РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2024, том 69, № 10, с. 967–972

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.2

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕКОНСТРУКЦИЯ КУСОЧНО-СТЕРТЫХ ПРОЦЕССОВ

В. В. Климов

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Российская Федерация

E-mail: klimov47@list.ru

Поступила в редакцию 26.04.2022 г.
После доработки 26.04.2022 г.
Принята к публикации 11.05.2022 г.

Рассмотрены и обоснованы новые подходы к построению комплекса математических и программных средств для исследования и реконструкции кусочно-стертых процессов. Для решения этой задачи в случае полиномиальных процессов получены простые аналитические соотношения. При восстановлении полигармонических процессов подробно рассмотрен случай с неизвестным числом гармоник.

Ключевые слова: многочлен, конечная разность, гармоника, определитель

DOI: 10.31857/S0033849424100051, **EDN:** HQJIVT

Дистанционные методы измерения физических характеристик играют все большую роль в исследовании природных ресурсов Земли. Такие методы зондирования реализуются аппаратно-программными средствами различных уровней иерархической геоинформационной мониторинговой системы (ГИМС). Процесс функционирования и взаимодействия всех ее уровней, осуществляющих наблюдение за окружающей средой с искусственных спутников Земли, самолетов-лабораторий, судов, наземных пунктов, связан с обменом значительных объемов информации, что предъявляет высокие требования к техническим средствам регистрации, передачи, записи данных. Однако даже при высокой надежности аппаратуры информационные потоки нередко имеют отрывочный характер, что связано с ограниченными возможностями охвата всей территории исследуемого региона. Сбои могут происходить и в канале связи, что приводит к искажению или потере информации. Искаженные и потерянные данные могут вызвать значительные трудности при последующем анализе поступающей информации и построении математической модели. Поэтому актуальной задачей первичной обработки информации является разработка эффективных алгоритмов выявления искаженных данных и построение формул восстановления информации. Приводимые ниже соотношения дают возможность решать эту задачу в режиме реального времени.

Пусть x_k — рассматриваемый процесс, $k = 1,...,N$. Рассмотрим вариационный ряд x_1^*, $x_2^*,..., x_k^*$, медиана которого есть робастная оценка среднего. Пусть это будет X_k, тогда при выполнении условия $|x_k - X_k| > P$ можно считать, что произошло амплитудное искажение информации. Для выявления фазовых искажений рассматривается процесс $y_k = x_k - x_k'$, где x_k' — текущее среднее. Пусть интервалы времени, на которых $y_k > 0$, имеют длину t. Тогда, если выполняется неравенство $t_i > p\delta_i$ (δ_i — среднеквадратичное отклонение для процесса t_i), то несколько подряд стоящих значений x_k, соответствующих этому t_i, считаются искаженными. Для восстановления искаженных значений сигнала применяются методы полиномиальной интерполяции или оптимальной интерполяции. Но наиболее простыми и эффективными оказываются формулы сплайн-интерполяции, использующие полиномы достаточно низкой степени.

Пусть в рассматриваемом процессе оказались стертыми значения в соседних узлах x_{k-1}, x_k, x_{k+1}. Пусть N — степень интерполяционного сплайн-многочлена. Построим формулы непрерывного восстановления данных для трех значений N.

При $N = 1$ формулы экстраполирования имеют вид

$$x_{k-1} = -x_{k-3} + 2x_{k-2}, \qquad x_{k-1} = 4x_{k+2} - 3x_{k+3},$$
$$x_k = -2x_{k-3} + 3x_{k-2}, \qquad x_k = 3x_{k+2} - 2x_{k+3},$$
$$x_{k+1} = -x_{k-3} + 4x_{k-2}, \qquad x_{k+1} = 2x_{k+2} - x_{k+3}.$$

Центральные значения определяются в виде

$$x_{k-1} = 1/4\,(3x_{k-2} + x_{k+2}), \qquad x_{k-1} = -x_{k-3} + 2x_{k-2},$$
$$x_k = ½\,(x_{k-2} + x_{k+2}),$$
$$x_k = 1/2(-x_{k-3} + 2x_{k-2} + 2x_{k+2} - x_{k+3}),$$
$$x_{k+1} = 1/4\,(x_{k-2} + 3x_{k+2}), \qquad x_{k+1} = 2x_{k+2} - x_{k+3}.$$

