

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

© 2024 г. Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой*

ВЭИ — филиал ФГУП «РФЯЦ — ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина»,
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 18.04.2023 г.

После доработки 18.11.2023 г.

Принята к публикации 11.01.2024 г.

Выполнен анализ и проведена интерпретация точных решений, которые описывают немонотонные и осцилляционные режимы плотного электронного пучка с тремя компонентами скорости, зависящего от времени и двух декартовых координат.

Ключевые слова: точные решения, нестационарные потоки, двумерные уравнения, пространственные траектории

DOI: 10.31857/S0033849424100118, EDN: HPRAQO

ВВЕДЕНИЕ

Классические одномерные стационарные решения в отсутствие магнитного поля [1–4] или при его наличии [5–9] способствовали пониманию явления термоэмиссии. Точные решения с разделением переменных в сферических координатах [10, 11] использованы для расчета электронно-оптической системы гиротрона [12–14]. Релятивистские потоки с одной компонентой скорости в декартовых или сферических координатах, описанные в работах [15–17] («парапотенциальные потоки» в [18]), положены в основу некоторых моделей сильноточных релятивистских диодов с магнитной самоизоляции [19, 20]. Основная функция точных решений в настоящее время — служить эталонами при тестировании приближенных [21–23] и численных [24–28] алгоритмов в задачах расчета интенсивных электронных пучков, причем в работах [21–23] оценивается точность геометризованных моделей и параксиального приближения.

Наиболее полные наборы точных решений рассматриваемой системы уравнений в частных производных могут быть построены на основе исследования групповых свойств и использовании понятия инвариантного решения [29]. Итогом

подобного подхода в приложении к уравнениям плотного электронного пучка являются таблицы точных решений, приведенные в работе [30] и монографиях [31, 32], которые сопровождаются ссылками на ранее полученные в свободном поиске результаты. Большая часть публикаций по этой теме посвящена стационарным потокам, в то время как число исследований течений, зависящих от времени, относительно невелико [33–38].

Одномерные разлеты релятивистских сгустков рассмотрены в работе [33], двумерные релятивистские решения аperiодического характера — в [34]. В работе [35] исследованы двумерные нерелятивистские потенциальные потоки на плоскости при наличии z -компоненты однородного магнитного поля. Рассмотрение основано на уравнении четвертого порядка для действия (потенциала обобщенного импульса) — исключительно громоздком соотношении, к которому могут быть сведены простые исходные уравнения пучка¹. По этой при-

¹ Уравнение для действия в нестационарном случае в векторной записи содержит 10 слагаемых [35]; в более простом случае $\partial/\partial t = H_z = 0$ в декартовых координатах число членов равно 24.

чине, по-видимому, второе из двух приведенных решений оказалось неверным.

Первое из них соответствовало плоскому потоку с действием W вида

$$W = \frac{1}{4}f(t)(x^2 + y^2) + \alpha(t)x + \beta(t)y + \gamma(t)(x^2 - y^2) + \delta(t)xy. \quad (1)$$

Зависящие от времени интенсивности квадратурных полей связаны с функцией f соотношением (коэффициент перед интегралом в квадратной скобке скорректирован)

$$\gamma^2 + \delta^2 = \exp(-s) \left[C - \frac{1}{8} \int F \exp(s) dt \right], \quad (2)$$

$$s = \int f dt, \quad F = f'' + 2ff'^2 + \frac{1}{2}f^3 + \frac{1}{2}H_z f^2,$$

$$C = \text{const.}$$

Автор [35] считает, что при периодической функции $f(t)$ периодическим (но, заметим, необязательно ограниченным) будет и интеграл, причем при достаточно большом значении C правая часть окажется положительной. Параметры найденного потенциального потока должны удовлетворять соотношению (2), но для конструктивного построения и анализа решений оно оказывается бесполезным.

Работа с точными решениями включает три этапа. На первом выявляется функциональный вид решения, позволяющий перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Второй состоит в попытке получить решение этих уравнений в элементарных или специальных функциях, особенно удобных для проблемы тестирования. Интерпретация построенных таким образом решений составляет третий этап исследования, проясняющий одновременно возможность постановки соответствующих тестовых задач.

Цель работы — интерпретация подобного рода решений уравнений нестационарного нерелятивистского пучка, зависящих от двух декартовых координат при трех отличных от нуля компонентах скорости. Предварительному анализу этих решений посвящена работа [39]. При более подробном рассмотрении предпочтение отдается осциллирующим режимам или хотя бы немонотонным зависимостям параметров потока от времени, причем распорядиться произвольными постоянными и функциями необходимо так, чтобы избежать образования виртуального катода.

Нестационарный нерелятивистский пучок во внешнем квазистационарном магнитном поле описывается следующей системой уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \nabla \varphi + \vec{v} \times \vec{H}, \quad \nabla \vec{H} = 0, \quad (3)$$

$$\text{rot } \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad \Delta \varphi = \rho.$$

Здесь $\vec{v}$, $\vec{H}$ — векторы скорости и напряженности магнитного поля; φ , ρ — потенциал электрического поля $\vec{E}$ и плотность пространственного заряда. В декартовых x , y и цилиндрических R , ψ координатах для компонент скорости примем обозначения $\{u, v\}$ и $\{v_R, v_\psi\}$, w — для z -компоненты. Уравнения (3) и все последующие соотношения записаны в нормировках, исключающих физические константы используемой системы единиц; $\rho > 0$ и $\vec{E} = -\nabla \varphi$, символы со звездочкой — характерные величины задачи; η , ϵ_0 , μ_0 — удельный заряд электрона, диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума

$$\bar{r} = \frac{r}{L_*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V_*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{(L_*/V_*)},$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{(-V_*^2/\eta)}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{(\epsilon_0 V_*^2/\eta L_*^2)},$$

$$\bar{H} = \frac{H}{(V_*/\eta \mu_0 L_*)}$$

1. РЕШЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Решение I. Параметры потока и соответствующая система обыкновенных уравнений описываются формулами

$$u = xI_1(t), \quad v = xI_2(t), \quad \varphi = x^2 I_4(t), \quad \rho = I_5(t); \quad (4)$$

$$I_1' + I_1^2 = 2I_4 + I_2 H_z, \quad I_2' + I_1 I_2 = -I_1 H_z,$$

$$I_5' + I_1 I_5 = 0, \quad 2I_4 = I_5.$$

Решение определено выражениями

$$U = A \cos \omega t + B \sin \omega t + U_0, \quad (5)$$

$$U_0 = (\rho_0 + \omega V_0)/\omega^2, \quad \omega = H_z,$$

$$I_1 = \frac{U'}{U}, \quad I_2 = \frac{V_0}{U} - H_z, \quad I_4 = \frac{\rho_0}{2U},$$

$$I_5 = \frac{\rho_0}{U}, \quad \xi = \frac{x}{U},$$

$$w = W(\xi) \exp \left[v y + \frac{v \xi}{\omega} (\rho_0 t - U') \right].$$

По умолчанию не поясняемые символы (A , B , v в (5)), а также символы с индексом нуль являются константами.

На рис. 1 представлены характеристики потока для двух наборов констант; при этом

$$U = \cos \omega t + U_0, \quad (6)$$

$$\bar{w} = \exp \left[-y - \frac{1}{U} \left(\frac{\rho_0}{\omega} t + \sin \omega t \right) \right].$$

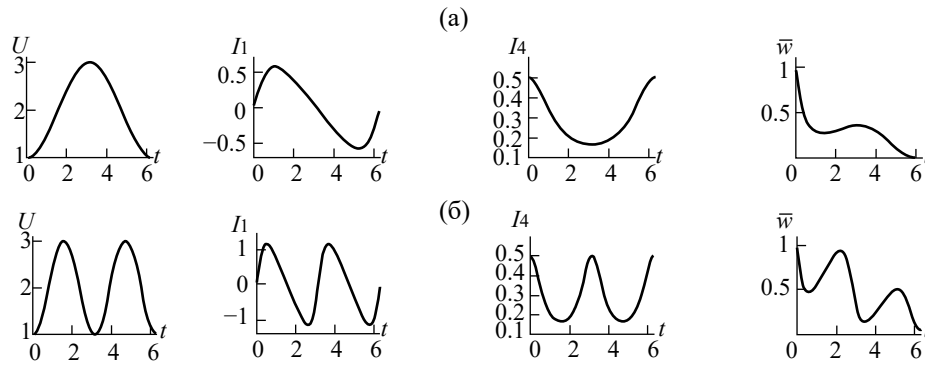


Рис. 1. Параметры потока для решения I при $A = 1, B = 0, \rho_0 = 1, W = 1, v = -1$: а) $V_0 = 1, \omega = 1$; б) $V_0 = 3.5, \omega = 2$.

Как видно из формул (5), функции I_2, I_5 с точностью до постоянного множителя и сдвига в первом случае совпадают с функцией I_4 . Решение описывает поток в плоском диоде $x = 0, x = 1$ с потенциалами электродов $\Phi_0 = 0, \Phi_1 = I_4(t)$, в котором на бриллюэновское движение со скоростью v наложено x -перемещение частиц, имеющее осцилляционный характер с частотой, определяемой магнитным полем. Обычная бриллюэновская зависимость $v = -H_z x$ дополнена зависящим от времени периодическим фрагментом.

В момент времени $t = 0$ пространство между плоскостями заполнено зарядом с плотностью $I_5(0)$. В дальнейшем при уменьшении Φ_1 плоскость $x = 1$ поглощает частицы, причем скорость поглощения ($I_1 > 0$) проходит через максимум и обращается в нуль при минимальном значении Φ_1 . Затем при возрастании Φ_1 реализуется симметричный процесс инжекции заряда ($I_1 < 0$).

Движение в плоскости (x, y) разворачивается в z -направлении со скоростью w из (5) по экспоненте, зависящей от y и содержащей функцию $U(t)$, причем эта зависимость может быть усложнена за счет произвольного множителя $W(\xi)$.

Решение II. Решение определено соотношениями с произвольной функцией $h(t)$:

$$\begin{aligned} u &= xI_1(t), \quad v = xI_2(t), \\ \varphi &= \frac{1}{2} \frac{h''}{h} z^2 + x^2 I_4(t), \\ \rho &= I_5(t); \\ I_1' + I_1^2 &= 2I_4 + I_2 H_z, \quad I_2' + I_1 I_2 = -I_1 H_z, \\ I_5' + \left(I_1 + \frac{h'}{h} \right) I_5 &= 0, \\ 2I_4 &= I_5 - \frac{h''}{h}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) и третье уравнение движения могут быть трансформированы к виду

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U'}{U}, \quad I_2 = \frac{V_0}{U} - H_z, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{hU}, \\ U'' + \left(H_z^2 + \frac{h''}{h} \right) U &= \frac{\rho_0}{h} + V_0 H_z, \\ w &= \frac{h'}{h} z + \frac{1}{h} W(\xi), \quad \xi = \frac{x}{U}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $W(\xi)$ — произвольная функция.

