

Том 69, Номер 3

ISSN 0033-8494
Март 2024



РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА



НАУКА
— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 69, номер 3, 2024

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

- Трансформация электромагнитных полей в сверхширокополосных антенных решетках
С. Е. Банков, М. Д. Дупленкова 207
- Бифокальная система двух отражательных решеток
В. А. Калошин, Чинь Ван Туан 217
- Плазменная антенна с частотной перестройкой
И. М. Минаев, О. В. Тихоневич, Ю. Е. Векшин 227
-

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

- Синтез четырехточечной модели самолета
М. А. Степанов, А. В. Киселев, В. В. Артюшенко 233
-

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

- Повышение быстродействия цифровых устройств при использовании методики asmd-fsmd с помощью операторов неблокирующего назначения
В. В. Соловьев, А. С. Климович 243
-

НАНОЭЛЕКТРОНИКА

- Моделирование изолирующего потенциала в сверхтонкой (42 Å) пленке окисла кремния
Е. И. Гольдман, Г. В. Чучева, И. А. Шушарин 253
-

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

- Исследование точности геометризованных моделей плоских электронных пучков
Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой 260
-

НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

- Анализ пассивного смесителя частот с управлением по току при использовании защитных интервалов сигналов гетеродина
Т. Д. Чан, А. С. Коротков 288
- Исследование оптоволоконной линии с положительным коэффициентом передачи аналогового сверхвысокочастотного сигнала
И. Ю. Таценко, А. Б. Устинов 299
-

ТРАНСФОРМАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
В СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ

© 2024 г. С. Е. Банков, М. Д. Дупленкова*

Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: duplenkova@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.11.2022 г.

После доработки 26.06.2023 г.

Принята к публикации 27.07.2023 г.

Рассмотрены бесконечные сверхширокополосные решетки *ТЕМ*-рупоров и антенн Вивальди. На первом этапе была использована модель решетки в режиме квазипериодического возбуждения в виде канала Флоке, которая реализована в системе электродинамического моделирования HFSS. На втором этапе по рассчитанной матрице рассеяния канала Флоке определены параметры решетки в режиме кластерного возбуждения, в том числе распределение части полного поля — поля излучения в апертуре решетки. Проанализированы два кластера: конечные по одной координате и бесконечные по другой. Исследовано влияние на форму амплитудного распределения поля излучения в апертуре таких факторов, как размер кластера, частота, амплитудное распределение возбуждающих волн, сканирование в секторе углов. Показано, что распределение поля в излучающей апертуре может существенно отличаться от распределения возбуждающих волн на входах излучателей решетки. Предложено объяснение данного эффекта, основанное на представлении поля в решетке в виде суперпозиции ее собственных волн.

Ключевые слова: СШП решетка, *ТЕМ*-рупор, фазированная антенная решетка, канал Флоке, кластерное возбуждение

DOI: 10.31857/S0033849424030011, **EDN:** JVRVFC

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий отмечается повышенный интерес к построению сверхширокополосных (СШП) антенн и, в частности, антенных решеток. Их применение все больше входит в повседневную жизнь. Это связано с внедрением СШП-радаров в медицинских целях [1, 2], для дистанционного зондирования снежных и ледяных покровов [3–5], для подповерхностной радиолокации [6, 7].

Большинство известных работ (см., например, [8–12]) посвящено численному и экспериментальному исследованию конструкций СШП-решеток, а исследованиям электродинамических явлений в таких структурах посвящено значительно меньшее количество работ. В то же время отметим, что в указанных структурах наблюдаются такие явления, как ослепление и деполяризация [13], которые могут существенно сказаться на характеристиках устройств.

Традиционные технические решения в области СШП-решеток основаны на применении антенн Вивальди и *ТЕМ*-рупоров. *ТЕМ*-рупоры являются одними из наиболее широко используемых СШП-антенн. Это объясняется, с одной стороны, простотой конструкции, а с другой — возможностью согласования с питающей линией в очень широкой полосе частот.

Для преодоления проблемы высокого заднего излучения в работах [14, 15] были предложены двумерные решетки *ТЕМ*-рупоров с металлизацией междупорного пространства. Решетки антенн Вивальди также являются типовым техническим решением при создании СШП-антенн с высокой направленностью. Интерес к ним обусловлен простотой конструкции антенн Вивальди, которая допускает применение для ее изготовления технологии печатных плат.

Электродинамическое моделирование антенных решеток с большими электрическими размерами представляет весьма сложную задачу, решение которой связано с существенными затратами компьютерных ресурсов. В связи с этим для их анализа часто используют приближение бесконечной решетки [16]. Граничная задача для такой структуры сводится к анализу одного ее периода, получившего название канала Флоке [17].

Канал Флоке СШП-решетки имеет характерную особенность, которая состоит в том, что его параметры медленно меняются в продольном направлении. Поэтому его можно рассматривать как волноводный переход, преобразующий электромагнитное поле от точки его возбуждения до свободного пространства. Для анализа таких переходов можно использовать известный метод поперечных сечений

[18], основанный на представлении поля в виде разложения по собственным волнам волновода сравнения. В случае бесконечной решетки роль волновода сравнения играет канал Флоке с постоянными параметрами, т.е. волновод Флоке.

Собственные волны канала Флоке бесконечной решетки антенн Вивальди без диэлектрического заполнения исследованы в работе [19], а волны решетки *TEM*-рупоров изучены в работе [14]. Результаты исследования собственных волн далее использовались для построения моделей решеток антенн Вивальди без диэлектрического заполнения [20] и решеток *TEM*-рупоров [15]. Задача анализа бесконечной решетки сводилась к анализу волновода Флоке с *TEM*-волной с переменными вдоль его оси параметрами.

В работе [13] были исследованы эффекты ослепления и деполяризации с использованием модели в виде канала Флоке. При этом СШП-решетка функционировала в квазипериодическом режиме, когда одновременно возбуждаются все ее элементы. В таком режиме отсутствует возможность исследования ряда важных эффектов. К их числу относится трансформация поля от точки питания до свободного пространства. При этом наибольший интерес представляет распределение поля в выходной плоскости решетки, выполняющей функцию излучающей апертуры. Исследование данной проблемы связано с анализом бесконечной решетки в режиме кластерного возбуждения, когда входные воздействия подаются не на все элементарные излучатели, а на некоторую их часть — кластер.

Отметим, что СШП-решетка *TEM*-рупоров конечных размеров (12x12) была исследована в режиме кластерного возбуждения [21]. При этом основная ее цель состояла в решении практической задачи создания СШП-антенны с постоянной по ширине диаграммой направленности.

Цель данной работы — исследовать трансформацию поля в режиме кластерного возбуждения в СШП решетках антенн Вивальди и *TEM*-рупоров с равномерным и косинусоидальным амплитудным распределением источников возбуждения.

1. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Двумерно-периодическая бесконечная решетка может быть рассмотрена при помощи ячейки Флоке. В случае квазипериодического возбуждения поля в ячейке связаны условием периодичности, которое часто называют теоремой Флоке [16]:

$$\vec{E}(x + nP_x, y + mP_y) = \vec{E}(x, y) \exp(-ik_x nP_x - ik_y mP_y),$$

где $\kappa_x = k \sin \theta \cos \varphi$, $\kappa_y = k \sin \theta \sin \varphi$ — заданные постоянные определяющие углы излучения из решетки θ , φ ; k — волновое число свободного пространства; n — номер периода по оси $0x$; m — номер

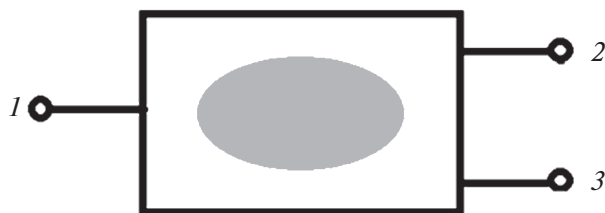


Рис. 1. Ячейка Флоке общего вида как СВЧ-многополюсник: 1 — порт, соответствующий линии передачи; 2, 3 — порты, соответствующие волнам волновода Флоке.

периода по оси $0y$; P_x — период решетки по оси $0x$; P_y — период решетки по оси $0y$.

Ячейка Флоке описывается матрицей рассеяния $\dot{S}(\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y)$, где

$$\Delta\varphi_x = \kappa_x P_x, \Delta\varphi_y = \kappa_y P_y. \quad (1)$$

На рис. 1 показана ячейка Флоке в общем виде, она имеет минимум три порта: порт 1 соответствует линии передачи, порты 2 и 3 соответствуют волноводу Флоке, в котором распространяются, как минимум, две волны.

В общем случае поле собственной волны волновода Флоке при $z > 0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_{p,q} &= \vec{e}_{p,q} \exp(-ik_p x - i\beta_q y - \gamma_{p,q}(z - L)), \\ \kappa_p &= \kappa_x + \frac{2\pi p}{P_x}, \quad \beta_q = \kappa_y + \frac{2\pi q}{P_y}, \\ \gamma_{p,q} &= \sqrt{\kappa_p^2 + \beta_q^2 - k^2}, \quad |\kappa, \beta| \leq \frac{\pi}{P_{x,y}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\vec{e}_{p,q}$ — вектор, не зависящий от координат, L — размер решетки по оси $0z$ (рис. 2). Отметим, что каждой паре индексов p, q соответствуют две волны с разными поляризациями, т.е. с разными векторами $\vec{e}_{p,q}^2$ и $\vec{e}_{p,q}^3$. Верхние индексы 2,3 показывают принадлежность данной волны соответствующему порту многополюсника на рис. 1.

Известным фактом является то, что если период решетки составляет $P < \lambda/2$ (что является условием отсутствия дифракционных максимумов), то распространяющимися будут только гармоники с $p = q = 0$, у которых $\kappa_0 = \kappa_x$, а $\beta_0 = \kappa_y$.

Отметим, что матрицу рассеяния канала Флоке $\dot{S}(\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y)$ можно рассчитать при помощи методов электродинамического моделирования. Мы использовали для этого систему HFSS. Будем далее считать ее известной. Матрица рассеяния связывает амплитуды отраженных и падающих на порты ячейки Флоке волн. Пусть ячейка возбуждается со стороны порта 1 волной с амплитудой U^{i1} . Тогда амплитуды волн, прошедших в порты 2, 3, находятся как

$$U^{i2,3} = U^{i1} S_{2,31}. \quad (3)$$

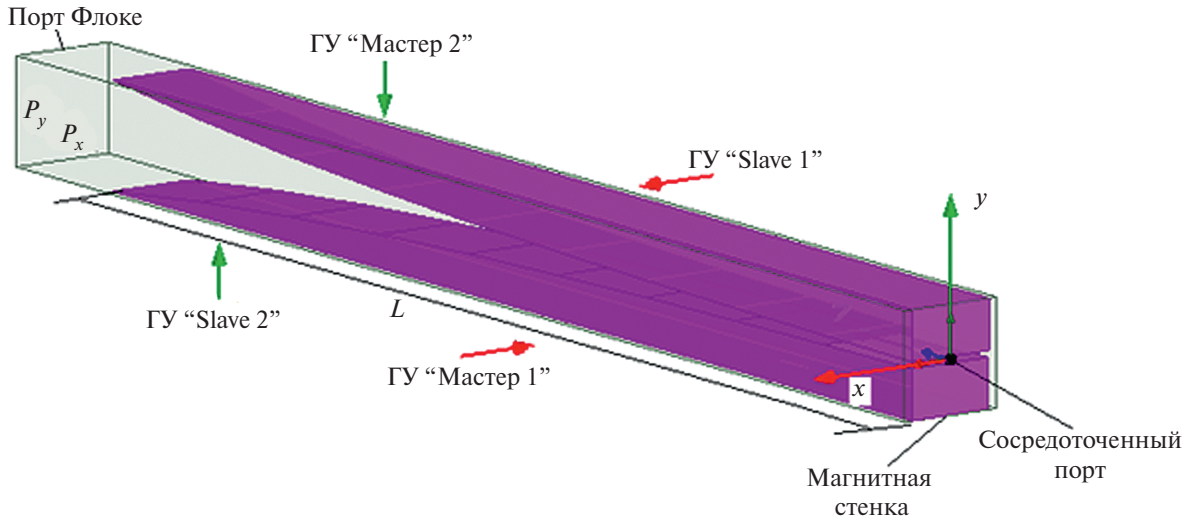


Рис. 2. Канал Флоке для решетки TEM -рупоров, ГУ — граничное условие.