При $N = 2$ экстраполирование происходит по формулам

$$x_{k-1} = x_{k-4} - 3x_{k-3} + 3x_{k-2},$$
$$x_{k-1} = 10x_{k+2} - 15x_{k+3} + 6x_{k+4},$$
$$x_k = 3x_{k-4} - 8x_{k-3} + x_{k-2},$$
$$x_k = 6x_{k+2} - 8x_{k+3} + 3x_{k+4},$$
$$x_{k+1} = 6x_{k-4} - 15x_{k-3} + 10x_{k-2},$$
$$x_{k+1} = 3x_{k+2} - 3x_{k+3} + x_{k+4}.$$

Интерполяционные формулы имеют вид

$$x_{k-1} = x_{k-4} - 3x_{k-3} + 3x_{k-2},$$
$$x_{k-1} = x_{k-4} - 3x_{k-3} + 3x_{k-2},$$
$$x_k = (1/3)(3x_{k-4} - 9x_{k-3} + 8x_{k-2} +$$
$$+ 3x_{k+2} - 3x_{k+3} + x_{k+4}),$$
$$x_k = (1/3)(x_{k-4} - 3x_{k-3} + 3x_{k-2} +$$
$$+ 8x_{k+2} - 9x_{k+3} + 3x_{k+4}),$$
$$x_{k+1} = 3x_{k+2} - 3x_{k+3} + x_{k+4},$$
$$x_{k+1} = 3x_{k+2} - 3x_{k+3} + x_{k+4}.$$

При $N = 3$ экстраполяционные формулы имеют вид

$$x_{k-1} = 4x_{k-2} - 6x_{k-3} + 4x_{k-4} - x_{k-5},$$
$$x_{k-1} = 20x_{k+2} - 45x_{k+3} + 36x_{k+4} - 10x_{k+5},$$
$$x_k = 10x_{k-2} - 20x_{k-3} + 15x_{k-4} - 4x_{k-5},$$
$$x_k = 10x_{k+2} - 20x_{k+3} + 15x_{k+4} - 4x_{k+5},$$
$$x_{k+1} = -10x_{k-5} + 3x_{k-4} - 45x_{k-3} + 20x_{k-2},$$
$$x_{k+1} = 4x_{k+2} - 6x_{k+3} + 4x_{k+4} - x_{k+5}.$$

Центральные значения определяются в виде

$$x_{k-1} = 4x_{k-2} - 6x_{k-3} + 4x_{k-4} - x_{k-5},$$
$$x_k = (1/6)(-4x_{k-5} + 16x_{k-4} - 24x_{k-3} + 15x_{k-2} +$$
$$+ 15x_{k+2} - 24x_{k+3} + 16x_{k+4} - 4x_{k+5}),$$
$$x_{k+1} = 4x_{k+2} - 6x_{k+3} + 4x_{k+4} - x_{k+5}.$$

Аналогичные формулы можно получить и для большего числа узлов.

В случае, когда исследуемый процесс содержит регулярные составляющие, например годовой ход температуры, восстановление стертых участков можно осуществить на основе полигармонического представления процесса.

Известные методы оценивания параметров структуры таких процессов (критерий Кюнена, метод Лагранжа–Дейля [1], критерий Гопфнера и др.) предполагают наличие достаточно большого ряда эквидистантных наблюдений y_1, y_2, y_m (число наблюдений m должно удовлетворять условию $m > 4N + 2$, где N — число гармоник). В практических ситуациях иногда возникает такое положение, когда некоторое число наблюдений оказывается пропущенным. И хотя общее количество точек наблюдения бывает велико, «непрерывных отрезков» ряда с числом точек наблюдения $m > 4N + 2$ нет, но при этом встречается достаточное число отрезков ряда $\{y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \ldots, y_{ml}^{(l)}\}$ с числом эквидистантных наблюдений $m_1 > 2N + 1$, где $j = 1,2,\ldots,N,\ldots$ Применить известные методы определения числа синусоидальных компонент в этом случае не удается, так как нарушена непрерывность наблюдений.

Итак, пусть имеется ряд числовых наблюдений $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Во временном ряде пропущено некоторое число наблюдений и имеется возможность рассматривать данный ряд как некую совокупность отрезков временных рядов

$$\{(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_{ml}^1), (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{ml}^2), \ldots, (y_1^l, y_2^l, \ldots, y_{ml}^l)\},$$

где $\sum_{j=1}^{l} m_j = m$.

