

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ФИЛЬТРОВ С КОНЕЧНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВ И МЕТОД ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

© 2023 г. К. А. Будунова^{a, *}, В. Ф. Кравченко^{a, b}

^a Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

^b Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН,
ул. Бутлерова, 15, Москва, 117342 Российская Федерация

*E-mail: 1917schw@mail.ru

Поступила в редакцию 28.04.2023 г.

После доработки 28.04.2023 г.

Принята к публикации 25.05.2023 г.

Предложено новое параметрическое семейство фильтров с конечной импульсной характеристикой на основе сверток сплайнов с прямоугольным импульсом. Разработан и теоретически обоснован алгоритм поиска параметра, оптимизирующего отклонение амплитудно-частотной характеристики в полосах пропускания и подавления. Проведен численный эксперимент, заключающийся в сравнении новых фильтров с оконными фильтрами и оптимальными фильтрами Чебышева.

DOI: 10.31857/S003384942309005X, EDN: RLGIPL

ВВЕДЕНИЕ

В работе описывается семейство фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ), амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) которых приближается к финитным сплайнам, аппроксимирующим свертку прямоугольного импульса с атомарной функцией $h_a(x)$ [1, 2]. Отклонение фильтров в полосах пропускания и подавления меняется вместе с изменением параметра, в связи с чем возникает задача разработки метода поиска параметра, оптимизирующего отклонение.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО КИХ-ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВ

Пусть $f(\omega)$ – четная неотрицательная финитная интегрируемая функция с носителем $\text{supp}f(\omega) = [-\gamma, \gamma]$ и

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} f(\omega) d\omega = 1,$$

а $B_0(\omega)$ – прямоугольный импульс:

$$B_0(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1/2, \\ 1/2, & |\omega| = 1/2, \\ 0, & |\omega| > 1/2. \end{cases}$$

Тогда при $\gamma_0 > \gamma$ свертка

$$H(\omega) = \int_{\mathbb{R}} B_0(u/(2\gamma_0)) f(\omega - u) du \quad (1)$$

является четной финитной неотрицательной функцией, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} H(\omega) &= 0, & |\omega| > \gamma_0 + \gamma, \\ H(\omega) &= 1, & |\omega| < \gamma_0 - \gamma. \end{aligned}$$

Перечисленные свойства позволяют рассматривать $H(\omega)$ в качестве идеальной АЧХ некоторого фильтра низких частот.

Рассмотрим для фиксированных частот ω_0 и ω_1 , $0 < \omega_0 < \omega_1 < \pi$, семейство фильтров $H_{a,L}(\omega)$, образуемое правой частью (1) в случае, когда $\gamma_0 = (\omega_1 + \omega_0)/2$ и

$$f(\omega) = \frac{2\Omega_L}{\omega_1 - \omega_0} f_{a,L} \left(\frac{2\Omega_L \omega}{\omega_1 - \omega_0} \right),$$

где $a \geq 1$ – параметр, $f_{a,L}(\omega)$ – финитный сплайн с носителем $[-\Omega_L, \Omega_L]$, полученный в результате

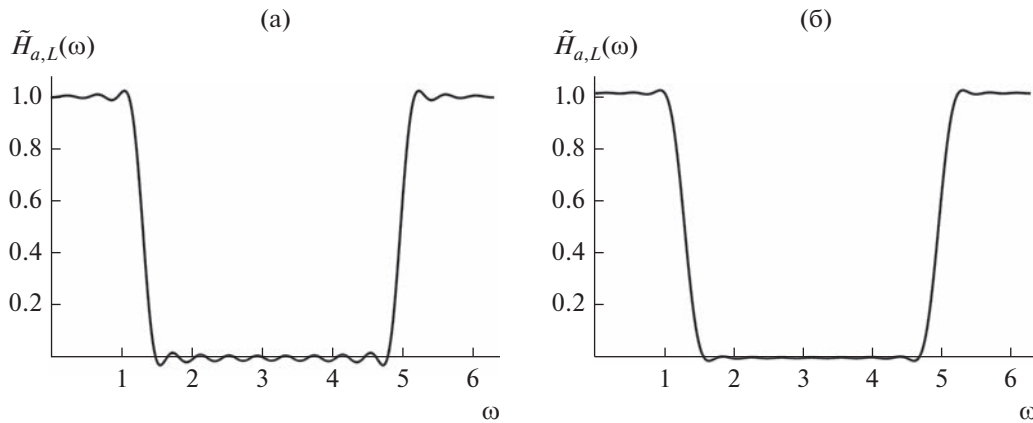


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики (3) при $\omega_0 = \pi/3$, $\omega_1 = \pi/2$, $L = 3$, $N = 15$ для $a = 1.2$ (а) и 5 (б).

свертки L прямоугольных импульсов разной длины

$$f_{a,L}(\omega) = \left(\frac{a}{2} B_0(a\omega/2)\right) * \dots * \left(\frac{a^L}{2} B_0(a^L\omega/2)\right),$$

$$\Omega_L = \sum_{l=1}^L a^{-l}.$$

Сплайны $f_{a,L}(\omega)$ представляют собой аппроксимации известной атомарной функции $h_a(\omega)$, которая применяется при синтезе дискретных и непрерывных фильтров низких частот с быстро затухающей импульсной характеристикой [3–5].

