f(0) = f'(0) = f''(l) = f'''(l) = 0; \quad g(t) \in C[0, T]$$

Тогда функции $F_n(t)$ и $u_n(t)$ принимают вид

$$F_n(t) = g(t)f_n, \quad u_n(t) = \tau_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{v_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t + f_n g_n(t), \quad (3.1)$$

где

$$f_n = \int_0^l f(x) Y_n(x) dx, \quad g_n(t) = \frac{1}{\alpha d_n^2} \int_0^t g(s) \sin [\alpha d_n^2 (t-s)] ds \quad (3.2)$$

Удовлетворяя функцию (2.2) условию (1.5), получим уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t_0) Y_n(x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n Y_n(x),$$

где $\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) Y_n(x) dx$.

Тогда с учетом (2.3) найдем

$$f_n = \frac{1}{g_n(t_0)} \left(\varphi_n - \tau_n \cos \alpha d_n^2 t_0 - \frac{v_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t_0 \right), \quad (3.3)$$

при условии, что для всех $n \in N : g_n(t_0) \neq 0$.

Подставляя найденные значения f_n в равенство (2.3), построим в явном виде функции

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \tau_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{v_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t + \frac{g_n(t)}{g_n(t_0)} \left(\varphi_n - \tau_n \cos \alpha d_n^2 t_0 - \frac{v_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t_0 \right) = \\ &= \tau_n \left(\cos \alpha d_n^2 t - \frac{g_n(t)}{g_n(t_0)} \cos \alpha d_n^2 t_0 \right) + \frac{v_n}{\alpha d_n^2} \left(\sin \alpha d_n^2 t - \frac{g_n(t)}{g_n(t_0)} \sin \alpha d_n^2 t_0 \right) + \varphi_n \frac{g_n(t)}{g_n(t_0)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тогда решение задачи 2 находится как сумма рядов

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x) \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(x), \quad (3.5)$$

где $u_n(t)$ и f_n определяются равенствами (3.4) и (3.3) соответственно, при условии, что $g_n(t_0) \neq 0$ для любых $n \in N$.

Из однозначного характера построения решения задачи 2 следует его единственность. Действительно, пусть $g_n(t_0) \neq 0$ при всех $n \in N$ и $\varphi(x) = \tau(x) = v(x) \equiv 0$. Тогда из (3.3) и (3.4) вытекает, что $f_n = 0$ и $u_n(t) \equiv 0$ при всех $n \in N$. В силу чего из формул (2.2) и (3.2) следуют равенства

$$\int_0^l u(x, t) Y_n(x) dx = 0, \quad \int_0^l f(x) Y_n(x) dx = 0,$$

из которых в силу полноты системы функций $Y_n(x)$ на $L_2[0, l]$ следует, что $u(x, t) = 0$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [0, T]$. Тогда из условия (1.4) и непрерывности функции $f(x)$ на $[0, l]$ следует, что $u(x, t) \equiv 0$ в $\bar{D}$ и $f(x) \equiv 0$ на $[0, l]$ при любой функции $g(t) \in C[0, T]$.

Если при некотором t_0 и $n = m$ выражение $g_m(t_0) = 0$, то однородная задача 2 (при $\varphi(x) = \tau(x) = v(x) \equiv 0$) при любой непрерывной функции $g(t)$ имеет ненулевое решение

$$u(x, t) = f_m \frac{1}{\alpha d_m^2} \int_0^t g(s) \sin[\alpha d_m^2(t-s)] ds Y_m(x), \quad f(x) = f_m Y_m(x),$$

где $f_m \neq 0$ — произвольная постоянная.

Выражение $g_n(t_0)$ за счет $\sin(\alpha d_n^2(t-s))$ может обращаться в нуль не более чем в счетном числе точек.

Поэтому возникает проблема малых знаменателей и необходимо установить оценки величин $g_n(t_0)$, гарантирующие их отдаленность от нуля, и указать асимптотику этих оценок при больших n .

Пусть $g(s)$ монотонна на отрезке $[0, t_0]$. Тогда на основании второй теоремы о среднем для некоторой точки $\xi \in (0, t_0)$ справедливо:

$$\begin{aligned} \alpha d_n^2 g_n(t_0) &= g(0) \int_0^\xi \sin[\alpha d_n^2(t_0-s)] ds + g(t_0) \int_\xi^{t_0} \sin[\alpha d_n^2(t_0-s)] ds = \\ &= \frac{g(0)}{\alpha d_n^2} (\cos[\alpha d_n^2(t_0-\xi)] - \cos(\alpha d_n^2 t_0)) + \frac{g(t_0)}{\alpha d_n^2} (1 - \cos[\alpha d_n^2(t_0-\xi)]) = \\ &= \frac{\cos(\alpha d_n^2(t_0-\xi))}{\alpha d_n^2} (g(0) - g(t_0)) + \frac{g(t_0)}{\alpha d_n^2} - \frac{g(0)}{\alpha d_n^2} \cos \alpha d_n^2 t_0; \quad 0 < \xi < t_0 \end{aligned}$$

Пусть $g(s)$ на отрезке $[0, t_0]$ возрастает и неотрицательна. Тогда $g(t_0) = g(0) + \beta$, $\beta \geq 0$, и тогда имеем

$$\begin{aligned} \alpha d_n^2 g_n(t_0) &= \frac{\beta}{\alpha d_n^2} (1 - \cos(\alpha d_n^2(t_0-\xi))) + \frac{g(0)}{\alpha d_n^2} (1 - \cos \alpha d_n^2 t_0) \geq \\ &\geq \frac{g(0)}{\alpha d_n^2} (1 - \cos \alpha d_n^2 t_0) = \frac{2g(0)}{\alpha d_n^2} \sin \frac{\alpha d_n^2 t_0}{2} \end{aligned}$$

Таким образом, при $g(s) \equiv \text{const} \neq 0$ равенство $g_n(t_0) = 0$ возможно только при $\alpha d_n^2 t_0 = 2\pi k$, $k \in N$. В силу (2.1) при больших n : $d_n \approx \frac{\pi}{2l}(2n-1)$, тогда при $d = \frac{\alpha t_0 \pi}{8l^2} = \frac{k}{(2n-1)^2}$ нарушается единственность решения задачи 2.

Итак, установлен критерий единственности решения задачи 2.

Теорема 2. Если существует решение задачи 2, то оно единственно тогда и только тогда, когда $g_n(t_0) \neq 0$ для всех $n \in N$.

Лемма 1. Пусть $g(t)$ — возрастающая и положительная функция на отрезке $[0, T]$ и d — алгебраическое число степени $s \geq 2$. Тогда при больших n справедливы оценки

$$|g_n(t)| \leq \frac{2\|g\|_C}{(\alpha d_n^2)^2} \leq \frac{C_1}{n^4}, \quad |g_n(t_0)| \geq \frac{C_1}{n^{8+\varepsilon}}; \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

где $\|g\|_C = \sup_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$, C_i — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от $\alpha, l, T, \|g\|_C$.

Доказательство проводится аналогично работе [12].

Лемма 2. Пусть d — алгебраическое число степени $s \geq 2$. Тогда при любом $t \in [0, T]$ и больших n справедливы оценки

$$|u_n(t)| \leq C_2 n^{4+\varepsilon} (|\varphi_n| + |\tau_n| + n^{-2} |\nu_n|), \quad |u_n''(t)| \leq C_3 n^{8+\varepsilon} (|\varphi_n| + |\tau_n| + n^{-2} |\nu_n|), \\ |f_n| \leq C_4 n^{8+\varepsilon} (|\varphi_n| + |\tau_n| + n^{-2} |\nu_n|).$$

Справедливость этих оценок следует из формул (3.4) и (3.3) на основании леммы 1. Формально почленным дифференцированием первого ряда из (3.5) составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) Y_n(x), \quad u_{xxxx} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^4 u_n(t) Y_n(x)$$

В силу леммы 2 эти ряды при любых $(x, t) \in \bar{D}$ мажорируются числовым рядом

$$C_5 \sum_{n=1}^{\infty} n^{8+\varepsilon} (|\varphi_n| + |\tau_n| + n^{-2} |\nu_n|), \quad (3.6)$$

для сходимости которого достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия:

$$\tau(x) \in C^{10}[0, l] \\ \tau(0) = \tau'(0) = \tau''(l) = \tau'''(l) = \tau^{(4)}(0) = \tau^{(5)}(0) = \tau^{(6)}(l) = \tau^{(7)}(l) = \tau^{(8)}(0) = \tau^{(9)}(0) = 0 \\ \varphi(x) \in C^{10}[0, l] \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(l) = \varphi'''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(5)}(0) = \varphi^{(6)}(l) = \varphi^{(7)}(l) = \varphi^{(8)}(0) = \varphi^{(9)}(0) = 0 \\ \nu(x) \in C^8[0, l], \quad \nu(0) = \nu'(0) = \nu''(l) = \nu'''(l) = \nu^{(4)}(0) = \nu^{(5)}(0) = \nu^{(6)}(l) = \nu^{(7)}(l) = 0$$

При выполнении этих условий ряд (3.6) мажорируется сходящимся рядом

$$C_6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\varepsilon}}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. Пусть функции $\varphi(x)$, $\tau(x)$, $\nu(x)$ удовлетворяют условиям (3.7), кроме этого, непрерывная функция $g(t)$ и число d удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда существует единственное решение задачи 2 и оно определяется рядами (3.5).

4. Исследование обратной задачи 3. Удовлетворим функцию (2.2) граничному условию (1.6):

$$u(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x_0) = h(t); \quad 0 \leq t \leq T$$

С учетом (3.1) из последнего равенства получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $g(t)$:

$$\int_0^t g(s)K(t,s)ds = \tilde{h}(t); \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.1)$$

где

$$K(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2(t-s) Y_n(x_0); \quad 0 \leq s \leq t \leq T \quad (4.2)$$

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{v_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t \right) Y_n(x_0); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.3)$$

Формально почленным дифференцированием ряда (4.2) составим ряды

$$K'_t(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \alpha d_n^2(t-s) Y_n(x_0), \quad K''_{tt}(t,s) = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 f_n \sin \alpha d_n^2(t-s) Y_n(x_0) \quad (4.4)$$

Аналогично из (4.3) получим

$$\begin{aligned} \tilde{h}'(t) &= h'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha d_n^2 \tau_n \sin \alpha d_n^2 t - v_n \cos \alpha d_n^2 t \right) Y_n(x_0) \\ \tilde{h}''(t) &= h''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\alpha d_n^2 \right)^2 \tau_n \cos \alpha d_n^2 t + \alpha d_n^2 v_n \sin \alpha d_n^2 t \right) Y_n(x_0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

На основании леммы 2 при любых $(x,t) \in \bar{D}$ ряды (4.2) и (4.4) мажорируются числовым рядом $C_7 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n|$, а ряды (4.3) и (4.5) – рядом $C_7 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (|\tau_n| + n^{-2} |v_n|)$.

Для сходимости указанных числовых рядов достаточно потребовать выполнения условий теоремы 3. Тогда эти ряды мажорируются сходящимся рядом $C_8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Дифференцируя интегральное уравнение (4.1) по t , будем иметь

$$g(t)K(t,t) + \int_0^t g(s)K'_t(t,s)ds = \tilde{h}'(t); \quad 0 \leq t \leq T$$

Учитывая, что $K(t,t) = 0$, при повторном дифференцировании получим

$$g(t)K'_t(t,t) + \int_0^t g(s)K''_{tt}(t,s)ds = \tilde{h}''(t); \quad 0 \leq t \leq T$$

Поскольку из (4.2) следует, что

$$\left. \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} \right|_{t=s} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(x_0) = f(x_0),$$

то последнее уравнение примет вид

$$g(t)f(x_0) + \int_0^t g(s)K''_{tt}(t,s)ds = \tilde{h}''(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.6)$$

Тогда, если $f(x_0) \neq 0$, то уравнение (4.6) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью при условии

$h(t) \in C^2[0, T]$. Следовательно, это уравнение имеет единственное решение $g(t)$ в классе $C[0, T]$.

Теорема 4. Пусть функции $\tau(x)$, $v(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, $f(x) \in C^4[0, l]$, $f(0) = f'(0) = f''(l) = f'''(l) = 0$, $h(t) \in C^2[0, T]$ и $h(0) = \tau(x_0)$, $h'(0) = v(x_0)$. Тогда, если $f(x_0) \neq 0$, то задача 3 имеет единственное решение, которое определяется формулой (2.2), а функция $g(t)$ находится из интегрального уравнения (4.6).

Выясним, насколько существенно условие $f(x_0) \neq 0$ в теореме 4. Пусть для некоторых $n = m$ выполняется равенство $Y_m(x_0) = 0$. Тогда для функции $f(x) = Y_m(x)$ при любой функции $g(t) \in C[0, T]$ существует ненулевое решение задачи 3 (где $\tau(x) = v(x) = h(t) = 0$)

$$u(x, t) = \frac{Y_m(x)}{\alpha d_m^2} \int_0^t g(s) \sin[\alpha d_m^2(t-s)] ds$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Рэлей Л. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 503 с.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1967. 444 с.
4. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
5. Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
6. Крылов А.Н. Вибрация судов. М.: Гостехиздат, 2012. 447 с.
7. Сабитов К.Б., Фадеева О.В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самар. Гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
8. Романов В.Г. Обратные задачи уравнений математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.
9. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208 с.
10. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: 1999. 709 с.
11. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, Сиб. научн. изд-во, 2009. 457 с.
12. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифф. уравн. 2020. Т. 56. № 6. С. 773–785.

Inverse Problems for the Equation of Vibrations of a Canister Beam to Find the Source

O. V. Fadeeva^{a, #}

^aSamara State Technical University, Samara, Russia

[#]e-mail: faoks@yandex.ru

For the beam vibration equation, inverse problems are studied to find the right side, i.e. vibration source. Solutions of the problems by methods of spectral analysis and Volterra integral equations are constructed explicitly as sums of series, and the corresponding uniqueness and existence theorems are proved. When substantiating the existence of a solution to the inverse problem by determining the factor of the right-hand side, which depends on the spatial coordinate, the problem of small denominators arises. In this regard, estimates of the denominators are established that guarantee their separation from zero, with an indication of the corresponding asymptotics. On the basis of these estimates, the convergence of the series in the class of regular solutions of the beam oscillation equation is substantiated.

Keywords: beam equation, inverse problems, spectral analysis method, uniqueness, existence, Volterra integral equation

REFERENCES

1. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1966. 724 p.
2. *Rayleigh L.* Theory of Sound. Vol. 1. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 503 p.
3. *Timoshenko S.P.* Fluctuations in Engineering. Moscow: Fizmatlit, 1967. 444 p.
4. *Filippov A.P.* Oscillations of Deformable Systems. Moscow: Mashinostroenie, 1970. 736 p.
5. *Donnel L.G.* Beams, Plates and Shells. Moscow: Nauka, 1982. 568 p.
6. *Krylov A.N.* Vibration of Ships. Moscow: Gostekhizdat, 2012. 447 p.
7. *Sabitov K.B., Fadeeva O.V.* Initial-boundary problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam // Bull. Samara State Techn. Univ. Ser.: Phys.&Mathe. Sci., 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66.
8. *Romanov V.G.* Inverse Problems of Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1984. 264 p.
9. *Denisov A.M.* Introduction to the Theory of Inverse Problems. Moscow: MGU, 1994. 208 p.
10. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N.Y.; Basel: 1999. 709 p.
11. *Kabanikhin S.I.* Inverse and Ill-Posed Problems. Novosibirsk: Sib. Sci. Publ. House, 2009. 457 p.
12. *Sabitov K.B.* Inverse Problems for the equation of beam vibrations by determination of the right-hand side and initial conditions // Diff. Eqns., 2020, vol. 56, no. 6, pp. 773–785.

УДК 533.69

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ЛИНЕЙНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ АЭРОДИНАМИКЕ
ТОНКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО КРЫЛА**© 2023 г. М. А. Сумбатян^{1,*}, И. К. Самсонов^{1,**}¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

*e-mail: masumbatyan@sfedu.ru

**e-mail: hazar7073@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.09.2022 г.

После доработки 25.04.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

В работе развивается аналитический метод в классической задаче обтекания тонкой прямоугольной пластинки большого удлинения. Показывается, что при специальном разложении по ортогональным системам функций с весом, определяемым качественным поведением решения, исходное двумерное интегральное уравнение асимптотически эквивалентно множеству независимых одномерных интегральных уравнений. Для них строится асимптотический метод, родственному методу пограничных решений, который позволяет получить аналитические представления для основных аэродинамических характеристик. Сравнение с численным методом дискретных вихрей показывает, что точность полученного решения является высокой не только для больших, но и для средних удлинений крыла.

Ключевые слова: аэродинамика, тонкая прямоугольная пластинка, асимптотический метод, подъемная сила, аэродинамическое качество

DOI: 10.31857/S0032823523040136, **EDN:** DYXQST

1. Введение. Прямые численные методы расчета аэродинамики летательных аппаратов (ЛА) требуют существенных компьютерных ресурсов, и даже на современных суперкомпьютерах с алгоритмами распараллеливания для таких расчетов требуются недели и даже месяцы непрерывных вычислений. В связи с этим, начиная с 60-х годов прошлого столетия (когда подобные вычисления были невозможны) широкое применение, в рамках модели идеальной жидкости, получили подходы, основанные на моделировании ЛА в виде вихревых структур, распределенных по поверхности ЛА [1, 2]. С одной стороны, это дает ясную физическую трактовку аэродинамических характеристик, – начиная с простейшей теории несущей линии Прандтля [3]. С другой стороны, это дает надежные численные методы, поскольку такой подход переводит задачу расчета из трехмерной области на двумерные граничные поверхности, что существенно снижает размерность дискретных сеток. В результате сформировался класс методов, которые в российской литературе получили название “методы дискретных вихрей” (методы ДВ) [4–8], а в зарубежной за ними закрепилось название “панельные методы” [9].

Анализ этих методов показывает, что фактически они представляют собой реализацию специальных численных алгоритмов для решения некоторых континуальных одномерных и двумерных интегральных уравнений. Как правило, интегральные уравнения являются сингулярными и/или гиперсингулярными. В указанных выше работах обосновывается корректность перехода от непрерывной к дискретной трактовке в

случае одномерных сингулярных ядер, а для одномерных гиперсингулярных ядер обоснование численных алгоритмов основано на их связи с сингулярными. Заметим, что прямое обоснование дискретизации для гиперсингулярных уравнений, без их связи с сингулярными, дано в [10].

Возникающие интегральные уравнения, как одномерные, так и двумерные, решаются для широкого класса геометрий поверхностей, расположенных в потоках жидкости или газа, что после дискретизации приводит к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности, то есть к вычислительной задаче, которая для современных компьютеров не представляет серьезных трудностей.