При $h = U$ для функции $U(t)$ получаем уравнение с первым интегралом

$$U'^2 = \rho_0 \ln U + V_0 H_z U - \frac{1}{2} H_z^2 U^2 + C = C - G(U). \quad (9)$$

Уравнение типа (9) описывает движение в потенциальной яме «частицы» с координатой U и «интегралом энергии»

$$U'^2 + G(U) = C. \quad (10)$$

Амплитуду колебаний при несимметричных «стенках» определяют два корня U_1, U_2 уравнения

$$G(U) = C. \quad (11)$$

Период колебаний описывается выражением

$$T = 2 \int_{U_1}^{U_2} \frac{dU}{\sqrt{C - G(U)}}. \quad (12)$$

Частицы, находившиеся в начале периода в плоскости $x = U_1 x_0$, совершают осцилляционное движение в диапазоне $U_1 x_0 < x < U_2 x_0$. Формулы (8) для параметров потока принимают вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U'}{U}, \quad I_2 = \frac{V_0}{U} - H_z, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{U^2}, \\ I_4 &= \frac{1}{4} \left(I_5 - \frac{V_0 H_z}{U} + H_z^2 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{U''}{U} z^2 + I_4 x^2, \quad w = I_1 z + \frac{1}{U} W(\xi), \quad \xi = \frac{x}{U}.$$

На рис. 2а приведены функции U, I_1, I_2, I_4, I_5 . Период колебаний решения близок к π : $T = 3.268$, $U_1 = 1, U_2 = 1.516$. Плоскости $x = x_* = \text{const}$ не являются эквипотенциальными:

$$\varphi_* = \frac{1}{2} \frac{U''}{U} z^2 + I_4 x_*^2. \quad (14)$$

При $t = 0$ область $x_1 < x < x_2$ заполнена зарядом максимальной плотности ρ_0 . При увеличении t плоскость $x = x_1$ начинает эмитировать, а $x = x_2$ поглощать частицы со скоростью, проходящей через максимум и обращающейся в нуль при $t = T/2$. Во втором полупериоде они меняются ролями. При $W = 0$ движение по второй координате в плоскости (x, z) определено тем же законом, что и в x -направлении. Произвольная функция $W(\xi)$ приводит к усложнению картины. Компонента v по y , имеющая вид бриллюэновской зависимости (5), но с другой функцией $U(t)$, осуществляет развертку в y -направлении. Заряды перемещаются в поле $\varphi(t, x, z)$, эквипотенциали-эллипсы ($t = 0$) которого трансформируются в гиперболы ($t = T/2$, рис. 2б).

Увеличение магнитного поля в два раза при сохранении осцилляционного режима требует изменения параметров ρ_0, V_0 : $\rho_0 = 15, V_0 = 1.75$. Качественная картина решения при этом не меняется, период колебаний уменьшается примерно в два раза $T = 1.708$ при $U_1 = 1, U_2 = 1.433$.

Решение III. Решение имеет вид

$$u = xI_1(t), \quad v = xI_2(t), \quad \varphi = \frac{1}{2} a^2 z^2 + x^2 I_4(t), \quad (15)$$

$$\rho = I_5(t);$$

$$I_1' + I_1^2 = 2I_4 + I_2 H_z, \quad I_2' + I_1 I_2 = -I_1 H_z,$$

$$I_5' + (I_1 + a) I_5 = 0, \quad 2I_4 = I_5 - a^2$$

и выражается через элементарные функции

$$U = \bar{\rho}_0 \exp(-at) + A \cos \omega t + B \sin \omega t + \bar{V}_0, \quad \omega^2 = a^2 + H_z^2, \quad (16)$$

$$I_1 = \frac{U'}{U}, \quad I_2 = -H_z + \frac{V_0}{U}, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{U} \exp(-at),$$

$$I_4 = \frac{1}{2} (I_5 - a^2),$$

$$w = az + \exp(-at) W(\xi), \quad \xi = x/U;$$

$$\bar{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{a^2 + \omega^2}, \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0 H_z}{\omega^2}.$$

На рис. 3а, 3б представлен пример поведения параметров электронного потока. Решение описывает перемещение зарядов между неэквипотенциальными плоскостями $x = 0$ и $x = x_*$ с потенциалами $\varphi_0 = a^2 z^2 / 2$ и $\varphi_* = \varphi_0 + x_*^2 I_4(t)$. В плоскости $x = x_*$ режим поглощения частиц многократно меняется на режим инжекции. Криволинейные траектории в плоскости (x, y) с двумерным электрическим полем (t, x, z) определяются z -компонентой скорости с произвольной функцией $W(\xi)$. Развертку в y -направлении выполняет скорость v , единожды (рис. 3а) или многократно (рис. 3б) проходящая через нуль.

При $a < 0$ и $t \rightarrow \infty$ плотность ρ стремится к постоянному значению, которое соответствует следующему стационарному состоянию пучка при $W = W_0 \xi$:

$$u = -ax, \quad v = -H_z x, \quad w = az + W_0 x, \quad (17)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} a^2 z^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2, \quad \rho = 2a^2 + H_z^2.$$

Течение (17) является немонотонноэнергетическим с полной энергией

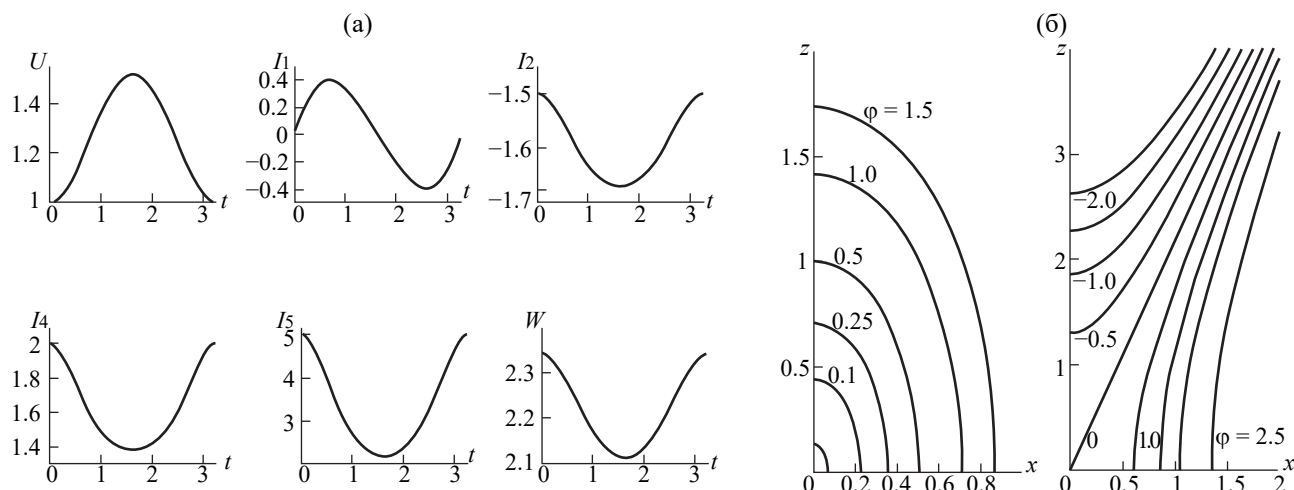


Рис. 2. Решение II при $H_z = 2, V_0 = 0.5, \rho_0 = 5, C = 1$: а) параметры потока в пределах периода; б) эквипотенциали $\varphi = \text{const}$ при $t = 0$ (слева), $t = T/2$ (справа).

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \Phi = \frac{1}{2}W_0x(2az + W_0x) \quad (18)$$

и эллиптическими эквипотенциалами в плоскости (x, z) , рис. 3в. Пространственные траектории проецируются на плоскость (x, y) прямыми, на плоскость $(\bar{x}, \bar{z})$, повернутую относительно (x, z) на угол α , — гиперболами (см. рис. 3в):

$$y - y_0 = \frac{H_z}{a}x, \quad \frac{W_0}{2a}x^2 + xz = \text{const}; \quad (19)$$

$$\frac{2\bar{x}^2}{d + W_0/2a} + \frac{2\bar{z}^2}{d - W_0/2a} = \text{const},$$

$$d = \sqrt{(W/2a) + 1}, \quad \text{tg} 2\alpha = \frac{W}{a}.$$

Решение IV. Для электростатического потока $H_z = 0$ имеем

$$u = \frac{f'}{f}x + I_1(t), \quad v = V(\xi), \quad \xi = \frac{x}{f} - \int \frac{I_1}{f} dt, \quad (20)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{f''}{f} x^2 + \frac{\Psi'}{f} x, \quad \rho = I_5(t), \quad w = W(\xi);$$

$$I_1' + \frac{f'}{f} I_1 = \frac{\Psi'}{f}, \quad I_5' + \frac{f'}{f} I_5 = 0, \quad I_5 = \frac{f''}{f},$$

где $\Psi(t), V(\xi), W(\xi)$ — произвольные функции.