Положим, что число синусоидальных компонент N нам известно и выполнены следующие условия:

$$l \ge N, m_j > 2N + 1, j = 1,2,\ldots,l. \tag{1}$$

Тогда ординату $y_{sj}^{(j)}$ j-го отрезка ряда можно представить в виде

$$y_{sj}^{(j)} = y_{\text{ср}} + \sum_{i=1}^{N} \sin\left(\frac{2\pi}{T_i} s_j g + \alpha_i^{(j)}\right);$$
$$j = 1,2,\ldots,l;\ 1 \le s_j \le m_j. \tag{2}$$

Необходимо отметить, что при такой форме записи для различных отрезков временного ряда начальные фазы одной и той же компоненты в общем случае различны $\alpha_i^{(j)} \neq \alpha_i^{(k)}; i = 1, N; j \neq k; j, k = 1, 2, \ldots, l.$ Составим для каждого отрезка временного ряда центральные конечные разности четных порядков

$$\Delta^{2j} y_{sk}^{(k)} = y_{sk-j}^{(k)} - c_{2j}^{1} y_{sk-j+1}^{(k)} + c_{2j}^{2} y_{sk-j+2}^{(k)} + \ldots + \\ + c_{2j}^{2j-2} y_{sk+j-2}^{(k)} - c_{2j}^{2j-1} y_{sk+j-1}^{(k)} + y_{sk+j}^{(k)}, \quad (3) \\ k = 1, 2, \ldots, l.$$

Подставляя в (3) выражение (2) для $y_t^{(k)}; k = 1, 2, \ldots, l; t = 1, 2, \ldots, m_k$ и проводя соответствующие тригонометрические преобразования, получим аналогично

$$\Delta^{2j} y_{sk}^{(k)} = (-1)^j 2^{2j} \sum_{i=1}^{N} r_i (\sin \frac{\pi g}{T_i})^{2j} \sin(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)}), \quad (4) \\ k = 1, 2, \ldots, l; j = 1, 2, \ldots, N.$$

Обозначив для краткости

$$\lambda_i = 4 \sin^2 \frac{\pi g}{T_i}; A_i^{(k)} = r_i \sin(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)}), \quad (5) \\ i = 1, 2, \ldots, N; k = 1, 2, \ldots, l.$$

Перепишем систему уравнений (2) и (4) в виде

$$y_{sj}^{(j)} - y_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)}, \\ \Delta^{2j} y_{sk}^{(k)} = (-1)^j \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^j, \quad (6) \\ k = 1, 2, \ldots, l; j = 1, 2, \ldots, N, \ldots.$$

Введем обозначения

$$B_t^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^j = \\ = \begin{cases} y_{sj}^{(j)} - y_{\text{ср}}, \text{при } t = 0, \\ (-1)^t \Delta^{2t} y_{sk}^{(k)}, \text{при } t = 1, 2, \ldots, N, \ldots, \end{cases} \quad (7) \\ k = 1, 2, \ldots, l.$$

Таким образом, имеется возможность получить по наблюдаемым отрезкам рядов $\{(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_{ml}^1), (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{ml}^2), \ldots, (y_1^l, y_2^l, \ldots, y_{ml}^l)\}$ систему значений

$$\{(B_0^{(1)}, B_1^{(1)}, \ldots, B_N^{(1)}, \ldots), (B_0^{(2)}, B_1^{(2)}, \ldots, B_N^{(2)}, \ldots), \ldots, \\ (B_0^{(l)}, B_1^{(l)}, \ldots, B_N^{(l)}, \ldots)\},$$

связанную с неизвестными параметрами $\{(r_i, T_i, \alpha_i^{(k)}); i = 1, N; k = 1, 2, \ldots, l\}$, системами уравнений (7) и (8). Соответственно, задача сводится к нахождению по известной последовательности $(B_0^{(k)}, B_1^{(k)}, \ldots, B_N^{(k)}, \ldots)$; $k = 1, 2, \ldots, l$, регулярного способа определения, $\{(r_i, T_i, \alpha_i^{(k)}); i = 1, N; k = 1, 2, \ldots, l\}$, а также, при необходимости, и числа N синусоидальных компонент ряда. Допустим, что число синусоидальных компонент нам известно. При выполнении условий однозначного определения периодов компонент ($g < 0.5\ T_{\min}$, где $T_{\min}$ — наименьший период синусоидальных компонент) удовлетворяется условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $T_i = T_j$; $i, j = 1, N$. Положим, что величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ — корни уравнения

$$\lambda^N + C_{N-1} \lambda^{N-1} + \ldots + C_1 \lambda + C_0 = 0. \quad (8)$$