Исторически развитие численных методов отодвинуло на задний план аналитические подходы как менее точные, поскольку известные аналитические решения основаны, как правило, на некоторых физических допущениях или приближениях. Одним из ярких примеров является классическая линейная теория тонкой несущей поверхности, которая для крыльев большого размаха сводится к одномерному интегро-дифференциальному уравнению Прандтля. Это уравнение самим Прандтлем было получено из физических гипотез, но оно может быть выведено также как теория крыла большого удлинения из двумерного интегрального уравнения линейной теории тонкого крыла [11]. Решение одномерного уравнения Прандтля методом Глауэрта разложением по угловой переменной сводит его к бесконечной СЛАУ [11]. В частном случае незакрученного крыла эллиптической формы в плане и постоянного угла атаки в каждом сечении решение выписывается в явном виде и дает элементарные выражения для аэродинамических характеристик. Считается, что простое приближение для коэффициента подъемной силы $c_p = 2\pi\alpha_0\lambda/(\lambda + 2)$, соответствующее решению Глауэрта для эллиптического крыла, обладает хорошей точностью также для крыльев других форм, при $\lambda \geq 4$ [11]. Здесь λ — удлинение крыла, α_0 — угол атаки. При этом в литературе сложно найти явные решения для крыльев, отличных от эллиптических. Между тем, метод ДВ в его исходной трактовке наиболее естественно приспособлен для крыльев прямоугольной формы в плане, так как именно в этом случае простейшая дискретная сетка по каждой из двух декартовых координат равномерно покрывает всю площадь крыла. Равномерные сетки можно распространить также и на крылья более сложной формы (со скольжением), однако это требует дополнительной трактовки. Авторам неизвестны работы, в которых выражения аэродинамических характеристик для такой естественной канонической геометрии как удлиненное крыло, прямоугольное в плане, были бы представлены в явном виде, основываясь на строгом математическом обосновании. Заполнение этого пробела является одной из целей данной работы. Заодно дается сравнение полученных явных выражений с методом ДВ, а также сравнение с результатами проведенных натурных экспериментов.

2. Асимптотический метод для прямоугольного в плане крыла большого удлинения. Основы метода заложены в [12], где исследуются гармонические по времени колебания прямоугольного в плане крыла, в линейном приближении малых возмущений на фоне набегающего потока. Заметим, что в динамическом случае авторам [12] удалось получить явные аналитические результаты лишь для предельно больших удлинений крыла, в случае так называемого “вырожденного” решения, фактически соответствующего приближению двумерной задачи в каждом сечении крыла вдоль размаха. В рассматриваемом более простом случае стационарного обтекания ниже в рамках трехмерной модели выводятся явные представления для основных аэродинамических характеристик, справедливые в широком диапазоне относительных удлинений крыла.

Пусть тонкое слабоизогнутое прямоугольное в плане крыло размером $(-l, l) \times (-a, a)$ расположено почти параллельно горизонтальной плоскости xu под малым углом атаки α_0 к однородному равномерному потоку, набегающему со скоростью V_0 параллельно оси x , как показано на рис. 1. В общем случае $\alpha_0 = -\partial f / \partial x$, где $z = f(x, y) -$

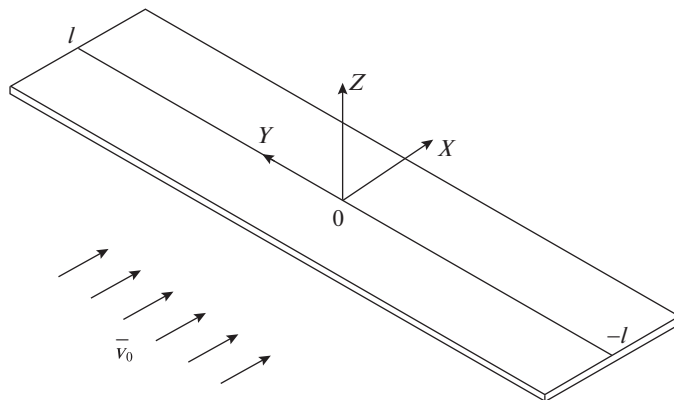


Рис. 1. Схема обтекания тонкой прямоугольной пластинки.

форма поверхности крыла. Далее для простоты в основном рассматривается случай незакрученного крыла с углом атаки, постоянным вдоль оси y .

В рамках линейной теории малых возмущений основное интегральное уравнение метода дискретных вихрей в безразмерной форме имеет следующий вид [4]:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\lambda}^{\lambda} K(x - \xi, y - \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta = V_0 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad (|x| < 1, a|y| < \lambda) \quad (2.1)$$

$$K(x, y) = \frac{1}{y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \right)$$

Здесь $\lambda = l/a$ — относительное удлинение крыла, а функция $g(x, y) = \Delta p / (\rho V_0)$ связана со скачком давления на крыле $\Delta p = p^- - p^+$ при переходе с ее нижней на верхнюю лицевую поверхность, то есть — с локальной подъемной силой, распределенной по поверхности крыла. Заметим, что все величины размерности расстояния приведены к полуширине хорды a .

Авторам неизвестны работы, в которых представлены строгие результаты, описывающие функциональные свойства двумерного интегрального уравнения (2.1) — единственность решения в тех или иных классах функций, поведение решения на границе и т.д. В частности, открытым остается вопрос о поведении решения в углах — стыках между передней и боковыми кромками, где решение от бесконечного поведения с корневой особенностью (в окрестности передней кромки) переходит в решение, стремящееся к нулю как корень квадратный от расстояния (при приближении к боковой кромке).

Для асимптотического анализа при $\lambda \rightarrow \infty$, представим ядро интегрального уравнения (1.1) в следующем виде:

$$K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{i\alpha} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta - \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\beta| e^{i\beta y} d\beta \right], \quad (2.2)$$

где интеграл по переменной α понимается как сингулярный интеграл типа Коши.

Будем искать решение интегрального уравнения (2.1) с ядром (2.2) в виде следующего разложения по полиномам Якоби:

$$g(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\eta) P_k^{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\xi), \quad (2.3)$$

которые ортогональны на отрезке $(-1, 1)$ с весом, определяемым качественным поведением решения на передней и задней кромках крыла вдоль хорды. Подстановка соотношений (2.2) и (2.3) в уравнение (2.1) позволяет проинтегрировать по переменной ξ , с использованием табличного интеграла, выражаемого через функции Бесселя [13]:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} P_k^{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi = \pi i^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} [J_k(\alpha) - iJ_{k+1}(\alpha)]$$

После этого умножим обе части уравнение (2.1) на функции $\sqrt{(1+x)/(1-x)} P_n^{\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)}(x)$, $(n = 0, 1, \dots)$ и проинтегрируем по переменной x на интервале $(-1, 1)$. Тогда с использованием табличных интегралов [13]

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} P_n^{\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)}(x) e^{-i\alpha x} dx = \pi i^{-n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} [J_n(\alpha) - iJ_{n+1}(\alpha)],$$

двумерное уравнение (2.1) преобразуется к бесконечной системе одномерных интегральных уравнений следующего вида:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} K_{nk}(y - \eta) g_k(\eta) d\eta = F_n(y) \quad (n = 0, 1, \dots); \quad |y| < \lambda \quad (2.4)$$

$$K_{nk}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{nk}(\beta) e^{i\beta y} d\beta \quad (n, k = 0, 1, \dots)$$

$$L_{nn}(\beta) = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 2 \int_0^{\infty} \frac{J_n(\alpha) J_{n+1}(\alpha)}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha + \frac{\pi}{2} |\beta| \delta_{n0}$$

$$L_{nk}(\beta) = -i^{k-n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \int_{-\infty}^{\infty} [J_n(\alpha) - iJ_{n+1}(\alpha)] \times \quad (2.5)$$

$$\times [J_k(\alpha) - iJ_{k+1}(\alpha)] \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha}{i\alpha} \quad (n \neq k)$$

$$F_n(y) = -\frac{V_0}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} P_n^{\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)}(x) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx,$$

где δ_{nk} — символ Кронекера.

Как и в [12], в данной стационарной задаче можно показать, что при $\lambda \rightarrow \infty$ внедиагональные члены этой системы (при $k \neq n$) асимптотически стремятся к нулю, причем тем быстрее, чем дальше элементы бесконечной матрицы отстоят от главной диагонали. Более точная оценка получается после перехода на отрезок $(-1, 1)$ по переменным y, η заменой переменных $\tilde{y} = y/\lambda$, $\tilde{\eta} = \eta/\lambda$, $\tilde{\beta} = \lambda\beta$. После этого явная асимптотическая оценка ядер становится такой:

$$L_{nk}(\tilde{\beta}) = O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{2|k-n|}}\right) \quad (k \neq n), \quad L_{nn}(\tilde{\beta}) = O(1); \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

Следовательно, главный член асимптотики можно получить, сохраняя лишь диагональные члены (при $k = n$). Таким образом, бесконечная система одномерных интегральных уравнений распадается на множество одномерных интегральных уравнений,

которые можно решать независимо друг от друга. При этом в общем случае произвольной формы крыла $f(x, y)$ получаем бесконечное число независимых одномерных интегральных уравнений. В частном случае постоянного угла атаки $\partial f(x, y)/\partial x = -\alpha_0 \equiv \text{const}$ правая часть $F_n(y)$ для всех n , кроме $n = 0$, равна нулю: $F_0(y) = V_0\alpha_0$, $F_n(y) \equiv 0$ ($n \geq 1$). В результате, все неизвестные функции $g_k(y)$, кроме $g_0(y)$, асимптотически равны нулю, а для $g_0(y)$ получаем следующее интегральное уравнение:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} K_0(y - \eta) g_0(\eta) d\eta = V_0\alpha_0; \quad |y| < \lambda \quad (2.7)$$

$$K_0(y) = \int_{-\infty}^{\infty} L_0(\beta) e^{\beta y} d\beta, \quad L_0(\beta) = 2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha) J_1(\alpha)}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha + \frac{\pi}{2} |\beta|$$

При этом из (2.3) следует, что решение уравнения (2.1) принимает вид

$$g(x, y) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} g_0(y) \quad (2.8)$$

Асимптотика решения уравнения (2.7) при большом удлинении λ основана на реализации идеи построения погранслойных решений. В центральной зоне крыла, вдали от боковых кромок, концы интервала интегрирования по переменной η можно удалить на бесконечность. Построение такого “вырожденного” решения основано на решении уравнения в свертках и легко приводит к явному выражению применением преобразования Фурье (ПФ) по y :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L_0(\beta) G_0^c(\beta) &= 2\pi V_0\alpha_0 \delta(\beta) \Rightarrow G_0^c(\beta) = \frac{4\pi V_0\alpha_0 \delta(\beta)}{L_0(\beta)} \Rightarrow \\ \Rightarrow g_0^c(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0^c(\beta) e^{-i\beta y} d\beta = \frac{2V_0\alpha_0}{L_0(0)} = 2V_0\alpha_0, \quad \text{поскольку} \\ L_0(0) &= 2 \int_0^{\infty} J_0(\alpha) J_1(\alpha) d\alpha = 1 \end{aligned}$$

Здесь функция $G_0^c(\beta)$ обозначает ПФ от функции $g_0^c(y)$, а $\delta(\beta)$ — дельта-функция Дирака. Очевидно, что вырожденное решение справедливо в “центральной зоне крыла” (вдали от боковых кромок, отсюда индекс “с” в соответствующих функциях) и соответствует плоской задаче. При этом, например, подъемная сила P и коэффициент подъемной силы c_P равны соответственно

$$\begin{aligned} P^c &= a^2 \rho V_0 \int_{-1}^1 \int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} g_0^c(\eta) d\xi d\eta = 4\pi \rho \lambda a^2 V_0^2 \alpha_0 = 4\pi \rho L a V_0^2 \alpha_0 \\ c_P^c &= \frac{P^c}{(\rho V_0^2/2) 4aL} = 2\pi\alpha_0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

что действительно соответствует двумерной теории [3, 11].

Структура решения уравнения (2.7) в окрестности левой кромки $y = -\lambda$ может быть получена удалением правой кромки $y = \lambda$ на бесконечность. В результате приходим к уравнению Винера–Хопфа (В–Х)

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} K_0(y - \eta) g_0^{W-H}(\eta) d\eta = 2V_0\alpha_0; \quad 0 < y < \infty \quad (2.10)$$

записанному в координатах, отсчитываемых от левой кромки $y = -\lambda$. Такой подход к построению погранслоного решения был предложен в контактных задачах теории упругости [14]. Родственные подходы развивались в волновых задачах [15, 16], где похожий метод называется “метод краевых волн”.

Метод В–Х подробно описан в литературе [14–16]. В применении к уравнению (2.10) основная сложность состоит в факторизации функции $L_0(\beta)$, которую решаем методом приближенной факторизации. С этой целью приблизим эту функцию на вещественной оси так, чтобы учесть ее поведение в нуле и на бесконечности и обеспечить простую факторизацию. Поскольку

$$L_0(0) = 1; \quad L_0(\beta) \sim b_0 |\beta| \quad (\beta \rightarrow \infty)$$

$$b_0 = 2 \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha) J_1(\alpha)}{\alpha} d\alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{2} = \frac{8 + \pi^2}{2\pi} = 2.844, \quad (2.11)$$

то простейшее приближение

$$L_0(\beta) \approx \sqrt{1 + (b_0 \beta)^2} \quad (2.12)$$

обеспечивает точность с относительной погрешностью не более 17% во всем диапазоне $0 \leq |\beta| < \infty$ и гарантирует простую факторизацию при применении метода В–Х. Технические детали решения уравнения (2.10) с символьной функцией $L_0(\beta)$ в виде (2.12) довольно просты, см. например [15, 16]. В результате для ПФ решения уравнения Винера–Хопфа (Wiener–Hopf) получаем

$$G_0^{W-H}(\beta) = \frac{2V_0\alpha_0}{(-i\beta)\sqrt{1 - ib_0\beta}} = \frac{2V_0\alpha_0}{p\sqrt{1 + b_0p}}, \quad (2.13)$$

где переход к переменной $p = -i\beta$ позволяет от обратного ПФ от комплексной функции перейти к обратному преобразованию Лапласа от вещественной функции, что с использованием таблиц [17] приводит к следующему решению

$$g_0^{W-H}(y) = 2V_0\alpha_0 \operatorname{Erf}(\sqrt{y/b_0}); \quad \operatorname{Erf}(t) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^t \exp(-\tau^2) d\tau, \quad (2.14)$$

выражающемуся через функцию вероятности $\operatorname{Erf}(t)$.

При этом, согласно методу малого параметра [14–16], главный член асимптотики решения уравнения (2.7) при больших удлинениях λ может быть представлен в виде:

$$g_0(y) = g_0^{W-H}(\lambda - y) + g_0^{W-H}(\lambda + y) - g_0^c(y) =$$

$$= 2V_0\alpha_0 \left[\operatorname{Erf}(\sqrt{(\lambda - y)/b_0}) + \operatorname{Erf}(\sqrt{(\lambda + y)/b_0}) - 1 \right]; \quad |y| \leq \lambda, \quad (2.15)$$

что с учетом (2.8) дает полное представление решения.

К сожалению, погрешность аппроксимации (2.12) 17% не позволяет достичь желаемой точности в сравнении с расчетом методом ДВ. В связи с этим подбирается более точное приближение:

$$L_0(\beta) \approx \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2} \frac{1 + \mu^2 \beta^2}{1 + \nu^2 \beta^2} \quad \left(\frac{\gamma \mu^2}{\nu^2} = b_0 \right) \quad (2.16)$$

$$\mu = 2.358, \quad \nu = 3.952, \quad \gamma = b_0 \nu^2 / \mu^2 = 7.989,$$

где положительные константы γ, μ, ν выбраны из условия наилучшего приближения. Расчеты показывают, что при подобранных значениях констант, указанных в (2.16), обеспечивается точность с относительной погрешностью, не превышающей 3.5% на

всем интервале $0 \leq |\beta| < \infty$. При этом решение уравнения В–Х в образах Лапласа ($p = -i\beta$) принимает вид:

$$\begin{aligned} G_0^{W-H}(p) &= 2V_0\alpha_0 \left[\frac{1}{p\sqrt{1+\gamma p}} \frac{1+\nu p}{1+\mu p} \right] = \\ &= 2V_0\alpha_0 \left[\frac{1}{p\sqrt{1+\gamma p}} + \frac{\nu-\mu}{(1+\mu p)\sqrt{1+\gamma p}} \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

что после обращения преобразования Лапласа приводит к следующему решению [17]:

$$\begin{aligned} g_0^{W-H}(y) &= 2V_0\alpha_0 \left[\operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{y}{\gamma}} \right) + \frac{(\nu-\mu)e^{-y/\mu}}{\sqrt{\mu(\mu-\gamma)}} \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{\mu-\gamma}{\mu\gamma}} y \right) \right] \\ g_0(y) &= g_0^{W-H}(\lambda-y) + g_0^{W-H}(\lambda+y) - g_0^c(y), \quad g_0^c(y) = 2V_0\alpha_0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Заметим, что, поскольку $\mu < \gamma$, то вторая функция вероятности в (2.18) имеет мнимый аргумент.

3. Вычисление аэродинамических характеристик крыла. Любопытно вычислить подъемную силу на основе представления (2.18):

$$\begin{aligned} P &= a^2 \rho V_0 \int_{-1}^1 \int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} g_0(y) dx dy = 2\pi \rho a^2 V_0^2 \alpha_0 \times \\ &\times \left\{ 2 \int_0^{2\lambda} \left[\operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{y}{\gamma}} \right) + \frac{(\nu-\mu)e^{-y/\mu}}{\sqrt{\mu(\mu-\gamma)}} \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{\mu-\gamma}{\mu\gamma}} y \right) \right] dy - 2\lambda \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда для безразмерного коэффициента подъемной силы получаем:

$$\begin{aligned} c_P &= 2\pi\alpha_0 \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\lambda} \left[\operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{y}{\gamma}} \right) + \frac{(\nu-\mu)e^{-y/\mu}}{\sqrt{\mu(\mu-\gamma)}} \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{\mu-\gamma}{\mu\gamma}} y \right) \right] dy - 1 \right\} = \\ &= 2\pi\alpha_0 \left\{ \left(2 - \frac{\gamma}{2\lambda} \right) \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{\gamma}} \right) + \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi\lambda}} e^{-2\lambda/\gamma} - 1 + \right. \\ &\left. + \frac{(\nu-\mu)}{\lambda\sqrt{\mu(\mu-\gamma)}} \left[\sqrt{\frac{\mu-\gamma}{\mu\gamma}} \mu \sqrt{\gamma} \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{\gamma}} \right) - \mu e^{-2\lambda/\mu} \operatorname{Erf} \left(\sqrt{2\lambda \frac{\mu-\gamma}{\mu\gamma}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь учтены табличные интегралы [18]:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{Erf}(\sqrt{cy}) dy &= \left(y - \frac{1}{2c} \right) \operatorname{Erf}(\sqrt{cy}) + \sqrt{\frac{y}{\pi c}} e^{-cy} \\ \int e^{-\varepsilon y} \operatorname{Erf}(\sqrt{cy}) dy &= \frac{\sqrt{c}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon+c}} \operatorname{Erf}[\sqrt{(\varepsilon+c)y}] - \frac{e^{-\varepsilon y}}{\varepsilon} \operatorname{Erf}(\sqrt{cy}) \end{aligned}$$

Собирая подобные члены в (3.2), приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} c_P &= 2\pi\alpha_0 \left[\left(2 - \frac{a_0}{\lambda} \right) \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{\gamma}} \right) - 1 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi\lambda}} e^{-2\lambda/\gamma} - \frac{c_0}{\lambda} e^{-2\lambda/\mu} \operatorname{Erfi} \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{\delta}} \right) \right] \\ a_0 &= \gamma/2 + \mu - \nu = 2.401, \quad c_0 = \frac{(\nu-\mu)\sqrt{\mu}}{\sqrt{\gamma-\mu}} = 1.032, \quad \delta = \frac{\mu\gamma}{\gamma-\mu} = 3.345 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь учтено, что при $\sqrt{\mu - \gamma} = i\sqrt{\gamma - \mu} = i\sigma$, ($\sigma > 0$) имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Erf}(i\sigma\zeta)}{i\sigma} &= \frac{2}{i\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{i\sigma\zeta} \exp(-t^2) dt = (\tau = -it) = \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{\sigma\zeta} \exp(\tau^2) d\tau = \frac{\operatorname{Erfi}(\sigma\zeta)}{\sigma}, \quad \left(\zeta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu\gamma}} > 0\right),\end{aligned}$$

где $\operatorname{Erfi}(t) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^t \exp(\tau^2) d\tau$ — функция вероятности мнимого аргумента [19, 20].