Решение уравнений (20) определено формулами

$$I_1 = \frac{\Psi}{f}, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{f}, \quad f = \frac{1}{2}\rho_0 t^2 + f_1 t + f_0, \quad (21)$$

$$\xi = \frac{x}{f} - \int \frac{\Psi}{f^2} dt,$$

описывающими одномерное течение между плоскостями $x = 0$ и $x = x_*$ с потенциалами $(, 0)$ и $\Phi(t, x_*)$ и с плотностью зарядов, уменьшающейся по времени. Численный пример (рис. 4) построен для случая

$$\Psi = 2 + \sin \omega t, \quad u(t, x_*) = \frac{f'}{f} x_* + \frac{2 + \sin \omega t}{f}, \quad (22)$$

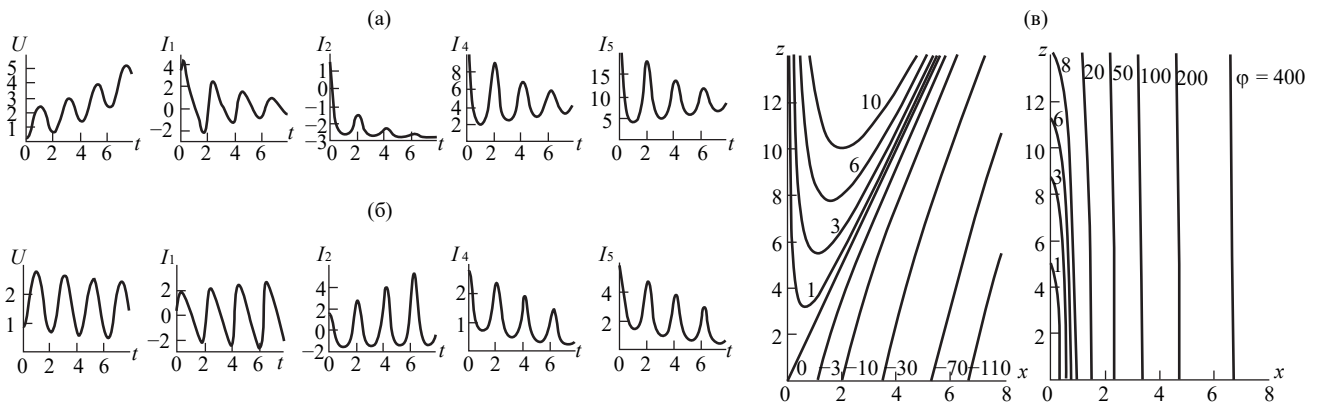


Рис. 3. Решение III, параметры потока: а) $a = -0.2$, $H_z = 3$, $V_0 = 1$, $\rho_0 = 8$; б) $a = 0.2$, $H_z = 3$, $V_0 = 4$, $\rho_0 = 8$; в) траектории (слева) и эквипотенциалы (справа) стационарного потока в пределе $t \rightarrow \infty$ при $a = -0.2$.

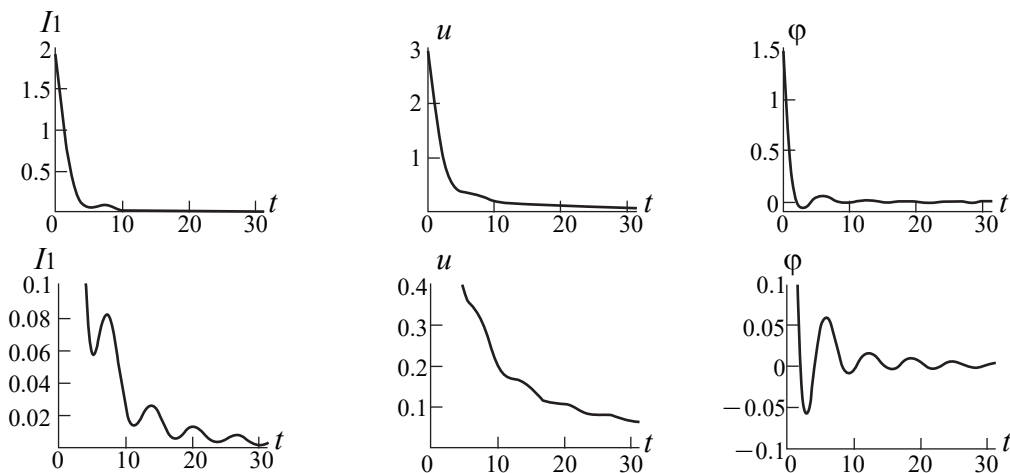


Рис. 4. Параметры потока для решения IV при $\psi = 2 + \sin \omega t$.

$$\varphi(t, x_*) = \frac{1}{2} \frac{f''}{f} x_*^2 + \frac{\omega \cos \omega t}{f} x_*.$$

Начальная скорость инжекции пучка достаточна, чтобы сохранилось ее положительное значение при падении $\varphi(t, x_*)$ вплоть до осцилляций вблизи $\varphi = 0$ с уменьшающейся амплитудой.

Решение V. Для параметров потока и соответствующих уравнений получаем

$$u = \frac{f'}{f} x + I_1(t), \quad v = V(\xi), \quad w = \frac{h'}{h} z + \frac{1}{h} W(\xi), \quad (23)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{f''}{f} x^2 + \frac{1}{2} \frac{h''}{h} z^2 + \frac{\Psi'}{f} x, \quad \rho = I_5(t),$$

$$\xi = \frac{x}{f} - \int \frac{I_1}{f} dt;$$

$$I_1' + \frac{f'}{f} I_1 = \frac{\Psi'}{f}, \quad I_5' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \right) I_5 = 0,$$

$$\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} = I_5,$$

где $\Psi(t)$, $V(\xi)$, $W(\xi)$ — произвольные функции.

Система из (23) может быть трансформирована к виду

$$I_1 = \frac{\Psi}{f}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{fh}, \quad \frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} = \frac{\rho_0}{fh}, \quad (24)$$

$$\xi = \frac{x}{f} - \int \frac{\Psi}{f^2} dt.$$

Ниже рассмотрим две специализации функции $\Psi(t)$:

$$\Psi = f^2 f' \cos f, \quad \xi = \frac{x}{f} - \sin f, \quad (25)$$

$$\frac{\Psi'}{f} = (ff'' + 2f'^2) \cos f - ff'^2 \sin f;$$

$$\Psi = f^2, \quad \xi = \frac{x}{f} - t, \quad \frac{\Psi'}{f} = 2f'.$$

При $h = \exp(\omega t)$ имеем

$$f = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{\rho_0}{2\omega^2} \exp(-\omega t), \quad (26)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{f} \exp(-\omega t).$$

Приведенные на рис. 5а характеристики соответствуют первому варианту функции из (25); на рис. 5б представлены эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ в моменты $t = 0, \pi/2, \pi$ в плоскости (x, z) , трансформирующиеся от гипербол к эллипсам и при $t = 3\pi/2$ в пределах рисунка становящиеся практически прямыми, параллельными оси z . На неэквипотенциальной плоскости $x = 0$ с $\varphi = \omega^2 z^2/2$ состояние пучка меняется от инжекции к поглощению и снова к инжекции в двумерное поле $\varphi(t, x, z)$ (рис. 5а), z -компонента скорости отвечает за искривление траекторий, в то время как сносная скорость v может быть произвольной функцией ξ . Плотность, не зависящая от вида Ψ , проходит через максимум и стремится к константе $\rho \rightarrow 2\omega^2$, $\omega < 0$.

При $\Psi = f^2$ и $W(\xi) = W \exp(-\omega \xi)$ функция w определена выражением

$$w = \omega z + \bar{w}, \quad \bar{w} = W_0 \exp(-\omega x/f). \quad (27)$$

Функции Ψ , Ψ'/f , $\xi(t, 1)$, $\bar{w}(t, 1)$ представлены на рис. 5в. Деформация кривых $\bar{w} = \text{const}$ во времени аналогична предыдущему случаю (см. рис. 5б).

Частный случай решения (26), (27) при $A = B = 0$, $\omega > 0$

$$u = -\omega x + \frac{\rho_0}{2\omega^2} \exp(-\omega t), \quad w = \omega z + \bar{w}, \quad (28)$$

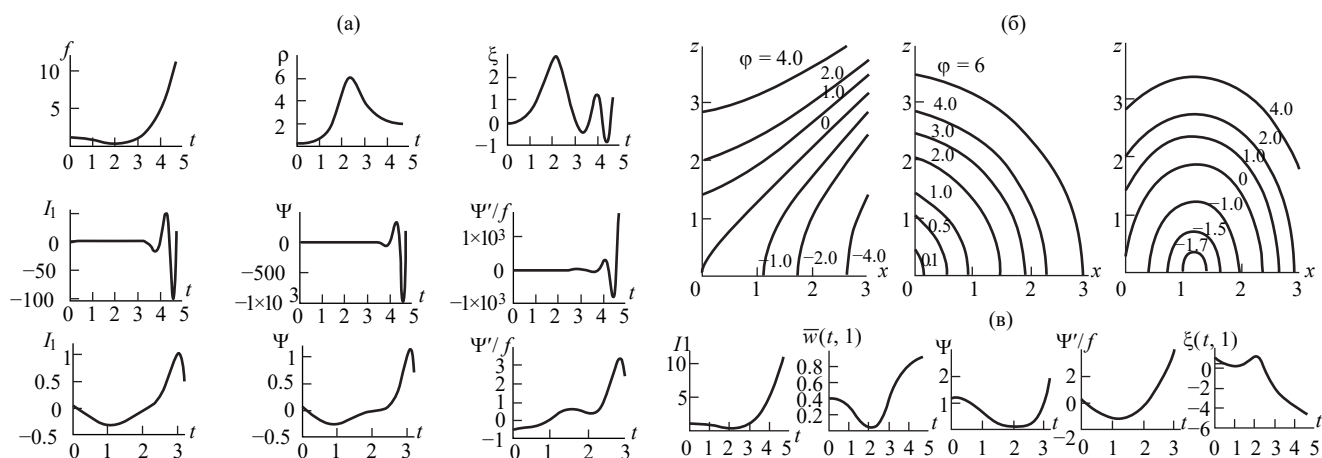


Рис. 5. Решение V при $A = 1$, $\rho_0 = 0.2$, $\omega = -1$: а) параметры потока при $\Psi = f^2 f' \cos f$; б) эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ при $t = 0, t = \pi/2, t = \pi$ (слева направо); в) параметры потока при $\Psi = f^2$.

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + z^2) - \frac{\rho_0}{\omega} \exp(-\omega t)$$

в пределе $t \rightarrow \infty$ описывает потенциальный электростатический поток с равнобоковыми гиперболами $xz = \text{const}$ в качестве траекторий [40]

$$u = -\omega x, \quad w = \omega z, \quad \varphi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + z^2), \quad \rho = 2\omega^2. \quad (29)$$

Решение VI. Параметры потока и система обыкновенных уравнений определены выражениями

$$v_R = RI_1(t), \quad v_\psi = RI_2(t), \quad (30)$$

$$\varphi = R^2 I_4(t), \quad \rho = I_5(t),$$

$$w = R^v W(\xi) \exp\left(-v \int I_1 dt\right), \quad \xi = \psi - \int I_2 dt;$$

$$I_1' + I_1^2 - I_2^2 = 2I_4 + I_2 H_z, \quad I_2' + 2I_1 I_2 = -I_1 H_z,$$

$$I_5' + 2I_1 I_5 = 0, \quad 4I_4 = I_5.$$

Трансформируем систему (30) следующим образом:

$$I_1 = \frac{U'}{U}, \quad I_2 = -\frac{1}{2}H_z + \frac{V_0}{U^2}, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{U^2}, \quad (31)$$

$$U'' - \frac{V_0^2}{U^3} - \frac{\rho_0}{2U} + \frac{1}{4}H_z^2 U = 0.$$

Первый интеграл уравнения для U определен формулой

$$U'^2 = -\frac{V_0^2}{U^2} + \rho_0 \ln U - \frac{1}{4}H_z^2 U^2 + C = C - G(U). \quad (32)$$

С подобной ситуацией мы уже встречались при рассмотрении решения III.