Чтобы найти поле в портах 2, 3, необходимо поле собственной волны умножить на ее амплитуду:

$$E^{2,3} = U^{12,3} \vec{e}_{0,0}^{2,3} \exp(-i\kappa_x x - i\kappa_y y - \gamma_{0,0}(z - L)),$$

$$\gamma_{0,0} = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2 - k^2}.$$

При $z = L$, т.е. в точке размещения отсчетной плоскости порта 2, справедливо равенство

$$\vec{E}^{2,3} = U^{12,3} \vec{e}_{0,0}^{2,3} \exp(-i\kappa_x x - i\kappa_y y). \quad (4)$$

Переход от режима квазипериодического возбуждения к режиму возбуждения одного элемента решетки рассмотрен в работе [16]. Воспользуемся полученными в ней выражениями и найдем искомого электрическое поле волн второго и третьего типов $\vec{U}_n^{2,3}$ в n -м канале решетки при возбуждении элемента решетки с номерами n_0, m_0 волной с амплитудой A_{n_0, m_0} :

$$\vec{U}_n^{2,3} = \frac{P_x P_y}{4\pi^2} A_{n_0, m_0} \int_{-\frac{\pi}{P_x}}^{\frac{\pi}{P_x}} \int_{-\frac{\pi}{P_y}}^{\frac{\pi}{P_y}} \vec{e}_{0,0}^{2,3} \exp \left(\begin{aligned} &-i\kappa_x (x + (n - n_0)P_x) - \\ &-i\kappa_y (y + (m - m_0)P_y) \end{aligned} \right) \times \quad (5)$$

$$\times S_{2,31}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_y d\kappa_x.$$

Поле при возбуждении группы элементов решетки (кластера) находится суммированием по индексам n_0, m_0 :

$$\vec{U}_n^{2,3} = \frac{P_x P_y}{4\pi^2} \sum_{n_0} \sum_{m_0} \int_{-\frac{\pi}{P_x}}^{\frac{\pi}{P_x}} \int_{-\frac{\pi}{P_y}}^{\frac{\pi}{P_y}} \vec{e}_{0,0}^{2,3} \exp \left(\begin{aligned} &-i\kappa_x (x + (n - n_0)P_x) - \\ &-i\kappa_y (y + (m - m_0)P_y) \end{aligned} \right) \times \quad (6)$$

$$\times S_{2,31}(\kappa_x, \kappa_y) A_{n_0, m_0} d\kappa_y d\kappa_x,$$

где $S_{2,31}(\kappa_x, \kappa_y)$ — элементы матрицы рассеяния ячейки Флоке.

Представляет интерес кластер, бесконечный по одной координате и конечный по другой. Рассмотрим кластер, бесконечный по координате 0y, т.е. $m_0 \in]-\infty, \infty[$, причем вдоль оси 0y обеспечивается

равномерное амплитудно-фазовое распределение. Тогда амплитуды активных каналов не зависят от индекса m_0 , и получаем $A_{n_0, m_0} = A_{n_0}$. В этом случае к сумме по m_0 в формуле (6) можно применить теорему Пуассона [23]:

$$\sum_{m_0=-\infty}^{\infty} \exp(i\kappa_y P_y m_0) = \frac{2\pi}{P_y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta \left(\kappa_y - \frac{2\pi p}{P_y} \right). \quad (7)$$

Тогда выражение (6) можно переписать следующим образом, используя тот факт, что период решетки меньше половины длины волны:

$$\vec{U}_n^2 = \frac{P_x}{2\pi} \sum_{n_0} \int_{-\frac{\pi}{P_x}}^{\frac{\pi}{P_x}} \vec{e}_{0,0}^2 \exp(-i\kappa_x (x + (n - n_0)P_x)) S_{21}(\kappa_x, 0) A_{n_0} d\kappa_x. \quad (8)$$

Применяя теорему Пуассона к полю $\vec{U}_n^3$, получаем, что оно пропорционально элементу матрицы рассеяния канала Флоке $S_{31}(\kappa_x, 0)$, который для исследуемых однополяризационных решеток тождественно равен нулю. Отсюда следует, что $\vec{U}_n^3 = 0$.

Аналогично можем рассмотреть поле, которое создает кластер, бесконечный по оси 0x и конечный по оси 0y. При этом получаем

$$\vec{U}_n^3 = \frac{P_y}{2\pi} \sum_{m_0} \int_{-\frac{\pi}{P_y}}^{\frac{\pi}{P_y}} \vec{e}_{0,0}^3 \exp(-i\kappa_y (y + (m - m_0)P_y)) S_{31}(0, \kappa_y) A_{m_0} d\kappa_y, \quad (9)$$

$$\vec{U}_n^2 = 0.$$

Рассмотрим теперь следующий частный случай: кластер, бесконечный по координате 0y и с равномерным вдоль нее амплитудно-фазовым распределением, является конечным вдоль оси 0x, излучает под углом θ_0 , при этом вдоль оси 0x реализовано равномерное амплитудное распределение. Тогда

$A_{n_0} = \exp(in_0 \kappa_0 P_x)$, причем $\kappa_0 = k \sin \theta_0$. В этом случае (8) принимает вид

$$\vec{U}_n^2 = \frac{P_x}{2\pi} \int_{-\frac{P_x}{2}}^{\frac{P_x}{2}} \vec{e}_{0,0}^2 S_{21}(\kappa_x, 0) \exp(-i\kappa_x(x + nP_x)) \sum_{n_0=-N}^N \exp(i(\kappa_x - \kappa_0)n_0 P_x) d\kappa_x.$$

Обратим внимание, что выражение

$$\sum_{n_0=-N}^N \exp(i(\kappa_x - \kappa_0)n_0 P_x)$$

— это сумма геометрической прогрессии. Применим формулу для суммы геометрической прогрессии и получим выражение для поля волны второго типа:

$$\begin{aligned} \vec{U}_n^2 = & \frac{P_x}{2\pi} \int_{-\frac{P_x}{2}}^{\frac{P_x}{2}} \vec{e}_{0,0}^2 S_{21}(\kappa_x, 0) \exp(-j\kappa_x(x + nP_x)) \times \\ & \times \left(1 + \frac{\exp(j(\kappa_x - \kappa_0)P_x) [\exp(j(\kappa_x - \kappa_0)P_x N) - 1]}{\exp(j(\kappa_x - \kappa_0)P_x) - 1} + \right. \\ & \left. + \frac{\exp(-j(\kappa_x - \kappa_0)P_x) [\exp(-j(\kappa_x - \kappa_0)P_x N) - 1]}{\exp(-j(\kappa_x - \kappa_0)P_x) - 1} \right) d\kappa_x, \end{aligned} \quad (10)$$

а также аналогичное выражение для поля $\vec{U}_n^3$ и кластера, бесконечного вдоль оси $0x$:

$$\begin{aligned} \vec{U}_n^3 = & \frac{P_y}{2\pi} \int_{-\frac{P_y}{2}}^{\frac{P_y}{2}} \vec{e}_{0,0}^3 S_{31}(0, \kappa_y) \exp(-j\kappa_y(y + nP_y)) \times \\ & \times \left(1 + \frac{\exp(i(\kappa_y - \kappa_0)P_y) [\exp(j(\kappa_y - \kappa_0)P_y N) - 1]}{\exp(i(\kappa_y - \kappa_0)P_y) - 1} + \right. \\ & \left. + \frac{\exp(-i(\kappa_y - \kappa_0)P_y) [\exp(-i(\kappa_y - \kappa_0)P_y N) - 1]}{\exp(-i(\kappa_y - \kappa_0)P_y) - 1} \right) d\kappa_y. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, мы показали, что, численно определив матрицу рассеяния ячейки Флоке $\vec{S}(\Delta\phi_x, \Delta\phi_y)$, можем при помощи выражений (8), (9), а также (10) и (11) найти поле в излучающей апертуре при возбуждении группы активных элементов — кластера в составе бесконечной решетки. Далее применим полученные соотношения для решеток *ТЕМ*-рупоров и решеток антенн Вивальди.

Существенным моментом является то, что в матрице рассеяния канала Флоке учитываются только две моды Флоке нулевого порядка. По этой причине соотношения, приведенные выше, определяют не полное поле в апертуре решетки, а лишь его часть, которая описывается распространяющимися гармониками Флоке. Наряду с ней в сечении $z = L$ существует поле гармоник высших порядков. Однако в решетке, с периодом меньшим половины

длины волны в свободном пространстве, высшие гармоники не распространяются, а их поле экспоненциально затухает в области $z > L$. Поэтому наиболее интересная часть поля, которая существует на больших расстояниях от выходной апертуры решетки, описывается именно распространяющимися гармониками Флоке. Эту часть поля можно назвать полем излучения. Расчет поля излучения проводится не в раскрыте решетки (при $z = L$), а на определенном от него удалении в продольном направлении, как показано на рис. 2, где полями всех мод более высокого порядка можно пренебречь из-за их экспоненциального затухания. Далее поле пересчитывается в плоскость $z = L$ с использованием стандартной процедуры сдвига отсчетной плоскости, реализованной в HFSS.

2. КЛАСТЕР *ТЕМ*-РУПОРОВ

Исследуем кластер *ТЕМ*-рупоров, конечный по одной оси и бесконечный по другой со следующими параметрами: длина элемента решетки $L = 180$, а величины периодов решетки в *Е*- и *Н*-плоскости равны соответственно $P_y = 15$ и $P_x = 15$ (см. рис. 2), причем период рассматриваемой решетки меньше половины длины волны. Здесь и далее все размеры приводятся в миллиметрах. Реализован экспоненциальный закон зависимости волнового сопротивления в сечении канала Флоке от координаты $0z$. Отметим, что на продольных стенках ячейки установлены специальные граничные условия “Master–Slave” (см. рис. 2), поперечная стенка на границе пустого канала представляет собой порт Флоке, который имеет две моды, соответствующие двум поляризациям. Поперечную стенку вблизи сосредоточенного порта объявляем магнитной, что соответствует холостому ходу в терминах линии передачи, или идеальному частотно независимому резонатору. Такой подход позволяет нам не учитывать частотную зависимость системы возбуждения, которое на практике весьма велико в таких структурах и оказывает заметное влияние на характеристики решетки. Импеданс порта I равен $Z_{c1} = 25$ Ом, импеданс пустого канала (волновое сопротивление Флоке) при этом равен 377 Ом. Пусть количество элементов в кластере равно $2N + 1 = 17$, при этом обеспечивается равномерное амплитудное распределение.

Исследуем поле такого кластера при сканировании. С учетом того, что кластер является бесконечным по одной координате и конечным по другой, возможны два варианта: 1) кластер бесконечен вдоль оси $0y$ и является конечным вдоль оси $0x$ (рис. 3а), тогда сканирование проводим в плоскости *Н*, 2) кластер бесконечен вдоль оси $0x$ (см. рис. 3б), тогда сканируем в плоскости *Е*.

На рис. 4–6 представлены результаты расчетов нормированной напряженности электрического

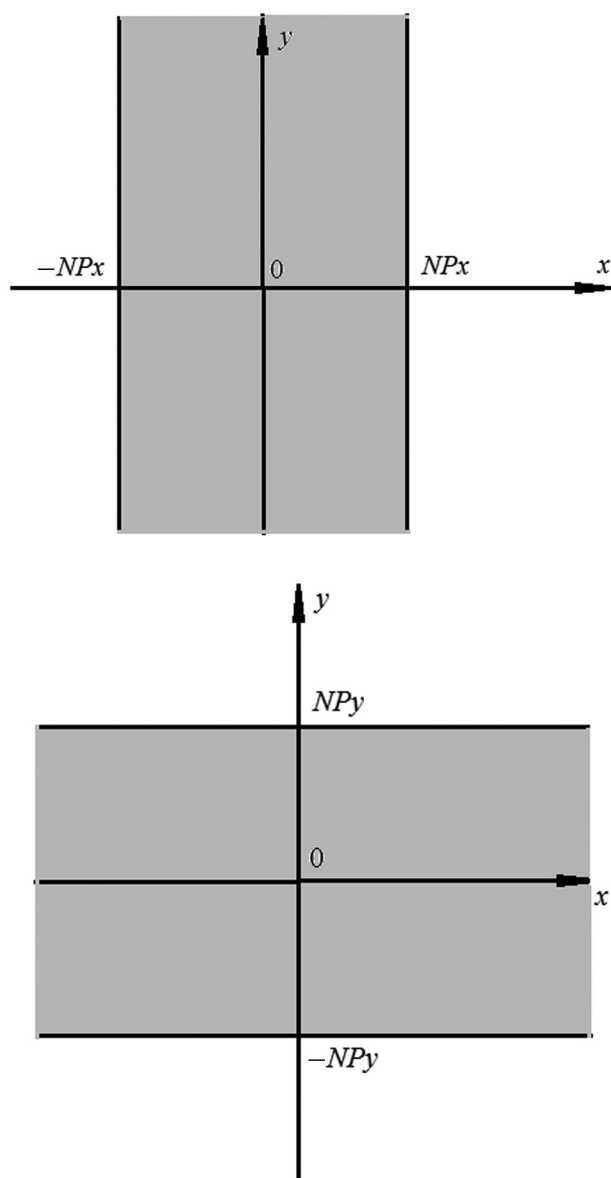


Рис. 3. Два варианта кластера, бесконечного по одной координате и конечного по другой.