Для больших удлинений λ выражение (3.3) может быть упрощено с использованием следующих асимптотических представлений функций вероятности для большого аргумента:

$$\operatorname{Erf}(t) \sim 1 - \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right) \right], \quad \operatorname{Erfi}(t) \sim \frac{e^{t^2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right) \right], \quad (3.4)$$

где величинами 5-го порядка малости пренебрегаем. Тогда формула (3.3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}c_P &= 2\pi\alpha_0 \left\{ \left(2 - \frac{a_0}{\lambda} \right) \left[1 - \frac{e^{-2\lambda/\gamma}}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{\gamma}{2\lambda} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2\lambda} \right)^{3/2} \right) \right] - 1 + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi\lambda}} e^{-2\lambda/\gamma} - \frac{c_0}{\lambda} e^{-2\lambda/\mu} \frac{e^{2\lambda/\delta}}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{\delta}{2\lambda} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2\lambda} \right)^{3/2} \right) \right\} \quad (3.5)\end{aligned}$$

Поскольку при сложении показателей двух последних экспоненциальных функций имеем $1/\mu - 1/\delta = 1/\gamma$, то (3.5) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}c_P &= 2\pi\alpha_0 \left\{ 1 - \frac{a_0}{\lambda} + \frac{e^{-2\lambda/\gamma}}{\sqrt{\pi}} \left[\left(a_0 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} - c_0 \left(\frac{\delta}{2} \right)^{1/2} + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{3/2} \right) \frac{1}{\lambda^{3/2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(a_0 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{3/2} + c_0 \left(\frac{\delta}{2} \right)^{3/2} \right) \frac{1}{\lambda^{5/2}} \right] \right\}, \quad (3.6)\end{aligned}$$

или, подставляя значения числовых параметров, в окончательном виде:

$$c_P = 2\pi\alpha_0 \left[1 - \frac{2.401}{\lambda} + e^{-0.2504\lambda} \left(\frac{6.458}{\lambda^{3/2}} - \frac{6.035}{\lambda^{5/2}} \right) \right] \quad (3.7)$$

Заметим, что первый член во второй строке асимптотического разложения (3.5), убывающий как квадратный корень из удлинения, сократился после применения разложений (3.4).

Сравнение с классическим приближением по формуле Глауэрта [11] $c_P = 2\pi\alpha_0\lambda/(\lambda + 2)$, а также с решением по методу ДВ приведено в табл. 1. Заметим, что первые два члена асимптотики при большом удлинении в формуле Глауэрта имеют вид: $c_P/\alpha_0 = 2\pi(1 - 2/\lambda)$, в то время как в формуле (3.7): $c_P/\alpha_0 = 2\pi(1 - 2.401/\lambda)$. Таким образом, выход на решение плоской задачи $c_P/\alpha_0 = 2\pi = 6.283$ с ростом удлинения для прямоугольного крыла происходит медленнее, чем для эллиптического. Это также видно по различию погрешностей этих решений в сравнении с методом ДВ в табл. 1 для существенно больших удлинений.

Заметим, что в литературе имеется много полуэмпирических формул для подъемной силы прямоугольных крыльев, более точных в сравнении с экспериментом, чем формула Глауэрта [11]. Применяются также комбинации полуаналитических и эмпи-

Таблица 1. Зависимость безразмерного коэффициента c_p/α_0 от удлинения для тонкого прямоугольного крыла

λ	c_p/α_0 , метод ДВ	c_p/α_0 (3.7)/относительная ошибка	Формула Глауэрта: $2\pi\lambda/(\lambda + 2)$ относительная ошибка
30	5.43	5.78/6.4%	5.89/8.5%
20	5.18	5.53/6.8%	5.71/10.2%
15	4.98	5.29/6.2%	5.54/11.2%
10	4.63	4.87/5.2%	5.24/13.2%
7.5	4.37	4.54/3.9%	4.96/13.5%
5	4.03	4.11/2.0%	4.49/11.4%
4	3.79	3.94/4.0%	4.19/10.6%
3	3.33	3.79/13.8%	3.77/13.2%

рических подходов (смотри, например, [21]). Однако из известных аналитических приближений лишь теория Прандтля—Глауэрта, отраженная в табл. 1, основана на теоретическом фундаменте с достаточно строгим обоснованием.

Перейдем к вычислению индуктивного сопротивления. Для вычисления этой величины известны различные формулы, выражающиеся через интегралы от произведения циркуляции и вертикальной компоненты вектора скорости потока в плоскости вихревой пелены [1, 22]. Здесь применим альтернативный, но достаточно естественный метод, при котором индуктивное сопротивление может быть вычислено как проекция подъемной силы на направление потока минус подсосывающая сила. В линейном приближении малого угла атаки имеем:

$$\begin{aligned}
 D_{\text{ind}} &= P\alpha_0 - T, \quad T = \frac{\pi a^2}{4\rho V_0^2} \lim_{x \rightarrow -1} (1+x) \int_{-\lambda}^{\lambda} |p_- - p_+|^2 dy = \\
 &= \frac{\pi a^2 \rho}{2} \int_{-\lambda}^{\lambda} g_0^2(y) dy = \frac{\pi a^2 \rho}{2} \int_0^{2\lambda} [2g_0^{W-H}(y) - g_0^c]^2 dy, \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

где подъемная сила P легко вычисляется через безразмерный коэффициент (3.7), а выражение для подсосывающей силы T известно в теории тонкого крыла [23]. Детальный анализ явных представлений в формулах (3.1) и (3.8) показывает, что выражение D_{ind} в (3.8) всегда положительно и стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, что соответствует выходу на плоскую задачу, как и должно быть по физическому смыслу. В общем случае интеграл в (3.8) вычислялся по квадратурной формуле.

4. Сравнение с экспериментальными данными. Для сравнения с теоретическими результатами были проведены натурные эксперименты по обдуву в аэродинамической трубе. Образец представляет собой прямоугольную дюралюминиевую пластинку толщиной 2 мм габаритами 20×2.5 см в плане, с удлинением $\lambda = 20/2.5 = 8$. Обдув осуществлялся в аэродинамической трубе замкнутого типа компании “Денар” (г. Ярославль) с рабочей частью 30×30 см в поперечнике и длиной 60 см. Скорость набегающего потока 11 м/с. Подъемная сила P измерялась при помощи аэродинамических весов, скорость набегающего потока — при помощи трубок Пито—Прандтля. Угол атаки $\alpha_0 = -\partial f / \partial x$ постоянный как вдоль размаха, так и вдоль хорды в каждом сечении (прямолинейная хорда). В эксперименте α_0 изменялся от 2° до 16° с шагом 2° . Стабильность результатов при повторных измерениях — от 10 до 15%.

Таблица 2. Сравнение теории и эксперимента для аэродинамического качества Q при обтекании прямоугольной пластинки размером 20×2.5 см

α_0 , град.	Эксперимент $Q = P/D$	Теория $Q = P/(D_{\text{ind}} + W)$ (3.7), (3.8), (4.1)	Теория $Q = P/(P\alpha_0 + W)$ (3.7), (4.1)	Эллиптическое крыло [3] $Q = \pi\lambda/c_p$
2	4.60	7.83	6.38	143.24
4	7.67	13.79	7.65	71.62
6	7.00	17.25	6.88	47.75
8	5.56	18.65	5.88	35.81
10	4.44	18.76	5.03	28.65
12	3.70	18.17	4.35	23.87
14	3.14	17.27	3.82	20.46
16	2.58	16.25	3.40	17.91

2-я и 4-я колонки таблицы 2 получены из таблицы 3 как $Q = c_p/c_D$.

Таблица 3. Сравнение теории и эксперимента для коэффициентов подъемной силы и силы сопротивления, для той же пластинки

α_0 , град.	c_p , эксперимент	c_p , теория (3.7)	c_D , эксперимент	c_D , теория (3.7), (4.1)
2	0.136	0.161	0.0296	0.0252
4	0.286	0.322	0.0373	0.0421
6	0.430	0.483	0.0614	0.0702
8	0.567	0.644	0.102	0.110
10	0.708	0.805	0.159	0.160
12	0.839	0.966	0.227	0.222
14	0.964	1.13	0.307	0.295
16	1.09	1.29	0.422	0.379

Оценим режим обтекания в натурном эксперименте – ламинарный он или турбулентный. Число Рейнольдса равно $Re = 2aV_0/v_b = (0.025 \text{ м}) (11 \text{ м/с}) / (1.5 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}) = 18333$, что, по крайней мере, на порядок меньше критического числа $Re^* = 3.5 \times 10^5$ при переходе от ламинарного режима к турбулентному при обтекании тонкой пластинки [24]. Таким образом, в эксперименте – ламинарный режим. Здесь v_b – кинематическая вязкость воздуха.

Для аэродинамического качества Q , с целью сравнения теоретических и экспериментальных результатов, добавим к индуктивному сопротивлению (3.8) силу вязкого трения, известную при продольном обтекании тонкой пластинки из теории Прандтля для ламинарного погранслоя как формула Блазиуса [24]:

$$W = 1.328\rho(2l)V_0^2\sqrt{\frac{2av_b}{V_0}}, \quad (4.1)$$

которую для малого угла атаки считаем не зависящей от угла α_0 . Сравнение теоретических и экспериментальных результатов для аэродинамического качества $Q = P/D$ отражено в табл. 2.

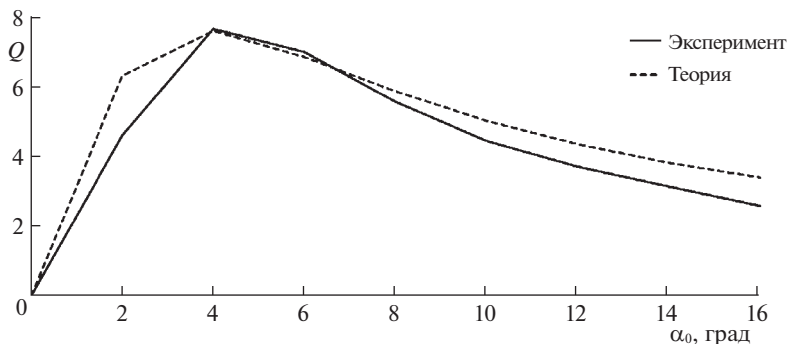


Рис. 2. Сравнение теории и эксперимента для аэродинамического качества прямоугольной пластинки размером $20 \text{ см} \times 2.5 \text{ см}$ и толщиной 2 мм.

Заключение. 1. В работе предлагается аналитическая теория прямоугольного крыла в рамках гипотезы малых линейных возмущений. Она является асимптотической по большому удлинению крыла, однако основной результат, представленный формулой (3.7), показывает на сравнении с расчетами по методу ДВ (табл. 1), что ее точность является хорошей также и в области средних удлинений.

2. Считается, что формула Глауэрта для коэффициента подъемной силы $c_p = 2\pi\alpha_0\lambda/(\lambda + 2)$ является достаточно универсальной для крыльев произвольной формы в плане (без стреловидности) и обладает хорошей точностью при $\lambda \geq 4$. Табл. 1 позволяет оценить ее точность в применении к прямоугольному крылу.

3. Сравнение теории и эксперимента по аэродинамическому качеству, отраженное в табл. 2, позволяет сделать любопытные выводы. Две колонки с теоретическими результатами, соответственно 3-я и 4-я колонки, отличаются следующим. В первом случае в знаменателе — полное сопротивление D , равное проекции подъемной силы на направление потока: $P\alpha_0$, минус подсосывающая сила T , плюс вязкое сопротивление W . Во втором случае в знаменателе не учитывается подсосывающая сила T , и оказывается, что это гораздо ближе к экспериментальным данным, чем результаты 3-й колонки. С физической точки зрения это вполне закономерно, так как подсосывающая сила возникает при обтекании бесконечно-тонкой пластинки, которую трудно считать таковой при толщине 2 мм и длине хорды 2.5 см. Фактически в эксперименте никакой подсосывающей силы нет, и реальное сопротивление создается подъемной силой, плюс вязкое трение. Сравнение теории из 4-й колонки с экспериментом графически представлено на рис. 2. Как обычно, теория дает несколько завышенные значения качества Q , что на рисунке проявляется практически при всех углах атаки.

4. Сравнение 3-й и 5-й колонок в табл. 2. Известно, что среди всех крыльев одного и того же удлинения наименьшее индуктивное сопротивление имеет крыло эллиптической формы в плане [3, 11, 21]. Из табл. 2 следует, что это свойство, в частности, проявляется в том, что аэродинамическое качество Q у эллиптического крыла при любом угле атаки больше, чем у прямоугольного.

5. Результат, представленный в формуле (2.8), может показаться равносильным тому, чтобы изначально искать решение в виде произведения двух функций, зависящих соответственно от x и от y , т.е. в виде функции с разделяющимися переменными. На самом деле такой подход не эквивалентен предложенному в данной работе по следующим причинам.

Во-первых, если искать асимптотическое решение двумерного уравнения (2.1) в виде (2.8), то непонятно как из двумерного уравнения получить одномерное уравнение для нахождения функции $g_0(y)$. Например, если приравнять левые и правые части в (2.1) при каком-то одном значении переменной x (как простейший вариант метода коллокации), то полученное одномерное уравнение не будет эквивалентно уравнению (2.7); как следствие — не удастся обосновать, что полученное таким образом решение будет давать главный член асимптотики при больших удлинениях крыла.

В связи с отмеченным в предыдущем абзаце заметим, что в [11] при выводе одномерного интегро-дифференциального уравнения Прандтля применяется скалярное умножение (по переменной x) уравнения (2.1) на функцию $\sqrt{(1+x)/(1-x)}$. При этом не делается никаких асимптотических оценок относительно связи полученного одномерного уравнения с исходным двумерным (2.1). В отличие от этого, в настоящей работе обосновывается, что в рамках предложенного подхода двумерное интегральное уравнение асимптотически распадается на независимые одномерные уравнения, что и позволяет построить решение в виде (2.8) + (2.18).

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ, грант № 19-29-06013.

Авторы также признательны Грунтфесту Р.А. за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965. 243 с.
2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 254 с.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. М.: Янус, 1995. 519 с.
6. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 508 с.
7. Лифанов И.К., Полонский Я.Е. Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений // ПММ. 1975. Т. 39. № 4. С. 742–746.
8. Лифанов И.К. О методе дискретных вихрей // ПММ. 1979. Т. 43. № 1. С. 184–188.
9. Katz J., Plotkin A. Low-speed Aerodynamics. From Wing Theory to Panel Methods. New York: McGraw-Hill, 1991. 632 p.
10. Iovane G., Lifanov I.K., Sumbatyan M.A. On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics // Acta Mech. 2003. V. 162. № 1. P. 99–110.
11. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 800 с.
12. Sumbatyan M.A., Tarasov A.E. A mathematical model for the propulsive thrust of the thin elastic wing harmonically oscillating in a flow of non-viscous incompressible fluid // Mech. Res. Comm. 2015. V. 68. P. 83–88.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 799 с.
14. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
15. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 328 с.
16. Сумбатян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013. 327 с.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 344 с.

18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
19. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
20. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с.
21. Карафоли Е. Аэродинамика крыла самолета: Несжимаемая жидкость. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 480 с.
22. Кочин Н.Е. Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 1–32.
23. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
24. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

Analytical Method in the Linear Three-Dimensional Aerodynamics of a Thin Rectangular Wing

M. A. Sumbatyan^{a,#} and I. K. Samsonov^{a,##}

^a*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

[#]*e-mail: masumbatyan@sfsu.ru,*

^{##}*e-mail: hazar7073@yandex.ru*

The paper develops an analytical method in the classical problem on a flow around a thin rectangular plate of large span. It is shown that with a specific expansion on an orthogonal system of functions with a weight defined by qualitative properties of the solution, the initial 2d integral equation is asymptotically equivalent to a set of independent 1d integral equations. For them, we construct an asymptotic method allied to a boundary layer method, which permits development of analytical representations for basic aerodynamic characteristics. Comparison with the numerical method of discrete vortices shows that precision of the obtained solution is good not only for large but also for medium span of the wing.

Keywords: aerodynamics, thin rectangular plate, asymptotic method, lifting force, aerodynamic quality

REFERENCES

1. Belotserkovsky C.M. Thin Lifting Surface in a Transonic Flow of Gas. Moscow: Nauka, 1965. 243 p. (in Russian)
2. Belotserkovsky C.M., Nisht M.I. Separated and Non-Separated Flow around Thin Wings by the Non-Viscous Fluids. Moscow: Nauka, 1978. 351 p. (in Russian)
3. Loitsyanskii L.G. Mechanics of Liquids and Gases. N.Y.: Pergamon, 1966. 816 p.
4. Belotserkovsky C.M., Lifanov I.K. Method of Discrete Vortices. Boca Raton (Florida): CRC Press, 1992. 464 p.
5. Lifanov I.K. Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiment in Mathematical Physics, Aerodynamics, Theory of Elasticity and Wave Diffraction. Moscow: Yanus, 1995. 520 p. (in Russian)
6. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular Integral Equations and Their Applications. Boca Raton (Florida): CRC Press, 2004. 398 p.
7. Lifanov I.K., Polonskii I.A. Proof of the numerical method of “discrete vortices” for solving singular integral equations // JAMM, 1975, vol. 39, no. 4, pp. 713–718.
8. Lifanov I.K. On the method of discrete vortices // JAMM, 1979, vol. 43, no. 1, pp. 201–206.
9. Katz J., Plotkin A. Low-Speed Aerodynamics. From Wing Theory to Panel Methods. N.Y.: McGraw-Hill, 1991. 632 p.
10. Iovane G., Lifanov I.K., Sumbatyan M.A. On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics // Acta Mech., 2003, vol. 162, no. 1, pp. 99–110.
11. Bispplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L. Aeroelasticity. N.Y.: Dover, 1996. 880 p.