Решение (31) описывает сплошной бриллюэновский поток, радиус траекторий $R = U$ в котором осциллирует во времени. В задачах о транспортировке стационарного пучка z -компонента скорости принимается постоянной. Для решения (31) помимо этого случая ($v = 0$, $W = \text{const}$) при $v > 0$ возможна сносная скорость, равная нулю

на оси пучка, зависящая от времени и периодически меняющаяся по азимуту:

$$w = \left(\frac{R}{U}\right)^v W(\xi), \quad \xi = \psi + \frac{1}{2}H_z t - V_0 \int \frac{dt}{U^2}. \quad (33)$$

На рис. 6 приведен пример ($T = 2.166$, $U_1 = 1$, $U_2 = 2.246$) решения (31), когда для функции $W(\xi)$ принято выражение

$$W = 2 + \cos \xi. \quad (34)$$

Угловая скорость ω при $V_0 = 0$ постоянна, вариант $V_0 \neq 0$ не приносит качественных изменений за исключением того, что ω зависит от времени подобно потенциалу или плотности.

2. РЕШЕНИЯ С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Решение VII. При произвольных функциях $V(\xi)$, $W(\xi)$ рассмотрим поток с параметрами

$$u = \frac{1}{t} I_1(x), \quad v = V(\xi), \quad w = \frac{c}{t} z + t^{-c} W(\xi), \quad (35)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{c(c-1)}{t^2} z^2 + \frac{1}{t^2} I_4(x), \quad \rho = \frac{1}{t^2} I_5(x),$$

$$\xi = t \exp\left(-\int \frac{dx}{I_1}\right);$$

$$I_1 I_1' - I_1 = I_4', \quad (I_1 I_5)' + (c-2) I_5 = 0, \\ I_4'' = I_5 - c(c-1).$$

Решение системы (35) сводится к соотношениям

$$I_1 = \frac{dx}{d\tau} \equiv \dot{x}, \quad I_1 I_5 = J_0 \exp(\alpha\tau), \quad \xi = t \exp(-\tau), \quad (36)$$

$$I_4' = \frac{J_0}{2-c} \exp(\alpha\tau) - c(c-1)x + E_0,$$

$$\ddot{x} - \dot{x} + \beta x = \frac{J_0}{\alpha} \exp(\alpha\tau) + E_0,$$

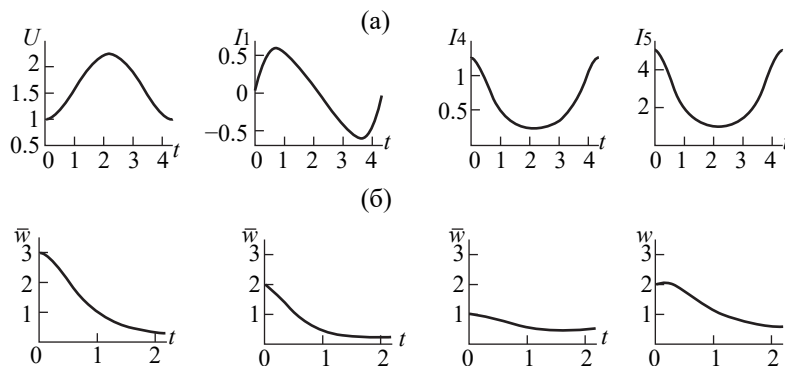


Рис. 6. Решение VI при $H_z = 2$, $V_0 = 0$, $\rho_0 = 5$, $C = 1$: а) параметры потока в пределах периода; б) z -компонента скорости $w = R^2 \bar{w}$, $\bar{w} = W(\xi) / U^2$ при $\psi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (слева направо).

$$x = \exp(\tau/2)(A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau) + \frac{J_0}{\gamma} \exp(\alpha \tau) + \frac{E_0}{\beta},$$

$$\frac{E_0}{\beta} = -A - \frac{J_0}{\gamma}.$$

$$I_1 = \exp(\tau/2) \times \\ \times \left[\left(\frac{1}{2} A + B \omega \right) \cos \omega \tau + \left(\frac{1}{2} B - A \omega \right) \sin \omega \tau \right] + \\ + \frac{\alpha J_0}{\gamma} \exp(\alpha \tau),$$

$$I_4 = -\frac{1}{2} \beta x^2 + E_0 x + \frac{J_0}{\alpha} \int \exp(-\alpha \tau) \dot{x} d\tau; \\ \alpha = 2 - c, \quad \beta = c(c - 1), \quad \gamma = (2 - c)^2 (2 - c^2),$$

$$\omega = \sqrt{\beta - 1/4}.$$

В качестве примера рассмотрим вариант с $B = 0$:

$$x = A \left[\exp(\tau/2) \cos \omega \tau - 1 \right] + \frac{J_0}{\beta} \left[\exp(\alpha \tau) - 1 \right], \quad (37)$$

$$I_1 = A \exp(\tau/2) \left[\frac{1}{2} \cos \omega \tau - \omega \sin \omega \tau \right] + \frac{\alpha J_0}{\gamma} \exp(\alpha \tau),$$

$$\varphi = \frac{1}{t^2} \Phi(x, z), \quad \Phi = \frac{1}{2} \beta z^2 - x^2 + \beta \left(1 + \frac{J_0}{\gamma} \right) x +$$

$$+ \frac{A \exp(\tau/2)}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \omega^2 \right) \tau \cos \omega \tau + \frac{\omega}{2} \tau \sin \omega \tau - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1/4 + \omega^2} \left[\frac{1}{4} \cos \omega \tau + \omega \left(\frac{3}{4} + \omega^2 \right) \sin \omega \tau \right] \right\} +$$

$$+ \frac{J_0}{\gamma \alpha} \exp(\alpha \tau) (\alpha \tau - 1);$$

Пучок инжектируется с плоскости $x = 0$ с переменным потенциалом со скоростью $I_1(0)/t$, $t \geq 1$ (уравнения пучка допускают сдвиг по времени и декартовым координатам) в двумерное затухающее со временем поле, эквипотенциали которого изображены на рис. 7. Криволинейное движение в плоскости (x, z) определяет z -компонента скорости w с произвольной функцией $W(\xi)$. Развертка плоского движения в y -направлении возможна за счет произвольной сносной скорости $V(\xi)$. Функция I_5 , через которую выражается плотность, проходит через максимум и стремится к константе.

Решение VIII. Функциональный вид решения и соответствующая система уравнений описываются соотношениями

$$u = t^\beta I_1(\xi), \quad v = t^\alpha I_2(\xi), \quad w = t^\gamma I_3(\xi), \quad (38)$$

$$\varphi = t^{2\alpha} I_4(\xi), \quad \rho = -I_5(\xi), \quad \xi = y t^{-\alpha-1};$$

$$[I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_1' + \beta I_1 = 0,$$

$$[I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_2' + \alpha I_2 = I_4',$$

$$[I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_3' + \gamma I_3 = 0,$$

$$[I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_5' + (I_2' - 2) I_5 = 0,$$

$$I_4'' = I_5.$$

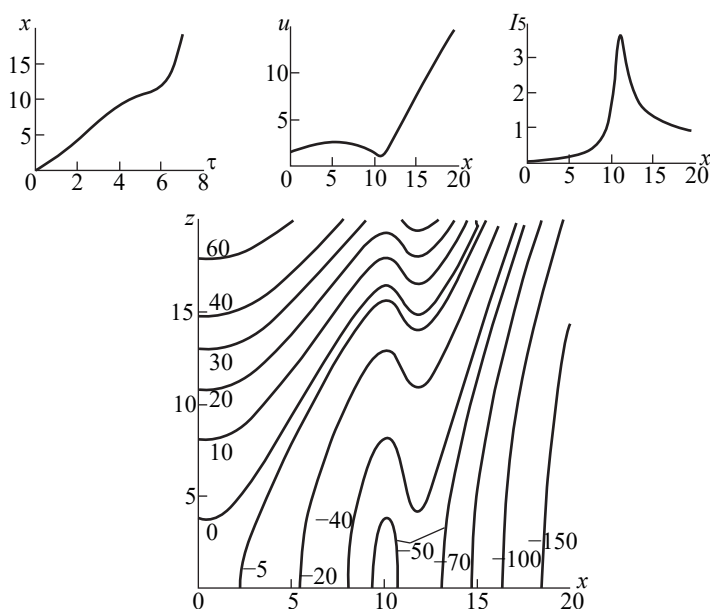


Рис. 7. Параметры потока для решения VII при $A = 2.3$, $B = 0$, $c = 1.3$, $J_0 = 0.1$ и эквипотенциали $\varphi = \text{const}$.

Решение системы (38) определено формулами

$$\begin{aligned} I_2 &= \dot{\xi} + (\alpha + 1)\xi, \quad \dot{\xi} \equiv d\xi/d\tau, \\ I_1 &= U_0 \exp(-\beta\tau), \end{aligned} \quad (39)$$

$$I_3 = W_0 \exp(-\gamma\tau), \quad I_5 = \frac{\rho_0}{\xi} \exp[(1-\alpha)\tau],$$

$$\ddot{\xi} + (2\alpha + 1)\dot{\xi} + \alpha(\alpha + 1)\xi = \frac{\rho_0}{1-\alpha} \exp[(1-\alpha)\tau] + E_0,$$

$$\begin{aligned} \xi &= A \exp(-\alpha\tau) + B \exp[-(1+\alpha)\tau] + \\ &+ \frac{\rho_0}{2(1-\alpha)} \exp[(1-\alpha)\tau] + \frac{E_0}{\alpha(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

$$I_4' = \frac{\rho_0}{1-\alpha} \exp[(1-\alpha)\tau] + E_0,$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{\rho_0}{1-\alpha} \left\{ \frac{-\frac{\alpha A}{1-2\alpha} \exp[(1-2\alpha)\tau] +}{+ \frac{(1+\alpha)B}{2\alpha} \exp(-2\alpha\tau) + \frac{\rho_0}{4(1-\alpha)}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp[2(1-\alpha)\tau] \right\} + \\ &+ E_0 \left\{ \frac{A \exp(-\alpha\tau) + B \exp[-(1+\alpha)\tau] +}{+ \frac{\rho_0}{2(1-\alpha)} \exp[(1-\alpha)\tau]} \right\}. \end{aligned}$$