поля при сканировании такого кластера от 0 до 45 град в плоскостях Е и Н для частот 2, 5 и 8 ГГц соответственно. Здесь и далее кривые нормированы к величине $U(0)$ при отсутствии отклонения луча, вертикальные пунктирные линии обозначают границы кластера.

Из данных, представленных на рис. 4–6, можем сделать вывод, что распределение поля в выходной апертуре решетки существенно отличается от распределения поля на входах элементарных излучателей, которое задается функциями A_{n0} , A_{m0} . При этом можно выделить два вида искажений: искажение формы амплитудного распределения и его смещение. Второй эффект имеет место только при сканировании и зависит от угла отклонения θ .

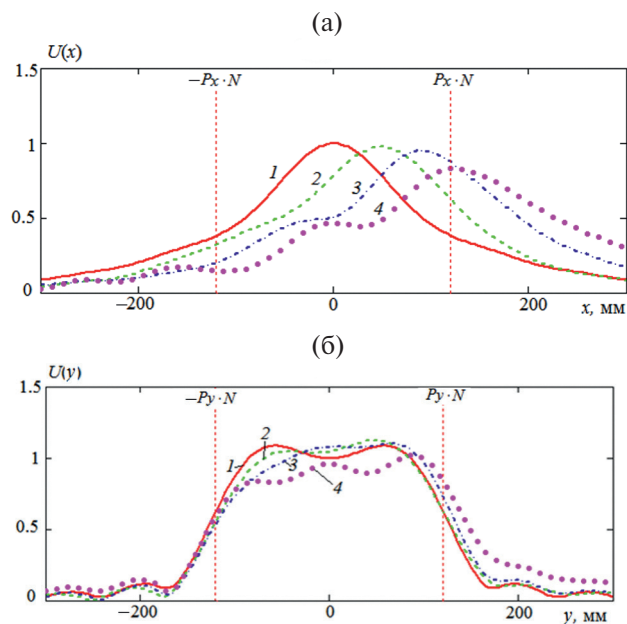


Рис. 4. Напряженность поля для кластера TEM -рупоров на частоте 2 ГГц: отклонение луча 0 (1), 15 (2), 30 (3) и 45 град (4), сканирование в H - (а) и E -плоскости (б).

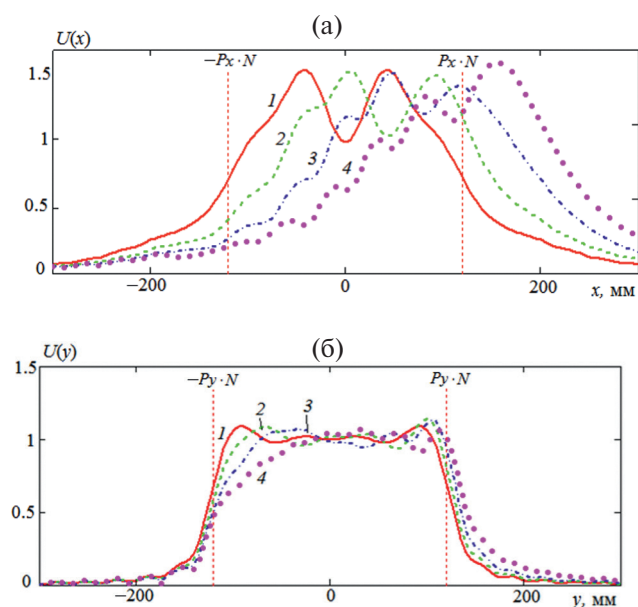


Рис. 5. Напряженность поля для кластера TEM -рупоров на частоте 5 ГГц: отклонение луча 0 (1), 15 (2), 30 (3) и 45 град (4), сканирование в H - (а) и E -плоскости (б).

Также необходимо отметить существенно разное поведение поля в плоскостях Е и Н. Искажения формы и смещение в Н-плоскости проявляются значительно сильнее, чем в Е-плоскости. При этом искажения формы в Н-плоскости имеют характер “расплывания”, которое проявляется в том, что поле выходит за границы кластера. Кроме того, наблюдается также эффект “сглаживания”, который выражается в исчезновении

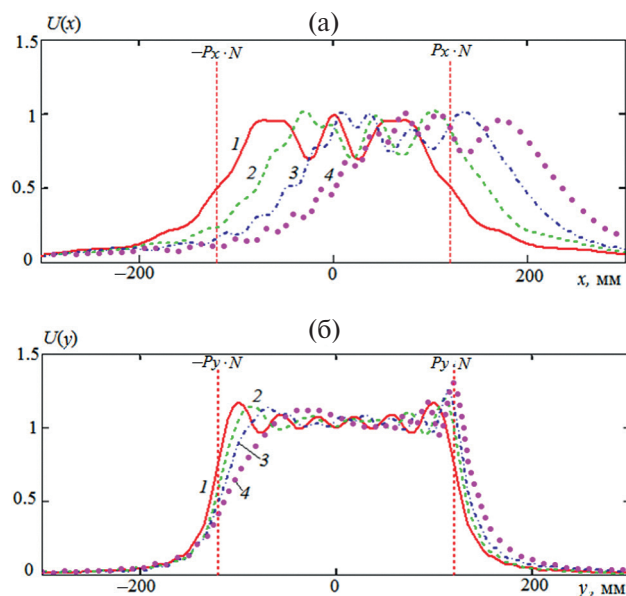


Рис. 6. Напряженность поля для кластера TEM -рупоров на частоте 8 ГГц: отклонение луча 0 (1), 15 (2), 30 (3) и 45 град (4), сканирование в H - (а) и E -плоскости (б).

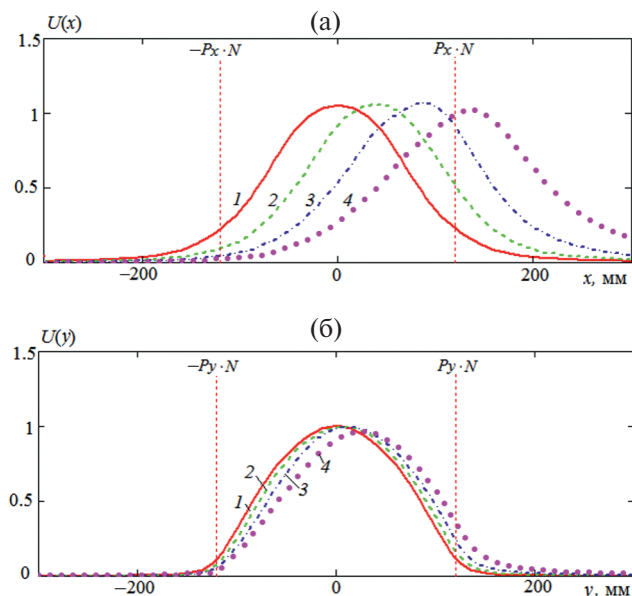


Рис. 7. Напряженность поля для кластера TEM -рупоров с косинусоидальным амплитудным распределением на частоте 5 ГГц: отклонение луча 0 (1), 15 (2), 30 (3) и 45 град (4), сканирование в H - (а) и E -плоскости (б).

резких границ области, занятой полем. Особенно сильно эти эффекты выражены на низких частотах (см. рис. 4а, 4б). В H -плоскости они привели к изменению формы амплитудного распределения от прямоугольной на входе в решетку до колоколообразной на выходе из нее. С повышением частоты указанные эффекты остаются, но выражены уже не столь сильно.

Особо следует обратить внимание на смещение поля в H -плоскости, которое при достаточно больших углах сканирования ($\theta = 45^\circ$) может достигать половины ширины кластера. При выбранном параметре это означает, что при сканировании поле перетекает в восемь соседних каналов.

Исследуем далее, каким образом амплитудное распределение на элементах кластера влияет на распределение поля в выходной плоскости в режиме сканирования. Зададим амплитудное распределение в виде “косинус на пьедестале” со следующим законом распределения $A_{n0} = 0.1 + 0.9 \cos(\pi n_0 / 2N)$ и рассчитаем напряженность поля на частоте 5 ГГц для сканирования в H - и E -плоскостях (рис. 7а, 7б).

Сравнивая рис. 5 и 7, отметим, что поле в H -плоскости становится гораздо менее изрезанным, хотя эффекты расплывания и, в особенности, смещения поля при сканировании в этой плоскости имеют место во всех случаях.

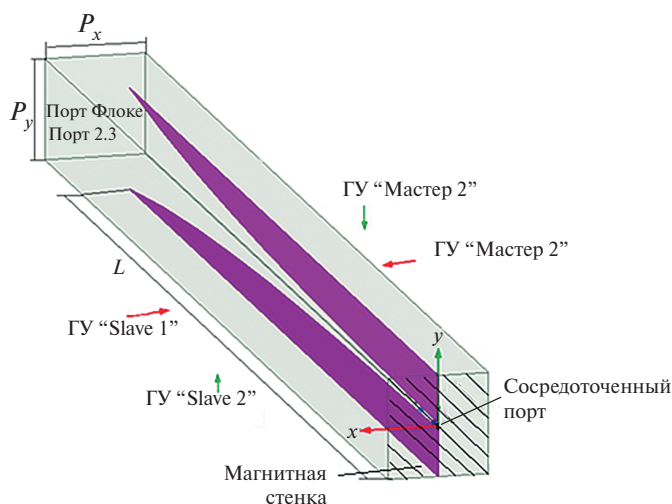


Рис. 8. Канал Флоке для решетки антенн Вивальди, ГУ — граничное условие.

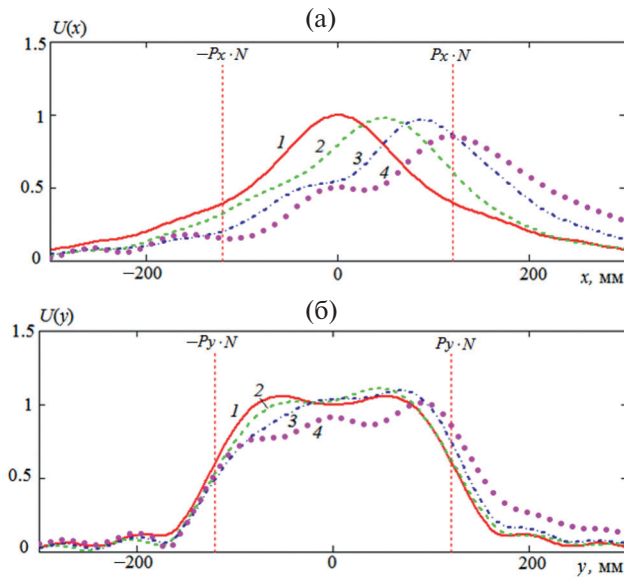


Рис. 9. Напряженность поля для кластера антенн Вивальди на частоте 2 ГГц: отклонение луча 0 (1), 15 (2), 30 (3) и 45 град (4), сканирование в H - (а) и E -плоскости (б).

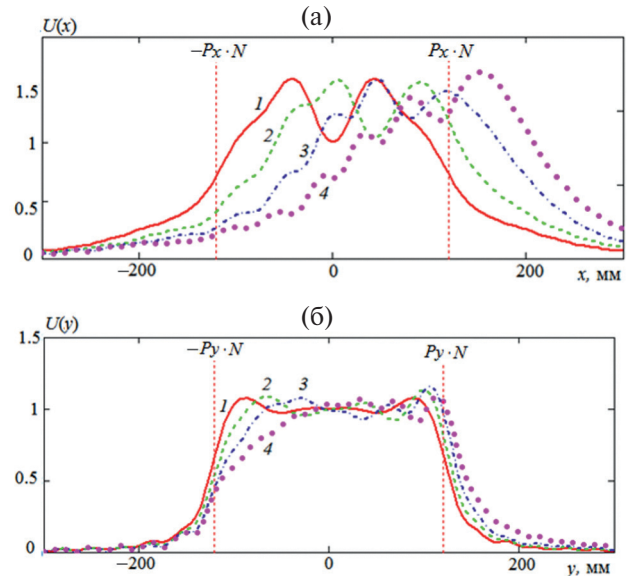


Рис. 10. Напряженность поля для кластера антенн Вивальди на частоте 5 ГГц: отклонение луча 0 (1), 15 (2), 30 (3) и 45 град (4), сканирование в H - (а) и E -плоскости (б).

3. КЛАСТЕР АНТЕНН ВИВАЛЬДИ

Исследуем кластер антенн Вивальди (конечный по одной оси и бесконечный по другой) со следующими параметрами: длина элемента решетки $L = 180$, периоды решетки в E - и H -плоскостях равны соответственно $P_y = 15$ и $P_x = 15$ (рис. 8).

Реализован экспоненциальный закон зависимости волнового сопротивления в сечении канала Флоке от координаты $0z$. Импеданс порта 1 равен $Z_{c1} = 150$ Ом, при этом импеданс пустого канала (волновода Флоке) равен $Z_{c2} = 377$ Ом. Количество элементов в кластере равно $2N + 1 = 17$, обеспечивается равномерное амплитудное возбуждение.