12. *Sumbatyan M.A., Tarasov A.E.* A mathematical model for the propulsive thrust of the thin elastic wing harmonically oscillating in a flow of non-viscous incompressible fluid // *Mech. Res. Comm.*, 2015, vol. 68, pp. 83–88.
13. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series, Vol. 1. N.Y.: Gordon & Breach, 1986. 808 p.
14. *Vorovich I.I., Alexandrov V.M., Babeshko V.A.* Non-Classical Mixed Problems of the Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1974. 456 p. (in Russian)
15. *Mitra R., Lee S.W.* Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. N.Y.: Macmillan, 1971. 302 p.
16. *Sumbatyan M.A., Scalia A.* Equations of Mathematical Diffraction Theory. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2005. 291 p.
17. *Bateman H., Erdelyi A.* Tables of Integral Transforms. Vol.1. N.Y.: McGraw-Hill, 1954. 391 p.
18. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series, Vol. 2. Special Functions. N.Y.: Gordon & Breach, 1986. 756 p.
19. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. N.Y.: Dover, 1965. 1046 p.
20. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. V.2. N.Y.: McGraw-Hill, 1953. 396 p.
21. *Karafoli E.* Aerodynamique des ailes d'avion. Paris: Etienne Chiron, 1928. 480 p.
22. *Kochin N.E.* Theory of a wing of finite span and circular shape in plan // *PMM*, 1940, vol. 4, no. 1, pp. 1–32. (in Russian)
23. *Sedov L.I.* Two-dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics. N.Y.: Wiley, 1965. 433 p.
24. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary–Layer Theory. Berlin; Heidelberg: Springer, 2017. 805 p.

УДК 539.3

**ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ДВУХОСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ ТОНКОЙ
ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ**© 2023 г. И. М. Цветков^{1,*}¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*e-mail: cvetkoviv@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.

После доработки 10.05.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Исследуется напряженно-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородной пластины из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки. Верхнее и нижнее основания свободны от напряжений, на торцах заданы продольные скорости. Учитывается возможность деформирования верхней и нижней граней пластины, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. Вводится малый геометрический параметр — отношение средней толщины пластины к ее длине вдоль одного из направлений. На разных временных интервалах порядка малости безразмерных функций, характеризующих динамический режим растяжения, по отношению к геометрическому параметру могут быть разными, что определяет тот или иной режим растяжения. Таких характерных режимов выявлено два, один связан с достаточно большой скоростью удаления концов пластины друг от друга, второй с ускорением. Во втором случае проведен анализ с использованием метода асимптотического интегрирования, позволяющий приближенно найти параметры напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: идеальная пластичность, предел текучести, пластина, растяжение, шейка, квазистатика, динамика, скорость деформации, напряжение, асимптотические разложения

DOI: 10.31857/S0032823523040148, EDN: DYXOQF

Актуальность теории идеальной пластичности обусловлена важными приложениями во многих областях техники (оценка прочности и несущей способности конструкций, обработка металлов), задачах геофизики и геологии. Рассмотрению пространственных задач теории пластичности, изучению различных математических вопросов, в частности построению теории с условием пластичности Треска посвящены следующие работы [1, 2]. Первое аналитическое решение пространственной динамической задачи было найдено с помощью группового анализа [3], исследованиям в этой области посвящены современные статьи [4, 5].

При деформировании большинство пластических материалов заметно изменяют форму перед разрушением, то есть имеет место процесс локализации деформации. Динамическая задача о шейке при одноосном растяжении листа и стержня с постоянной скоростью исследовалась в работах [6, 7] с применением линейного анализа устойчивости, где продемонстрирован инерционный эффект, заключающийся в том, что число шеек увеличивается с увеличением скорости растяжения. В [8] проведен анализ динамической задачи о растяжении идеально жесткопластического бесконеч-

ного листа с критерием пластичности Мизеса в плоской постановке с использованием метода асимптотического интегрирования. Асимптотические разложения использовались в [9, 10] для исследования осесимметричных задач о динамическом растяжении стержня и слоя соответственно. В приведенных работах, в случае когда ускорение, заданное в областях кинематических граничных условий, достаточно высоко, приближенно получены параметры напряженно-деформированного состояния и аппроксимация границы области квадратичным трехчленом.

Настоящая работа посвящена задаче о растяжении идеально жесткопластической пластины. С использованием метода асимптотического интегрирования, выявлено два характерных режима растяжения, реализующихся при переходе от квазистатики к динамическому деформированию. Каждый из них связан с достижением некоторых безразмерных функций времени определенных порядков малости по отношению к малому геометрическому параметру, характеризующему форму пластины. Одна из групп безразмерных функций представляет собой обратные числа Эйлера, другая зависит от ускорений, с которыми боковые поверхности удаляются от центра. При реализации режима связанного с достижением ускорений своих критических значений, приближенно вычислены параметры напряженно-деформированного состояния, в частности получена аппроксимация поверхности пластины параболоидом, позволяющая моделировать шейкообразование.

1. Постановка задачи о динамическом растяжении пластины. Рассмотрим деформирование во времени пластины из однородного несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки с плотностью ρ и пределом текучести σ_s . Область Ω_t , занятая пластиной в момент t , представляет собой вытянутую симметричную область с неизменным во времени объемом $|\Omega_t|$ и в прямоугольной системе координат связанной с плоскостью симметрии пластины имеет вид

$$\Omega_t = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| \leq l_1(t), \quad |x_2| \leq l_2(t), \quad |x_3| \leq h(x_1, x_2, t)\} \quad (1.1)$$

$$|\Omega_t| = 2 \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} h(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 = 8h^* l_1 l_2 \quad (1.2)$$

Средняя высота h^* определяется в (1.2) таким образом, чтобы объем пластины с прямоугольным сечением имеющей измерения $2l_1$, $2l_2$ и высоту $2h^*$ равнялся $|\Omega_t|$.

Верхняя и нижняя поверхности $x_3 = \pm h(x_1, x_2, t)$ свободны от напряжений, а на боковых сторонах $x_i = l_i(t)$, где $i = 1, 2$, заданы продольные скорости

$$x_i = \pm l_i(t): \quad v_i = \pm V_i(t), \quad V_i(t) > 0 \quad (1.3)$$

Отметим, что случай $V_2 \equiv 0$, экспериментально реализованный в квазистатике [11] растяжением широких рулонов листового металла, соответствует плоской деформации по ширине пластины. Разрушению пластины при растяжении как вдоль направления прокатки, так и в поперечном направлении может предшествовать диффузная локализация деформации либо образование полосы сдвига.

Итак, рассматривается растяжение пластины с заданной кинематикой движения ее боковых сторон. Функции $l_1 l_2$ и h^* являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей. Векторные определяющие соотношения идеально жесткопластической среды имеют следующий вид

$$v_u \underline{s} = \sigma_u \underline{v}, \quad (1.4)$$

где $\underline{s}$ и $\underline{v}$ девиатор напряжений и тензор скоростей деформаций, σ_u и v_u их интенсивности соответственно. Исключая интенсивности из соотношений (1.4), можно образовать пропорции, $s_{11}v_{12} = s_{12}v_{11}$, $s_{22}v_{13} = s_{13}v_{22}$, $s_{11}v_{22} = s_{22}v_{11}$, $s_{33}v_{23} = s_{23}v_{33}$, преобразуя-

щиеся к следующему виду, где индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей переменной:

$$\begin{aligned}s_{11}(v_{1,2} + v_{2,1}) &= 2s_{12}v_{1,1}, & s_{22}(v_{1,3} + v_{3,1}) &= 2s_{13}v_{2,2} \\ s_{11}v_{2,2} &= s_{22}v_{1,1}, & (s_{11} + s_{22})(v_{2,3} + v_{3,2}) &= -2s_{23}v_{3,3}\end{aligned}\quad (1.5)$$

Условие пластичности Мизеса–Генки $\sigma_u = \sigma_s$ запишется следующим образом:

$$s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{11}s_{22} + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 = \tau_s^2, \quad (1.6)$$

где, $\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}$ – предел текучести при сдвиге.

Выпишем условия несжимаемости, а также уравнения движения:

$$v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = 0 \quad (1.7)$$

$$-p_{,i} + s_{ij,j} = \rho(v_{i,t} + v_j v_{i,j}), \quad (1.8)$$

где $i = 1, 2, 3$; а s_{33} из (1.8) можно исключить.

Нелинейная система девяти уравнений (1.5)–(1.8) замкнута относительно девяти функций $v_1, v_2, v_3, p, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23}$ зависящих от x_1, x_2, x_3 и t в области Ω_t с заранее неизвестной частью границы $x_3 = \pm h(x_1, x_2, t)$, которая характеризуется нормалью $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned}n_1 &= \mp \frac{\partial h / \partial x_1}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial x_1)^2 + (\partial h / \partial x_2)^2}}, & n_2 &= \mp \frac{\partial h / \partial x_2}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial x_1)^2 + (\partial h / \partial x_2)^2}} \\ n_3 &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial x_1)^2 + (\partial h / \partial x_2)^2}}\end{aligned}\quad (1.9)$$

На этой части границы выполнены условия равенства нулю трех компонент вектора напряжений:

$$\begin{aligned}x_3 = \pm h(x_1, x_2, t): & \quad \pm(p - s_{11}) \frac{\partial h}{\partial x_1} \mp s_{12} \frac{\partial h}{\partial x_2} \pm s_{13} = 0 \\ \mp s_{12} \frac{\partial h}{\partial x_1} \pm (p - s_{22}) \frac{\partial h}{\partial x_2} \pm s_{23} &= 0, & s_{13} \frac{\partial h}{\partial x_1} + s_{23} \frac{\partial h}{\partial x_2} + p + s_{11} + s_{22} &= 0\end{aligned}\quad (1.10)$$

Для строгой постановки начально-краевой задачи, рассматриваемой при $t > 0$, необходимо задать функцию $h(x_1, x_2, 0) = h_0(x_1, x_2)$, удовлетворяющую интегральному условию

$$\frac{|\Omega_t|}{2} = \int_{-l_1(0)}^{l_1(0)} \int_{-l_2(0)}^{l_2(0)} h_0(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.11)$$

На основании того, что область Ω_t симметрична, предположим, что s_{13}, s_{23}, v_3 нечетны по x_3 .

2. Квазистатический режим растяжения. Квазистатическая постановка задачи о растяжении идеально жесткопластической пластины отличается от динамической тем, что в правых частях уравнений (1.8) стоят нули, т.е. время t становится параметром, входящим в решения неявно через l_i, V_i . Уравнения (1.8) превращаются в уравнения равновесия.

Аналитическое решение квазистатической задачи несложно получить, если в начальный момент времени пластина имела форму прямоугольного параллелепипеда, т.е. $h_0 = \text{const}$. Будем обозначать параметры этого решения верхним индексом “qs”. Имеем:

$$\begin{aligned}
v_1^{qs} &= \frac{V_1}{l_1} x_1, \quad v_2^{qs} = \frac{V_2}{l_2} x_2, \quad v_3^{qs} = -\frac{V_1 l_2 + V_2 l_1}{l_1 l_2} x_3, \quad s_{12}^{qs} = s_{13}^{qs} = s_{23}^{qs} = 0 \\
s_{11}^{qs} &= \frac{\tau_s V_1 l_2}{\sqrt{V_1^2 l_2^2 + V_2^2 l_1^2 + V_1 V_2 l_2 l_1}}, \quad s_{22}^{qs} = \frac{\tau_s V_2 l_1}{\sqrt{V_1^2 l_2^2 + V_2^2 l_1^2 + V_1 V_2 l_2 l_1}} \\
s_{33}^{qs} &= p = -\frac{\tau_s (V_1 l_2 + V_2 l_1)}{\sqrt{V_1^2 l_2^2 + V_2^2 l_1^2 + V_1 V_2 l_2 l_1}}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

У тензора напряжений только две ненулевые компоненты σ_{11} , σ_{22} . Кинематика (2.1) обеспечивает отсутствие жестких зон в Ω_p , так как

$$v_u^{qs} = \frac{\sqrt{2}}{l_1 l_2} \sqrt{V_1^2 l_2^2 + V_2^2 l_1^2 + V_1 V_2 l_2 l_1} > 0 \tag{2.2}$$

во всех точках пластины.

Исследуем далее вопрос о том, при каких соотношениях безразмерных параметров системы (или на каких временах) выписанное выше квазистатическое приближение является главным и им можно ограничиться в технологических расчетах, а когда инерционные эффекты, вызванные слагаемыми в правых частях уравнений (1.8), начинают играть соизмеримую роль в распределении напряжений и движений точек внутри пластины.

3. Асимптотическое разложение. Обратимся к динамическим уравнениям (1.8) и образуем явно зависящие от времени безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \frac{h^*(t)}{l_1(t)} \ll 1, \quad \varepsilon_{11} = \frac{\rho V_1^2(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\rho V_1(t) V_2(t)}{\tau_s} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\rho V_2^2(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho V_1(t) h^*(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho V_2(t) h^*(t)}{\tau_s}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Первый из них — малый геометрический параметр, следующая за ним группа — обратные числа Эйлера, последняя — характеризует ускорение с которым боковые грани удаляются от центра пластины. На разных интервалах процесса растяжения порядок малости выписанных параметров по α может меняться. От этого зависит вклад инерционных слагаемых в уравнения движения. Помимо выписанных групп в безразмерные уравнения входят следующие параметры зависящие от времени — l_1/l_2 , V_2/V_1 . От порядка их малости по α также зависит вид исследуемых уравнений. В данной работе рассмотрим частный случай $l_1/l_2 = O(1)$, $V_2/V_1 = O(1)$.

Представим разложения девяти неизвестных функций в виде регулярных асимптотических рядов по целым степеням малого асимптотического параметра α (в [9, 10] аналогичные по структуре разложения использовались при анализе растяжения осесимметричных стержня и слоя соответственно, в [12] разложения использовались в анализе задачи Прандтля):

$$\begin{aligned}
v_1(x_1, x_2, x_3, t) &= V_1(t) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\eta_1}^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau) \\
v_2(x_1, x_2, x_3, t) &= V_2(t) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\eta_2}^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau) \\
v_3(x_1, x_2, x_3, t) &= \left(V_1(t) + V_2(t) \frac{l_1(t)}{l_2(t)} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\eta_3}^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$s_{(11;12;13;23;22)}(x_1, x_2, x_3, t) = \tau_s \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) s_{(\eta_1 \eta_1; \eta_1 \eta_2; \eta_1 \eta_3; \eta_2 \eta_3; \eta_2 \eta_2)}^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau)$$

$$p(x_1, x_2, x_3, t) = \tau_s \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) p^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau)$$

$$\eta_1 = \frac{\alpha(t)x_1}{h^*(t)} = \frac{x_1}{l_1(t)}, \quad \eta_2 = \frac{x_2}{l_2(t)}, \quad \eta_3 = \frac{x_3}{h^*(t)}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \frac{t}{h^*(t)} \quad (3.3)$$

Безразмерные коэффициенты рядов (3.2) зависят от новых безразмерных координат η_1, η_2, η_3 и безразмерного времени τ . Область пластины Ω_t (1.1) в любой момент времени описывается неравенствами

$$\Omega_\tau = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mid |\eta_1| \leq 1, \quad |\eta_2| \leq 1, \quad |\eta_3| \leq \xi(\tau, \eta_1, \eta_2)\} \quad (3.4)$$

$$\xi(\tau, \eta_1, \eta_2) = \frac{h(t, x_1, x_2)}{h^*(t)}, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi(\tau, \eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 = 4$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1}, \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = \alpha \frac{l_1}{l_2} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} \quad (3.5)$$

Отметим, что порядок малости по α безразмерных производных $\partial h / \partial x_i$ и $\partial \xi / \partial \eta_i$ разный. Так как функция $\tau(t)$ монотонно возрастает, якобиан замены переменных $\partial(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau) / \partial(x_1, x_2, x_3, t)$ отличен от нуля, т.е. она невырождена. Имеет место замена дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{l_1(t)} \frac{\partial}{\partial \eta_1} = \frac{\alpha(t)}{h^*(t)} \frac{\partial}{\partial \eta_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{l_2(t)} \frac{\partial}{\partial \eta_2} = \frac{\alpha}{h^*} \frac{l_1}{l_2} \frac{\partial}{\partial \eta_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{1}{h^*(t)} \frac{\partial}{\partial \eta_3} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{V_1 \eta_1}{l_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \frac{V_2 \eta_2}{l_2} \frac{\partial}{\partial \eta_2} + \frac{(V_1 l_2 + V_2 l_1)}{l_1 l_2} \eta_3 \frac{\partial}{\partial \eta_3} + \left(\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \frac{1}{h^*} + \frac{(V_1 l_2 + V_2 l_1)}{l_1 l_2} \tau \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (3.7)$$

Из определения малого параметра (3.1) и средней высоты пластины (1.2) следуют кинетические соотношения:

$$\dot{\alpha} = -\frac{\alpha(2V_1 l_2 + V_2 l_1)}{l_1 l_2}, \quad \dot{h^*} = -\frac{h^*(V_1 l_2 + V_2 l_1)}{l_1 l_2} \quad (3.8)$$