Решение (38) имеет три частных случая, которые необходимо рассмотреть отдельно: $\alpha + 1 = 0$, $\alpha - 1 = 0$, $2\alpha + 1 = 0$. Формула для ρ в (39) справедлива при любых α , в то время как выражение для I_4' при $\alpha = 1$ изменяется:

$$I_4' = \rho_0 \tau. \quad (40)$$

Случай $\alpha + 1 = 0$. Уравнение для ξ , его решение и выражение для I_4 при $\alpha + 1 = 0$ принимают вид

$$\ddot{\xi} - \dot{\xi} = \frac{1}{2}\rho_0 \exp(2\tau), \quad (41)$$

$$\xi = A + B \exp(\tau) + \frac{1}{4}\rho_0 \exp(2\tau),$$

$$I_4 = \frac{\rho_0}{4} \left[-B \exp(3\tau) + -\rho \exp(4\tau) \right].$$

Случай $\alpha - 1 = 0$. В этом случае имеем

$$\ddot{\xi} + 3\dot{\xi} + 2\xi = \rho_0 \tau, \quad (42)$$

$$\xi = A \exp(-\tau) + B \exp(-2\tau) + \frac{1}{2}\rho_0 \tau - \frac{3}{4}\rho_0,$$

$$I_4 = \rho_0 \left[\frac{1}{4}\rho_0 \tau^2 + A \exp(-\tau)(\tau+1) + \frac{1}{2}B \exp(-2\tau)(2\tau+1) \right].$$

Случай $2\alpha + 1 = 0$. Третий специальный случай определен формулами

$$\ddot{\xi} - \frac{1}{4}\dot{\xi} = \frac{2}{3}\rho_0 \exp\left(\frac{3}{2}\tau\right), \quad (43)$$

$$\xi = A \exp\left(\frac{1}{2}\tau\right) + B \exp\left(-\frac{1}{2}\tau\right) + \frac{16}{45}\rho_0 \exp\left(\frac{3}{2}\tau\right),$$

$$I_4 = \rho_0 \left[\frac{2A \exp\left(\frac{1}{2}\tau\right) \left(\frac{1}{2}\tau - 1\right) +}{+ 2B \exp\left(-\frac{1}{2}\tau\right) \left(\frac{1}{2}\tau + 1\right) + \frac{32}{45}\rho_0 \exp\left(\frac{3}{2}\tau\right) \left(\frac{3}{2}\tau - 1\right)} \right].$$

Решение (39) описывает одномерное течение между плоскостями $y = 0$ и $y = 1$ со значениями

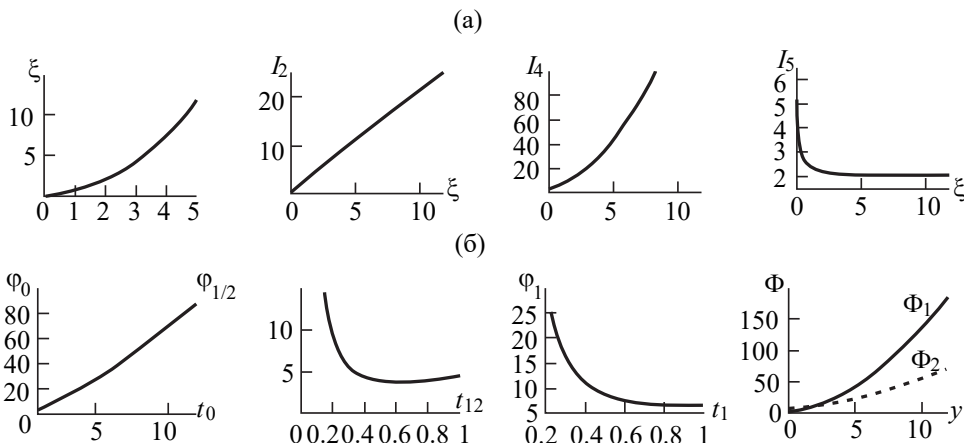


Рис. 8. Решение VIII при $A = 1$, $B = 0$, $\rho_0 = 2$, $\alpha = 2/3$: а) параметры потока, б) потенциал $\varphi(t, y)$, $y_* = 0, 0.5, 1$: φ_0 , $\varphi_{1/2}$, φ_1 ; $\varphi(t_*, y)$, $t_* = 1, 2$: Φ_1 , Φ_2 .

потенциала $\Phi_0 = t^{2\alpha} I_4(0)$, $\Phi_1 = t^{2\alpha} I_4(0)$. В плоскости $y = 0$ инжектируется ток $J_y = t^{\alpha-2} I_2(0) I_5(0)$. На рис. 8а,б представлены параметры потока как функции ξ , потенциал $\Phi_0, \Phi_{1/2}, \Phi_1$ в плоскостях $y = 0, 1/2, 1$ — как функция времени. Зависимость потенциала от координаты демонстрируют функции $\Phi_1 = I_4(y)$, $\Phi_2 = 2^{2\alpha} I_4(2^{-\alpha-1} y)$ при $t = 1, 2$. С течением времени диод освобождается от зарядов. В плоскостях $y = \text{const}$ возможна сносная скорость с одинаковым законом изменения по τ (экспоненты) и ξ .

Решение IX. Параметры потока и система уравнений для соответствующих функций описываются соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \exp(\alpha t) I_1(\xi), \quad v = \exp(\alpha t) I_2(\xi), \\ \xi &= x \exp(-\alpha t), \\ w &= az + \exp(\gamma t) I_3(\xi), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} a^2 z^2 + \exp(2\alpha t) I_4(\xi), \quad \rho = I_5(\xi);$$

$$(I_1 - \alpha \xi) I_1' + \alpha I_1 = I_4' + H_z I_2,$$

$$(I_1 - \alpha \xi) I_2' + \alpha I_2 = -H_z I_1,$$

$$(I_1 - \alpha \xi) I_3' + (a + \gamma) I_3 = 0,$$

$$(I_1 - \alpha \xi) I_5' + (I_1' + a) I_5 = 0,$$

$$I_4'' = I_5 - a^2.$$

Решение уравнений (44) имеет вид

$$I_1 = \dot{\xi} + \alpha \xi, \quad \dot{\xi} \equiv d\xi/d\tau, \quad \omega^2 = a^2 + H_z^2, \quad (45)$$

$$I_2 = -H_z \xi + V_0 \exp(-\alpha \tau),$$

$$I_3 = W_0 \exp[-(a + \gamma)\tau],$$

$$I_5 = \frac{\rho_0}{\dot{\xi}} \exp[-(\alpha + a)\tau],$$

$$\ddot{\xi} + 2\alpha \dot{\xi} + (\alpha^2 + \omega^2) \xi =$$

$$= -\frac{\rho_0}{\alpha + a} \exp[-(\alpha + a)\tau] + H_z V_0 \exp(-\alpha \tau) + E_0,$$

$$\xi = A[\exp(-\alpha \tau) \cos \omega \tau - 1] + B \exp(-\alpha \tau) \sin \omega \tau -$$

$$-\bar{\rho}_0 \{ \exp[-(\alpha + a)\tau] - 1 \} + \bar{V}_0 [\exp(-\alpha \tau) - 1];$$

$$\bar{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{(\alpha + a)(a^2 + \omega^2)}, \quad \bar{V}_0 = \frac{H_z V_0}{\omega^2},$$

$$\frac{E_0}{\alpha^2 + \omega^2} = \bar{\rho}_0 - A - \bar{V}_0;$$

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{\rho_0}{\alpha + a} \left\{ \exp[-(2\alpha + a)\tau] [(\Omega_1 A - \Omega_2 B) \times \right. \\ &\quad \times \cos \omega \tau + (\Omega_2 A + \Omega_1 B) \sin \omega \tau + \frac{\alpha}{2\alpha + a} \bar{V}_0] \\ &\quad \left. - \frac{\bar{\rho}_0}{2} \exp[-2(\alpha + a)\tau] \right\}; \end{aligned}$$

$$\Omega_1 = \frac{\omega^2 + \alpha(2\alpha + a)}{\omega^2 + (2\alpha + a)^2}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega(\alpha + a)}{\omega^2 + (2\alpha + a)^2}.$$

Решение (44) имеет два специальных случая: $2\alpha + a = 0$ и $\alpha + a = 0$.

Случай $2\alpha + a = 0$. Выражение для I_4 принимает вид

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{\rho_0}{\alpha + a} \left\{ \frac{\omega A + \alpha B}{\omega} \cos \omega \tau - \frac{\alpha A - \omega B}{\omega} \sin \omega \tau - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \bar{V}_0 \tau - \frac{1}{2} \bar{\rho}_0 \exp[-2(\alpha + a)\tau] \right\} - \frac{1}{2} a^2 \xi^2 + E_0 \xi. \end{aligned} \quad (46)$$

Случай $\alpha + a = 0$. Отличные от формул (45) функции описываются выражениями

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\alpha \dot{\xi} + (\alpha^2 + \omega^2) \xi &= \rho_0 \tau + \\ &+ V_0 H_z \exp(-\alpha \tau) + E_0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\xi = A[\exp(-\alpha \tau) \cos \omega \tau - 1] + B \exp(-\alpha \tau) \sin \omega \tau +$$

$$+ \frac{\rho_0}{\alpha^2 + \omega^2} \tau + \bar{V}_0 [\exp(-\alpha \tau) - 1], \quad I_5 = \frac{\rho_0}{\dot{\xi}};$$

$$E_0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 - (\alpha^2 + \omega^2)(A + \bar{V}_0);$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \rho_0 \left\{ \tau \exp(-\alpha \tau) (A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau) + \right. \\ &+ \frac{\exp(-\alpha \tau)}{\alpha^2} \left[(\alpha A + \omega B) \cos \omega \tau - (\omega A - \alpha B) \sin \omega \tau \right] \left. \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\alpha^2 + \omega^2} \tau^2 + \bar{V}_0 \exp(-\alpha \tau) (\alpha \tau + 1) - \frac{1}{2} \alpha^2 \xi^2 + E_0 \xi. \end{aligned}$$

Решение (45) соответствует инжекции зарядов с плоскости $x = 0$ со скоростью $u = \exp(\alpha t) I_1(0)$ в двумерное поле с потенциалом $\Phi(t, x, z)$. Криволинейное движение в плоскости (x, z) определяет вторая компонента скорости $w(t, x, z)$. Развертка в y -направлении осуществляется за счет $v(t, x)$. На рис. 9а приведен пример расчета характеристик потока в случае $\alpha + a = 0, \alpha > 0$.