На рис. 9–11 представлены результаты расчетов нормированной напряженности электрического поля при сканировании такого кластера от 0 до 45 град в плоскостях E и H для частот 2, 5 и 8 ГГц соответственно.

Сравнивая графики для кластеров TEM -рупоров и антенн Вивальди, отмечаем, что в целом они очень похожи. Сканирование в плоскости вектора $\vec{E}$ не приводит к существенным изменениям поля, оно остается сконцентрированным в области кластера. Сканирование в плоскости вектора $\vec{H}$ приводит к существенному расплыванию поля за пределы кластера.

Говоря о различиях между кластерами TEM -рупоров и антенн Вивальди, следует обратить внимание на следующее обстоятельство — кривая 4 (отклонение луча на 30°) на рис. 11б проходит ниже кривых 1, 2, 5, т.е. при отклонении луча на 30° напряженность поля снижается по какой-то причине,

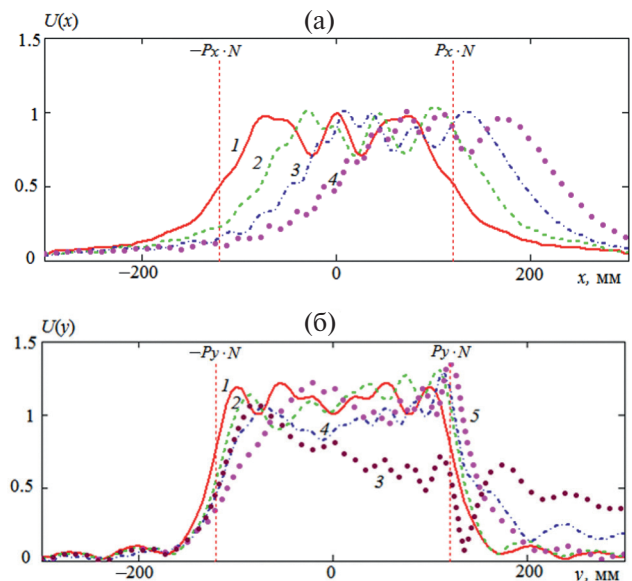


Рис. 11. Напряженность поля для кластера антенн Вивальди на частоте 8 ГГц: отклонение луча 0 (1), 15 (2), 30 (3) и 45 град (4), сканирование в H - (а) и E -плоскости (б).

чего не наблюдается на рис. 6. Чтобы выяснить причину этого явления, рассмотрим зависимость элемента матрицы рассеяния ячейки Флоке на частоте 8 ГГц от угла сканирования. На рис. 12 кривые 1 и 2 демонстрируют соответственно действительную и мнимую части элемента матрицы S_{31} . Отмечаем резкие изломы кривых 1 и 2 в области углов от 23° до 25° и E -плоскости (б).

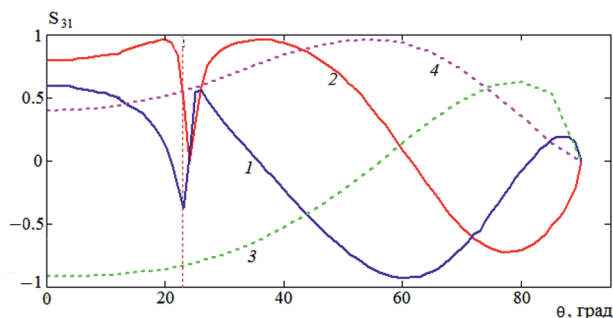


Рис. 12. Зависимость действительной (1, 3) и мнимой (2, 4) частей параметра рассеяния S_{31} ячейки Флоке для решетки антенн Вивальди от угла сканирования на частоте 8 ГГц при $L = 180$ (сплошные кривые) и $L = 90$ (штриховые).

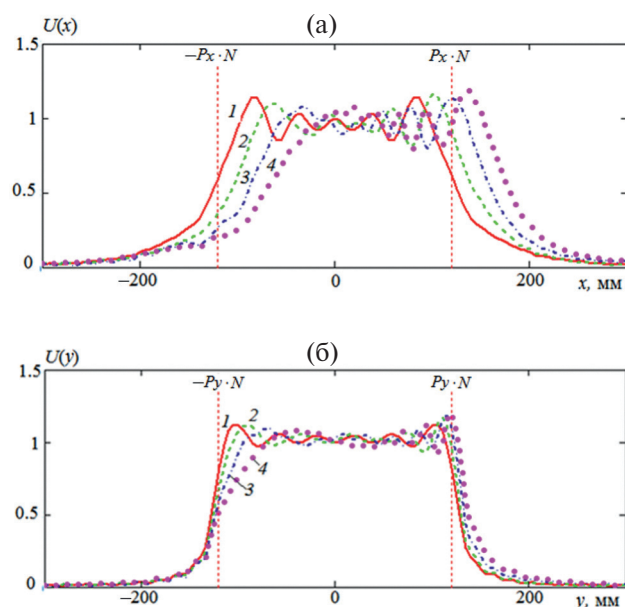


Рис. 13. Напряженность поля для укороченного кластера на частоте 8 ГГц: отклонение луча 0 (1), 15 (2), 30 (3) и 45 град (4), сканирование в H - (а) и E -плоскости (б).

Можно предположить, что в указанном диапазоне углов картина напряженности электрического поля будет наихудшей из всех рассмотренных. Кривая 3 на рис. 11 подтверждает это предположение. Аномальное поведение параметров рассеяния канала Флоке для антенн Вивальди было описано в работе [13]. Оно аналогично эффекту ослепления, наблюдаемому во многих типах решеток. Предлагаемый метод борьбы с этим явлением — уменьшение длины элемента решетки L .

Для подтверждения этого утверждения рассмотрим кластер антенн Вивальди, аналогичный уже исследованному, но уменьшенной длины ($L = 90$), назовем его укороченным кластером (см. рис. 12). Кривые 3 и 4 — соответственно действительная и мнимая части элемента матрицы S_{31} ячейки Флоке для укороченного кластера. Отмечаем отсутствие особенностей

во всем диапазоне углов. На рис. 13а, 13б показаны результаты расчетов нормированной напряженности электрического поля при сканировании укороченного кластера от 0 до 45 град в E - и H -плоскостях для частоты 8 ГГц. Сравнивая характеристики сканирования в H -плоскости для кластеров с $L = 180$ и 90 мм, отмечаем существенное уменьшение расплывания поля в случае укороченного кластера.

4. СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ РЕШЕТКИ И ТРАНСФОРМАЦИЯ ПОЛЯ

Проанализируем и объясним представленные выше численные результаты с позиции собственных волн бесконечной двумерной СШП-решетки. Как уже отмечалось во Введении, собственные волны решетки антенн Вивальди были исследованы в работе [19], а решетки TEM -рупоров — в [14]. Несмотря на заметные отличия в конструкции этих структур, качественно характеристики их собственных волн весьма близки. Перечислим их наиболее важные для нашего анализа черты.

Под собственной волной регулярной вдоль оси Oz решетки понимаем решение, удовлетворяющее условию периодичности с параметрами периодичности $k_{x,y}$ и имеющее зависимость от координаты z вида $\exp(-i\beta z)$, где β — постоянная распространения волны. Задача на собственные волны имеет бесконечное множество решений, из которых выделяются две волны, не имеющие частоты отсечки. Такие волны принято называть основными. Отметим, что нормальное функционирование решетки происходит в области параметров, в которой распространяются только волны основных типов.

В общем случае параметры собственных волн зависят от параметров сканирования $k_{x,y}$ и геометрии решетки. Структуры, рассмотренные в разд. 3 и 4, можно рассматривать как регулярные решетки с медленно изменяющимися вдоль оси Oz параметрами. При таком подходе на входе решетки возбуждаются основные распространяющиеся волны. Далее они бегут по направлению к выходной апертуре, изменяясь при этом благодаря изменению геометрических размеров, и в результате формируют поле в выходной апертуре, которое затем излучается в свободное пространство. Таким образом, поле на выходе решетки существенным образом зависит от свойств собственных волн.

Как показывают результаты работ [14, 19], волны в решетке, не имеющей диэлектрических элементов, разделяются на волны типа TE , TM и T . Основные волны относятся к T - и TE -волнам; T -волна имеет все характерные для таких волн особенности. Ее постоянная распространения β , независимо ни от чего, и в том числе независимо от параметров $k_{x,y}$, равна волновому числу свободного пространства k . Постоянная распространения TE -волны, наоборот, зависит от параметров

периодичности $\kappa_{x,y}$: при $\kappa_{x,y} = 0$ она равна k , а при их увеличении она уменьшается.

Для нашего анализа важно отметить поляризационные характеристики собственных волн. Ориентация их плоскостей преимущественной поляризации зависит от параметров $\kappa_{x,y}$. Для нас важно, что при $\kappa_x = 0$ и $\kappa_y \neq 0$ вектор электрического поля T -волны ориентирован вдоль оси Oy , а аналогичный вектор TE -волны ориентирован вдоль оси Ox . При $\kappa_x \neq 0$, $\kappa_y = 0$, наоборот, вектор электрического поля T -волны ориентирован вдоль оси Ox , а аналогичный вектор TE -волны ориентирован вдоль оси Oy .

Сосредоточенные порты в рассмотренных выше решетках ориентированы вдоль оси Oy . Поэтому они возбуждают только волны, поляризованные вдоль этой оси. Таким образом, приходим к выводу, что кластер, бесконечный вдоль оси Ox , отвечающий условию $\kappa_x = 0$, $\kappa_y \neq 0$ (см. выше), возбуждает T -волны, а кластер, бесконечный вдоль оси Oy , отвечающий условию $\kappa_x \neq 0$, $\kappa_y = 0$, возбуждает TE -волны. Соответственно, сканирование в E - и H -плоскостях происходит путем селективного возбуждения соответственно T - и TE -волн.

Отсюда можно сделать вывод, что существенное отличие в поведении поля при сканировании в разных плоскостях обусловлено отличиями в свойствах собственных волн. Выше мы показали (см. формулы (8), (9)), что поля в портах 2 и 3 зависят от поведения параметров $S_{21}(\kappa_x, 0)$, $S_{31}(0, \kappa_y)$.

В рамках теории волноводов с медленно меняющимися параметрами [18] прохождение собственной волны с единичной амплитудой через нерегулярный участок может быть описано системой дифференциальных уравнений относительно амплитуд взаимодействующих волн: прямых и встречных волн разных типов. Связь между различными волнами описывается с помощью коэффициентов связи. В отсутствие критических сечений в пределах нерегулярного участка коэффициенты связи являются малыми параметрами задачи. Поэтому в рамках нулевого приближения ими можно пренебречь. Тогда модуль коэффициента прохождения волны равен единице, а фаза определяется интегралом от переменной на нерегулярном участке постоянной распространения волны. С учетом того, что при $\kappa_x = 0$, $\kappa_y \neq 0$ вдоль оси Oz распространяется T -волна, а при $\kappa_x \neq 0$, $\kappa_y = 0$ TE -волна параметры рассеяния в нулевом приближении могут быть записаны следующим образом:

$$S_{21} = \exp \left(-i \int_0^L \gamma_t(\kappa_x, z) dz \right),$$

$$S_{31} = e \left(-i \int_0^L \gamma_{te}(\kappa_y, z) dz \right),$$

где γ_t, γ_{te} — постоянные распространения T - и TE -волн. Как отмечалось выше, постоянная распространения T -волны не зависит от переменных κ_x, z . Поэтому коэффициент передачи S_{21} также не зависит от параметра κ_x . По этой причине все парциальные волны с разными κ_x получают при прохождении от точки возбуждения до точки выхода одинаковые фазовые сдвиги. В результате поле на выходе при сканировании в E -плоскости повторяет поле на входе.

Иная ситуация при сканировании в плоскости H . Постоянная распространения TE -волны зависит от параметра κ_x . Следует обратить внимание на то, что даже слабая ее зависимость может приводить к существенному изменению фазы коэффициента прохождения S_{31} , так как электрический размер решетки вдоль оси Oz является большой величиной. В результате парциальные волны с разными κ_x получают при прохождении от точки возбуждения до точки выхода разные фазовые сдвиги, и поэтому распределение поля на выходе решетки искажается, что выражается в его отличии от распределения во входной плоскости.

Представленный выше качественный анализ показывает, что в E -плоскости искажения поля должны полностью отсутствовать. Более точное электродинамическое моделирование показывает, что они существуют, но выражены существенно слабее, чем в H -плоскости.