Подставим ряды (3.2) в девять уравнений (1.5–1.8) и граничные условия (1.3), (1.10). С учетом формул (3.5)–(3.8) получим систему, состоящую из уравнений движения (1.8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(-\alpha p_{\eta_1}^{\{n\}} + \alpha s_{\eta_1 \eta_1, \eta_1}^{\{n\}} + \alpha \frac{l_1}{l_2} s_{\eta_1 \eta_2, \eta_2}^{\{n\}} + s_{\eta_1 \eta_3, \eta_3}^{\{n\}} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \left(-n(2\varepsilon_{11} + \frac{l_1}{l_2} \varepsilon_{12}) v_{\eta_1}^{\{n\}} - \varepsilon_{11} \eta_1 v_{\eta_1, \eta_1}^{\{n\}} - \frac{l_1}{l_2} \varepsilon_{12} \eta_2 v_{\eta_1, \eta_2}^{\{n\}} + \left(\varepsilon_{11} + \frac{l_1}{l_2} \varepsilon_{12} \right) \eta_3 v_{\eta_1, \eta_3}^{\{n\}} + \right.$$

$$+ \left(\varepsilon_{11} + \frac{l_1}{l_2} \varepsilon_{12} \right) \tau v_{\eta_1, \tau}^{\{n\}} + \sqrt{\varepsilon_{11}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\eta_1, \tau}^{\{n\}} + \varepsilon_{11} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\eta_1, \eta_1}^{\{j\}} v_{\eta_1, \eta_1}^{\{n-j\}} +$$

$$+ \frac{l_1}{l_2} \varepsilon_{12} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\eta_2, \eta_2}^{\{j\}} v_{\eta_1, \eta_2}^{\{n-j\}} + \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} \frac{l_1}{l_2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\eta_3, \eta_3}^{\{j\}} v_{\eta_1, \eta_3}^{\{n-j\}} + \varepsilon_{11} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\eta_1}^{\{n\}} \quad (3.9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(-\alpha \frac{l_1}{l_2} p_{\eta_2}^{\{n\}} + \alpha s_{\eta_2 \eta_2, \eta_1}^{\{n\}} + \alpha \frac{l_1}{l_2} s_{\eta_2 \eta_2, \eta_2}^{\{n\}} + s_{\eta_2 \eta_3, \eta_3}^{\{n\}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \left(-n \left(2\varepsilon_{12} + \frac{l_1}{l_2} \varepsilon_{22} \right) v_{\eta_2}^{\{n\}} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_{12}\eta_{11}v_{\eta_2,\eta_1}^{\{n\}} - \varepsilon_{22}\frac{l_1}{l_2}\eta_2v_{\eta_2,\eta_2}^{\{n\}} + \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}\frac{l_1}{l_2}\right)\eta_3v_{\eta_2,\eta_3}^{\{n\}} + \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}\frac{l_1}{l_2}\right)\tau v_{\eta_2,\tau}^{\{n\}} + \\
& + \sqrt{\varepsilon_{22}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\eta_2,\tau}^{\{n\}} + \varepsilon_{12}\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\eta_1}^{\{j\}}v_{\eta_2,\eta_1}^{\{n-j\}} + \varepsilon_{22}\alpha\frac{l_1}{l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\eta_2}^{\{j\}}v_{\eta_2,\eta_2}^{\{n-j\}} + \\
& + \left(\varepsilon_{12} + \frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{22}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\eta_3}^{\{j\}}v_{\eta_2,\eta_3}^{\{n-j\}} + \varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\eta_2}^{\{n\}}
\end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \left(-p_{\eta_3}^{\{n\}} + \alpha s_{\eta_1\eta_3,\eta_1}^{\{n\}} + \alpha\frac{l_1}{l_2}s_{\eta_2\eta_3,\eta_2}^{\{n\}} - s_{\eta_1\eta_1,\eta_3}^{\{n\}} - s_{\eta_2\eta_2,\eta_3}^{\{n\}} \right) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1} \left(-n \left(2\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \right) v_{\eta_3}^{\{n\}} - \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} \right) \eta_{11}v_{\eta_3,\eta_1}^{\{n\}} - \right. \\
& - \left(\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \right) \eta_2v_{\eta_3,\eta_2}^{\{n\}} + \left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \right) \eta_3v_{\eta_3,\eta_3}^{\{n\}} + \\
& + \left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \right) \tau v_{\eta_3,\tau}^{\{n\}} + \left(\sqrt{\varepsilon_{11}} + \sqrt{\varepsilon_{22}}\frac{l_1}{l_2} \right) \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\eta_3,\tau}^{\{n\}} + \\
& + \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} \right) \alpha \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\eta_1}^{\{j\}}v_{\eta_3,\eta_1}^{\{n-j\}} + \left(\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \right) \alpha \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\eta_2}^{\{j\}}v_{\eta_3,\eta_2}^{\{n-j\}} + \\
& + \left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\eta_3}^{\{j\}}v_{\eta_3,\eta_3}^{\{n-j\}} + \\
& + \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\frac{l_1}{l_2} + \alpha\frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{12} - \alpha\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\varepsilon_{22} \right) \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\eta_3}^{\{n\}},
\end{aligned} \quad (3.11)$$

условия несжимаемости (1.9), которое в силу линейности, может быть записано в виде рекуррентной цепочки (коэффициенты с отрицательными индексами считаются равными нулю)

$$v_{\eta_1,\eta_1}^{\{n-1\}} + \frac{l_1}{l_2}\frac{V_2}{V_1}v_{\eta_2,\eta_2}^{\{n-1\}} + \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\frac{V_2}{V_1}\right)v_{\eta_3,\eta_3}^{\{n\}} = 0; \quad n \geq 0, \quad (3.12)$$

критерия Мизеса—Генки (1.6)

$$\begin{aligned}
& \left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}\right)^2 + s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} + \left(s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 = 1 \\
& \sum_{j=0}^n s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}}s_{\eta_1\eta_1}^{\{n-j\}} + \sum_{j=0}^n s_{\eta_2\eta_2}^{\{j\}}s_{\eta_2\eta_2}^{\{n-j\}} + \sum_{j=0}^n s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}}s_{\eta_2\eta_2}^{\{n-j\}} + \sum_{j=0}^n s_{\eta_1\eta_2}^{\{j\}}s_{\eta_1\eta_2}^{\{n-j\}} + \\
& + \sum_{j=0}^n s_{\eta_1\eta_3}^{\{j\}}s_{\eta_1\eta_3}^{\{n-j\}} + \sum_{j=0}^n s_{\eta_2\eta_3}^{\{j\}}s_{\eta_2\eta_3}^{\{n-j\}} = 0; \quad n \geq 1
\end{aligned} \quad (3.13)$$

условия пропорциональности девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций (1.5)

$$\frac{l_1}{l_2}\sum_{j=0}^n s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}}v_{\eta_1,\eta_2}^{\{n-j\}} + \frac{V_2}{V_1}\sum_{j=0}^n s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}}v_{\eta_2,\eta_1}^{\{n-j\}} = 2\sum_{j=0}^n s_{\eta_1\eta_2}^{\{j\}}v_{\eta_1,\eta_1}^{\{n-j\}}; \quad n \geq 0 \quad (3.14)$$

$$\sum_{j=0}^n s_{\eta_2 \eta_2}^{\{j\}} v_{\eta_1 \eta_3}^{\{n-j\}} + \left(1 + \frac{l_1 V_2}{l_2 V_1}\right) \sum_{j=0}^{n-1} s_{\eta_2 \eta_2}^{\{j\}} v_{\eta_3 \eta_1}^{\{n-1-j\}} = 2 \frac{l_1 V_2}{l_2 V_1} \sum_{j=0}^{n-1} s_{\eta_1 \eta_3}^{\{j\}} v_{\eta_2 \eta_2}^{\{n-1-j\}}; \quad n \geq 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{V_2}{V_1} \frac{l_1}{l_2} \sum_{j=0}^n s_{\eta_1 \eta_1}^{\{j\}} v_{\eta_2 \eta_2}^{\{n-j\}} = \sum_{j=0}^n s_{\eta_2 \eta_2}^{\{j\}} v_{\eta_1 \eta_1}^{\{n-j\}}; \quad n \geq 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} \sum_{j=0}^n \left(s_{\eta_1 \eta_1}^{\{j\}} + s_{\eta_2 \eta_2}^{\{j\}} \right) v_{\eta_2 \eta_3}^{\{n-j\}} + \left(1 + \frac{l_1 V_2}{l_2 V_1}\right) \frac{l_1}{l_2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(s_{\eta_1 \eta_1}^{\{j\}} + s_{\eta_2 \eta_2}^{\{j\}} \right) v_{\eta_3 \eta_2}^{\{n-1-j\}} = \\ = -2 \left(1 + \frac{l_1 V_2}{l_2 V_1}\right) \sum_{j=0}^n s_{\eta_2 \eta_3}^{\{j\}} v_{\eta_3 \eta_3}^{\{n-j\}}; \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Граничные условия (1.3) имеют вид, где $i = 1, 2$:

$$\eta_i = \pm 1: \quad v_{\eta_i}^{\{0\}} = \pm 1, \quad v_{\eta_i}^{\{n\}} = 0; \quad n \geq 1 \quad (3.18)$$

Нижняя граница получается из верхней отражением, поэтому в (1.10) оставим знак "+". Условия того, что верхняя грань свободна от напряжений (1.10) следующие:

$$\eta_3 = \xi(\eta_1, \eta_2, \tau): \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \left(p^{\{n\}} - s_{\eta_1 \eta_1}^{\{n\}} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} - \frac{l_1}{l_2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} s_{\eta_1 \eta_2}^{\{n\}} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\eta_1 \eta_3}^{\{n\}} = 0 \quad (3.19)$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} s_{\eta_1 \eta_2}^{\{n\}} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} + \frac{l_1}{l_2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \left(p^{\{n\}} - s_{\eta_2 \eta_2}^{\{n\}} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\eta_2 \eta_3}^{\{n\}} = 0 \quad (3.20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} s_{\eta_1 \eta_3}^{\{n\}} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} + \frac{l_1}{l_2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} s_{\eta_2 \eta_3}^{\{n\}} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(p^{\{n\}} + s_{\eta_1 \eta_1}^{\{n\}} + s_{\eta_2 \eta_2}^{\{n\}} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Безразмерные параметры ϵ_{ij} и ϵ_i входят только в уравнения (3.9–3.11). На тех или иных временных интервалах порядок их малости по сравнению с $\alpha(t)$ может меняться. От этого зависит учет или неучет слагаемых в правых частях уравнений в процессе приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра.

4. Метод асимптотического интегрирования. Воспользуемся методом асимптотического интегрирования [8–10, 12, 13] задачи (3.9)–(3.21), заключающемся в последовательном решении замкнутых систем уравнений относительно $v_{\eta_1}^{\{n\}}$, $v_{\eta_2}^{\{n\}}$, $v_{\eta_3}^{\{n\}}$, $s_{\eta_1 \eta_1}^{\{n\}}$, $s_{\eta_1 \eta_2}^{\{n\}}$, $s_{\eta_1 \eta_3}^{\{n\}}$, $s_{\eta_2 \eta_2}^{\{n\}}$, $s_{\eta_2 \eta_3}^{\{n\}}$, $p^{\{n\}}$, где $n \geq 0$, в области Ω_τ с заранее неизвестной частью границы $\eta_3 = \pm \xi(\eta_1, \eta_2, \tau)$.

Обратимся к первому уравнению (3.12): $v_{\eta_3 \eta_3}^{\{0\}} = 0$. Из этого уравнения следует, что $v_{\eta_3}^{\{0\}} = v_{\eta_3}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2, \tau)$, а с учетом требования антисимметричности по η_3 получаем $v_{\eta_3}^{\{0\}} = 0$.

Из рекуррентной цепочки (3.12) при $n = 1$ и уравнений (3.15), (3.17) при $n = 0$ получаем

$$v_{\eta_1 \eta_1}^{\{0\}} + g_1 g_2 v_{\eta_2 \eta_2}^{\{0\}} + (1 + g_1 g_2) v_{\eta_3 \eta_3}^{\{1\}} = 0, \quad s_{\eta_2 \eta_2}^{\{0\}} v_{\eta_1 \eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad \left(s_{\eta_1 \eta_1}^{\{0\}} + s_{\eta_2 \eta_2}^{\{0\}} \right) v_{\eta_2 \eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad (4.1)$$

где $g_1 = l_1/l_2$, $g_2 = V_2/V_1$. Следовательно, $v_{\eta_1}^{\{0\}} = v_{\eta_1}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2, \tau)$, $v_{\eta_2}^{\{0\}} = v_{\eta_2}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2, \tau)$, $v_{\eta_3}^{\{1\}} = v_{\eta_3}^{\{0\}} + g_1 g_2 v_{\eta_2 \eta_2}^{\{0\}}$. Потребуем, чтобы найденные компоненты вектора скорости совпали с компонентами (2.1) в квазистатике, в таком случае

$$v_{\eta_1}^{\{0\}} = \eta_1, \quad v_{\eta_2}^{\{0\}} = \eta_2, \quad v_{\eta_3}^{\{1\}} = -\eta_3 \quad (4.2)$$

Линейные зависимости (4.2) имеют место для любых соотношений порядков малости по α параметров $\varepsilon_{ij}(t)$, $\varepsilon_i(t)$. Рассмотрев первое уравнение в (3.13), уравнение из (3.14) при $n = 0$, из (3.15) при $n = 1$, из (3.16) при $n = 0$ и из (3.17) при $n = 1$, получим незамкнутую систему уравнений относительно $s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}$, $s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}}$, $s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}$, $s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}$, $s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}$, $v_{\eta_1\eta_3}^{\{1\}}$, $v_{\eta_2\eta_3}^{\{1\}}$:

$$\begin{aligned} & \left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}\right)^2 + s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} + \left(s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 = 1, \quad s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}} = 0 \\ & s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}v_{\eta_1\eta_3}^{\{1\}} = 2g_1g_2s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}, \quad g_1g_2s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} = s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}, \quad g_2\left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} + s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}\right)v_{\eta_2\eta_3}^{\{1\}} = 2(1 + g_1g_2)s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для замыкания системы (4.3) необходимо рассмотреть конкретный режим растяжения. Отметим что $\varepsilon_{12} = g_2\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{22} = g_2^2\varepsilon_{11}$, где $g_2 = O(1)$, поэтому для обратных чисел Эйлера достаточно задать только порядок ε_{11} по α .

Из (3.9)–(3.11) следует, что на временных интервалах, где одновременно $\varepsilon_{11}\alpha^2 = o(1)$, $\varepsilon_1 = o(1)$, $\varepsilon_2 = o(1)$ после приравнивания нулю коэффициентов при α^0 в (3.9) и (3.10), с учетом (4.3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}\right)^2 + s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} + \left(s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 = 1 \\ & g_1g_2s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} = s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}, \quad s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из последних уравнений получаем, что $s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}} = s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2, \tau)$, $s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}} = s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2, \tau)$, а с учетом требования нечетности $s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}$, $s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}$ по η_3 получаем

$$\begin{aligned} s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + g_1g_2 + g_1^2g_2^2}} \\ s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} &= \frac{g_1g_2}{\sqrt{1 + g_1g_2 + g_1^2g_2^2}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом пришли к напряженному состоянию, соответствующему квазистатическому растяжению пластины с горизонтальной границей. Также, приравнявая коэффициенты при α^0 , из (3.11) следует, что $p_{\eta_3}^{\{0\}} + s_{\eta_1\eta_1\eta_3}^{\{0\}} + s_{\eta_2\eta_2\eta_3}^{\{0\}} = 0$.

Итак, в рамках сделанных предположений о порядках g_1 и g_2 , динамические эффекты начинают играть роль и вносить вклад в напряженно-деформированное состояние, сопоставимый с квазистатикой, если выполняется хотя бы одно из требований: а) параметр ε_{11} становится порядка α^n , $n \leq -2$; б) один из параметров ε_1 или ε_2 становится порядка α^m , $m \leq 0$.

Остановимся в данной работе на случае, когда $\varepsilon_{11} = o(\alpha^{-2})$ и $\varepsilon_1 = O(1)$, $\varepsilon_2 = O(1)$. Дадим оценку размерных величин, при которых реализуется данный режим растяжения пластины. Константа ρ/τ_s как для металлов и сплавов, так и для большинства полимеров, имеет порядок $10^{-5} - 10^{-4}$ с²/м². Если взять временной интервал, на котором $\alpha \sim 10^{-1}$, а $h^* \sim 10^{-2}$ м, то соотношения порядков $\varepsilon_{11} = o(\alpha^{-2})$ будут реализовываться при скоростях V_1 не больше чем 10^2 м/с, а $\varepsilon_i = O(1)$ при ускорениях $\dot{V}_i \sim 10^6 - 10^7$ м/с².

Рассмотрев коэффициенты при α^0 в (3.9)–(3.11) и добавив уравнения к (4.3) получим замкнутую систему уравнений относительно $s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}$, $s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}$, $s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}$, $s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}$, $v_{\eta_1}^{\{1\}}$, $v_{\eta_2}^{\{2\}}$:

$$s_{\eta_1\eta_3,\eta_3}^{\{0\}} = \varepsilon_1\eta_1, \quad s_{\eta_2\eta_3,\eta_3}^{\{0\}} = \varepsilon_2\eta_2, \quad p_{,\eta_3}^{\{0\}} + s_{\eta_1\eta_1,\eta_3}^{\{0\}} + s_{\eta_2\eta_2,\eta_3}^{\{0\}} = 0 \quad (4.6)$$

Два первых уравнения (4.6) замыкают систему, а последнее служит для определения давления $p^{\{0\}}$. Решение системы (4.6) следующее:

$$s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}} = \varepsilon_1\eta_1\eta_3, \quad s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}} = \varepsilon_2\eta_2\eta_3$$

$$s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} = \sqrt{\frac{1 - \eta_3^2 (\varepsilon_1^2\eta_1^2 + \varepsilon_2^2\eta_2^2)}{1 + g_1g_2 + g_1^2g_2^2}}, \quad s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} = g_1g_2\sqrt{\frac{1 - \eta_3^2 (\varepsilon_1^2\eta_1^2 + \varepsilon_2^2\eta_2^2)}{1 + g_1g_2 + g_1^2g_2^2}} \quad (4.7)$$

$$v_{\eta_1}^{\{1\}} = -2\varepsilon_1\sqrt{1 + g_1g_2 + g_1^2g_2^2} \frac{\eta_1\sqrt{1 - \eta_3^2 (\varepsilon_1^2\eta_1^2 + \varepsilon_2^2\eta_2^2)}}{(\varepsilon_1^2\eta_1^2 + \varepsilon_2^2\eta_2^2)} + f_1(\eta_1, \eta_2, \tau)$$

$$v_{\eta_2}^{\{1\}} = \frac{-2\varepsilon_2\sqrt{1 + g_1g_2 + g_1^2g_2^2} \eta_2\sqrt{1 - \eta_3^2 (\varepsilon_1^2\eta_1^2 + \varepsilon_2^2\eta_2^2)}}{g_2(\varepsilon_1^2\eta_1^2 + \varepsilon_2^2\eta_2^2)} + f_2(\eta_1, \eta_2, \tau), \quad (4.8)$$

где функции $f_1(\eta_1, \eta_2, \tau)$, $f_2(\eta_1, \eta_2, \tau)$ определяется из последующих по α приближений. Заметим, что если одновременно устремить ε_1 и ε_2 к нулю, то компоненты девиатора (4.7) будут стремиться к квазистатическому решению.

Вид функции $v_{\eta_1}^{\{1\}}$, $v_{\eta_2}^{\{1\}}$ позволяет сделать следующие выводы:

1. Точно однородным граничным условиям на торцах пластины $\eta_i = \pm 1$, где $i = 1, 2$, удовлетворить не удастся.

2. Когда $\eta_1^2 + \eta_2^2 \rightarrow 0$, т.е. при стремлении к средней оси пластины, $|v_{\eta_1}^{\{1\}}| \rightarrow \infty$, $|v_{\eta_2}^{\{1\}}| \rightarrow \infty$. Это говорит о потере асимптотичности в смысле Пуанкаре вблизи оси $(0, 0, \eta_3)$ ряда (3.2) для скоростей v_1, v_2 .

Из этих выводов следует, что использование асимптотических рядов (3.2) вблизи торцов пластины, т.е. в зоне краевого эффекта и в середине, где происходит перестройка течения, неправомерно. По своей геометрии область неприменимости асимптотического разложения напоминает задачу Прандтля [12].