Возьмем в системе (7) какую-нибудь группу из $N + 1$ последовательных уравнений, например, группу

$$B_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)}, \ B_1^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i, \\ \ldots\ldots \quad (9) \\ B_N^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^N.$$

Отсюда можно получить для системы $(B_t^{(k)}, t = 0, 1, 2, \ldots, N)$ уравнение

$$B_N^{(k)} + C_{N-1} B_{N-1}^{(k)} + \ldots + C_1 B_1^{(k)} + C_0 B_0^{(k)} = 0. \quad (10)$$

Таким же образом, полагая последовательно k равным 1, 2,..., N, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $(C_0, C_1, \ldots, C_{N-1})$

$$\mathbf{D}(N \times N)\bar{\mathbf{C}} = -\bar{\mathbf{G}}, \quad (11)$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{D}(N \times N) = \\ = \begin{Vmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \ldots & B_{N-1}^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \ldots & B_{N-1}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_0^{(N)} & B_1^{(N)} & \ldots & B_{N-1}^{(N)} \end{Vmatrix}; \bar{\mathbf{C}} = \begin{Vmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \ldots \\ C_N \end{Vmatrix}; \bar{\mathbf{G}} = \begin{Vmatrix} B_N^{(1)} \\ B_N^{(2)} \\ \\ B_N^{(N)} \end{Vmatrix}. \quad (12)$$

При условии, что матрица $\mathbf{D}(N \times N)$ неособенная, из решения матричного уравнения (11) легко получить вектор $\bar{\mathbf{C}}$, что позволяет дальше, определяя корни уравнения (8), получить значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Можно непосредственно определить $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ как корни уравнения

$$P(\lambda) = \frac{1}{\det \mathbf{D}(N \times N)} \det \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_{N-1}^{(1)} & B_N^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_{N-1}^{(2)} & B_N^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(N)} & B_1^{(N)} & \dots & B_{N-1}^{(N)} & B_N^{(N)} \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda^{N-1} & \lambda^N \end{Vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Определив $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ из (8) или (13), находим из (5) периоды

$$T_i = \frac{\pi g}{\arcsin(0.5\sqrt{\lambda_i})}; i = 1, 2, ..., N \quad (14)$$

и параметры $\{(r_i, \alpha_i^{(k)}); i = \overline{1, N}; k = \overline{1, N}\}$, например, методом наименьших квадратов. Рассмотрим возможность определения числа синусоидальных компонент временного ряда. Пусть число синусоидальных компонент ряда, равное N, неизвестно наблюдателю. Введем в рассмотрение квадратную матрицу размером $k \times k$

$$\mathbf{D}(k \times k) = \begin{Vmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_{k-1}^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_{k-1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(k)} & B_1^{(k)} & \dots & B_{k-1}^{(k)} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \sum_{i=1}^{N} A_i^{(1)} & \sum_{i=1}^{N} A_i^{(1)} \lambda_i & \dots & \sum_{i=1}^{N} A_i^{(1)} \lambda_i^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^{N} & \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i & \dots & \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^{k-1} \end{Vmatrix}, \quad (15)$$

которую можно представить в виде произведения

$$\mathbf{D}(k \times k) = \mathbf{T}(k \times N) \mathbf{P}(N \times k), \quad (16)$$

где

$$\mathbf{T}(k \times N) = \begin{Vmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \dots & A_N^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & \dots & A_N^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(k)} & A_2^{(k)} & \dots & A_N^{(k)} \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{P}(N \times k) = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{k-1} \end{Vmatrix} = \mathbf{L}^T(k \times N). \quad (17)$$

Используя формулу Бине–Коши [2], вычислим определитель матрицы $\mathbf{D}(k \times k)$:

$$\det \mathbf{D}(k \times k) =$$

$$\begin{cases} 0 \\ \sum\limits_{\substack{1 \le m1 < m2 < \dots < \\ < mN \le l - N + 1}} T\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}, \quad (18) \end{cases}$$

$$k \le N,$$

где $P\begin{pmatrix} m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$ — минор порядка k матрицы $P(N \times k)$, равный

$$P\begin{pmatrix} m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le k} \left(\lambda_{mi} - \lambda_{mj}\right), \quad (19)$$

и в силу $\lambda_i \ne \lambda_j; i \ne j; i, j = \overline{1, N}$ не обращается в нуль.