Представленные выше результаты показывают, что в плоскости вектора $\vec{E}$ бесконечная решетка может быть ограничена областью с размерами, близкими к размерам кластера. При этом параметры получаемой решетки конечных размеров будут слабо отличаться от параметров бесконечного прототипа. В плоскости вектора $\vec{H}$ ситуация иная. Попытка ограничить размеры решетки размерами кластера приведет к сильным краевым эффектам, особенно при отклонении главного луча от нормали. Эти краевые эффекты могут быть источником искажений в диаграмме направленности. Возможно, что правильным подходом является расширение размеров решетки в данной плоскости. Отметим, что число активных каналов при этом не увеличивается. Дополнительные каналы не участвуют в возбуждении решетки и могут быть нагружены на согласованные нагрузки.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны коллегам за ценные рекомендации при обсуждении данной работы на научном семинаре лаборатории “Электродинамика сложных сред и структур”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иммореев И.Я. // РЭ. 2009. Т. 54. № 1. С. 5.
2. Hagpanah M., Kashani Z.G., Param A.K. // 30th Intern. Conf. on Electrical Engineering (ICEE). IEEE. 2022. P. 42.
3. Panzer B., Gomez-Garcia D., Leuschen C. et al. // J. Glaciology. 2013. V. 59. № 214. P. 244.
4. Rodriguez-Morales F., Gogineni S., Leuschen C.J. et al. // IEEE Trans. 2013. V. GRS-52. № 5. P. 2824.
5. Patel A., Paden J., Leuschen C. et al. // IEEE Trans. 2014. V. GRS-53. № 5. P. 2547.
6. Liu H., Yang Z., Yue Y. et al. // NDT & E International. 2023. V. 133. Article No. 102726.
7. Yarovoy A.G., Lighthart L.P. // Proc. Int. Symp. on Antennas for Radar Earth Observation. Delft. 8–9 Jun. 2000. Delft: Univ. of Technology.
8. McGrath D.T., Baum C.E. // IEEE Trans. 1999. V. AP-47. № 3. P. 469.
9. Elmansouri M.A., Ha J., Filipovic D.S. // IEEE Trans. 2017. V. AP-65. № 3. P. 1374.
10. Elmansouri M.A., Filipovic D.S. // IET Microw. Antennas Propag. 2017. V. 11. № 15. P. 2134.
11. Калошин В.А., Ле Н.Т., Фролова Е.В. // Журн. радиоэлектроники. 2020. № 4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr20/2/text.pdf>
12. Fedorov V.M., Efanov M.V., Ostashev V.Y. et al. // Electronics. 2021. V.10. № 9. Article No. 1011. <https://doi.org/10.3390/electronics10091011>
13. Банков С.Е., Дупленкова М.Д. // РЭ. 2018. Т. 63. № 1. С. 25.
14. Банков С.Е., Калошин В.А., Нгуен К.З. // РЭ. 2018. Т. 63. № 7. С. 702.
15. Банков С.Е., Калошин В.А., Ле Н.Т. // РЭ. 2018. Т. 63. № 12. С. 1263.
16. Амтей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. М.: Мир, 1974.
17. Банков С.Е., Курушин А.А., Гутцайт Э.М. Решение оптических и СВЧ задач с помощью HFSS. М.: Оркада, 2012.
18. Каценеленбаум Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
19. Банков С.Е., Скородумова Е.А. // РЭ. 2015. Т. 60. № 5. С. 470.
20. Банков С.Е., Дупленкова М.Д. // РЭ. 2015. Т. 60. № 6. С. 618.
21. Грачёв Г.Г., Калошин В.А. // Журн. радиоэлектроники. 2020. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan20/6/text.pdf>.
22. Bankov S.E., Duplenkova M.D. // IEEE8th All-Russian Microwave Conf. (RMC). Moscow, Russian Federation. 2022. P. 178. <https://doi.org/10.1109/RMC55984.2022.10079619>
23. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.

ELECTROMAGNETIC FIELDS TRANSFORMATION IN UWB INFINITE ANTENNA ARRAYS IN THE CLUSTER EXCITATION MODE

S. E. Bankov, M. D. Duplenkova*

Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics RAS, Mokhovaya Str. 11, build. 7, Moscow, 125009 Russia

*E-mail: duplenkova@yandex.ru

Received November 7, 2022; revised June 26, 2023; accepted July 27, 2023

Infinite ultra-wideband (UWB) arrays of TEM horns and Vivaldi antennas were considered. At the first stage we used an array model in the quasi-periodic excitation mode in the form of a Floquet channel. It was implemented in the HFSS electromagnetic modeling system. At the second stage the array parameters in the cluster excitation mode were determined using the calculated scattering matrix of the Floquet channel. Two clusters of TEM horns and Vivaldi antennas were analyzed. They were finite along one coordinate and infinite along the other. It was investigated how the cluster size, frequency, amplitude distribution of exciting waves, scanning in the sector of angles affect the shape of the amplitude-phase distribution of the field in the array aperture. It was shown that the field distribution in the emitting aperture may differ significantly from the distribution of exciting waves at the inputs of the array elements. An explanation of this effect based on the representation of the field in the array in the form of a superposition of its eigen waves was proposed.

Keywords: Ultra wideband array, TEM horn, phased array, Floquet channel, cluster excitation mode

БИФОКАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДВУХ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ РЕШЕТОК

© 2024 г. В. А. Калошин^{a,*}, Чинь Ван Туан^b^aИнститут радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125007 Российская Федерация^bМосковский физико-технический институт (НИУ),
Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московской обл., 141700 Российская Федерация

*E-mail: vak@cplire.ru

Поступила в редакцию 06.07.2023 г.

После доработки 17.11.2023 г.

Принята к публикации 25.11.2023 г.

Развита методика точного решения задачи геометрооптического синтеза бифокальной системы двух плоских отражательных решеток, основанная на последовательном нахождении распределения эйконала, внесенного различными участками решеток, с его заданием на начальном участке одной из решеток, при этом внесенный эйконал на начальном участке другой решетки находится в результате синтеза выходного плоского фронта для центрального положения луча. Методика обеспечивает непрерывность функций, описывающих распределения внесенных эйконалов, а также их первой и второй производной (по одной координате) на границах участков. Исследована зависимость величины среднеквадратической аберрации эйконала на выходе системы от параметров решеток. В качестве примера применения развитой методики синтезированы и оптимизированы бифокальные системы для угла зрения 40° и 65° . Проведено исследование характеристик излучения антенны на основе синтезированных и оптимизированных бифокальных систем.

Ключевые слова: бифокальные системы, отражательные решетки, синтез, оптимизация

DOI: 10.31857/S0033849424030024, **EDN:** JVOATR

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возрос интерес к исследованиям систем двух плоских отражательных антенных решеток [1–6], в том числе в качестве квазиоптических диаграммообразующих систем (ДОС) для многолучевых антенн. В частности, в работах [4–6] для формирования в плоскости симметрии антенны многолучевой диаграммы использована бифокальная офсетная система двух плоских отражательных решеток. Оптимизация фазовых распределений в отражательных решетках с целью минимизации аберраций при отклонении луча за счет смещения облучателя из фокуса системы проведена в этих работах с использованием численной процедуры. В результате в работе [5] реализовано усиление антенны 48 дБ в угловом секторе 8.6° .

Целью данной работы является разработка методики точного синтеза бифокальной системы двух плоских отражательных решеток, оптимизация параметров с целью минимизации среднеквадратичной аберрации эйконала на выходе системы при смещении облучателя из фокуса ортогонально плоскости симметрии системы и исследование характеристик антенн на основе синтезированных и оптимизированных бифокальных систем.

1. СИНТЕЗ ДВУХМЕРНОЙ БИФОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ РЕШЕТОК

Рассмотрим сначала двумерную задачу синтеза бифокальной системы двух отражательных решеток, с одной стороны которой расположены два симметричных относительно оси y (рис. 1) фокуса (точки идеальной фокусировки F_1 и F_2).

Пусть распределения эйконала, внесенного вспомогательной 1 и основной 2 решетками (далее — решетка 1 и решетка 2) в результате двукратного прохождения сигналов через линии задержки каждой из решеток, описываются неизвестными функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Зададим начальный участок распределения эйконала, внесенного решеткой 1, $f_{10}(x) = ax^2$ ($-x_0 \leq x \leq x_0$), а решеткой 2 — $f_{20}(x)$. Задача синтеза состоит в определении функций $f_{10}(x)$ и $f_{20}(x)$.

Потребуем, чтобы лучи источника, расположенного в точке фокуса F_0 с координатами $(0, d - f_0)$, после двух отражений от начальных участков решеток сформировали линейный фронт $y = h$, где h — произвольная постоянная, d — глубина системы, f_0 — расстояние от фокуса F_0 до решетки 1. При этом центральный луч, падающий вдоль оси y на решетку 1 в точке H с координатами $(0, d)$,

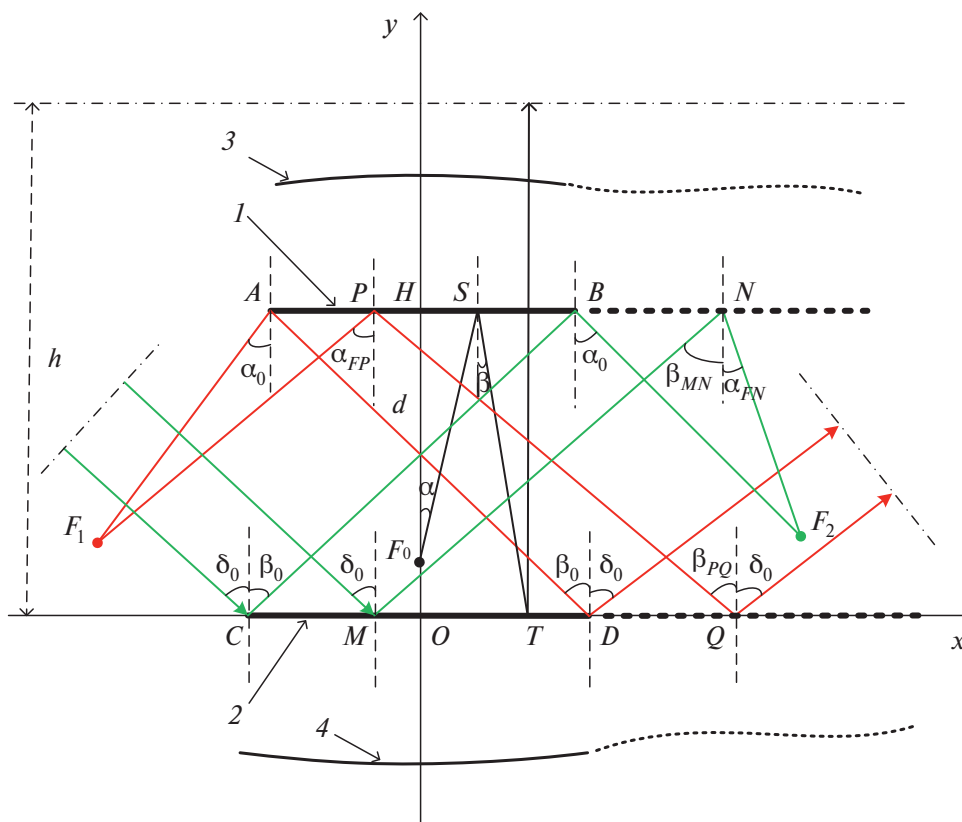


Рис. 1. Двумерная бифокальная система: 1 — вспомогательная решетка; 2 — основная решетка; 3 — распределение эйконала, внесенного решеткой 1; 4 — распределение эйконала, внесенного решеткой 2.

отражается от нее, падает на решетку 2 в точке O , снова отражается и идет вдоль оси y . Эйконал этого луча от источника до фронта имеет вид

$$L_0 = 2d - f_0 + f_{10}(0) + f_{20}(0) + h,$$

где $f_{10}(0)$ и $f_{20}(0)$ — внесенные эйконалы в точках H , O соответственно.

Другой луч, выходящий из точки F_0 , падает на решетку 1 в точке S , отражается от нее, падает на решетку 2 в точке T и отражается от нее параллельно оси y . При этом его эйконал определяется формулой

$$L = F_0S + ST + f_{10}(x_S) + f_{20}(x_T) + h,$$

где $f_{10}(x_S)$ и $f_{20}(x_T)$ — эйконалы, внесенные в точках x_S и x_T соответственно.

F_0S — расстояние от точки F_0 до точки S , а $ST = d / \cos \beta$ — расстояние от точки S до точки T .

При этом угол α падения луча на решетку 1 и угол β отражения (см. рис. 1) связаны формулой

$$\beta = \arcsin(\sin \alpha + f'_{10}(x_S)),$$

где $\alpha = \arctg(x_S / (d - f_0))$, $f'_{10}(x_S)$ — первая производная функции f_{10} в точке S .