5. Уравнения для определения формы границы пластины. Обратимся к граничным условиям (3.19–3.21) на неизвестной границе пластины $\eta_3 = \xi(\eta_1, \eta_2, \tau)$. Порядок малости по α производных $\partial\xi/\partial\eta_1$, $\partial\xi/\partial\eta_2$ заранее неизвестен. Предположение о том, что хотя бы одна из производных имеет порядок 1, например $\partial\xi/\partial\eta_1 \sim 1$, т.е. $\partial h/x_1 \sim \alpha$, приводит к противоречию. В таком случае из (3.19) будем иметь на границе $s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}} = 0$.

Но согласно (4.7) компонента $s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}$ равна нулю только при $\xi = 0$ или при $\eta_1 = 0$. Ни одно из этих уравнений форму границу описывать не может, что говорит о неправомерности предположения $\partial\xi/\partial\eta_1 \sim 1$.

Пусть $\partial\xi/\partial\eta_1 \sim 1/\alpha$, $\partial\xi/\partial\eta_2 \sim 1/\alpha$, т.е. $\partial h/x_1 \sim 1$, $\partial h/x_2 \sim 1$. Тогда, в главном по α приближении, условия (3.19)–(3.21) имеют вид

$$\eta_3 = \xi(\eta_1, \eta_2, \tau): \quad \alpha(p^{\{0\}} - s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}) \frac{\partial\xi}{\partial\eta_1} + s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad g_1\alpha(p^{\{0\}} - s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}) \frac{\partial\xi}{\partial\eta_2} + s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}} = 0$$

$$\alpha s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}} \frac{\partial\xi}{\partial\eta_1} + g_1 s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}} \alpha \frac{\partial\xi}{\partial\eta_2} + p^{\{0\}} + s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} + s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} = 0 \quad (5.1)$$

Исключая $p^{\{0\}}$ из равенств (5.1) используя третье уравнение и подставляя компоненты девиатора (4.7) получим нелинейную систему уравнений для определения функции ξ :

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{2 + g_1 g_2}{\sqrt{1 + g_1 g_2 + g_1^2 g_2^2}} \right) \sqrt{1 - \xi^2 (\epsilon_1^2 \eta_1^2 + \epsilon_2^2 \eta_2^2)} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} + \\ & + \alpha^2 \epsilon_1 \eta_1 \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} \right)^2 + g_1 \alpha^2 \epsilon_2 \eta_2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} - \epsilon_1 \eta_1 \xi = 0 \\ & \alpha g_1 \left(\frac{2 g_1 g_2 + 1}{\sqrt{1 + g_1 g_2 + g_1^2 g_2^2}} \right) \sqrt{1 - \xi^2 (\epsilon_1^2 \eta_1^2 + \epsilon_2^2 \eta_2^2)} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} + \alpha^2 g_1^2 \epsilon_2 \eta_2 \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} \right)^2 + \\ & + g_1 \alpha^2 \epsilon_1 \eta_1 \xi \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} - \epsilon_2 \eta_2 \xi = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Необходимо учесть также интегральное условие нормировки (3.5).

Для приближенного интегрирования уравнения заметим, что если положить $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, то с учетом (3.5) получим $\xi \equiv 1$, что соответствует горизонтальной поверхности в квазистатическом решении. Представим функцию $\xi(\eta_1, \eta_2, \tau)$ в виде ряда по ϵ_1 и ϵ_2 :

$$\xi(\eta_1, \eta_2, \tau) = 1 + \epsilon_1 \xi_1 + \epsilon_2 \xi_2 + \dots; \quad \epsilon_1 < 1, \quad \epsilon_2 < 1, \quad (5.3)$$

и подставим в (5.2) и интегральное условие (3.5). В линейном приближении по ϵ_1 , ϵ_2 для ξ_1 и ξ_2 будем иметь уравнения

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_1} = 0, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} = \frac{\sqrt{1 + g_1 g_2 + g_1^2 g_2^2} \eta_1}{2 + g_1 g_2} \alpha, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_2} = \frac{\sqrt{1 + g_1 g_2 + g_1^2 g_2^2} \eta_2}{g_1(1 + 2g_1 g_2)} \alpha, \quad (5.4)$$

откуда после интегрирования и нормировки получаем приближение границы пластины параболоидом

$$\xi \approx 1 + \frac{\epsilon_1 \sqrt{1 + g_1 g_2 + g_1^2 g_2^2}}{2(2 + g_1 g_2) \alpha} \left(\eta_1^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{\epsilon_2 \sqrt{1 + g_1 g_2 + g_1^2 g_2^2}}{2g_1(1 + 2g_1 g_2) \alpha} \left(\eta_2^2 - \frac{1}{3} \right), \quad (5.5)$$

моделирующее утоньшение в середине пластины и утолщение по краям при динамическом растяжении, т.е. шейкообразование при динамическом растяжении.

Найдем последний из неопределенных коэффициентов главного по α приближения (3.2) — давление $p^{\{0\}}$. Для этого воспользуемся третьим уравнением (4.6) и последним граничным условием (5.1). Следовательно всюду в области Ω_τ :

$$\begin{aligned} p^{\{0\}} &= -s_{\eta_1 \eta_1}^{\{0\}} - s_{\eta_2 \eta_2}^{\{0\}} - \left(\alpha s_{\eta_1 \eta_3}^{\{0\}} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} + g_1 \alpha s_{\eta_2 \eta_3}^{\{0\}} \frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} \right) \bigg|_{\eta_3=\xi} = \\ &= -\frac{1 + g_1 g_2}{\sqrt{1 + g_1 g_2 + g_1^2 g_2^2}} \sqrt{1 - \eta_3^2 (\epsilon_1^2 \eta_1^2 + \epsilon_2^2 \eta_2^2)} - \alpha \eta_3 \left(\epsilon_1 \eta_1 \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} + g_1 \epsilon_2 \eta_2 \frac{\partial \xi}{\partial \eta_2} \right) \bigg|_{\eta_3=\xi}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

куда из (4.7) подставлены компоненты $s_{\eta_1 \eta_1}^{\{0\}}$, $s_{\eta_2 \eta_2}^{\{0\}}$ девиатора напряжений. В (5.6) входит функция, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений (5.2). В качестве ее приближенного значения может быть использована аппроксимация (5.5). В отличие от квазистатического решения, с точностью до первых по α членов разложения (3.2), все компоненты тензора напряжений, кроме σ_{12} отличны от нуля.

Таким образом, переход от квазистатики к динамическому режиму растяжения пластины, характеризующийся достижением безразмерных функций ϵ_1 , ϵ_2 своих критических значений, влечет за собой образование и рост шейки в средней части пластины

ны. Параметры напряженно-деформированного состояния и других инерционных эффектов точно или приближенно найдены выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.
2. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарск. гос. ун-та, 2004. 147 с.
3. Аннин Б.Д., Бытнев В.О., Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 239 с.
4. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Новые решения динамических уравнений идеальной пластичности // Сиб. ж. индустр. матем. 2019. Т. 22. № 4. С. 89–94.
5. Сенашов С.И., Гомонова О.В., Савостьянова И.Л. и др. Новые классы решений динамических задач пластичности // Ж. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2020. Т. 13. Вып. 6. С. 792–796.
6. Shenoy V.B., Freund L.B. Necking bifurcations during high strain rate extension // J. Mech. & Phys. of Solids. 1999. V. 47. P. 2209–2233.
7. Mercier S., Molinari A. Predictions of bifurcation and instabilities during dynamic extension // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. P. 1995–2016.
8. Цветков И.М. Динамическое растяжение листа из идеально жесткопластического материала // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2022. № 6. С. 51–60.
9. Георгиевский Д.В. Динамические режимы растяжения стержня из идеально жесткопластического материала // ПМТФ. 2021. Т. 62. № 5. С. 119–130.
10. Цветков И.М. Динамическое осесимметричное растяжение тонкого круглого идеально жесткопластического слоя // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 5. С. 79–88.
11. Taha F., Graf A., Hosford W. Plane-strain tension tests on aluminum alloy sheet // J. Eng. Mater. Technol. (Trans. ASME) 1995. V. 117. № 2. P. 168–171.
12. Georgievskii D.V., Muller W.H., Abali B.E. Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2019. V. 99. № 12. P. 1–11.
13. Найдэ А.Х. Введение в методы возмущений, М.: Мир, 1984. 535 с.

Dynamic Regimes of Biaxial Stretching of a Thin Ideally Rigid-Plastic Rectangular Plate

I. M. Tsvetkov^{a, #}

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[#] e-mail: cvetkoviv@yandex.ru

The stress-strain state arising during dynamic tension of a homogeneous rectangular plate of an incompressible ideally rigid-plastic material, which obeys the Mises–Hencky criterion, is considered. The upper and lower bases are stress-free, longitudinal velocities are set at the ends. The possibility of deformation of the upper and lower sides of the plate is taken into account, which simulates neck formation and further development of the neck. A small geometric parameter is introduced – the ratio of the average thickness of the plate to its length along one of the directions. At different time intervals, the order of smallness of the dimensionless functions characterizing the dynamic stretching mode may be different with respect to the geometric parameter, which determines one or another stretching mode. Two such characteristic modes have been identified, one is associated with a sufficiently high rate of removal of the ends of the plate from each other, the second with acceleration. In the second case, an analysis was carried out using the method of asymptotic integration, which allows us to approximately find the parameters of the stress-strain state.

Keywords: ideal plasticity, yield stress, plate, tension, neck, quasi-static, dynamics, strain rate, stress, asymptotic expansions

REFERENCES

1. *Zadayan M.A.* Spatial Problems of Plasticity Theory. Moscow: Nauka, 1992. 384 p. (in Russian)
2. *Radaev Y.N.* Spatial Problem of Mathematical Theory of Plasticity. Samara: Izd-vo Samar. Gos. Univ., 2004. 147 p. (in Russian)
3. *Annin B.D., Bytev V.O., Senashov S.I.*, Group Properties of the Equations of Elasticity and Plasticity. Novosibirsk: Nauka, 1985. 239 p. (in Russian)
4. *Senashov S.I., Savostyanova I.L.* New solutions of dynamical equations of ideal plasticity // J. Appl.&Industr. Math., 2019, vol. 13, pp. 740–745.
5. *Senashov S.I., Savostyanova I.L. et al.* New classes of solutions of dynamical problems of plasticity // J. Sib. Fed. Univ. Math.&Phys., 2020, vol. 13 (6), pp. 792–796.
6. *Shenoy V.B., Freund L.B.* Necking bifurcations during high strain rate extension // J. Mech.&Phys. of Solids, 1999, vol. 47, pp. 2209–2233.
7. *Mercier S., Molinari A.* Predictions of bifurcation and instabilities during dynamic extension // Int. J. Solids Struct., 2003, vol. 40, pp. 1995–2016.
8. *Tsvetkov I.M.* Dynamic tension of a sheet made of rigid-plastic material // Bull. MSU. Mech., 2022, vol. 77, no. 6, pp. 177–185.
9. *Georgievskii D.V.* Dynamic tension of a rod made of an ideally rigid-plastic material // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2021, vol. 62, pp. 806–815.
10. *Tsvetkov I.M.* Dynamic axisymmetric tension of a thin round ideally rigid-plastic layer // Mech. Solids, 2023. (in Press)
11. *Taha F., Graf A., Hosford W.* Plane-strain tension tests on aluminum alloy sheet // J. Eng. Mater. Technol. (Trans. ASME), 1995, vol. 117, no. 2, pp. 168–171.
12. *Georgievskii D.V., Muller W.H., Abali B.E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 2019, vol. 99, no. 12, pp. 1–11.
13. *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Techniques. N.Y.: Wiley, 1981.

УДК 534.113

**ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ И ЖЕСТКОСТИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ
НА ИЗГИБ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**© 2023 г. М. А. Ильгамов^{1,2,3,*}¹Институт машиноведения им А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия²Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия³Институт механики УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: ilgatov@anrb.ru

Поступила в редакцию 26.12.2022 г.

После доработки 14.04.2023 г.

Принята к публикации 20.05.2023 г.

Дан вывод уравнения изгиба длинной цилиндрической оболочки с учетом статических и динамических давлений, действующих на обе ее поверхности. Особое внимание уделено роли граничных условий и давления, среднего между действующими на поверхности статическими давлениями. Учитывается обжатие стенки по толщине. Изучен линейный изгиб цилиндрической панели с произвольным углом раствора. Как особый случай рассмотрен изгиб замкнутой цилиндрической оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, панель, опоры, среднее давление, изгиб

DOI: 10.31857/S0032823523040069, **EDN:** MJKFSN

1. Введение. Изучение поведения вертикальных колонн, труб, шлангов, кабелей под действием гидростатического давления имеет давнюю историю [1–7]. К этим работам примыкает исследование устойчивости упругой полосы при действии всестороннего давления (включая ее кромки) на основе соотношений трехмерной теории упругости [8, 9]. Обзор ранних исследований в этом направлении содержится, например, в [10, 11]. Последний обзор по статике и динамике трубопроводов содержится в [12].

Особенностью изгиба круглых стержней, труб, контактирующих с жидкостью и газом, является появление поперечной распределенной силы

$$q = \pi R^2 p \kappa, \quad (1.1)$$

где R – радиус внешней поверхности, κ – кривизна осевой линии, p – давление. Сила q направлена в сторону вогнутости осевой линии. Вместе с продольной сжимающей силой от действия давления p на свободно перемещающиеся концевые сечения площадью πR^2 сила (1.1) приводит к известному результату об абсолютной устойчивости стержня [8]. Если одно из концевых сечений свободно опертого круглого стержня длиной L изолировано от давления p , то сила (1.1) приводит к значению эффективной изгибной жесткости $D(1 + \alpha)$, где

$$D = \frac{\pi E R^4}{4}, \quad \alpha = \frac{p}{E} \left(\frac{2L}{\pi R} \right)^2 \quad (1.2)$$

В случае стального стержня с модулем упругости $E = 2 \times 10^5$ МПа, отношением размеров $2L/(\pi R) = 10^2$ при давлении окружающей среды $p = 10$ МПа безразмерный параметр $\alpha = 0.5$. Таким образом, при таких реальных данных имеется сильное влияние

равномерного давления окружающей среды на изгиб тонкого тела. Если такое же давление действует на концевое сечение, то, как указано выше, исчезает влияние его на изгиб.

Внутреннее давление p в трубе приводит к появлению поперечной силы по формуле (1.1), где под R подразумевается внутренний радиус трубы. Эта сила направлена в сторону выпуклости осевой линии трубы и поэтому дает уменьшение эффективной изгибной жесткости (в (1.2) безразмерный параметр α с отрицательным знаком). Если, например, один конец изогнутой трубы неподвижно закреплен, а другой свободно перемещается в продольном направлении, причем закрыт днищем, то продольная растягивающая сила $\pi R^2 p$ приводит к поперечной силе, направленной против силы q . Приведенные примеры показывают качественное влияние условий закрепления тела на его деформацию под действием давления.

В теории тонких пластин и оболочек принимается, что поперечная распределенная сила равна $q = p_1 - p_2$, где p_1, p_2 — давления, действующие на их поверхности [13–18]. Более точное выражение q , показанное в недавних работах [19–22], зависит также от среднего давления p_m и прогиба w и в случае пластины толщиной h имеет вид

$$q = p_1 - p_2 + p_m h \nabla^2 w, \quad p_m = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad (1.3)$$

где ∇^2 — лапласиан. В теории статического и динамического изгиба микро- и нанопленок, резонаторов последний член формулы (1.3) трактуется как проявление поверхностного эффекта, который становится значительным для тонких пластин, проволоки, струн. Его вклад сравним с другим поверхностным эффектом, обусловленным различием упругих характеристик приповерхностного слоя и основного объема тонкого тела [22, 23]. Отмеченное влияние распределенной силы (1.1), (1.3) на изгиб объясняется тем, что с уменьшением толщины h пластины или радиуса R стержня сила q уменьшается пропорционально h и R^2 , а изгибная жесткость — пропорционально h^3 и R^4 .

Названные выше исследования выполнены в рамках модели балки и тонкой пластины (исключение составляет статья [21], где выражение для силы q получено по соотношениям теории упругости). Это относится и к изгибу трубы, при рассмотрении которого предполагается, что ее поперечное сечение остается круговым и перпендикулярным к изогнутой осевой линии.

Насколько известно, не изучено влияние среднего давления на изгиб цилиндрической панели с произвольным углом раствора. Данная работа посвящена рассмотрению изгиба в окружном направлении длинной цилиндрической оболочки (без изгиба в продольном направлении) с учетом указанного влияния в более общей постановке. Отметим, что теории устойчивости длинной цилиндрической оболочки или арки в классической постановке (без учета взаимодействия среднего давления и изменения кривизны) посвящена большая литература, в частности [16, 17, 24–28].

2. Постановка задачи. Равномерные статические давления p_1 и p_2 действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности длинной тонкостенной цилиндрической оболочки радиусом R срединной поверхности и толщиной h стенки. Оболочка может быть замкнутой и незамкнутой (цилиндрическая панель). Предполагается, что давления действуют по нормали к деформированной поверхности, оболочка одинаково изгибается по длине и находится в плоском деформированном состоянии. Все искомые величины относятся к единичной длине вдоль оболочки.

При анализе изгиба с волнообразованием по окружности длинной цилиндрической оболочки обычно принимается допущение о неизменности длины ds элемента срединной поверхности [15–17]. При этом имеет место соотношение

$$ds = R d\theta = R_* d\theta_*, \quad (2.1)$$

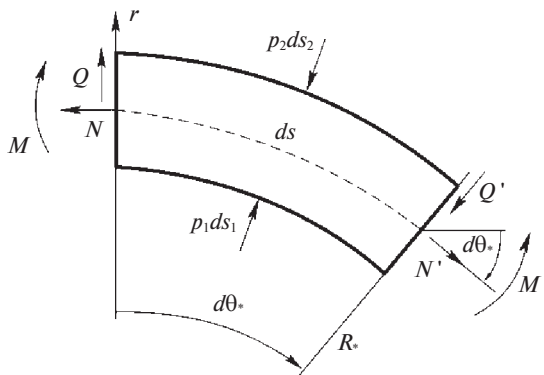


Рис. 1. Элемент оболочки длиной ds изогнутой срединной поверхности с перпендикулярными сечениями к ней.

где радиус R и центральный угол $d\theta$ относятся к состоянию до деформации, а R_* , $d\theta_*$ — после деформации (рис. 1).