Функция $H_{a,L}(\omega)$ при $\omega \in [-\pi, \pi]$ представляется рядом Фурье

$$H_{a,L}(\omega) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\pi} \times \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k\right) Y_{a,L}(k) \cos(k\omega) \right), \quad (2)$$

где

$$Y_{a,L}(x) = \prod_{l=1}^L \text{sinc}\left(\frac{(\omega_1 - \omega_0)a^{l-1}x}{2(1 + a + \dots + a^{L-1})}\right).$$

Коэффициенты

$$h(k) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k\right) Y_{a,L}(k),$$

$$k = -N, \dots, N,$$

определяют КИХ-фильтр с АЧХ $\tilde{H}_{a,L}(\omega)$

$$\tilde{H}_{a,L}(\omega) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\pi} \times \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \text{sinc}\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k\right) Y_{a,L}(k) \cos(k\omega) \right|. \quad (3)$$

Графики АЧХ (3) для некоторых фильтров приведены на рис. 1.

Рассмотрим остаток ряда Фурье (2)

$$\varepsilon(a, \omega) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\pi} \times \sum_{k=N+1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k\right) Y_{a,L}(k) \cos(k\omega). \quad (4)$$

Для каждого фиксированного параметра a и заданного набора чисел ω_0 , ω_1 , L , N наибольшее отклонение характеристики (3) в полосах пропускания $0 \leq \omega \leq \omega_0$ и подавления $\omega_1 \leq \omega \leq \pi$ (при условии, что $\tilde{H}_{a,L}(\omega) \neq 0$ на $\omega \in (0, \omega_0)$) задается величиной

$$M(a) = \max_{\omega \in \Omega} |\varepsilon(a, \omega)|, \quad (5)$$

где $\Omega = \{\omega : 0 \leq \omega \leq \omega_0, \omega_1 \leq \omega \leq \pi\}$. Отклонение (5) меняется в зависимости от параметра a и имеет на интервале $a \in [1, +\infty)$ точную нижнюю грань

$$\inf_{a \in [1, +\infty)} M(a). \quad (6)$$

2. ЗАМЕНА НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ОТКЛОНЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕЙ

Функция (5) в общем случае не является вогнутой, кроме того, точная нижняя грань (6) ищется на неограниченном множестве $a \in [1, +\infty)$, поэтому решение задачи (6) не может быть найдено при помощи стандартных численных методов минимизации.

Для отыскания приближенного решения здесь предлагается ограничить область изменения параметра a и заменить (6) дискретной задачей таким образом, чтобы найденное на сетке решение мало отличалось от (6).

Пусть $\varepsilon_0 = \inf_{a \geq 1} M(a)$ — решение непрерывной задачи (6). Задавая конечный отрезок $[1, A]$ и сетку $A_S = \{a_s\}_{s=1}^S$ на этом отрезке, $1 = a_1 < a_2 < \dots <$

$a_{S-1} < a_S = A$, рассмотрим также задачу поиска числа ε_1

$$\varepsilon_1 = \min_{1 \leq s \leq S} M(a_s). \quad (7)$$

Определим условия, налагаемые на сетку A_S и число A , достаточные для выполнения неравенства

$$|\varepsilon_1 - \varepsilon_0| \leq \frac{\varepsilon_0}{10}, \quad (8)$$

задающего требование малого различия решений дискретной и непрерывной задач.

Отметим, что для функции $\varepsilon(a, \omega)$ имеет место равномерная на Ω сходимость $\lim_{a \rightarrow +\infty} \varepsilon(a, \omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega)$, где

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\pi} \times \sum_{k=N+1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2} k\right) \cos(k\omega),$$

поэтому при достаточно больших A для всех $a > A$

$$|M(a) - \max_{\omega} |\tilde{\varepsilon}(\omega)|| < \lambda,$$

где λ — сколь угодно малое число.

Обозначим $\tilde{\varepsilon} = \max_{\omega \in \Omega} |\tilde{\varepsilon}(\omega)|$. Предположим, что задано некоторое число A , для которого выполняется соотношение

$$|\varepsilon(a, \omega) - \tilde{\varepsilon}(\omega)| < \lambda \tilde{\varepsilon}$$

при $a > A$.

Рассмотрим сначала случай, когда функция $M(a)$ достигает при $a \geq 1$ своей нижней грани в точке $a_0 \geq A$. Тогда для ε_0 справедливо

$$(1 - \lambda)\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_0 \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Полагая $\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}$, получим

$$|\varepsilon_0 - \varepsilon_1| \leq \lambda \tilde{\varepsilon}.$$

Пусть теперь $\inf_{a \geq 1} M(a)$ не достигается при конечном a и $\varepsilon_0 = \tilde{\varepsilon}$. Тогда $\varepsilon_1 > \tilde{\varepsilon}$. В точке $a = A$

$$\tilde{\varepsilon} < \varepsilon_1 \leq M(A) \leq (1 + \lambda)\tilde{\varepsilon}.$$

Отсюда также следует $|\varepsilon_0 - \varepsilon_1| \leq \lambda \tilde{\varepsilon}$. Далее, в обоих случаях

$$|\varepsilon_0 - \varepsilon_1| \leq \frac{\lambda \varepsilon_0}{1 - \lambda} \leq \frac{\varepsilon_0}{10}$$

при $\lambda \leq \frac{1}{11}$.