Зная угол β , нетрудно найти координаты точки T (см. рис. 1):

$$x_T = dtg\beta + x_S.$$

Потребуем, чтобы все лучи, выходящие из фокуса F_0 после двух отражений от решеток, были параллельны оси y и формировали в результате линейный фронт на выходе системы. Для этого необходимо равенство эйконалов всех лучей (от источника до фронта). Потребуем, чтобы эйконалы всех лучей были равны эйконалу центрального луча:

$$\begin{aligned} 2d - f_0 + f_{10}(0) + f_{20}(0) &= \\ &= F_0S + ST + f_{10}(x_S) + f_{20}(x_T). \end{aligned}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} f_{20}(x_T) &= 2d - f_0 + f_{10}(0) + \\ &+ f_{20}(0) - F_0S - ST - f_{10}(x_S). \end{aligned}$$

Из выражения (3) определим первую производную функцию f_2 в точке T

$$f'_{20}(x_T) = -\sin \beta.$$

Множество точек T образует начальный участок решетки 2.

Далее определим координаты фокусов F_1 и F_2 таким образом, чтобы луч плоской волны, падающий на решетку под углом δ_0 к оси y , после отражения в точке $D(x_0, 0)$ попадал в точку $A(-x_0, d)$, а после отражения в точке A — в фокус F_1 . Из геометрии, представленной на рис. 1, нетрудно найти координаты этого фокуса, а также фокуса F_2 , учитывая, что он симметричен фокусу F_1 относительно оси y :

$$x_{F_1} = x_A + f \sin \alpha_0, \quad y_{F_1} = y_A - f \cos \alpha_0,$$

$$x_{F_2} = -x_{F_1}, \quad y_{F_2} = y_{F_1},$$

где $x_A = -x_0$, $y_A = d$; f — расстояние от края начального участка до фокуса, $\alpha_0 = \arcsin(\sin \beta_0 - f'_{10}(x_A))$ — угол между осью y и прямой, соединяющей фокус F_1 с краем (точкой A) начального участка решетки 1. При этом

$$\beta_0 = \arctg((x_D - x_A) / d).$$

Из геометрии на рис. 1 следует, что угол выхода луча из системы определяется формулой

$$\delta_0 = \arcsin(\sin \beta_0 + f'_{20}(x_D)),$$

где $f'_{20}(x_D)$ — первая производная функции f_2 в точке D .

Для определения нового участка решетки 2 предположим, что луч из фокуса F_1 падает на начальный участок решетки 1, отражается от нее в точке P , падает на решетку 2 в точке Q и отражается под углом δ_0 (см. рис. 1). При этом угол между осью y и лучом, падающим из точки F_1 в точку P

$$\alpha_{FP} = \arctg((x_P - x_{F_1}) / f \cos \alpha_0),$$

а угол между осью y и лучом, отраженным от решетки в точке P

$$\beta_{PQ} = \arcsin(\sin \alpha_{FP} + f'_{10}(x_P)).$$

Координаты точки Q при этом определяются формулой

$$x_Q = x_P + d \tan \beta_{PQ}; \quad y_Q = 0.$$

Потребуем равенство эйконолов всех лучей, которые выходят из фокуса F_1 и после отражения от решетки идут параллельно (под углом δ_0 к оси y)

$$f + AD + d_D + f_{10}(x_A) + f_{20}(x_D) =$$

$$= F_1P + PQ + d_Q + f_{10}(x_P) + f_2(x_Q),$$

где d_D , d_Q — расстояние соответственно от точек D и Q до фронта.

Решение уравнения (12) имеет вид

$$f_2(x_Q) = f + AD + d_D + f_{10}(x_A) + f_{20}(x_D) -$$

$$- (F_1P + PQ + d_Q + f_{10}(x_P)).$$

Множество точек Q образует новый участок решетки 2. При этом

$$f'_2(x_Q) = \sin \delta_0 - \sin \beta_{PQ}.$$

Для определения эйконола на новом участке решетки 1 рассмотрим падение волны с линейным фронтом на решетку 2. Пусть луч, падающий на начальный участок решетки 2 в точке M под углом δ_0 к оси y , отражается от решетки 2 и падает на решетку 1 в точке N , снова отражается и проходит через фокус F_2 (см. рис. 1). Угол между осью y и отраженным лучом в точке M получаем по формуле

$$\beta_{MN} = \arcsin(\sin \delta_0 + f'_{20}(x_M)).$$

При этом координаты точки N

$$x_N = x_M + d \tan \beta_{MN}; \quad y_N = d.$$

Приравнявая эйконолы лучей, получим уравнение

$$f + BC + d_C + f_{10}(x_B) + f_{20}(x_C) =$$

$$= F_2N + MN + d_M + f_1(x_N) + f_{20}(x_M),$$

где d_C , d_M — расстояние от точек C и M соответственно до фронта плоской волны.

Решение этого уравнения имеет вид

$$f_1(x_N) = f + BC + d_C + f_{10}(x_B) + f_{20}(x_C) -$$

$$- (F_2N + MN + d_M + f_{20}(x_M)).$$

При этом

$$f'_1(x_N) = \sin \alpha_{FN} - \sin \beta_{MN},$$

где $\alpha_{FN} = \arctg((x_N - x_{F_2}) / f \cos \alpha_0)$.

Множество точек N образует новый участок решетки 1.

Для обеспечения непрерывности амплитудного распределения отраженных от решеток волн в первом приближении геометрической оптики необходимо, чтобы вторые производные функций, описывающих распределение эйконолов, были непрерывными. Так как координаты точки N определяются через координаты точки M , вторую производную эйконола, внесенного вторым участком решетки 1 в точку N , определяем дифференцированием его первой производной в точке N по координате x_M :

$$f''_1(x_N) = \frac{\partial f'_1(x_N)}{\partial x_M} / \frac{\partial x_N}{\partial x_M},$$

где

$$\frac{\partial x_N}{\partial x_M} = 1 + \frac{d \beta'_{MN}}{\cos^2(\beta'_{MN})},$$

$$\beta'_{MN} = \frac{f'_{20}(x_M)}{\sqrt{1 - (\sin \delta_0 + f'_{20}(x_M))^2}},$$

$$\alpha'_{FN}(x_M) = \frac{-f \cos(\alpha_0) (\cos^2(\beta_{MN}) + d\beta'_{MN})}{\cos^2(\beta_{MN}) (f^2 \cos^2(\alpha_0) + (x_{F_2} - x_N)^2)}.$$

В результате получаем

$$f_1''(x_N) = \frac{(\alpha'_{FN}(x_M) \cos(\alpha_{FN}) - \beta'_{MN} \cos(\beta_{MN})) \cos^2(\beta_{MN})}{\cos^2(\beta_{MN}) + d\beta'_{MN}}.$$

Для того чтобы вторая производная на стыках участков решетки 1 была непрерывной, значение второй производной первого участка в точке В с координатами (x_0, d) должно равняться значению второй производной в точке N, когда точки M и C совпадают. В результате получим уравнение

$$\frac{(\alpha'_{FN}(x_M) \cos(\alpha_{FN}) - \beta'_{MN} \cos(\beta_{MN})) \cos^2(\beta_{MN})}{\cos^2(\beta_{MN}) + d\beta'_{MN}} - f_{10}''(x_0) = 0.$$

Решение уравнения (20) определяет коэффициент a , обеспечивающий непрерывность второй производной в точке В.

2. СИНТЕЗ ТРЕХМЕРНОЙ БИФОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ РЕШЕТОК

Рассмотрим трехмерную задачу синтеза бифокальной системы двух отражательных решеток, показанной на рис. 2.

Основная решетка 2 расположена в плоскости XY , а вспомогательная решетка 1 расположена под углом ξ к этой плоскости. При этом плоскость YZ является плоскостью симметрии задачи. При расположении источника сферической волны в двух симметричных относительно этой плоскости фокусах (F_1 и F_2) с другой стороны бифокальной системы формируются два симметричных относительно плоскости YZ плоских фронта.

Пусть распределение внесенного эйконала начальным участком решетки 1 имеет вид $L_{10} = ax^2 + by^2$, где коэффициент b полагается заданным в начале синтеза. Для определения коэффициента a зададим также параметры: размер $2x_0$ начального участка решетки 1 при $y = 0$, расстояние f от краев этого участка до фокусов и расстояние f_0 от точки фокуса F_0 для начальных участков до решетки 1. Применяя алгоритм, описанный в разд. 1, находим коэффициент a и координаты точек F_1, F_2 .

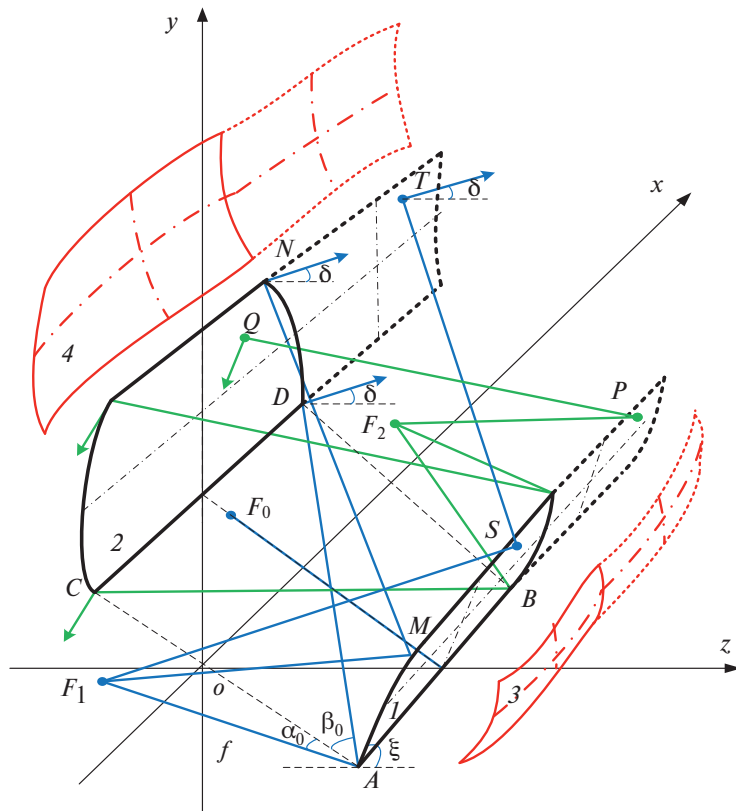


Рис. 2. Трехмерная бифокальная система: 1 — вспомогательная решетка; 2 — основная решетка; 3 — распределение эйконала внесенного решеткой 1; 4 — распределение эйконала внесенного решеткой 2.

Найдем распределение эйконала, внесенного начальным участком решетки 2, $L_{20}(x, y)$. Единичная нормаль к одному из выходных фронтов имеет вид

$$\vec{n}_F = (\sin \delta, 0, \cos \delta),$$

где δ — угол выхода луча (см. рис. 2). Эйконал соответствующего луча имеет вид

$$L_0 = f + AD + L_{10}(A) + L_{20}(D) + h - (\vec{OD}, \vec{n}_F),$$

где h — расстояние от начала системы координат до фронта, $L_{10}(A)$, $L_{20}(D)$ — эйконалы в точках A , D соответственно.

Предположим, что луч из фокуса F_1 попадает в точку M ($y_M \neq 0$), которая находится на границе начального участка решетки 1. После отражения в точке M луч проходит через точку N , лежащую на границе начального участка решетки 2. Лучевой вектор отраженного от решетки 1 луча имеет вид

$$\vec{n}_{MN} = \left(\frac{\partial L_M}{\partial x}, \frac{\partial L_M}{\partial y}, \sqrt{1 - \left(\frac{\partial L_M}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial L_M}{\partial y} \right)^2} \right),$$

где

$$L_M = F_1M + L_{10}(M), \quad L_{10}(M) = ax_M^2 + by_M^2,$$

F_1M — расстояние от точки F_1 до точки M ,

$$\frac{\partial L_M}{\partial x} = \frac{\partial L_{10}}{\partial x_M} + \frac{x_M - x_{F_1}}{F_1M},$$

$$\frac{\partial L_M}{\partial y} = \frac{\partial L_{10}}{\partial y_M} + \frac{y_M - y_{F_1}}{F_1M} \sin \xi + \frac{z_M - z_{F_1}}{F_1M} \cos \xi.$$

Координаты точки N определяются формулой

$$\vec{ON} = \vec{OM} - \vec{n}_{MN} \frac{(\vec{OM}, \vec{Z})}{(\vec{n}_{MN}, \vec{Z})},$$

где $\vec{Z}$ — единичная нормаль к плоскости XY , а эйконал луча имеет вид

$$L_M = F_1M + MN + L_{10}(M) + L_{20}(N) + h - (\vec{ON}, \vec{n}_F),$$

где $L_{20}(N)$ — внесенный эйконал в точке N , а единичная нормаль $\vec{n}_F$ определена в формуле (21).