Здесь $T\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{pmatrix}$ означает минор порядка k матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$. Элемент $A_i^{(k)}$ матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$ имеет вид

$$A_i^{(k)} = r_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)}\right),$$
$$k = 1, 2, ..., l; \; i = 1, 2, ..., N.$$

Отметим, что при переходе от одного отрезка ряда к другому получаемые синусоидальные A_i и Δ_j

фазовые сдвиги различны, т.е.

$$\alpha_i^{(k+1)} - \alpha_i^{(k)} \ne \alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)},$$
$$i \ne j; i, j = 1, 2, ..., N; k = 1, 2, ..., N. \quad (20)$$

И поэтому в общем случае строки матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$ линейно независимы, что позволяет для ранга матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$ записать

$$\operatorname{rank} \mathbf{T}(k \times N) = \begin{cases} k, \text{при } k < N, \\ N, \text{при } k \ge N. \end{cases} \quad (21)$$

Таким образом, среди миноров порядка k матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$ имеются ненулевые. Это не дает основания утверждать, что определитель матрицы $\mathbf{D}(k \times k)$ (18) при $k \le N$ обязательно отличен от нуля. Однако путем изменения порядка строк матрицы $\mathbf{D}(k \times k)$ и путем выбора других точек $\{y_{s1}^{(1)}, y_{s2}^{(2)}, ..., y_{sk}^{(k)}\}$ в отрезках временного ряда при вычислении центральных конечных разностей четного порядка (3) можно всегда добиться того, что определитель таким образом видоизмененной матрицы $\mathbf{D}(k \times k)$ будет отличен от нуля при $k \le N$

и равен нулю в обратном случае. Проведенное рассмотрение позволяет предложить метод определения числа синусоидальных компонент и их параметров $\{N;(r_i,T_i,\alpha_i^{(k)});i=1,N;k=1,N\}$ применительно к временным рядам с пропущенными наблюдениями [3].

По имеющемуся временному ряду $y_1,y_2,...,y_m$ с пропущенными наблюдениями формируем совокупность эквидистантных отрезков временных рядов $\{(y_1^1,y_2^1,...,y_{ml}^1),(y_1^2,y_2^2,...,y_{ml}^2),...,(y_1^l,y_2^l,...,y_{ml}^l)\}$. Для каждого эквидистантного отрезка ряда вычисляем центральные конечные разности четных порядков $\{\Delta^{2j}y_{sk}^{(k)},k=1,2,...,N,...l;j=1,2,...,N,...\}$ и на их основе получаем систему $\{(B_0^{(1)},B_1^{(1)},...,B_N^{(1)},...)$, $(B_0^{(2)},B_1^{(2)},...,B_N^{(2)},...),...,(B_0^{(l)},B_1^{(l)},...,B_N^{(l)},...)\}$, далее составляем матричную последовательность $\{\mathbf{D}(k\times k),k=1,2,...\}$

$$\mathbf{D}(k\times k)=\begin{Vmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_{k-1}^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_{k-1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(k)} & B_1^{(k)} & \dots & B_{k-1}^{(k)} \end{Vmatrix}.$$

И вычисляются определители det $\mathbf{D}(k\times k)$ каждой последовательности.

Указанный процесс обрывается только после того, как найдется некоторая матрица, скажем $\mathbf{D}(k_0\times k_0)$, в последовательности $\{\mathbf{D}(k\times k),k=1,2,...\}$, определитель которой «устойчиво» равен нулю, т.е. сохраняет свое ненулевое значение при изменении порядка строк в матрице $\mathbf{D}(k_0\times k_0)$ и при выборе других значений $\{y_{s1}^{(1)},y_{s2}^{(2)},...,y_{sk}^{(k)}\}$ для вычисления центральных конечных разностей согласно алгоритму (3). В этом случае число синусоидальных компонент временного ряда $N=k_0-1$. Определение параметров $\{(r_i,T_i,\alpha_i);i=1,N\}$ синусоидальных компонент ряда можно осуществить согласно описанной выше методике с использованием выражений (13) и (14).