Если функция $M(a)$ достигает при $a \geq 1$ своей нижней грани в точке $a_0 \in [1, A]$, то условие (8) выполняется при правильном выборе сетки на $[1, A]$. Пусть точка a_0 принадлежит некоторому отрезку

$[\alpha, \beta] \subset [1, A]$, на котором задано равномерное разбиение с шагом Δa , причем

$$M(a) \geq \mu, \quad \alpha \leq a \leq \beta,$$

где μ — некоторое число. Введем функции

$$M_1(a) = \max_{\omega \in \Omega} \varepsilon(a, \omega), \quad M_2(a) = -\min_{\omega \in \Omega} \varepsilon(a, \omega). \quad (9)$$

Можно показать, что при

$$|M_1(a + \Delta a) - M_1(a)| \leq \frac{\mu}{10}, \quad (10)$$

$$|M_2(a + \Delta a) - M_2(a)| \leq \frac{\mu}{10} \quad (11)$$

справедливо

$$|M(a + \Delta a) - M(a)| \leq \frac{\mu}{10}.$$

Достаточным условием для выполнения (10), (11) является

$$\Delta a \leq \frac{\mu}{10 \tilde{M}}, \quad (12)$$

где $\tilde{M}$ — оценка сверху модулей производных $M'_1(a)$, $M'_2(a)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$:

$$|M'_1(a)| \leq \tilde{M}, \quad |M'_2(a)| \leq \tilde{M}. \quad (13)$$

Из определения производных функций вида (9), приведенного в [6], следует, что неравенства (13) справедливы для

$$\tilde{M} \geq \max_{\substack{\alpha \leq a \leq \beta, \\ \omega \in \Omega}} \left| \frac{\partial \varepsilon(a, \omega)}{\partial a} \right|.$$

Таким образом, при шаге Δa , удовлетворяющем (12), имеем

$$|M(a + \Delta a) - M(a)| \leq \frac{1}{10} \min_{\alpha \leq a \leq \beta} M(a) = \frac{\varepsilon_0}{10}.$$

3. ФОРМУЛЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ $\varepsilon(a, \omega)$

Далее будем использовать другие представления функции $\varepsilon(a, \omega)$. Обозначим

$$\varphi_l(a) = \frac{(\omega_1 - \omega_0)a^{l-1}}{2(1 + a + \dots + a^{L-1})}, \quad 1 \leq l \leq L,$$

$$\varphi_{L+1}(a) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2}.$$

Справедлива формула

$$\sin\left(n\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \prod_{l=1}^{L+1} \sin(n\varphi_l) \frac{(-1)^{L+1}}{2^{L+1}} = \sum_{k=1}^{2^{L+1}} (-1)^{\sigma_k(L+1)} \cos\left(\frac{\pi(L+1)}{2} + n\varphi + \sum_{m=1}^{L+1} (-1)^{s_k(m)} n\varphi_m\right). \quad (14)$$

где $L \in \mathbb{N}$, $\sigma_k(P)$ – сумма единиц в двоичном представлении числа $k - 1$:

$$k - 1 = s_k(1)s_k(2)\dots s_k(P), \quad (15)$$

$$\sigma_k(P) = \sum_{m=1}^P s_k(m),$$

а $s_k(m)$ – разряды в представлении (15) слева направо

$$k - 1 = \sum_{r=0}^{P-1} 2^r s_k(P - r).$$

Используя (14), погрешность $\varepsilon(a, \omega)$ (4) можно представить в форме выражения, содержащего сумму 2^{L+1} сдвигов функции Ψ_L :

$$\varepsilon(a, \omega) = \frac{(-1)^L (1 + a + \dots + a^{L-1})^L}{\pi a^{(L-1)L/2} (\omega_1 - \omega_0)^L} \times \sum_{l=1}^{2^{L+1}} (-1)^{\sigma_l(L+1)+1} \Psi_L \left(\omega + \sum_{m=1}^{L+1} (-1)^{s_l(m)} \varphi_m(a) \right), \quad (16)$$

определяемой выражением

$$\Psi_r(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{k^{r+1}}.$$

Функция $\Psi_r(x)$, заданная для $r \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}$, является 2π -периодической и при $x \in [0, 2\pi]$ может быть вычислена по формуле

$$\Psi_r(x) = (-1)^r \frac{(2\pi)^{r+1}}{2(r+1)!} B_{r+1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) - \sum_{k=1}^N \frac{\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{k^{r+1}},$$

где $B_l(x)$ – многочлен Бернулли порядка l .