После отражения в точке N луч выходит из нее параллельно $\vec{n}_F$

$$\vec{n}_{NF} = \left(\frac{\partial L_N}{\partial x}, \frac{\partial L_N}{\partial y}, \sqrt{1 - \left(\frac{\partial L_N}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial L_N}{\partial y} \right)^2} \right),$$

где $\vec{n}_{NF}$ — единичный выходной вектор луча в точке N ,

$$L_N = MN + L_{20}(N),$$

MN — расстояние от точки M до точки N ,

$$\frac{\partial L_N}{\partial x} = \frac{\partial L_{20}}{\partial x_N} + \frac{x_N - x_M}{MN},$$

$$\frac{\partial L_N}{\partial y} = \frac{\partial L_{20}}{\partial y_N} + \frac{y_N - y_M}{MN}.$$

Учитывая условие параллельности всех лучей, выходящих из системы, получаем уравнение

$$\frac{nx_F}{nz_F} - \frac{nx_{NF}}{nz_{NF}} = 0,$$

где nx_F , nx_{NF} — проекции векторов $\vec{n}_F$, $\vec{n}_{NF}$ на ось x , а nz_F , nz_{NF} — проекции векторов на ось z .

Решая с использованием численной процедуры уравнение (27), находим зависимость $x_M(y_M)$, которая определяет границу начального участка решетки 1. Зная координаты точки M на этой границе и используя формулы (24), определяем вектор $\vec{ON}$ и соответствующую границу $x_N(y_N)$ начального участка решетки 2. Из условия равенства эйконалов находим величину

$$L_{20}(N) = L_0 - (F_1M + MN + L_{10}(M) + h - (\vec{ON}, \vec{n}_F)),$$

которая определяет начальный участок решетки 2.

Множества точек M , N образуют границы начальных участков решеток 1 и 2 соответственно.

Для синтеза нового участка решетки 2 предположим, что луч из фокуса F_1 падает на решетку 1 в точке S . После отражения луч выходит из решетки в точке T (см. рис. 2). Эти координаты можно найти по формулам (21)–(28) соответствующей заменой обозначений. Множество точек T образует новый участок решетки 2.

Для синтеза нового участка решетки 1 рассмотрим падение плоского фронта, нормаль к которому параллельна плоскости XZ на начальный участок решетки 2. Пусть луч падает на эту решетку в точке Q под углом δ к плоскости XY (см. рис. 2). Его лучевой вектор имеет вид

$$\vec{u}_Q = (-\sin \delta, 0, \cos \delta).$$

Этот луч отражается решеткой 2, отражается в точке P решетки 1 и проходит через фокус F_2 . Лучевой вектор луча PQ имеет вид

$$nx_{PQ} = \frac{\partial L_2}{\partial x_Q} + \sin \delta, \quad ny_{PQ} = \frac{\partial L_2}{\partial y_Q},$$

$$nz_{PQ} = \sqrt{1 - nx_{PQ}^2 - ny_{PQ}^2},$$

где nx_{PQ} , ny_{PQ} , nz_{PQ} — проекции вектора $\vec{n}_{PQ}$.

Координаты точки P определяются формулами

$$x_P = x_Q + nx_{PQ} \frac{b \sin \xi + y_Q \cos \xi - z_Q \sin \xi}{nz_{PQ} \sin \xi - ny_{PQ} \cos \xi},$$

$$y_P = y_Q + ny_{PQ} \frac{b \sin \xi + y_Q \cos \xi - z_Q \sin \xi}{nz_{PQ} \sin \xi - ny_{PQ} \cos \xi},$$

$$z_P = z_Q + n z_{PQ} \frac{b \sin \xi + y_Q \cos \xi - z_Q \sin \xi}{n z_{PQ} \sin \xi - n y_{PQ} \cos \xi}.$$

Эйконал соответствующего луча имеет вид

$$L_Q = d_Q + PQ + PF_2 + L_2(Q) + L_1(P),$$

где d_Q — расстояние от точки Q до фронта плоской волны, $L_2(Q)$, $L_1(P)$ — эйконы в точках Q , P соответственно.

Приравнявая (22) и (32), получаем уравнение

$$L_1(P) = L_0 - (d_Q + PQ + PF_2 + L_2(Q)).$$

Производные функции в точке P определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial x_P} &= \frac{x_{F_2} - x_P}{F_2 P} - \frac{x_P - x_Q}{PQ}, \\ \frac{\partial L_1}{\partial y_P} &= \frac{(y_{F_2} - y_P) \sin \xi + (z_{F_2} - z_P) \cos \xi}{F_2 P} - \\ &\quad - \frac{(y_P - y_Q) \sin \xi + (z_P - z_Q) \cos \xi}{PQ}. \end{aligned}$$

Множество точек P образует новый участок решетки 1.

Для определения следующих участков решеток применим такой же алгоритм, используя синтезированные участки в качестве начальных.

3. АНАЛИЗ АБЕРРАЦИЙ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТРЕХМЕРНОЙ БИФОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ РЕШЕТОК

Для проведения процедуры синтеза, анализа aberrаций и оптимизации системы необходимо определить набор исходных параметров: расстояние между решетками d , полуразмер начального отрезка решетки 1 x_0 , расстояние f от конца начального отрезка решетки 1 до фокуса F_1 , расстояние f_0 от решетки 1 до фокуса F_0 . Далее используем описанный выше алгоритм для определения начальных участков решетки, затем повторим этот алгоритм m раз, чтобы получить новые участки решеток. В результате находим распределения внешнего эйконала на $2m+1$ участке решеток.

Для анализа качества синтеза и оптимизации параметров бифокальной системы найдем среднеквадратическую aberrацию (СКА) эйконала на выходе, а также фокальную кривую, которая обеспечивает минимальное значение СКА. Формула для определения нормированной величины СКА (σ) имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (L_i - L_0)^2},$$

где L_i — эйконал i -го луча; n — количество учтенных лучей, D — размер эллиптической апертуры решетки 2 вдоль большой оси; L_0 — эйконал опорного луча (относительно которого СКА имеет минимальное значение).

Для вычисления СКА бифокальной системы необходимо вычислить эйконы n лучей, а для этого требуется знать направление фронта и значение эйконала L_0 опорного луча.

В случае смещения источника из фокуса углы выхода лучей и положения ортогональных им фронтов будут различными. Рассчитаем траектории n лучей с разными углами выхода и из них выберем в качестве опорных несколько лучей, выходящих вблизи центра решетки 2. Затем, используя формулу (36), рассчитаем СКА относительно каждого опорного луча с соответствующим (ортогональным) фронтом и из полученных значений СКА выберем минимальное. Уточнить значение СКА можно, если ввести новые опорные лучи (вблизи найденного) и снова найти минимальное значение СКА.

Для определения фокальной кривой бифокальной системы, необходимо найти геометрическое место положений источника, которое обеспечивает минимальное значение СКА. Декартовы и полярные координаты источника связаны следующими формулами:

$$x = \rho \sin(\psi), z = d - \rho \cos(\psi),$$

где ρ — радиальная, а ψ — угловая координата (рис. 3).

Задача состоит в нахождении оптимальной функции $\rho(\psi)$. Для этого, используя в качестве начальных точек фокусы системы и стандартную численную процедуру поиска минимума, находим ρ для нескольких значений угла ψ . Затем, применяя сплайн-интерполяцию, получаем функцию $\rho(\psi)$, которая определяет фокальную кривую.

Далее исследуем СКА бифокальной системы в зависимости от параметров f и $p = d - f_0$ для двух значений параметра x_0 , которые при заданной величине d определяют угол зрения. Линии уровня СКА для $d = 1$ и $x_0 = 0.15$ и $x_0 = 0.205$, соответствующих значениям угла зрения 40° и 65° , в зависимости от параметров f и p показаны на рис. 4а, 4б. Из рисунков видно уменьшение величины СКА по мере приближения параметров системы к границам областей существования решения задачи синтеза.

На рис. 5 представлены графики зависимости от угла зрения СКА бифокальных систем, синтезированных и оптимизированных для угла зрения 40° и 65° .

Как видно на рисунке, минимальные значения СКА для первой системы в пределах угла зрения 40° составляют 3.2×10^{-4} , а в пределах угла зрения 65° для второй системы — 6.5×10^{-4} .

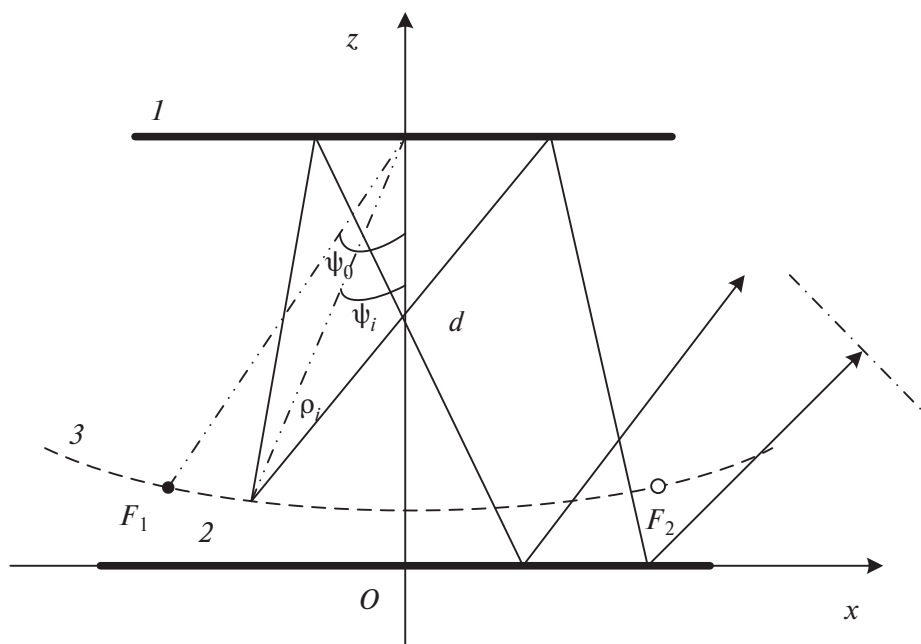


Рис. 3. Геометрия системы с фокальной кривой: 1 — решетка 1; 2 — решетка 2; 3 — фокальная кривая.

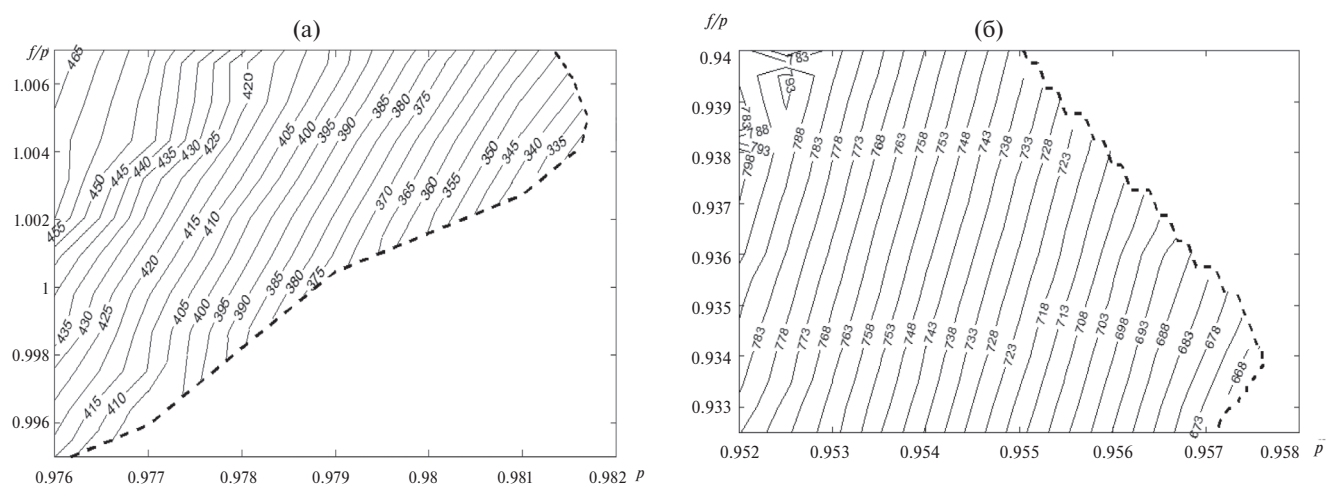


Рис. 4. Линии уровня величины $10^6\sigma$ в зависимости от параметров p и f/p : (а) — угол зрения 40° ($x_0 = 0.15$, $d = 1$), (б) — угол зрения 65° ($x_0 = 0.205$, $d = 1$).

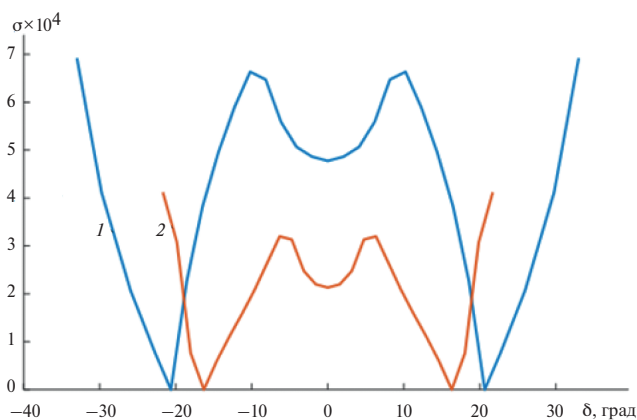


Рис. 5. Зависимость величины $10^4\sigma$ оптимальных бифокальных систем от угла зрения: $x_0 = 0.205$, $f/p = 0.9334$, $p = 0.9575$ (кривая 1); $x_0 = 0.15$, $f/p = 1.0043$, $p = 0.9815$ (кривая 2).