Функции от ξ представляют собой начальные распределения параметров по длине при $t = 0$, $\xi = x$. Для получения временных зависимостей выбрано сечение $x = x_*$, координата ξ для которого связана с t соотношением

$$t = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{\xi}{x_*}. \quad (48)$$

Эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$ в плоскости (x, z) при $t = 0$ и $t = 5$ построены на рис. 9б. Эффект, связанный с изменением знака α , демонстрирует рис. 10. Три варианта потоков, соответствующих общему случаю (45) и специальному случаю $2\alpha + a = 0$, приведены на рис. 11а–11в. При $\alpha > 0$ скорость и потенциал экспоненциально растут с выходом плотности на постоянное значение. Для $\alpha < 0$ пространство с течением времени освобождается от зарядов.

Сингулярная стартовая поверхность и поверхности отражения. Обеспечивая равенства $\dot{\xi}(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = \xi(0) = 0$, приходим к асимптотикам $x \sim \tau^2$, $x \sim \tau^3$, соответствующим эмиссии в T - и ρ -режимах. Эти условия могут быть выполнены за счет произвольных постоянных A, B . В рассмотренных примерах константы подбирались так, чтобы исключить образование виртуальных катодов. Существование такой дополнительной особой поверхности может быть полезно при тестировании, так как дает возможность выяснить, насколько близко к ней работают регулярные алгоритмы, учитывая, что поверхности отражения представляют собой реальный физический феномен.

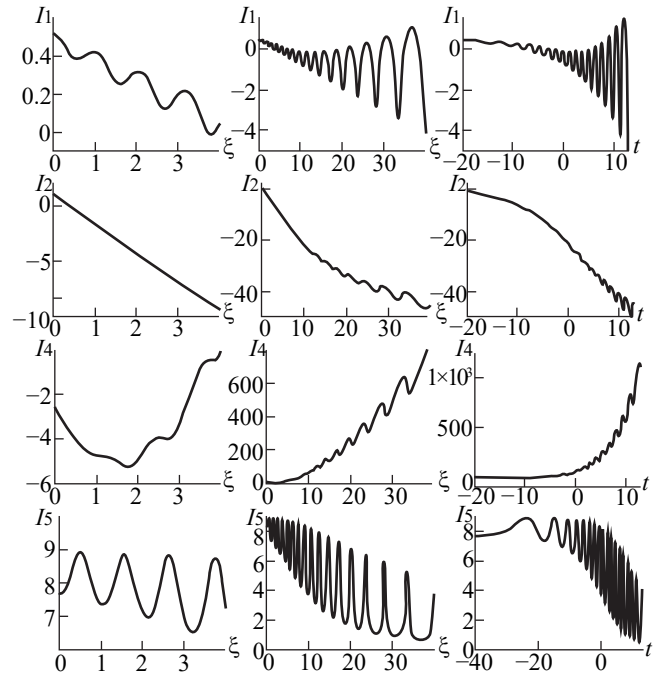


Рис. 10. Параметры потока для решения IX, $\alpha + a = 0$, при $A = 0$, $B = 0.012$, $\alpha = -0.125$, $H_z = 3$, $V_0 = 1$, $\rho_0 = 4$.

Виртуальный катод реализуется в потоке, если уравнение $\dot{\xi}(\tau) = 0$ имеет корень, отличный от $\tau = 0$. Свободные константы решения могут обеспечить эту ситуацию.

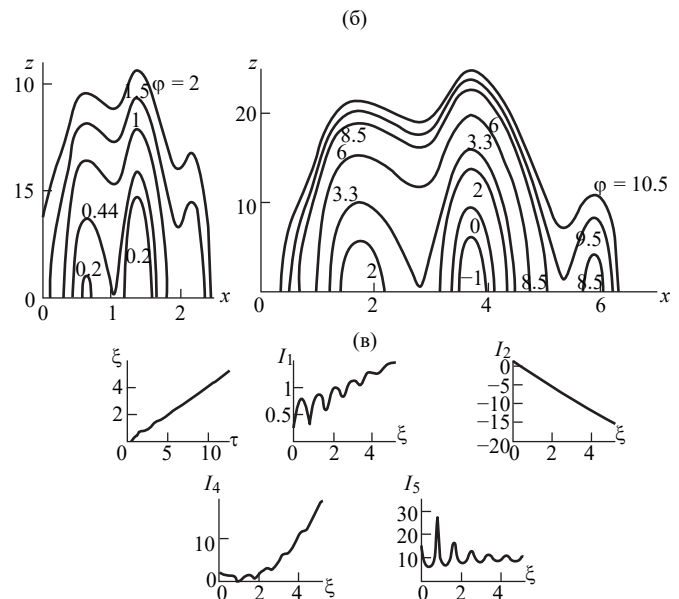
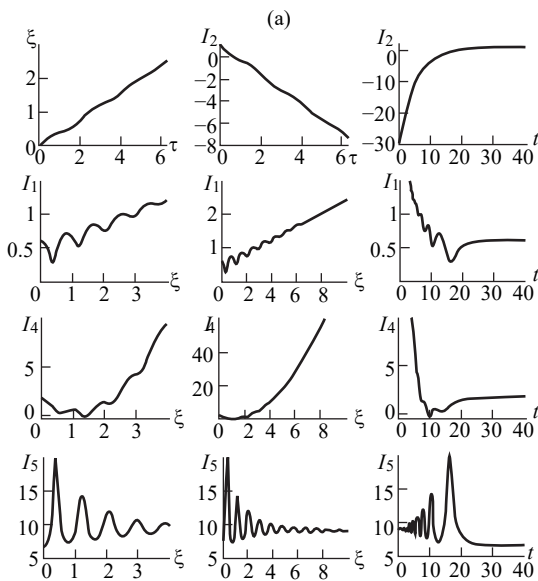


Рис. 9. Решение IX, $\alpha + a = 0$ при $A = 0$, $B = 0.075$, $\alpha = 0.2$, $H_z = 3$, $V_0 = 1$, $\rho_0 = 4$, $x_* = 10$: а) параметры потока, б) эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ при $t = 0$ (слева), $t = 5$ (справа), в) эмиссия в T -режиме при $A = 0$, $B = -0.124$.

На рис. 9в приведены параметры электронного потока при выполнении условий T -режима для эмиссии в x -направлении. Видно, что наличие сингулярной стартовой поверхности не сказалось кардинальным образом на осцилляционных характеристиках пучка.

Решение X. Решение определяет стационарный электронный поток более общего вида, чем (17), описываемый формулами

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = az + W(x), \quad (49)$$

$$\Phi = \frac{1}{2}a^2z^2 + \Phi(x), \quad \rho = \rho(x);$$

$$uu' = \Phi' + vH_z, \quad v' = -H_z, \quad (\rho u)' + a\rho = 0,$$

$$\Phi'' = \rho - a^2, \quad uW' + aW = 0;$$

$$u = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}, \quad v = V_0 - H_z x, \quad \rho = \frac{J_0}{u} \exp(-at),$$

$$\Phi = -\frac{1}{2}a^2x^2 + E_0x - \frac{J_0}{a} \int \dot{x} \exp(-at) dt,$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{J_0}{a} \exp(-at) + V_0 H_z + E_0, \quad \omega^2 = a^2 + H_z^2,$$

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \bar{J}_0 \exp(-at) + E_0;$$

$$\bar{J}_0 = \frac{J_0}{a(a^2 + \omega^2)}, \quad \bar{E}_0 = \frac{E_0 + V_0 H_z}{\omega^2}.$$

Чтобы избежать образования виртуального катода, параметр a должен быть отрицательным и небольшим по модулю для компенсации подавляющего действия экспоненты в выражении для x . Конкретизируем общее решение (49) на случай двух режимов: ρ -режим эмиссии с плоскости $x = 0$;

инжекция с ненулевой скоростью с той же поверхности.

Эмиссия в ρ -режиме. Формулы, определяющие этот случай, соответствуют асимптотике $x \sim t^3$:

$$x = \bar{J}_0 \left[\cos \omega t - \exp(\alpha t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right] - \quad (50)$$

$$- \frac{J_0}{\alpha \omega^2} (1 - \cos \omega t),$$

$$u = \frac{J_0}{\alpha^2 + \omega^2} \left[\exp(\alpha t) - \cos \omega t - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right],$$

$$W = w_0 \exp(\alpha t),$$

$$\Phi = -\frac{1}{2}\alpha^2 x^2 - \frac{J_0}{\alpha} x -$$

$$-J_0 \bar{J}_0 \left[\frac{1}{2\alpha} \exp(2\alpha t) - \frac{1}{\omega} \exp(\alpha t) \sin \omega t \right];$$

$$y - y_0 = \frac{H_z \bar{J}_0}{\alpha} \times$$

$$\times \left[\frac{\alpha^2}{\omega^2} \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) + \exp(\alpha t) \right] + \frac{H_z J_0}{\alpha \omega^2} t,$$

$$z = z_0 \exp(-\alpha t) + \frac{w_0}{\alpha} sh(\alpha t); \quad \alpha \equiv |a|.$$

Плоскость $x = 0$ является особой поверхностью, причем плотность тока на ней по y -, z -направлениям бесконечна, однако ток в полосе любой толщины — конечная величина. Старт частиц происходит по касательной. На рис. 12 представлены функции, определяющие решение, траектории в проекции на плоскости (x, y) , (x, z) и эквипотенциали.

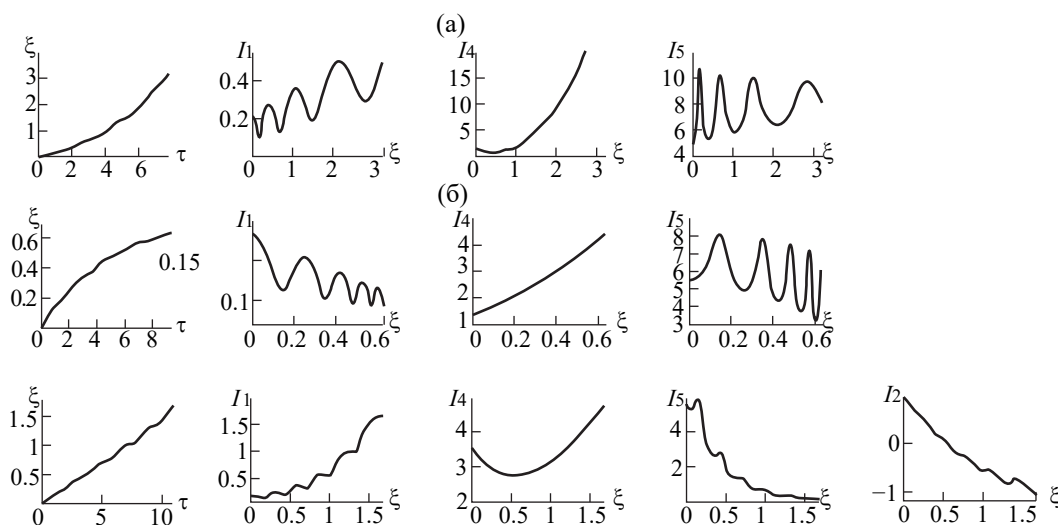


Рис. 11. Решение IX, общий случай, параметры потока: а) $A = 0$, $B = 0.02$, $a = -0.125$, $\alpha = -0.125$, $H_z = 3$, $V_0 = 1$, $\rho_0 = 1$; б) $A = 0$, $B = 0.01$, $a = 0.125$, $\alpha = 0.125$, $H_z = 3$, $V_0 = -1$, $\rho_0 = 1$; в) $A = 0$, $B = 0.01$, $a = 0.25$, $\alpha = -0.125$, $H_z = 3$, $V_0 = 1$, $\rho_0 = 1$.