Вводя функцию

$$\Phi_r(x) = \Psi_r\left(x + \frac{\omega_1 + \omega_0}{2}\right) - \Psi_r\left(x - \frac{\omega_1 + \omega_0}{2}\right),$$

можно получить еще одно представление $\varepsilon(a, \omega)$:

$$\varepsilon(a, \omega) = \frac{(-1)^L (1 + a + \dots + a^{L-1})^L}{\pi a^{(L-1)L/2} (\omega_1 - \omega_0)^L} \times \sum_{l=1}^{2^L} (-1)^{\sigma_l(L)+1} \Phi_L \left(\omega + \sum_{m=1}^L (-1)^{s_l(m)} \varphi_m(a) \right). \quad (17)$$

Для фиксированной частоты ω будет использоваться формула

$$\varepsilon(a, \omega) = \frac{(-1)^L (1 + a + \dots + a^{L-1})^L}{\pi a^{(L-1)L/2} (\omega_1 - \omega_0)^L} \times \sum_{l=1}^{2^{L-1}} (-1)^{\sigma_l(L)+1} F_L \left(\frac{\sum_{m=1}^L (-1)^{s_l(m)} a^{m-1}}{1 + \dots + a^{L-1}} \right). \quad (18)$$

В (18)

$$F_r(x) = \Phi_r\left(\omega + \frac{\omega_1 - \omega_0}{2}x\right) + (-1)^r \Phi_r\left(\omega - \frac{\omega_1 - \omega_0}{2}x\right).$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНОГО ОТРЕЗКА ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Используя результаты, полученные в разд. 2, определим метод поиска конечного отрезка $[1, A]$, на котором ищется решение дискретной задачи. На множестве $\omega \in \Omega$ имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \varepsilon(a, \omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega),$$

поэтому можно найти число A , для которого

$$|\varepsilon(a, \omega) - \tilde{\varepsilon}(\omega)| \leq \frac{1}{11} \tilde{\varepsilon} \quad (19)$$

при любом $a \geq A$.

Считая ω фиксированной частотой, запишем погрешность $\varepsilon(a, \omega)$ (18) виде

$$\varepsilon(a, \omega) = f_0(a) \Theta(a),$$

где

$$f_0(a) = \frac{(-1)^L (1 + a + \dots + a^{L-1})^L}{\pi a^{(L-1)L/2} (\omega_1 - \omega_0)^L},$$

$$\Theta(a) = \sum_{l=1}^{2^{L-1}} (-1)^{\sigma_l(L)+1} F_L \left(\frac{\sum_{m=1}^L (-1)^{s_l(m)} a^{m-1}}{1 + \dots + a^{L-1}} \right).$$

Используя свойство

$$F_L(x) = (-1)^L F_L(-x),$$

функцию $\Theta(a)$ можно преобразовать к виду

$$\Theta(a) = \sum_{l=1}^{2^{L-2}} (-1)^{\sigma_l(L-2)+1} F_L \left(\frac{\sum_{m=1}^{L-2} a^m ((-1)^{s_l(m)} - 1)}{1 + \dots + a^{L-1}} + 1 \right) - \\ - \sum_{l=1}^{2^{L-2}} (-1)^{\sigma_l(L-2)+1} \times \\ \times F_L \left(\frac{\sum_{m=1}^{L-2} a^m ((-1)^{s_l(m)} - 1)}{1 + \dots + a^{L-1}} + 1 + \frac{-2}{1 + \dots + a^{L-1}} \right).$$

Введем функцию

$$\lambda_1(a, x) = \\ = \sum_{l=1}^{2^{L-2}} (-1)^{\sigma_l(L-2)+1} F_L \left(\frac{\sum_{m=1}^{L-2} a^m ((-1)^{s_l(m)} - 1)}{1 + \dots + a^{L-1}} + 1 + x \right).$$

Тогда для каждого a по теореме о среднем получим

$$\Theta(a) = \lambda_1(a, 0) - \lambda_1 \left(a, \frac{-2}{1 + \dots + a^{L-1}} \right) = \\ = \frac{2}{1 + \dots + a^{L-1}} \frac{\partial \lambda_1(a, x)}{\partial x} \Big|_{x=-2\theta_1/(1+\dots+a^{L-1})},$$

где $\theta_1 \in (0, 1)$.

Поскольку

$$F'_k(x) = -\frac{\omega_1 - \omega_0}{2} F_{k-1}(x),$$

производная $\frac{\partial \lambda_1(a, x)}{\partial x}$ равна

$$\frac{\partial \lambda_1(a, x)}{\partial x} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} \times \\ \times \sum_{l=1}^{2^{L-2}} (-1)^{\sigma_l(L-2)} F_{L-1} \left(\frac{\sum_{m=1}^{L-2} a^m ((-1)^{s_l(m)} - 1)}{1 + \dots + a^{L-1}} + 1 + x \right).$$

Отсюда

$$\Theta(a) = \frac{\omega_1 - \omega_0}{1 + \dots + a^{L-1}} \times \\ \times \sum_{l=1}^{2^{L-2}} (-1)^{\sigma_l(L-2)} F_{L-1} \left(\frac{\sum_{m=1}^{L-2} a^m ((-1)^{s_l(m)} - 1) - 2\theta_1}{1 + \dots + a^{L-1}} + 1 \right).$$