В заключение отметим, что в описанном выше методе можно использовать вместо центральных конечных разностей четного порядка разности и суммы разностей ординат, аналогичные находящим применение в методе Лагранжа–Дейля [4–6]. Запишем разности и суммы разностей в виде

$$\begin{aligned} &\Delta_0=y_1-y_0,\\ &\Delta_1=y_2-y_1;E\Delta_1=\Delta_0+\Delta_2,\\ &\Delta_2=y_3-y_2;E\Delta_2=\Delta_1+\Delta_3;\\ &E\Delta^2{}_2=E\Delta_1+E\Delta_3, \qquad (22)\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &\Delta_k=y_{k+1}-y_k;E\Delta_k=\Delta_{k+1}+\Delta_{k-1};\\ &E\Delta^2{}_k=E\Delta_{k-1}+E\Delta_{k+1}. \end{aligned}$$

Подставим в (22) выражение для y_s (2) и получим

$$\begin{aligned} &\Delta_s=\sum_{i=1}^{N}2r_i\sin\frac{w_ig}{2}\cos\left(w_i\frac{2s+1)}{2}g+\alpha_i\right),\\ &E\Delta_s=\sum_{i=1}^{N}2r_i\sin\frac{w_ig}{2}\cos\left(w_i\frac{2s+1)}{2}g+\alpha_i\right)\times\\ &\times 2\cos w_ig, \qquad (23)\\ &\dots\\ &E^l\Delta_s=\sum_{i=1}^{N}2r_i\sin\frac{w_ig}{2}\cos\left(w_i\frac{2s+1)}{2}g+\alpha_i\right)\times\\ &\times 2^l\cos^l w_ig, \end{aligned}$$

где $w_i=2\pi/T_i$.

Если обозначить

$$A_i=2r_i\sin\frac{w_ig}{2}\cos\left(w_i\frac{(2s+1)}{2}g+\alpha_i\right);\quad \lambda_i=2\cos w_ig, \qquad (24)$$

то систему уравнений (23) можно записать так

$$E^l\Delta_s=\sum_{i=1}^{N}A_i^{(k)}\lambda_i^l;l=0,1,2,..., \qquad (25)$$

где $E^0\Delta_s=\Delta_s$.

Таким образом, вычисляя на основе временного ряда $y_1,y_2,...,y_m$ разности и суммы согласно алгоритма (22), получаем систему параметров

$$\{B_k=E^k\Delta_s=\sum_{i=1}^{N}A_i\,\lambda_i^k\}. \qquad (26)$$

Если для процесса без стирания $y_1,y_2,...,y_m$ формировать разности (22) для соседних точек y_s, $y_{s+1},...,y_{s+v-1}$ вместо точек $(y_{S1}^{(1)},y_{S2}^{(2)},...,y_{SN}^{(N)})$ в различных отрезках ряда и далее проводить анализ по описанной методике, то предлагаемый алгоритм совпадет с методом Лагранжа–Дейля.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Серебренников М.Г., Первозванский А.А.* Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.

3. *Абрамов А.Д., Климов В.В., Коновалов Л.Н.* // Математическое моделирование в задачах радиотехники и электроники. М., 1984. Ч. 2. С. 152.
4. *Голд Б., Рейдер Ч.* Цифровая обработка сигналов. М.: Сов. радио, 1973.
5. *Кендалл М. Дж., Стюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976.
6. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.

RESEARCH AND RECONSTRUCTION PIECEWISE ERASED PROCESSES

V. V. Klimov

Fryazino Branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,
Vvedenskii Squar., 1, Fryazino, Moscow Region, 141190 Russian Federation
E-mail: klimov47@list.ru

Received April 26, 2022, revised April 26, 2022, accepted May 11, 2022

The paper considers and substantiates new approaches to constructing complex of mathematical and software tools for research and reconstruction of piecewise-erased processes. To solve this problem in the case of polynomial processes, simple analytical ratios. When restoring polyharmonic processes in detail the case with an unknown number of harmonics is considered.

Keywords: polynomial, finite difference, harmonic, determinant