Инжекция с ненулевой скоростью. Параметры потока описываются соотношениями

$$x = A(\cos \omega t - 1) - \bar{J}_0 [\exp(\alpha t) - 1], \quad (51)$$

$$u = -A\omega \sin \omega t + \frac{J_0}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(\alpha t),$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha^2 (z^2 - x^2) + E_0 x + \frac{J_0}{\alpha} \left[-A \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t) - \frac{1}{2} \bar{J}_0 \exp(2\alpha t) \right],$$

$$y - y_0 = -\frac{H_z}{\omega} A \sin \omega t - \frac{H_z J_0}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(\alpha t) + \left[(-A + \bar{J}_0) H_z + V_0 \right] t;$$

$$E_0 = (-A + \bar{J}_0) \omega^2 - V_0 H_z.$$

Частицы покидают стартовую плоскость $x = 0$ с наклоном

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\alpha^2 + \omega^2}{J_0} (w_0 - \alpha z). \quad (52)$$

Функции, определяющие решение, и геометрия потока приведены на рис. 13.

Решение XI. Параметры электронного потока и система обыкновенных уравнений для них определены соотношениями

$$u = x^{1-\gamma} I_1(\xi), \quad v = x^\alpha I_2(\xi), \quad w = \frac{c}{t} z + x^\beta I_3(\xi), \quad (53)$$

$$\varphi = \frac{c(c-1)}{2t^2} z^2 + x^{2(1-\gamma)} I_4(\xi),$$

$$\rho = x^{-2\gamma} I_5(\xi), \quad \xi = \frac{x^\gamma}{t};$$

$$\xi(\gamma I_1 - \xi) I_1' = \gamma \xi I_4' + (1-\gamma)(2I_4 - I_1^2),$$

$$\xi(\gamma I_1 - \xi) I_2' + \alpha I_1 I_2 = 0,$$

$$\xi(\gamma I_1 - \xi) I_3' + (\beta I_1 + c\xi) I_3 = 0,$$

$$\xi(\gamma I_1 - \xi) I_5' + [\xi(\gamma I_1' + c) + (1-3\gamma) I_1] I_5 = 0,$$

$$\gamma^2 \xi^2 I_4'' + 3\gamma(1-\gamma) \xi I_4' + 2(1-\gamma)(1-2\gamma) I_4 + c(c-1) \xi^2 = I_5.$$

В отличие от ранее рассмотренных решений, выражавшихся через элементарные функции или допускавших качественное толкование (решения II, VI), электронный поток вида (53) без ограничения общности может быть исследован только численно. Вместе с тем структура его параметров при $\gamma = 1/3$ позволяет проанализировать вариант эмиссии в ρ -режиме с сингулярной плоскости $x = 0$.

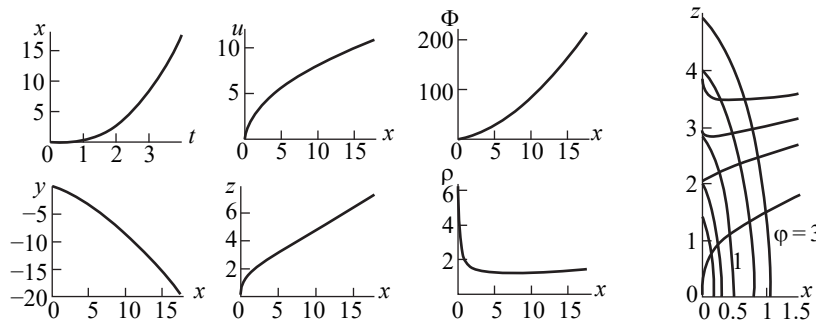


Рис. 12. Решение X, эмиссия в ρ -режиме при $J_0 = 2$, $H_z = 1$, $a = -0.5$, $w_0 = 1$; параметры потока, эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ и траектории в плоскости (x, z) .

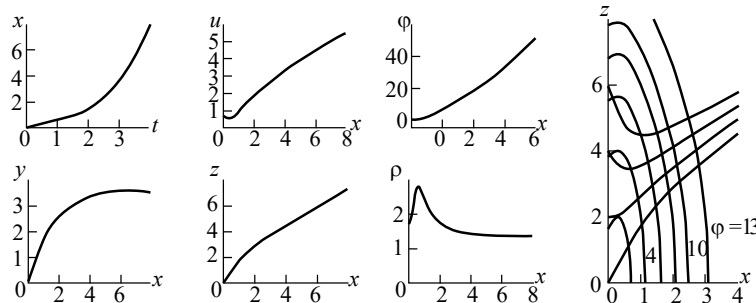


Рис. 13. Решение X, режим инжекции при $A = 0.5$, $B = 0$, $J_0 = 1$, $H_z = 1$; параметры потока, траектории в плоскости (x, y) , эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ и траектории в плоскости (x, z) .

Систему (53) в общем случае удается представить в виде одного нелинейного (в отличие от решений VII–IX) уравнения третьего порядка относительно ξ , изменив статус этой величины (искомая функция вместо независимой переменной), и отдельного уравнения первого порядка для I_4 :

$$\xi^\mu \ddot{\xi} + \xi^\mu \left(1 + \frac{5\mu}{2} \frac{\dot{\xi}}{\xi} \right) \ddot{\xi} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \xi^{\mu-1} \dot{\xi}^3 + (54)$$

$$+ \frac{\mu}{2} (\mu + 1) \xi^{\mu-1} \dot{\xi}^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\mu}{2} + 1 \right) \xi^\mu \dot{\xi} + c(c-1) \xi^\mu \dot{\xi} =$$

$$= \rho_0 \xi^{\mu/2} \exp \left[- \left(c - 1 + \frac{\mu}{2} \right) \tau \right], \quad \gamma = \frac{2}{2+\mu};$$

$$I_1 = \frac{1}{\gamma} (\dot{\xi} + \xi), \quad I_2 = V_0 \xi^{-\alpha/\gamma} \exp \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \tau \right),$$

$$I_3 = W_0 \xi^{-\beta/\gamma} \exp \left[- \left(c + \frac{\beta}{\gamma} \right) \tau \right],$$

$$I_5 = \frac{\rho_0}{\xi} \xi^{3-1/\gamma} \exp \left[- \left(c - 1 + \frac{\mu}{2} \right) \tau \right].$$

Эмиссия в р-режиме. Система (54) в этом случае принимает вид

$$\ddot{\xi} + \left(1 + 10 \frac{\dot{\xi}}{\xi} \right) \ddot{\xi} + 2 \frac{\dot{\xi}^3}{\xi^2} + 10 \frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + [6 + c(c-1)] \dot{\xi} = (55)$$

$$= \frac{\rho_0}{\xi^2} \exp [-(c+1)\tau];$$

$$I_1 = 3(\dot{\xi} + \xi), \quad I_2 = V_0 \xi^{-3\alpha} \exp(-3\alpha\tau),$$

$$I_3 = W_0 \xi^{-3\beta} \exp [-(c+3\beta)\tau],$$

$$I_5 = \frac{\rho_0}{\xi} \exp [-(c+1)\tau];$$

$$\xi \dot{I}_4 + 4 \dot{\xi} I_4 = 9(\xi \dot{\xi} \ddot{\xi} + 2 \dot{\xi}^3 + 5 \xi \dot{\xi}^2 + 2 \xi^2 \dot{\xi}).$$

Для интегрирования уравнений из (55) необходимо построить асимптотики функций ξ , I_4 вблизи $\xi = \tau = 0$. Для первой из них имеем

$$\xi = \xi_1 \tau + \xi_2 \tau^2 + \dots + \xi_6 \tau^6, \quad (56)$$

$$\xi_1^3 = \frac{\rho_0}{2}, \quad \xi_1 \xi_2 = -\frac{\rho_0(6-c)}{8(1+3\xi_1)},$$

$$\xi_1^2 \xi_3 = -\frac{\rho_0(5-3c)}{168} - \xi_1 \xi_2^2 - \frac{13}{21} \xi_1^2 \xi_2,$$

$$\xi_1^2 \xi_4 = -\frac{\rho_0(5-3c)^3}{1008} - \frac{1}{41} [6 + c(c-1)] \xi_1^2 \xi_2 -$$

$$-\frac{19}{42} \xi_1^2 \xi_3 - \frac{38}{21} \xi_1 \xi_2 \xi_3 - \frac{2}{7} \xi_2^3 - \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2^2,$$

$$\xi_1^2 \xi_5 = \frac{\rho_0(1+c)^4}{6960} - \frac{1}{58} [6 + c(c-1)] (\xi_1^2 \xi_3 + \xi_1 \xi_2^2) -$$

$$-\frac{302}{145} \xi_1 \xi_2 \xi_4 -$$

$$-\frac{51}{145} \xi_1^2 \xi_4 - \frac{93}{145} \xi_1 \xi_3^2 - \frac{149}{145} \xi_2^2 \xi_3 - \frac{24}{29} \xi_1 \xi_2 \xi_3 - \frac{21}{145} \xi_2^3,$$

$$\xi_1^2 \xi_6 = -\frac{\rho_0(1+c)^5}{54720} - \frac{1}{228} [6 + c(c-1)] \times$$

$$\times (3 \xi_1^2 \xi_4 + 2 \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_2^3) - \frac{40}{19} \xi_1 \xi_2 \xi_5 - \frac{65}{228} \xi_1^2 \xi_5 -$$

$$-\frac{30}{19} \xi_1 \xi_3 \xi_4 - \frac{56}{27} \xi_2^2 \xi_4 - \frac{7}{57} \xi_1 \xi_2 \xi_4 -$$

$$-\frac{20}{19} \xi_2 \xi_3^2 - \frac{27}{76} \xi_3^2 - \frac{85}{228} \xi_2^2 \xi_3.$$