Вводя функцию

$$\lambda_2(a, x) = \frac{\omega_1 - \omega_0}{1 + \dots + a^{L-1}} \sum_{l=1}^{2^{L-3}} (-1)^{\sigma_l(L-3)} \times \\ \times F_{L-1} \left(\frac{\sum_{m=1}^{L-3} a^{m+1} ((-1)^{s_l(m)} - 1) - 2\theta_1}{1 + \dots + a^{L-1}} + 1 + x \right),$$

можно записать $\Theta(a)$ в виде

$$\Theta(a) = \lambda_2(a, 0) - \lambda_2 \left(a, \frac{-2a}{1 + \dots + a^{L-1}} \right). \quad (20)$$

Из (20) следует

$$\Theta(a) = \frac{(\omega_1 - \omega_0)^2 a}{(1 + \dots + a^{L-1})^2} \sum_{l=1}^{2^{L-3}} (-1)^{\sigma_l(L-3)-1} \times \\ \times F_{L-2} \left(\frac{\sum_{m=1}^{L-3} a^{m+1} ((-1)^{s_l(m)} - 1)}{1 + \dots + a^{L-1}} + 1 + \frac{-2(\theta_1 + \theta_2 a)}{1 + \dots + a^{L-1}} \right),$$

где $\theta_2 \in (0, 1)$.

Поступая далее аналогичным образом, можно получить формулу

$$\Theta(a) = (-1)^L \frac{(\omega_1 - \omega_0)^{L-1} a^{1+\dots+(L-2)}}{(1 + \dots + a^{L-1})^{L-1}} \times \\ \times F_1 \left(1 + \frac{-2(\theta_1 + \dots + \theta_{L-1} a^{L-2})}{1 + \dots + a^{L-1}} \right). \quad (21)$$

В (21) θ_k , $k = \overline{1, L-1}$, — числа из интервала $(0, 1)$. Выражение для погрешности $\varepsilon(a, \omega)$ примет вид

$$\varepsilon(a, \omega) = \frac{1}{\pi(\omega_1 - \omega_0)} \frac{a^L - 1}{a^{L-1}(a-1)} \times \\ \times F_1 \left(1 + \frac{-2(\theta_1 + \dots + \theta_{L-1} a^{L-2})}{1 + \dots + a^{L-1}} \right).$$

Обозначим

$$\tilde{F}_r = \max_{\omega \in \Omega} \left| \Phi_r \left(\omega + \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} \right) + (-1)^r \Phi_r \left(\omega - \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} \right) \right|, \\ r = 0, 1.$$

Для модуля разности

$$|\varepsilon(a, \omega) - \tilde{\varepsilon}(\omega)| = \frac{1}{\pi(\omega_1 - \omega_0)} \times \\ \times \left| \frac{a^L - 1}{a^{L-1}(a-1)} F_1 \left(1 + \frac{-2(\theta_1 + \dots + \theta_{L-1} a^{L-2})}{1 + \dots + a^{L-1}} \right) - F_1(1) \right|$$

легко вывести оценку

$$|\varepsilon(a, \omega) - \tilde{\varepsilon}(\omega)| \leq d(a),$$

где $d(a)$ — монотонно убывающая функция параметра a , равная

$$d(a) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a^{L-1}} \right) \times \\ \times \left(\frac{2(\omega_1 - \omega_0)(a^{L-1} - 1)}{a^L - 1} \max_x |\Phi_{-1}(x)| + \tilde{F}_0 + \frac{1}{\omega_1 - \omega_0} \tilde{F}_1 \right).$$

Число A , обеспечивающее выполнение условия (19), можно найти, решив уравнение

$$d(A) = \tilde{\varepsilon}/11.$$

5. ОЦЕНКИ ДЛЯ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОГРЕШНОСТИ $\varepsilon(a, \omega)$ ПО ПАРАМЕТРУ a

В процессе работы алгоритма дискретизации возникают задачи вычисления оценок сверху модуля частной производной

$$\delta(a, \omega) = \frac{\partial \varepsilon(a, \omega)}{\partial a}$$

на отрезках вида $[a_0, a_1]$. Оценки ищутся для функций $|\delta(a, \tilde{\omega})|$, где $\tilde{\omega}$ — фиксированная частота, и $|\delta(a, \omega)|$, где ω — переменная, $\omega \in \Omega$.