Соотношение (2.1) следует также из равенства $ds_* = (1 + \epsilon_\theta) ds$, где ввиду малости окружной деформации ϵ_θ по сравнению с единицей принимается $ds_* = ds$. Элементарные длины на внутренней и внешней поверхностях изогнутой оболочки в соответствии с первой гипотезой Кирхгофа—Лява равны

$$ds_1 = \left(R_* - \frac{h}{2}\right) d\theta_*, \quad ds_2 = \left(R_* + \frac{h}{2}\right) d\theta_*$$

С учетом (2.1) и изменения кривизны [15–17]

$$\kappa = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_*} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\partial v}{R ds}, \quad (2.2)$$

выраженного через компоненты перемещения в окружном и радиальном направлениях v и w , получаем

$$ds_1 = \left(1 - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R} - \kappa\right)\right) ds, \quad ds_2 = \left(1 + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R} - \kappa\right)\right) ds$$

Распределенная поперечная сила на элемент ds равна $q ds = p_1 ds_1 - p_2 ds_2$. С учетом ds_1 , ds_2 имеем

$$q = p_1 - p_2 - \frac{p_m h}{R} (1 - R\kappa) \quad (2.3)$$

Если оболочка контактирует с жидкостью или газом, то давления взаимодействия $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ зависят от v , w , угла θ и времени t . Тогда линейное выражение (2.3) приобретает вид

$$q = p_1 - p_2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - (p_m + \bar{p}_m) \frac{h}{R} + p_m h \kappa, \quad \bar{p}_m = \frac{1}{2} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \quad (2.4)$$

Как указано выше, давления p_1 и p_2 являются постоянными по всей поверхности и времени. Так как $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ зависят от прогиба, то нелинейным является член $\bar{p}_m h \kappa$, поэтому в (2.4) он не учтен.

В уравнениях динамического изгиба (рис. 1)

$$\begin{aligned} -N + N' \cos d\theta_* - Q' \sin d\theta_* - \rho h d s \ddot{v} \cos(d\theta_*/2) &= 0 \\ Q - Q' \cos d\theta_* - N' \sin d\theta_* + q d s \cos(d\theta_*/2) - \rho h d s \ddot{w} \cos(d\theta_*/2) &= 0 \\ M - M' + Q' d s &= 0, \end{aligned}$$

точки над буквами обозначают производные по времени t , q определяется выражением (2.4). Из (2.1) и (2.2) следует $\partial\theta_*/\partial s = R^{-1} - \kappa$. С учетом $\cos d\theta_* = 1$, $\sin d\theta_* = d\theta_*$, $N' = N + (\partial N/\partial s)ds$, ... получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s} - Q \left(\frac{1}{R} - \kappa \right) - \rho h \ddot{v} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + N \left(\frac{1}{R} - \kappa \right) - q + \rho h \ddot{w} &= 0 \\ Q &= \frac{\partial M}{\partial s}; \quad M = D\kappa \end{aligned} \quad (2.5)$$

При определении N , M через напряжение σ_θ учтем обжатие по толщине средним давлением p_m . В условиях принятого плоского деформированного состояния ($\varepsilon_x = 0$) из закона Гука

$$E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_x), \quad E\varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_\theta), \quad \sigma_x = \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)$$

при $\sigma_z = -p_m$ следует $E\varepsilon_z = -\nu(1 + \nu)\sigma_\theta - (1 - \nu^2)p_m$, а также

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_\theta - \frac{\nu}{1 - \nu} p_m \quad (2.6)$$

Так как $\varepsilon_\theta = dv/ds + w/R + \kappa$ [15–17], то с учетом (2.6) получаем

$$\begin{aligned} N &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = K \left(\frac{dv}{ds} + \frac{w}{R} \right) - \frac{\nu p_m h}{1 - \nu}, \quad K = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \\ M &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz = D\kappa, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, здесь не использована вторая гипотеза Кирхгофа–Лява (силовая, $\sigma_z = 0$). Результат этого будет рассмотрен далее. Сохранено обычное допущение для тонких оболочек о малости упругих деформаций по сравнению с единицей. Поэтому изменение толщины за счет деформации ε_z не учитывается в выражениях жесткостей K и D , однако в (2.6) и (2.7) вклад ε_z должен быть сохранен. Вопросы, связанные с точностью этих гипотез, рассмотрены во многих работах, в частности, в [29–33].

Для цилиндрической панели с углом раствора Θ (с длиной дуги S) примем следующие граничные условия (рис. 2)

$$\begin{aligned} N &= Cv + P(p_1, p_2), \quad M = 0, \quad w = 0 \quad (\theta = 0) \\ v &= 0, \quad M = 0, \quad w = 0 \quad (\theta = \Theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь C – жесткость опоры (например, безмассовой пружины) в направлении угла θ . Предполагается, что перемещение в левой опоре может происходить только по окружности радиуса R . Под $P(p_1, p_2)$ подразумевается растягивающая сила, действующая на площадку кромки $\theta = 0$. Если она образуется в результате действия давлений p_1, p_2 , то P имеет отрицательный знак. В случае изолированной от давлений кромки $P = 0$,

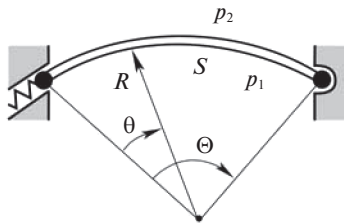


Рис. 2. Схема цилиндрической панели и опор.

при действии среднего давления p_m на нее $P = -p_m h$ и т.д. Конструкция правой опоры исключает появление окружной силы под действием давления на кромку.

Рассмотрим линейный статический изгиб панели по уравнениям (2.5)

$$\frac{dN}{ds} - \frac{dM}{Rds} = 0, \quad \frac{d^2 M}{ds^2} + N \left(\frac{1}{R} - \kappa \right) = q,$$

где сохранен член $N\kappa$, так как в составе N по (2.7) есть составляющая, не содержащая v , w . Из этих уравнений следует

$$N = \frac{M}{R} + A, \quad \frac{d^2 M}{ds^2} + \frac{M}{R^2} - \left(\frac{M}{R} + A \right) \kappa = q - \frac{A}{R} \quad (2.9)$$

Константа A определяется из условий при $\theta = 0$ в (2.8). Здесь $M(0) = 0$, $w(0) = 0$ и поэтому $N(0) = A$ по первому уравнению (2.9). При свободном движении левой кромки по углу θ жесткость $C = 0$ и $A = P$.

С учетом (2.7) первое уравнение (2.9) представим в виде

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{w}{R} + \frac{vp_m h}{K(1-v)} + \frac{D}{KR} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{A}{K}$$

Так как в соответствии с допущением при записи (2.1) угловая деформация срединной поверхности $\varepsilon_\theta = dv/ds + w/R \ll 1$, то приближение $dv/ds \approx -w/R$ используется в выражении изменения кривизны κ . В то же время в выражениях (2.7) учитывается конечность ε_θ . При интегрировании этого выражения от 0 до S левая часть становится равной $v(S) - v(0)$. Согласно условиям (2.8) $v(S) = 0$, $Cv(0) = A - P$. Поэтому

$$(1 + \lambda) A = \frac{K\lambda}{RS} \int_0^S w ds - \frac{D\lambda}{RS} \int_0^S \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) ds + P - \frac{v\lambda p_m h}{1-v}, \quad \lambda = \frac{CS}{K} \quad (2.10)$$

Отношение второго члена в правой части (2.10) к первому при функции прогиба $\sin(\pi s/S)$ имеет порядок $(h/R)^2$. Поэтому для тонких оболочек второй член в (2.10) должен быть опущен. С учетом сказанного из второго уравнения (2.9) и выражений (2.3) и (2.10) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{ds^4} + \frac{2}{R^2} \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^4} - \frac{1}{D} \left(p_m h (1 - \chi) + \frac{P}{1 + \lambda} \right) \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{K\lambda}{DR^2 S (1 + \lambda)} \int_0^S w ds = \\ = \frac{1}{D} \left(p_1 - p_2 - \frac{p_m h (1 - \chi)}{R} - \frac{P}{R(1 + \lambda)} \right); \quad \chi = \frac{v\lambda}{(1-v)(1+\lambda)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

При большой жесткости опоры ($\lambda \gg 1$) в (2.11) исчезают члены с P , что объясняется тем, что нет передачи на оболочку окружных сил, приложенных к ее кромке. Кроме

того параметр $\chi = v(1 - v)^{-1}$, а множитель в последнем члене левой части становится равным $K(DR^2S)^{-1}$. Если жесткость опоры мала ($\lambda \ll 1$), то $\chi \approx 0$, исчезает последний член в левой части (2.11). При этом в случае действия на кромку давления p_m ($P = -p_m h$) члены, содержащие p_m , исчезают. Отказ от второй гипотезы Кирхгофа–Лява отражается в параметре χ . Если принять $\sigma_z = 0$, а также допустить возможность свободно расширяться по окружности при обжатии по толщине стенки ($\lambda = 0$) при выводе N в (2.7), то $\chi = 0$. Таким образом, условие $\sigma_z = -p_m$, приводит к уменьшению влияния среднего давления p_m на изгиб. Наибольшее влияние p_m имеется при $\lambda = 0$, $P = 0$. Тогда уравнение (2.11) приобретает вид

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + \frac{2}{R^2} \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} - \frac{p_m h}{D} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) = \frac{1}{D} \left(p_1 - p_2 - \frac{p_m h}{R} \right) \quad (2.12)$$

Для случая пластинки ($R = \infty$) из (2.12) следует уравнение, по которому было изучено влияние среднего давления p_m на изгиб [20, 23].

3. Статический линейный изгиб панели. Под преимущественным будем подразумевать изгиб, который происходит под действием в основном поперечных сил, а результат действия окружной силы мал. Такой изгиб имеет место, когда мал перепад давлений или левая кромка тонкой панели на рис. 2 легко перемещается по углу θ (окружная сжимающая сила N меньше ее критического значения). С применением соотношения $ds = R d\theta$ ($S = R\Theta$) уравнение (2.11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 w}{d\theta^2} + w - \frac{R^2}{D} \left(p_m h(1 - \chi) + \frac{P}{1 + \lambda} \right) \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) + \frac{KR^2 \lambda}{D(1 + \lambda)} \int_0^\Theta w d\theta = \\ = \frac{R^4}{D} \left(p_1 - p_2 - \frac{p_m h(1 - \chi)}{R} - \frac{P}{R(1 + \lambda)} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Примем приближенное решение уравнения (3.1) в виде $w = W \sin(\pi\theta/\Theta)$, удовлетворяющем последним условиям в (2.8). Отметим, что при выводе уравнения (2.11) уже удовлетворены первые два условия при $\theta = 0$, $\theta = \Theta$ в (2.8). Подставив эту функцию в уравнение (3.1), умножив на нее и проинтегрировав по θ от нуля до Θ , находим значение прогиба в средней линии панели

$$\begin{aligned} \frac{W}{R} = \frac{4R}{\pi B} \left(p_1 - p_2 - \frac{p_m h(1 - \chi)}{R} - \frac{P}{R(1 + \lambda)} \right) \\ B = \frac{D}{R^2} \left(\frac{\pi^2}{\Theta^2} - 1 \right)^2 + \left(p_m h(1 - \chi) + \frac{P}{(1 + \lambda)} \right) \left(\frac{\pi^2}{\Theta^2} - 1 \right) + \frac{8K\lambda}{\pi^2(1 + \lambda)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Член с p_m в числителе (3.2) соответствует распределенной поперечной силе, возникающей за счет разности площадей внешней и внутренней поверхностей панели деформации и направленной к центру кривизны. Она не зависит от изгиба и уменьшается с увеличением радиуса R и обращается в нуль для пластины. Член с p_m в знаменателе (3.2) соответствует поперечной силе, возникающей при изгибе. Она направлена в сторону поверхности, подвергающейся деформации сжатия. Поэтому эта сила препятствует изгибу, меняя направление в зависимости от изменения кривизны при изгибе.

Как видно из (3.2), при $p_1 > p_2$ среднее давление p_m приводит к уменьшению прогиба, так как $\chi < 1$. Если $p_1 = p_2$, $P = 0$ (изолированные от давления кромки), то давление p_m приводит только к отрицательному прогибу. При $\lambda = 0$, $P = -p_m h$ и $p_1 > p_2$ полу-

чается наибольшее положительное значение прогиба, а в случае $p_1 < p_2$ — отрицательное значение W/R . При всестороннем давлении ($p_1 = p_2 = p$, $\lambda = 0$, $P = -ph$) прогиб обращается в нуль. Как указано в начале статьи, для изгиба полосы и пластинки также имеется такой результат [8, 11].

С увеличением угла раствора Θ прогиб возрастает и достигает максимума при $\Theta = \pi$. Как видно по знаменателю (3.2), в последнем случае прогиб ограничивается только жесткостью опоры. Малая зависимость прогиба от жесткости K объясняется тем, что левая кромка (рис. 2) может перемещаться только по окружности радиуса R . В этом случае в решении отсутствует также влияние изгибной жесткости D . Она снова начинает сказываться при $\Theta > \pi$. Однако в этом случае принятое выше приближенное решение может не отражать картину изгиба. При больших значениях угла раствора Θ в решении нужно учитывать также более высокие гармоники.

Для построения графика зависимости $W(\Theta)$ примем $P = 0$, $\lambda = 0$, $E = 2 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.31$, $h/S = 10^{-2}$, $p_1 = 5.025$ МПа, $p_2 = 4.975$ МПа, $p_m = 5$ МПа. Тогда выражение (3.2) имеет вид

$$\frac{W}{S} = \frac{20(1 - \Theta)}{\pi \left[2(\pi^2 - \Theta^2)^2 + 5(\pi^2 - \Theta^2) \right]} \quad (3.3)$$

Рис. 3 построен по (3.3). Изгибу пластины соответствует угол раствора $\Theta = 0$. Как видно из рис. 3, с увеличением угла Θ (или, например, уменьшением радиуса R при постоянной длине S) при внутреннем перепаде давления ($p_1 > p_2$) действительный прогиб меньше (кривая 1), чем по обычной теории (без учета p_m , кривая 2) и уменьшается с ростом Θ . Если $p_1 = 4.975$ МПа, $p_2 = 5.025$ МПа, то происходит более быстрое увеличение прогиба к центру кривизны (кривая 3) по сравнению с результатом по обычной теории (кривая 4). При нулевом перепаде ($p_1 = p_2$, $p_m \neq 0$) изгиб происходит в направлении центра кривизны (в отличие от нулевого решения по обычной теории). Если условия опирания отличаются от принятых, то результаты могут измениться.

Отметим, при принятых выше числовых данных условия $\sigma_z = 0$ и $\sigma_z = -p_m h$ приводят к одинаковым результатам. Это объясняется тем, что параметру $\lambda = 0$ ($\chi = 0$) соответствуют нулевая жесткость опоры и свободное расширение оболочки по окружности при обжатии по ее толщине. В случае большой жесткости опоры ($\lambda \gg 1$, $\chi = \nu(1 - \nu)^{-1}$) проявляется наибольшее влияние на решение отказа от гипотезы $\sigma_z = 0$ и учета обжатия по толщине средним давлением ($\sigma_z = -p_m$). Это влияние тем больше, чем больше коэффициент Пуассона материала.

4. Изгиб замкнутой оболочки. В случае большой жесткости опоры S может возникнуть значительная окружная сила N при нагружении панели давлениями p_1 и p_2 (параметр λ не является малым по сравнению с единицей). В линейной теории максимальную сжимающую силу N ограничиваем ее критическим значением. Решения уравнений (2.5) отличаются при $p_1 > p_2$ и $p_1 < p_2$. В первом случае справедлива принятая выше аппроксимация прогиба $\sin(\pi\theta/\Theta)$, во втором необходимо принять $\sin(2\pi\theta/\Theta)$ (задача устойчивости круговой формы).

С целью более наглядного определения влияния среднего давления p_m рассмотрим изгиб замкнутой цилиндрической оболочки. Обозначим через N_0 , M_0 , K_0 , q_0 , ν_0 , w_0 величины, относящиеся к осесимметричному статическому состоянию оболочки, а без индексов — к неосесимметричному динамическому и статическому изгибу. Подставив

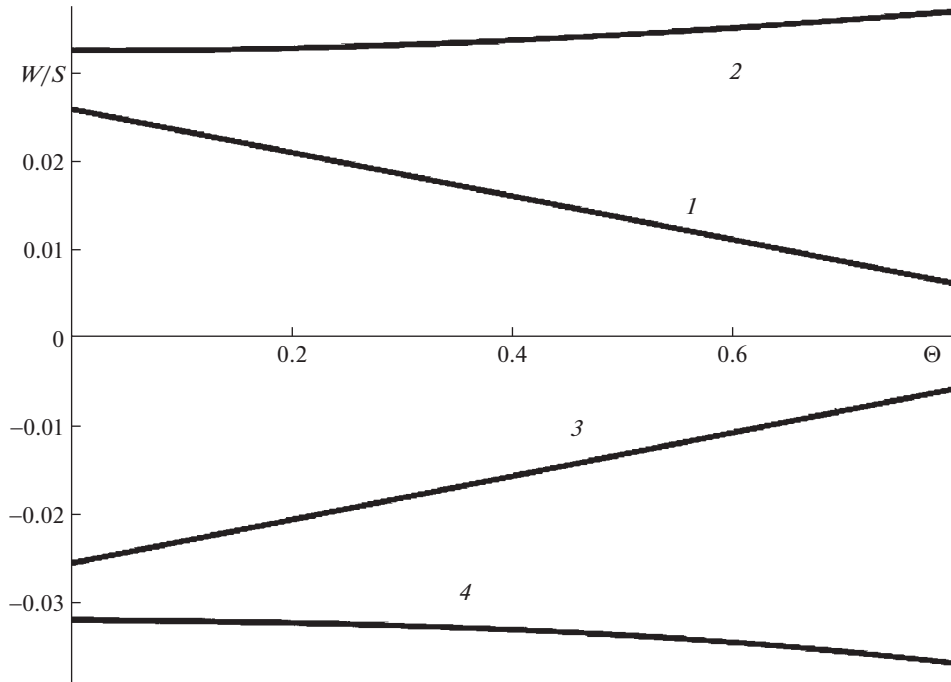


Рис. 3. Изменение безразмерной амплитуды прогиба W/S в зависимости от угла раствора Θ .

суммы $N_0 + N$, $M_0 + M$, $\kappa_0 + \kappa$, $q_0 + q$ в уравнения (2.5), получаем две системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial N_0}{\partial s} - \frac{\partial M_0}{\partial s} \left(\frac{1}{R} - \kappa_0 \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 M_0}{\partial s^2} + N_0 \left(\frac{1}{R} - \kappa_0 \right) = q_0 \\ \frac{\partial N}{\partial s} - \frac{\partial M}{R \partial s} - \rho h \dot{v} = 0 \\ \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} - N_0 \kappa + \frac{N}{R} + \rho h \ddot{w} = q \end{cases} \quad (4.1)$$

В соответствии с (2.2) $\kappa_0 = 0$. Так как $M_0 = D\kappa_0 = 0$ по всей окружности оболочки, то и производные M_0 по s равны нулю. Поэтому из (2.3) и первой системы (4.1) следует

$$N_0 = q_0 R = (p_1 - p_2) R - p_m h \quad (4.2)$$

Ввиду свободного расширения по окружности замкнутой оболочки в (4.2) отсутствует параметр χ (2.11).