Асимптотика функции I_4 определена формулами

$$I_4 = \varphi_0 + \varphi_1 \tau + \dots + \varphi_4 \tau^4, \quad (57)$$

$$\varphi_0 = \frac{9}{2} \xi_1^2, \quad \varphi_1 = 18 \xi_1 \xi_2 + 9 \xi_1^2,$$

$$\xi_1 \varphi_2 = 18 \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_3 + (21 \xi_1 + 12) \xi_2^2 +$$

$$+\frac{75}{2} \xi_1^2 \xi_2 + 3 \xi_1^3 - 2 \xi_3 \varphi_0 - \frac{3}{2} \xi_2 \varphi_1,$$

$$\xi_1 \varphi_3 = \frac{9}{7} [12(2 \xi_1 + 1) \xi_1 \xi_4 + 94 \xi_1 \xi_2 \xi_3 +$$

$$+ 35 \xi_1^2 \xi_3 + 16 \xi_2^3 + 40 \xi_1 \xi_2^2 + 8 \xi_1^2 \xi_2] -$$

$$-\frac{1}{7} (16 \xi_4 \varphi_0 + 13 \xi_3 \varphi_1 + 10 \xi_2 \varphi_2),$$

$$\xi_1 \varphi_4 = \frac{9}{8} [50 \xi_1^2 \xi_5 + 142 \xi_1 \xi_2 \xi_4 + 45 \xi_1^2 \xi_4 + 66 \xi_1 \xi_3^2 +$$

$$+ 94 \xi_2^2 \xi_3 + 110 \xi_1 \xi_2 \xi_3 + 10 \xi_1^2 \xi_3 + 20 \xi_2^3 + 18 \xi_1 \xi_2^2] -$$

$$-\frac{1}{8} (20 \xi_5 \varphi_0 + 17 \xi_4 \varphi_1 + 13 \xi_3 \varphi_2 + 11 \xi_2 \varphi_3).$$

Параметры потока, стартующего с сингулярной плоскости $x = 0$ в двумерное поле $\varphi(t, x, z)$, приведены на рис. 14. В силу смысла переменной ξ при $t = 0$, $\xi = \infty$ пространство освобождается от зарядов, а с ростом t (уменьшение ξ и τ при $x = \text{const}$) функция I_1 , колеблясь, убывает, а плотность растет. При $t \rightarrow \infty$ ($\xi, \tau \rightarrow 0$) на плоскости $x = 0$ устанавливается р-режим с нулевыми компонентами касательной скорости для $\alpha, \beta < 0$.

Частное решение. Система (53) имеет частное решение в элементарных функциях для $\gamma = 1$:

$$u = I_1(\xi), \quad v = x^\alpha I_2(\xi), \quad w = \frac{c}{t} z + x^\beta I_3(\xi), \quad (58)$$

$$\varphi = \frac{c(c-1)}{2t^2} z^2 + I_4(\xi), \quad \rho = \frac{1}{x^2} I_5(\xi), \quad \xi = x/t;$$

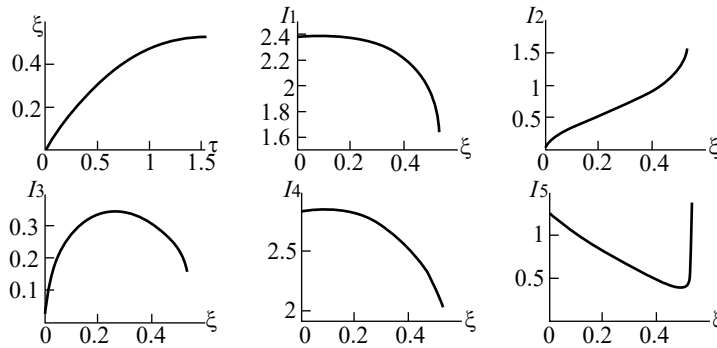


Рис. 14. Решение XI, параметры потока при эмиссии в ρ -режиме: $\gamma = 1/3$, $c = 1.5$.

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + \ddot{\xi} + c(c-1)\dot{\xi} &= \rho_0 \exp[-(c-1)\tau], \\ I_1 &= \dot{\xi} + \xi, \quad I_2 = V_0 \xi^{-\alpha} \exp(-\alpha\tau), \\ I_3 &= W_0 \xi^{-\beta} \exp[-(\beta+c)\tau], \\ I_4 &= \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + \int \dot{\xi}^2 d\tau, \quad I_5 = \frac{\rho_0 \xi^2}{\xi} \exp[-(c-1)\tau]; \\ \xi &= A \exp\left(-\frac{c^2 - 3c + 1}{c-1} \tau\right) + B \exp(-c\tau) + \\ &+ \left[C + \frac{\rho_0}{c(c-1)^2} \tau\right] \exp[-(c-1)\tau].\end{aligned}$$

Особый случай $c = 1$ определен формулами

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2} \rho_0 \tau^2 + A\tau + B \exp(-\tau) + C, \\ I_4 &= \frac{1}{3} \rho_0 \tau^3 + \rho_0 \left(A + \frac{1}{2} \rho_0\right) \tau^2 + A(A + \rho_0) \tau + \\ &+ B[\rho_0 \tau + A + 2\rho_0] \exp(-\tau).\end{aligned}\quad (59)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точные решения уравнений нестационарного нерелятивистского пучка с пространственными траекториями, зависящие от двух декартовых координат, анализ которых проведен выше, описывают инжекцию с плоскости в неоднородное одномерное или двумерное самосогласованное электрическое поле при возможном наличии z -компоненты однородного магнитного поля. При выборе свободных параметров и функций решения предпочтение отдавалось вариантам с резко немонотонным или осциллирующим режимом пучка без ограничения по длине, наступающего при образовании виртуального катода. Стартовая плоскость могла быть сингулярной поверхностью с особенностью, свойственной эмиссии в ρ - или T -режиме по нормали к ней, но при отличных от нуля касательных компонентах скорости. Реальные термоэмиссионные катоды

не соответствуют последнему условию, что не мешает постановке численных экспериментов с учетом особенности.

Хотя короткие пучки с поверхностью отражения не являлись предметом рассмотрения, однако условия возникновения виртуального катода были сформулированы, поскольку сингулярная поверхность такого рода при тестировании позволяет оценить эффективность регулярных алгоритмов при приближении к ней.

При рассмотрении конкретной физической задачи уровень энергии электронного пучка и характерный линейный размер бывают известны. Эти величины дают возможность оценить представляющее интерес время нестационарного процесса. Приведенные выше результаты изложены в безразмерной манере, а упомянутая физическая информация позволяет вернуться к размерным величинам. Напряженность магнитного поля при этом измеряется в единицах $V/(\eta\mu_0 L)$, где V , L — масштабы скорости и длины; η , μ_0 — удельный заряд электрона и магнитная проницаемость вакуума.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Child C.D. // Phys. Rev. 1911. V. 32. № 5. P. 492.
2. Langmuir I. // Phys. Rev. 1913. V. 2. № 5. P. 450.
3. Langmuir I., Blodgett K.B. // Phys. Rev. 1923. V. 22. № 4. P. 347.
4. Langmuir I., Blodgett K.B. // Phys. Rev. 1924. V. 24. № 1. P. 49.
5. Браудэ С.Я. // ЖЭТФ. 1935. Т. 5. № 7. С. 621.
6. Браудэ С.Я. // ЖТФ. 1940. Т. 10. № 3. С. 217.
7. Браудэ С.Я. // ЖТФ. 1945. Т. 15. № 3. С. 107.
8. Гринберг Г.А., Волькенштейн В.С. // ЖТФ. 1938. Т. 8. № 11. С. 19.
9. Brillouin L. // Phys. Rev. 1945. V. 67. № 7, 8. P. 260.
10. Kirstein P.T. // J. Electr. Contr. 1959. V. 7. № 5. P. 417.
11. Dryden V.W. // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 10. P. 3118.
12. Мануилов В.Н., Цимринг Ш.Е. // РЭ. 1978. Т. 23. № 7. С. 1486.
13. Мануилов В.Н. // РЭ. 1981. Т. 26. № 11. С. 2425.

14. Солуянова Е.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 36. № 6. С. 596.
15. Данилов В.Н. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 1. С. 3.
16. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1963. № 3. С. 26.
17. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 6. С. 3.
18. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984.
19. Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. // Изв. вузов. Физика. 1979. № 10. С. 7.
20. Рудаков Л.И., Бабыкин М.В., Гордеев А.В. и др. Генерация и фокусировка сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Энергоатомиздат, 1990.
21. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
22. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2024. Т. 69. № 3. С. 260.
23. Сыровой В.А., Свешников В.М., Козырев А.Н. Аналитическое и численное моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2023.
24. Мануилов В.Н., Райский Б.В., Цимринг Ш.Е., Солуянова Е.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35. № 9/10. С. 846.
25. Свешников В.М. // Прикл. физика. 2004. № 1. С. 55.
26. Свешников В.М. // Прикл. физика. 2006. № 3. С. 49.
27. Свешников В.М. // Вычислит. технологии. 2006. Т. 11. № 5. С. 77.
28. Козырев А. Н., Свешников В. М. // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Вычисл. математика и информатика. 2017. Т. 6. № 2. С. 5.
29. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
30. Сыровой В.А. // РЭ. 2003. Т. 48. № 4. С. 467.
31. Сыровой В.А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
32. Syrovoy V.A. Theory of Intense Beams of Charged Particles. US: Elsevier, 2011.
33. Бегучев О.П. // ЖТФ. 1956. Т. 26. № 7. С. 1483.
34. Вашковский А.В., Сыровой В.А. // РЭ. 1991. Т. 36. № 2. С. 392.
35. Pease M.C. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. № 1. P. 70.
36. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1964. № 1. С. 3.
37. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 3. С. 56.
38. Сыровой В.А. // РЭ. 2008. Т. 53. № 6. С. 752.
39. Сыровой В.А. // РЭ. 2019. Т. 64. № 6. С. 593.
40. Meltzer B. // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62. № 355B. P. 431.

EXACT SOLUTIONS TO THE EQUATIONS OF 2-D NON-STATIONARY ELECTRON FLOW

T. M. Sapronova, V. A. Syrovoy*

*All-Russian Electrotechnical Institute — branch of the Russian Federal Nuclear Center All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics named after academician E.I. Zababakhin,
Krasnokazarmennaya Str., 12, Moscow, 111250 Russian Federation*

*E-mail: red@cplire.ru

Received April 18, 2023, revised November 18, 2023, accepted January 11, 2024

Analysis and interpretation of exact solutions for oscillatory modes of 2-D dense electron beam with 3-D trajectories are carried out in the paper.

Keywords: exact solutions, non-stationary flow, 2-D beam equations, 3-D trajectory