Выражение для частной производной (в формуле ниже частота ω считается фиксированной) имеет вид

$$\delta(a, \omega) = \sum_{l=1}^{2^{L-1}} (-1)^{\sigma_l(L)+L} f_l(a) F_{L-1}(v_l(a)) + f(a) \Theta(a),$$

где

$$v_l(a) = \frac{\sum_{m=1}^L (-1)^{s_l(m)} a^{m-1}}{1 + \dots + a^{L-1}}, \\ f(a) = \frac{L(-1)^L}{2\pi(\omega_1 - \omega_0)^L} \frac{(a^L - 1)^{L-1}}{a^{(L-1)L/2+1} (a-1)^{L+1}} \times \\ \times \left((L-1)a^{L+1} - (L+1)a^L + (L+1)a - (L-1) \right), \\ f_l(a) = \frac{1}{2\pi(\omega_1 - \omega_0)^{L-1}} \frac{(a^L - 1)^{L-2}}{a^{(L-1)L/2} (a-1)^L} \times \\ \times \sum_{m=1}^L \left((m-L)a^{L+m-1} + (L-m+1)a^{L+m-2} - \right. \\ \left. - ma^{m-1} + (m-1)a^{m-2} \right) (-1)^{s_l(m)}.$$

Оценку функции $|\delta(a, \tilde{\omega})|$ для заданной частоты $\tilde{\omega}$ можно найти, используя формулу

$$|\delta(a, \tilde{\omega})| \leq |\delta(a_0, \tilde{\omega})| + \sum_{l=1}^{2^{L-1}} (c_{l1} |F_{L-1}(v_l(a_0))| + \\ + c_{l0} \max_{x \in [a_0, a_1]} |F_{L-1}(v_l(x)) - F_{L-1}(v_l(a_0))|) + \\ + |\Theta(a_0)| \max_{x \in [a_0, a_1]} |f(x) - f(a_0)| + \\ + \max_{x \in [a_0, a_1]} |f(x)| \max_{x \in [a_0, a_1]} |\Theta(x) - \Theta(a_0)|. \quad (22)$$

Коэффициенты c_{l0} и c_{l1} в (22) равны

$$c_{l0} = \max_{x \in [a_0, a_1]} |f_l(x)|, \quad c_{l1} = \max_{x \in [a_0, a_1]} |f_l(x) - f_l(a_0)|.$$

Формула (22) применяется при небольших значениях параметра a . Ниже без доказательства приводится другое неравенство, используемое в предлагаемом алгоритме для оценки частной производной при $a_0 > 2$:

$$|\delta(a, \tilde{\omega})| \leq |\delta(a_0, \tilde{\omega})| + C_0 \max_{w \in [0, y(a_0)]} |F_0(1-2w)| + \\ + C_1 \max_{w \in [0, y(a_0)]} |F_1(1-2w)|. \quad (23)$$

В правой части (23) $y(a) = (a^{L-1} - 1)/(a^L - 1)$, а константы C_0 и C_1 равны соответственно

$$C_0 = \left(|g_1(a_0)|(\omega_1 - \omega_0) + \frac{G(a_0)}{\pi} \right) (y(a_0) - y(a_1)),$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi(\omega_1 - \omega_0)} \sum_{k=1}^L \max_{x \in [a_0, a_1]} |c_k(x) - c_k(a_0)| + \\ + \max_{x \in [a_0, a_1]} |(g_1(x) - g_1(a_0))|,$$

где

$$c_k(a) = \frac{1}{(a-1)} \left(\frac{k}{a^L} + (L-k) \right), \quad k = 1, \dots, L-2, \\ c_{L-1}(a) = \frac{1}{(a-1)^2} \left(\frac{(L-1)}{a^{L-1}} + a \right), \quad c_L(a) = \frac{L}{(a-1)^2}, \\ g_1(a) = \frac{L}{2\pi(\omega_1 - \omega_0)} \frac{1}{a^L (a-1)^2} \times \\ \times \left((L-1)a^{L+1} - (L+1)a^L + (L+1)a - (L-1) \right), \\ G(a) = \sum_{k=1}^L |c_k(a)|.$$

Для оценки модуля производной $|\delta(a, \omega)|$ на множестве $[a_0, a_1] \times \Omega$ при $a_0 \leq 2$ используется неравенство

$$|\delta(a, \omega)| \leq \max_{\omega \in \Omega} |\delta(a_0, \omega)| + \sum_{l=1}^{2^{L-1}} c_{l1} B_l + \\ + D \max_{x \in [a_0, a_1]} |f(x) - f(a_0)| + \\ + 2 \sum_{l=1}^{2^{L-1}} c_{l2} \left(\max_{x \in [a_0, a_1]} |f_l(x)| \max_x |\Phi_{L-2}(x)| + \right. \\ \left. + \max_{x \in [a_0, a_1]} |f(x)| \max_x |\Phi_{L-1}(x)| \right), \quad (24)$$

где

$$c_{l2} = \frac{\omega_l - \omega_0}{2} \max_{x \in [a_0, a_1]} |v_l(x) - v_l(a_0)|,$$

$$B_l = \max_{\omega \in \Omega} \left| \Phi_{L-1} \left(\omega + \frac{\omega_l - \omega_0}{2} v_l(a_0) \right) + (-1)^{L-1} \Phi_{L-1} \left(\omega + \frac{\omega_l - \omega_0}{2} v_l(a_0) \right) \right|,$$

$$D = \max_{\omega \in \Omega} \left| \sum_{l=1}^{2L} (-1)^{\sigma_l(L)} \Phi_L \left(\omega + \sum_{m=1}^L (-1)^{s_l(m)} \phi_m(a_0) \right) \right|.$$