С учетом (2.4) и (4.2) вторую систему (4.1) приводим к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 M}{R \partial s^2} - \rho h \frac{\partial \ddot{v}}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} + \frac{N}{R} + \rho h \ddot{w} - (p_1 - p_2) R \kappa &= p_1 - p_2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \frac{h \bar{p}_m}{R} \end{aligned} \quad (4.3)$$

При определении N_0 (4.2) не принимается во внимание малая динамическая составляющая. Поэтому давления $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ относятся только к неосесимметричному движению. Во втором уравнении (4.3) отсутствует член со средним давлением p_m .

Независимость изгиба замкнутой цилиндрической оболочки от среднего давления p_m (в отличие от изгиба цилиндрической незамкнутой оболочки) объясняется тем, что член $p_m h \kappa$ в составе $N_0 \kappa$ приводит к увеличению прогиба, например, по форме $W_n \sin n\theta$, а в составе q — к уменьшению на такую же величину.

Исключив N из уравнений (4.3) и с учетом приведенного выше равенства $\partial v / \partial s = -w / R$, получаем следующее уравнение относительно функций изменения кривизны и прогиба

$$\frac{\partial^4 \kappa}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 \kappa}{R^2 \partial s^2} - \frac{(p_1 - p_2) R}{D} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \frac{\rho h}{D} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial s^2} - \frac{\ddot{w}}{R^2} \right) = \frac{\partial^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{D \partial s^2}, \quad (4.4)$$

которое должно рассматриваться совместно с уравнением (2.2). Так как при динамическом взаимодействии изгибных движений оболочки и контактирующей жидкости давления $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ имеют близкие значения с разными знаками, то среднее давление $\bar{p}_m$ значительно меньше, чем $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$. Поэтому в (4.4) отброшен член, содержащий $\bar{p}_m$.

Система уравнений (4.4) и (2.2) может быть успешно использована при анализе статической устойчивости оболочки. Рассмотрим, например, устойчивость круговой формы замкнутой оболочки с одной открытой трещиной (или узким надрезом глубиной $h - h_0$) в точке $\theta = 0$ (и $\theta = 2\pi$). Ставятся условия

$$w = 0, \quad v = 0, \quad \kappa = \mp (h_0/h)^3 \partial^2 w / \partial s^2 \quad (\theta = 0, 2\pi) \quad (4.5)$$

Последние условия являются приближенными. Они лучше описывают реальную картину с уменьшением отношения толщины h_0 к длине надреза (при этом участок становится тонким). Как видно из (2.8), $v = 0$ соответствует значениям $C \rightarrow \infty$ и $P = 0$.

Решение уравнения (4.4) при $p_2 > p_1$ и замене s на $\theta = s/R$ имеет вид

$$\kappa = C_1 \sin \beta \theta + C_2 \cos \beta \theta + \frac{C_3 \theta}{\beta^2} + \frac{C_4}{\beta^2}, \quad \beta^2 = 1 + \frac{(p_2 - p_1) R^3}{D} \quad (4.6)$$

Выразим константы C_2 и C_3 через C_1 и C_4 в соответствии с последними условиями (4.5). При этом для упрощения вычислений примем, что толщина h_0 надреза значительно меньше толщины h оболочки, когда может быть принято $\kappa \approx 0$ ($\theta = 0, 2\pi$). Тогда из (2.2) имеем

$$\frac{d^2 w}{R^2 d\theta^2} + \frac{w}{R^2} = C_1 \sin \beta \theta + \frac{C_4}{\beta^2} (1 - \cos \beta \theta) - \frac{\theta}{2\pi} \left(C_1 \sin 2\pi \beta + \frac{C_4}{\beta^2} (1 - \cos 2\pi \beta) \right)$$

Проинтегрировав это уравнение и удовлетворив первым условиям (4.5), получаем

$$\frac{w}{C_4 R^2} = W_1 \sin \theta + \frac{\cos \theta}{1 - \beta^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{(1 - \cos 2\pi \beta) \sin \beta \theta}{\beta^2 (1 - \beta^2) \sin 2\pi \beta} - \frac{\cos \beta \theta}{\beta^2 (1 - \beta^2)} \quad (4.7)$$

Здесь первый член в правой части соответствует перемещению вокруг надреза без деформации оболочки. Поэтому он далее не рассматривается.

Как указано выше, перемещение v по окружности выражается через прогиб w как $v = -\int w d\theta + V$, где V соответствует вращению по окружности без деформации и далее не рассматривается. Проинтегрировав это выражение с учетом (4.7) и удовлетворив условиям (4.5) относительно v , приходим к уравнению

$$\cos 2\pi \beta - \pi \beta (\beta^2 - 1) \sin 2\pi \beta - 1 = 0 \quad (4.8)$$

Численное решение (4.8) дает наименьший корень, равный $\beta \approx 1.55$. С учетом обозначения β в (4.6) получаем следующее критическое значение перепада давления

$$p_2 - p_1 = \frac{(\beta^2 - 1)D}{R^3} = \frac{1.4D}{R^3} \quad (4.9)$$

Это известное критическое значение распределенной поперечной силы для кольца с шарниром [34]. Как известно [16, 26, 29, 34], критическое значение давления на замкнутую целостную оболочку (без надреза) определяется числом $\beta = 2$. Поэтому в этом случае в (4.9) вместо 1.4 коэффициент равен 3. Это число $\beta = 2$ означает число волн, укладываемых по окружности целостной оболочки. Формы потери устойчивости в указанных двух случаях описываются функциями $\cos 2\theta$ и (4.7), где $W_1 = 0$, $\beta = 1.55$.

Отметим, при использовании последних условий (4.5) без упрощения значение β меняется от 1.55 при $h_0/h \ll 1$ до $\beta = 2$ при $h_0/h = 1$, причем β отличается незначительно от 1.55 до $h_0/h = 0.4$. При увеличении отношения до $h_0/h = 1$ приближение к $\beta = 2$ происходит по закону $(h_0/h)^3$.

Если в уравнении (4.6) перейти к углу $\theta = s/R$ и функции $w(\theta, t)$, то оно приобретает вид

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{(p_1 - p_2)R}{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \ddot{w} \right) = \frac{R^4 \partial^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{D \partial \theta^2} \quad (4.10)$$

Из этого уравнения в частности получаются известные собственные частоты колебаний замкнутого кольца, нагруженного давлением [17, 26, 34]. Низшая частота обращается в нуль при достижении внешним перепадом давления критического значения. Уравнения (4.4) и (4.10) могут быть применены и в случае незамкнутой оболочки, если жесткость опоры достаточно большая. Исключение составляет полая оболочка ($\Theta \ll 1$) при $p_2 > p_1$, когда необходимо учитывать изменение сжимающей силы при изгибе и недостаточно линейной постановки задачи устойчивости [16, 28].

Заключение. В работе приведены уравнения изгиба длинной тонкостенной оболочки в виде панели и замкнутого цилиндра с учетом статических и динамических давлений на обе ее поверхности. Первая гипотеза Кирхгоффа–Лява (геометрическая) применяется при определении не только внутренних деформаций и напряжений, но и внешней поперечной силы. Появление этой силы обусловлено взаимодействием среднего давления на поверхности оболочки с изменением кривизны ее срединной поверхности. Показано, что она может быть существенной в случае относительно высоких давлений на обе поверхности тонких тел, что имеет место в природе и технике, например, в глубоководной среде и в оборудовании нефтехимии, транспорта, энергетики и т.д.

Вторая гипотеза Кирхгоффа–Лява (силовая) о малости нормальных напряжений между слоями стенки, параллельными срединной поверхности, не используется. Вводятся в рассмотрение обжатие по толщине стенки оболочки средним давлением и соответствующее расширение по ее окружности. Это приводит к зависимости уравнения изгиба от жесткости опоры в окружном направлении и от коэффициента Пуассона. Как известно, в обычной постановке линейного изгиба такая связь отсутствует. Другими словами, если в рассматриваемой задаче есть влияние среднего давления на изгиб, то нужно учитывать и обжатие по толщине стенки. Последний фактор становится заметным при высоких значениях коэффициента Пуассона материала и жесткости опор и оценивается безразмерными параметрами λ (2.10) и χ (2.11). Если учитывается обжатие стенки, то нужно принимать во внимание и уточненное значение поперечной силы.

Линейные уравнения относительно изменения кривизны и прогиба даются в условиях плоского деформированного состояния. Наиболее подробно изучен статический изгиб цилиндрической панели с произвольным углом раствора в случае относительно малой жесткости опоры. При нулевом угле раствора как частный случай следует известное уравнение цилиндрического изгиба пластины, где учитывается среднее давление на ее поверхности.

Показано, что при внутреннем перепаде давления с увеличением угла раствора панели ее прогиб уменьшается и в целом меньше, чем по классической теории. При внешнем перепаде с увеличением этого угла происходит более быстрый рост прогиба к центру кривизны, чем по обычной теории. Нулевому перепаду давления соответствует изгиб в направлении центра кривизны. Эти результаты справедливы при относительно малой жесткости одной из опор или малом перепаде давлений на поверхности, когда окружная сила меньше ее критического значения.

В случае большой жесткости опоры может возникнуть значительная окружная сила, обусловленная перепадом статических давлений. Это имеет место и в случае замкнутой оболочки. При этом необходимо рассматривать осесимметричное напряженное состояние оболочки под действием перепада давлений и неосесимметричный статический или динамический изгиб. В отличие от цилиндрической панели на изгиб замкнутой оболочки среднее давление не оказывает влияния. Кроме того, нет влияния обжатия стенки ввиду возможности свободного расширения по окружности. В таких случаях применение второй гипотезы Кирхгоффа–Лява не вносит погрешности в классическое уравнение изгиба. С этой точки зрения изгиб замкнутой оболочки представляет собой особый случай.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00578.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Handelman G.H.* Buckling under locally hydrostatic pressure // *J. Appl. Mech.* 1946. V. 13. P. 198–200.
2. *Link H.* Über den garaden Druckstab in Flüssigkeit // *Ingenieur–Archiv.* 1962. B. 31. P. 149–167.
3. *Peterson J.P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure // *AIAA J.* 1963. V. 1. № 6. P. 1458–1459.
4. *Huang T., Dareing D.W.* Buckling and frequency of long vertical pipes // *J. Engng Mech. Div.* 1967. V. 95. P. 167–181.
5. *Sugiyama Y., Ashida K.* Buckling of long columns under their own weight // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.* 1978. V. 21 (158). P. 1228–1235.
6. *Bernitsas M.M., Kokkinis T.* Buckling of columns with movable boundaries // *J. Struct. Mech.* 1983. V. 11. № 3. P. 351–370.
7. *Bernitsas M.M., Kokkinis T.* Buckling of columns with nonmovable boundaries // *J. Struct. Engng.* 1983. V. 105. P. 2113–2128.
8. *Ишлинский А.Ю.* Исследование устойчивости упругих систем с точки зрения математической теории упругости // *Укр. матем. ж.* 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
9. *Kerr A.D., Tang S.* The effect of lateral hydrostatic pressure on instability of elastic solids, particularly beams and plates // *J. Appl. Mech.* 1966. V. 33. P. 617–622.
10. *Светлицкий В.А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
11. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. М.: Nauka, 1998. 208 p.
12. *Li S., Karney B.W., Liu G.* FSI research in pipeline systems: a review of the literature // *J. Fluids&Struct.* 2015. V. 57. P. 277–297.
13. *Love A.A.* Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press. 1927. 643 p.
14. *Галеркин Б.Г.* Упругие тонкие плиты. Л.; М.: Госстройиздат, 1933. 372 с.
15. *Timoshenko S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw – Hill Book Co. Inc., 1940. 399 p.
16. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1955. 568 с.

17. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1972. 442 с.
18. Shen H.Sh. Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong Univ., 2017. 675 p.
19. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей в гидроупругой системе // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 566–579.
20. Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
<https://doi.org/10.7868/S086956521728009X>
21. Ильгамов М.А. Обобщение уравнения изгиба тонкой пластины под действием давления газа // ПММ. 2019. Т. 83. № 1. С. 134–146.
<https://doi.org/10.1134/S0032823519010041>
22. Ильгамов М.А. Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // ФТТ. 2019. Т. 61. Вып. 10. С. 1825–1830.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2019.10.48255.381>
23. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // J. Appl.&Comput. Mech. 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848>
24. Николаи Е.Л. Об устойчивости кругового кольца и круговой арки, сжатых давлением. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 250 с.
25. Штаерман И.Я. Устойчивость упругих круговых арок под действием сосредоточенной силы // ПММ. 1937. Т. 1. Вып. 3. С. 45–50.
26. Джанелидзе Г.Ю., Радциг М.А. Динамическая устойчивость кольца под действием нормальных периодических сил // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 3. С. 37–41.
27. Динник А.Н. Устойчивость арок. М.; Л.: ОГИЗ, 1946. 127 с.
28. Муштари Х.М., Свирский И.В. Определение больших прогибов цилиндрической панели под действием внешнего нормального давления // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 6. С. 755–760.
29. Муштари Х.М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа–Лява // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 5. С. 517–520.
30. Муштари Х.М. Об области применимости линейной теории упругих оболочек // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 6. С. 997–998.
31. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1975. 256 с.
32. Муштари Х.М., Терезулов И.Г. К теории оболочек средней толщины // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 6. С. 1144–1147.
33. Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. О роли поперечного обжатия в динамике оболочек // ПММ. 1996. Т. 6. Вып. 4. С. 644–650.
34. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Том 3. Под ред. И.А. Бургера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 568 с.

Effect of Mean Pressure and Fixing Rigidity on the Bending of Cylindrical Shell

M. A. Ilgamov^{a,b,c,#}

^aA.A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering RAS, Moscow, Russia

^bUfa University of Science and Technology, Ufa, Russia

^cInstitute of Mechanics, UFIC RAS, Ufa, Russia

[#]e-mail: ilgamov@anrb.ru

The equation for the bending of a long cylindrical shell taking into account the static and dynamic pressures acting on both of its surfaces is given. Particular attention is paid to the role of boundary conditions and pressure, which is average between the static pressures acting on the surfaces. The compression of the wall in thickness is taken into account. The linear bending of a cylindrical panel with an arbitrary opening angle has been studied. The bending of a closed cylindrical shell is considered as a special case.

Keywords: cylindrical shell, panel, supports, average pressure, bending

REFERENCES

1. *Handelman G.H.* Buckling under locally hydrostatic pressure // *J. Appl. Mech.*, 1946, vol. 13, pp. 198–200.
2. *Link H.* Über den garaden Druckstab in Flüssigkeit // *Ingenieur-Archiv.*, 1962, b. 31, pp. 149–167.
3. *Peterson J.P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure // *AIAA J.*, 1963, vol. 1, no. 6, pp. 1458–1459.
4. *Huang T., Dareing D.W.* Buckling and frequency of long vertical pipes // *J. Engng, Mech. Div.*, 1967, vol. 95, pp. 167–181.
5. *Sugiyama Y., Ashida K.* Buckling of long columns under their own weight // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1978, vol. 21 (158), pp. 1228–1235.
6. *Bernitsas M.M., Kokkinis T.* Buckling of columns with movable boundaries // *J. Struct. Mech.*, 1983, vol. 11, no. 3, pp. 351–370.
7. *Bernitsas M.M., Kokkinis T.* Buckling of columns with nonmovable boundaries // *J. Struct. Engng.*, 1983, vol. 105, pp. 2113–2128.
8. *Ishlinsky A.Yu.* Investigation of the stability of elastic systems from the point of view of the mathematical theory of elasticity // *Ukr. Math. J.*, 1954, vol. 6, no. 2, pp. 140–146.
9. *Kerr A.D., Tang S.* The effect of lateral hydrostatic pressure on instability of elastic solids, particularly beams and plates // *J. Appl. Mech.*, 1966, vol. 33, pp. 617–622.
10. *Svelitsky V.A.* Mechanics of Pipelines and Hoses. Moscow: Mashinostroenie, 1982. 280 p.
11. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. Moscow: Nauka, 1998. 208 p.
12. *Li S., Karney B.W., Liu G.* FSI research in pipeline systems: a review of the literature // *J. Fluids&Struct.*, 2015, vol. 57, pp. 277–297.
13. *Love A.A.* Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. 643 p.
14. *Galerkin B.G.* Elastic Thin Plates. Leningrad; Moscow: Gostroyizdat, 1933. 372 p.
15. *Timoshenko S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw – Hill Book Co. Inc., 1940. 399 p.
16. *Timoshenko S.P.* Stability of Elastic Systems. Moscow: GITTL, 1955. 568 p.
17. *Volmir A.S.* Nonlinear Dynamics of Plates and Shells. Moscow: Fizmatlit, 1972. 442 p.
18. *Shen H.Sh.* Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong Univ., 2017. 675 p.
19. *Ilgamov M.A.* The interaction of instabilities in a hydroelastic system // *AMM*, 2017, vol. 80, no. 5, pp. 400–408. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.02.007
20. *Ilgamov M.A.* Influence of the ambient pressure on thin plate and film bending // *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, no. 10, pp. 461–464. DOI: 10.1134/S1028335817100020
21. *Ilgamov M.A.* Generalization of bending equation of thin plate under gas pressure // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 348–355. DOI: 10.3103/S0025654419030130
22. *Ilgamov M.A.* The influence of surface effects on bending and vibrations of nanofilms // *Phys. Solid State*, 2019, vol. 61, no. 10, pp. 1779–1784. DOI: 10.1134/S1063783419100172
23. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // *J. Appl.&Comput. Mech.*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 977–983. DOI: 10.22055/JACM.2021.36470.2848
24. *Nikolai E.L.* Works on Mechanics. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 250 p.
25. *Shtaerman I.Ya.* Stability of elastic circular arches under the action of a concentrated force // *AMM*, 1937, vol. 1, no. 3, pp. 45–50.
26. *Dzhanelidze G.Yu., Radtsig M.A.* Dynamic stability of a ring under the action of normal periodic forces // *AMM*, 1940, vol. 4, no. 3, pp. 37–41.
27. *Dinnik A.N.* Arch Stability. Moscow; Leningrad: OGIZ, 1946. 127 p.
28. *Mushtari Kh.M., Svirsky I.V.* Determination of large deflections of a cylindrical panel under the action of external normal pressure // *AMM*, 1953, vol. 17, no. 6, pp. 755–760.
29. *Mushtari Kh.M.* On the scope of applicability of the approximate theory of Kirchhoff–Love shells // *AMM*, 1947, vol. 11, no. 5, pp. 517–520.
30. *Mushtari Kh.M.* On the area of applicability of the linear theory of elastic shells // *Dokl. AN SSSR*, 1947, vol. 58, no. 6, pp. 997–998.
31. *Filin A.P.* Elements of Shell Theory. Leningrad: Stroyizdat, 1975. 256 p.
32. *Mushtari Kh.M., Teregulov I.G.* On the theory of shells of medium thickness // *Dokl. AN SSSR*, 1959, vol. 128, no. 6, pp. 1144–1147.
33. *Kaplunov Yu.D., Nolde E.V.* On the role of transverse compression in the dynamics of shells // *AMM*, 1996, vol. 6, no. 4, pp. 644–650.
34. *Strength, Stability, Vibrations. Vol. 3. Ed. by I.A. Birger and Ya.G. Panovko.* Moscow: Mashinostroenie, 1968. 568 p.