Оценка $|\delta(a, \omega)|$ при $a_0 > 2$ задается неравенством

$$|\delta(a, \omega)| \leq \max_{\omega \in \Omega} |\delta(a_0, \omega)| + 2C_0 \max_x |\Phi_0(x)| + 2C_1 \max_x |\Phi_1(x)|. \quad (25)$$

6. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Предлагаемый метод дискретизации заключается в разбиении отрезка $[1, A]$ на S подотрезков вида $[a_s, a_{s+1}]$, где $a_{s+1} = a_s + \Delta a(s)$, $0 \leq s \leq S-1$. На каждом $[a_s, a_s + \Delta a(s)]$ ищется постоянная оценка снизу функции $M(a)$

$$\mu_s \leq M(a), \quad a_s \leq a \leq a_s + \Delta a(s).$$

Приведем описание алгоритма. Начальное значение параметра a полагается равным $a_0 = 1$.

Шаг 1. На множестве Ω задается некоторый набор частот $\omega_1, \dots, \omega_Q$ и ищется частота ω_{00} из этого набора, в которой функция $|\varepsilon(a_s, \omega)|$ достигает максимального значения

$$|\varepsilon(a_s, \omega_{00})| = \max_q |\varepsilon(a_s, \omega_q)|.$$

Шаг 2. Если для найденного ранее значения m функции $M(a)$ выполняется неравенство

$$\frac{\varepsilon_{00}}{2} < m,$$

то с помощью формулы

$$\Delta a(s) \leq \frac{\varepsilon_{00}}{2} \frac{1}{M_{00}},$$

где M_{00} — полученная с помощью соотношений (22) или (23) оценка сверху модуля производной

$$\left| \frac{d}{da} \varepsilon(a, \omega_{00}) \right| \leq M_{00}, \quad a \in [a_s, a_s + \Delta a(s)],$$

ищется шаг $\Delta a(s)$, обеспечивающий изменение функции $\varepsilon(a, \omega_{00})$ не более чем на $\varepsilon_{00}/2$. Если же

$m \leq \varepsilon_{00}/2$, то шаг $\Delta a(s)$ определяется из неравенства

$$\Delta a(s) \leq \frac{\varepsilon_{00} - m}{M_{00}}.$$

Оценка снизу $M(a)$ на $[a_s, a_s + \Delta a(s)]$ есть

$$\mu_s = M_{00} \Delta a(s).$$

Шаг 3. Если имеет место неравенство $m \leq \mu_s$, то строится следующий подотрезок $[a_{s+1}, a_{s+1} + \Delta a(s+1)]$ и ищется оценка μ_{s+1} на нем.

При $m > \mu_s$ выполняется дискретизация $[a_s, a_{s+1}]$ с шагом α , определяемым из неравенства

$$\alpha \leq \frac{\mu_s}{10 M_{10}},$$

где M_{10} — такое число, что

$$M_{10} \geq \left| \frac{\partial \varepsilon(a, \omega)}{\partial a} \right|$$

для всех $a \in [a_s, a_{s+1}]$ и $\omega \in \Omega$. Оценка M_{10} вычисляется с помощью неравенств (24), (25). Если минимальное из множества значений $M(a_s + \alpha k)$ меньше найденного ранее числа m , то полагается

$$m = \min_k M(a_s + \alpha k).$$

7. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

С помощью описанного в разд. 6 алгоритма для заданных граничных частот ω_0, ω_1 и различных чисел N, L были найдены фильтры с оптимальной относительно величины отклонения АЧХ (3). Из каждого набора найденных для $L = 2, \dots, 10$ оптимальных фильтров с фиксированными ω_0, ω_1 , N был выбран наилучший. Полученные погрешности δ_0 и оптимальные параметры a, L представлены в табл. 1. Для сравнения там же приведены значения отклонений оптимальных фильтров Чебышева [7], имеющих ту же длину и такие же граничные частоты.

Был проведен также эксперимент, заключающийся в сравнении новых фильтров с оконными фильтрами на основе весовых функций [7, 8] Блэкмана

$$w_1(x) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(\pi x) + 0.08 \cos(2\pi x), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

и Кайзера

$$w_2(x) = \begin{cases} I_0(\pi \beta \sqrt{1-x^2}) / I_0(\pi \beta), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

Таблица 1. Параметры L, a оптимальных фильтров и отклонение δ_0 АЧХ (3) для этих параметров в полосах пропускания и подавления для различных частот ω_0, ω_1 и чисел N . Отклонение δ_1 АЧХ оптимальных фильтров Чебышева длиной $2N + 1$ для частот ω_0, ω_1

$\omega_0 = \pi/3, \omega_1 = \pi/2$				
N	L	a	δ_0	δ_1
10	2	6.465	2.67×10^{-2}	2×10^{-2}
20	2	1	1.99×10^{-3}	9.5×10^{-4}
30	3	1	2.56×10^{-4}	5.03×10^{-5}
40	4	1.114	2.14×10^{-5}	3.21×10^{-6}
50	5	1.114	2.1×10^{-6}	2.28×10^{-7}
$\omega_0 = \pi/4, \omega_1 = 7\pi/12$				
10	2	1	1.81×10^{-3}	1.04×10^{-3}
20	4	1.116	2.21×10^{-5}	2.81×10^{-6}
30	6	1.099	2.62×10^{-7}	1.92×10^{-8}
40	8	1.076	4.07×10^{-9}	6.4×10^{-11}
50	10	1.044	4.8×10^{-11}	2.43×10^{-13}

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $\beta = 4.54$. Эффективные носители $[-S_{\text{эф}}, S_{\text{эф}}]$ преобразований Фурье $W_1(\omega), W_2(\omega)$ окон $w_1(x), w_2(x)$ были найдены с помощью формулы

$$\left(\int_{-S_{\text{эф}}}^{S_{\text{эф}}} W_k^2(\omega) d\omega \right) / \left(\int_{\mathbb{R}} W_k^2(\omega) d\omega \right) \times 100\% = 99.99\%,$$

$$k = 1, 2.$$

Для $W_1(\omega)$ и $W_2(\omega)$ получено соответственно $S_{\text{эф}} = 7.3$ и $S_{\text{эф}} = 9.3$. Переходная полоса оконных фильтров длиной $2N + 1$ на основе $w_1(x)$ и $w_2(x)$ занимает отрезок

$$[\omega_c - S_{\text{эф}}/N, \omega_c + S_{\text{эф}}/N], \quad (26)$$

где ω_c – частота среза. Для набора чисел $L = 2, \dots, 10$ с помощью предложенного в работе алгоритма были построены оптимальные по параметрам L и a фильтры длиной $2N + 1$ при $N = 10k, k = 1, \dots, 5$, с переходной полосой вида (26) при $S_{\text{эф}} = 7.3$ и $S_{\text{эф}} = 9.3$. Частота ω_c принята равной $5\pi/12$. Сравнение отклонений АЧХ δ_0 полученных оптимальных фильтров с отклонениями δ_1 оконных фильтров приведено на рис. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено новое параметрическое семейство КИХ-фильтров с АЧХ, аппроксимирующей свертку прямоугольного импульса с финитным сплайном конечного порядка. Отклонения АЧХ

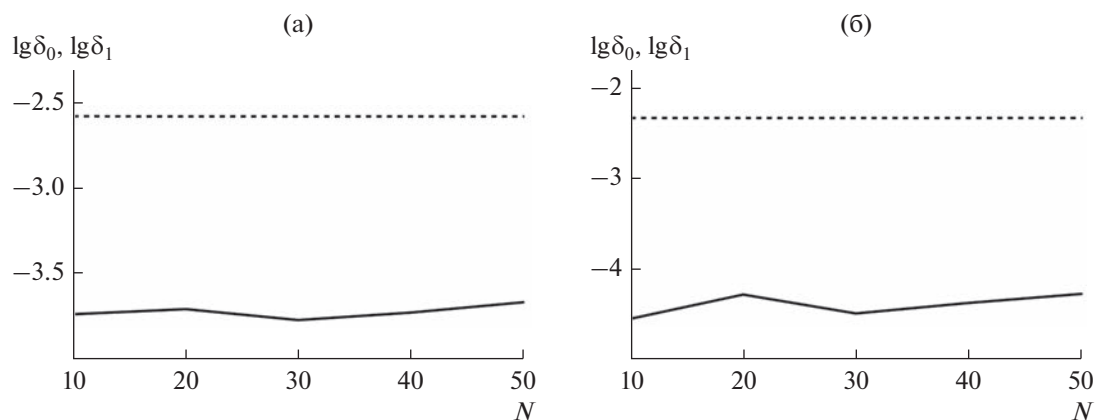


Рис. 2. Логарифмы $\lg \delta_0, \lg \delta_1$ отклонений АЧХ оптимальных фильтров (сплошная линия) и оконных фильтров (пунктирная) длиной $2N + 1$ на основе окон Блэкмана (а) и Кайзера (б) для различных чисел N .

рассмотренных фильтров меняются с изменением параметра a , в связи с чем возникает задача поиска оптимального фильтра в семействе. Разработан и теоретически обоснован алгоритм оптимизации, заключающийся в замене непрерывной задачи дискретной. Проведен численный эксперимент, где выполнено сравнение разработанных фильтров с часто используемыми оконными и оптимальными фильтрами. По величине неравномерности в полосах пропускания и подавления новые фильтры оказались лучше оконных. Отличие между отклонениями АЧХ новых фильтров и фильтров Чебышева составило один-два порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравченко В.Ф., Кравченко О.В.* Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Техносфера, 2018.
2. *Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В.* Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами. М.: Техносфера, 2019.
3. *Будунова К.А., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 10. С. 984.
4. *Budunova K.A., Kravchenko V.F.* // Proc. 2021 Photonics and Electromagnetics Research Symp. (PIERS). Hangzhou, 21–25 Nov. N.Y.: IEEE, 2021. P. 270.
5. *Будунова К.А., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 11. С. 1085.
6. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
7. *Айфичер Э.С., Джервис Б.У.* Цифровая обработка сигналов. М.: ИД “Вильямс”, 2008.
8. *Дворкович В.П., Дворкович А.В.* Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016.