4. АНАЛИЗ БИФОКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

Рассмотрим антенну на основе бифокальной системы, синтезированной и оптимизированной для угла зрения 40° (рис. 6). В качестве облучателя используем скалярный рупор с амплитудным распределением в апертуре

$$A(\rho) = J_0\left(\delta_0 \frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

где J_0 — бесселева функция с нулевым индексом, радиус в полярной системе координат, ρ_0 — радиус апертуры рупора, $\delta_0 = 2.4048$ — первый корень производной функции Бесселя с нулевым индексом.

Амплитуду электрического поля в дальней зоне найдем с использованием скалярного приближения Кирхгофа (физической оптики) [7]

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi r} \left| \int_S E_S \left[(\sin\varphi + \cos\theta \sin\varphi) \vec{\theta}_0 + (\cos\theta \cos\varphi + \sin\varphi) \vec{\varphi}_0 \right] \times \exp[jk \sin\theta(x \cos\varphi + y \sin\varphi)] dx dy \right|,$$

где k — волновое число, а интегрирование проводится по поверхности S апертуры облучателя. Подставляя в интеграл (38) в качестве E_S амплитудное распределение (37), находим диаграмму направленности облучателя

$$D(\theta) = \frac{\delta_0^2 J_0(k\rho_0 \sin\theta) (1 + \cos\theta)}{\delta_0^2 - (k\rho_0 \sin\theta)^2} \frac{1}{2},$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя. Закон сохранения энергии в приближении геометрической оптики имеет вид $D^2(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = Q(x, y) dx dy$. В результате для распределения амплитуды отраженного от решетки 2 поля получаем

$$A(x, y) = \sqrt{D^2(\theta, \varphi) \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)},$$

где

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial x_M} \frac{\partial x_M}{\partial x} = \frac{(x_M - x_0) FM_0^2}{MM_0(MM_0^2 + FM_0^2)},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial\theta}{\partial y_M} \frac{\partial y_M}{\partial y} =$$

$$= \left(1 + \frac{n_y \cos\xi}{n_z \sin\xi - n_y \cos\xi} \right) \frac{(y_M - y_0) FM_0^2}{MM_0(MM_0^2 + FM_0^2)},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_M} \frac{\partial x_M}{\partial x} = \frac{-(y_M - y_0)}{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_M} \frac{\partial y_M}{\partial y} =$$

$$= \frac{(x_M - x_0)}{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2} \left(1 + \frac{n_y \cos\xi}{n_z \sin\xi - n_y \cos\xi} \right),$$

а компоненты n_x , n_y , n_z определены формулой (30).

Амплитудно-фазовое распределение отраженного от решетки 2 поля имеет вид

$$E_S = A(x, y) \exp(-jkL),$$

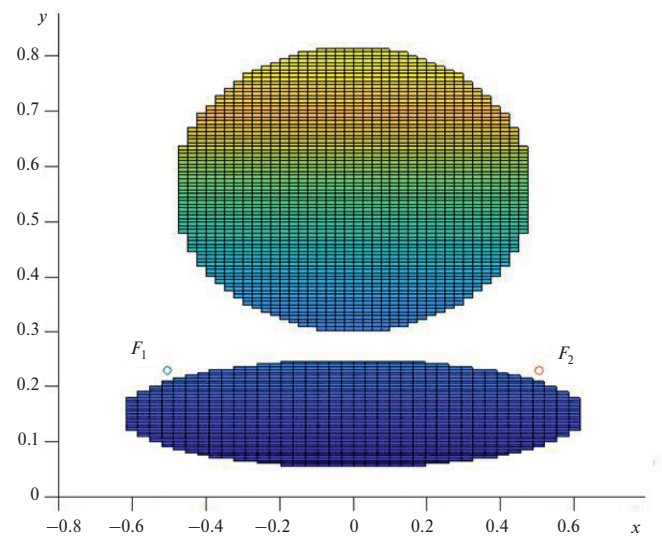


Рис. 6. Проекция трехмерной бифокальной системы на плоскость XY .

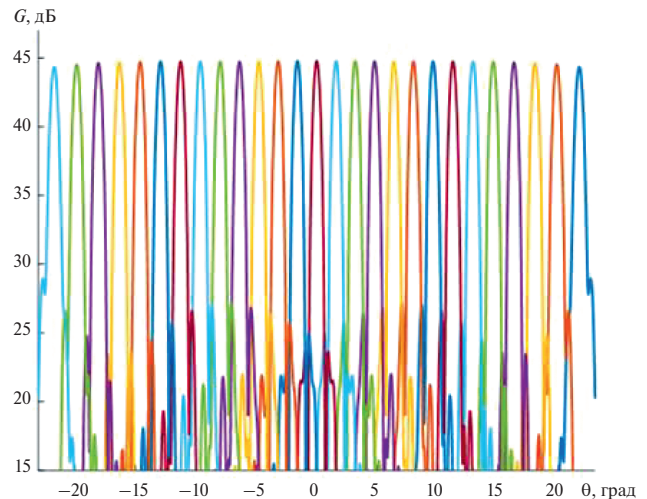


Рис. 7. Диаграммы направленности лучей бифокальной антенны в H -плоскости.

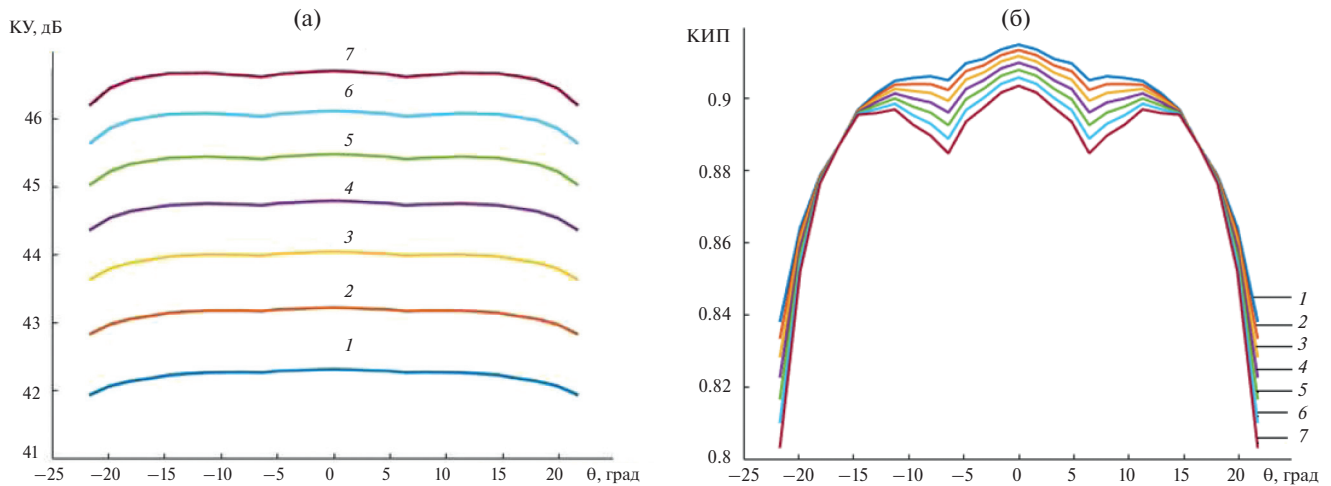


Рис. 8. Зависимости коэффициентов усиления (а) и апертурного КИПа (б) от угла зрения на частотах: 18 (1), 20 (2), 22 (3), 24 (4), 26 (5), 28 (6) и 30 ГГц (7).

где L — эйконал луча от облучателя до выхода из системы в точке решетки 2 с координатами x , y . Подставляя это выражение в формулу (38) и интегрируя по всей поверхности решетки 2, находим диаграмму направленности бифокальной системы в приближении Кирхгофа. На рис. 7 приведены результаты расчета диаграммы направленности бифокальной антенны с облучателем диаметром 25 мм, габаритами решетки 2, равными 1×0.52 м, $f_1 = f_2 = 0.9862$ м, $d = 1$ м на частоте 24 ГГц при перемещении облучателя по фокальной кривой.

На рис. 8а и 8б показаны зависимости соответственно коэффициента усиления (КУ) и апертурного коэффициента использования поверхности (КИП) бифокальной антенны от угла зрения на семи частотах.

Как видно из рис. 8, в угловом секторе 40° уровень боковых лепестков диаграммы направленности лучей ниже — 15.8 дБ, а величина КИП выше уровня 0.84 в полосе частот от 18 до 30 ГГц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Разработанная методика позволяет синтезировать и оптимизировать бифокальные системы двух отражательных решеток по минимуму СКА.

2. Синтезированные и оптимизированные бифокальные системы двух отражательных решеток для углов зрения 40° и 65° имеют среднеквадратическую абберацию менее 3.2×10^{-4} и 6.5×10^{-4} соответственно.

3. Модель антенны в приближении Кирхгофа на основе синтезированной и оптимизированной бифокальных систем двух отражательных решеток в полосе частот от 18 до 30 ГГц обеспечивает КУ более 42 дБ и апертурный КИП больше 0.84 в угловом секторе 40° .

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leberer R., Menzel W. // IEEE Trans. 2005. AP-53. № 11. P. 3534.
2. Tienda C., Encinar J.A., Carrasco E., Arrebola M. // J. Wireless Networking and Commun. 2012. V. AP-1. № 2. P. 9.
3. Tienda C., Arrebola M., Encinar J. A. // Intern. J. Antennas and Propagation. 2012. V. 2012. № 125287. P. 10. doi.org/10.1155/2012/125287.
4. Martinez-de-Rioja E., Encinar J.A., Florencio R., Tienda C. // IEEE Trans. 2019. V. AP-67. № 1. P. 450.
5. Martinez-de-Rioja E., Encinar J.A., Pino A., Gonzalez-Valdes B. // 13th Eur. Conf. on Antennas and Propagation (EuCAP). 2019. Poland. 31/3/2019-05/4/2019. https://ieeexplore.ieee.org/document/8740142.
6. Martinez-de-Rioja E., Encinar J.A., Toso G. Electronics. 2020. V. AP-9. № 6. P. 961.
7. Фрадин А.З. Антенны сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1957.

BIFOCAL SYSTEM OF TWO REFLECT ARRAYS**V. A. Kaloshin^{a,*}, Trinh Van Tuan^b**

^a*Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics RAS,
st. Mokhovaya, 11, build. 7, Moscow, 125007 Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Institutsky per., 9, Dolgoprudny,
Moscow region, 141700 Russia*

**E-mail: vak@cplire.ru*

Received July 6, 2023; revised November 17, 2023; accepted November 25, 2023

A technique has been developed for accurately solving the problem of geometric-optical synthesis of a bifocal system of two flat reflect arrays, based on the sequential determination of the distribution of the eikonal introduced by different sections of the arrays, with its assignment at the initial section of one of the arrays, while the introduced eikonal at the initial section of the other array is found as a result of synthesis of the output flat front for the central position of the feed. The technique ensures the continuity of functions describing the distributions of introduced eikonals, as well as their first and second derivatives (along one coordinate) at the boundaries of sections. The dependence of the value of the mean square eikonal aberration at the system output on the arrays parameters has been studied. As an example of the application of the developed technique, the bifocal systems for visual angles of 40° and 65° were synthesized and optimized. A study of the radiation characteristics of an antenna based on synthesized and optimized bifocal systems was carried out.

Keywords: bifocal systems, reflect arrays, synthesis, optimization

УДК: 533.9;537.8;621.396.67.095.3;621.396.674.3

ПЛАЗМЕННАЯ АНТЕННА С ЧАСТОТНОЙ ПЕРЕСТРОЙКОЙ

© 2024 г. И. М. Минаев^{а,*}, О. В. Тихоневич^а, Ю. Е. Векшин^б^аИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
ул. Вавилова, 38, Москва, 119991 Российская Федерация^б16 Центральный научно-исследовательский испытательный институт МО РФ им. маршала А.И. Белова,
Мытищи-6, Московской обл., 141006 Российская Федерация

*E-mail: minaev1945@mail.ru

Поступила в редакцию 06.03.2023 г.

После доработки 24.04.2023 г.

Принята к публикации 19.05.2023 г.

Исследован разряд ограниченной длины (“плазменный столб”) в газоразрядной трубке, наполненной разреженным газом. Разряд создается за счет одностороннего возбуждения протяженного высокочастотного разряда, поддерживаемого распространяющейся азимутально-симметричной модой поверхностной волны. Показано, что “плазменный столб” может быть эффективной плазменной антенной на рабочих частотах ниже плазменной частоты (ω_p), с частотной перестройкой за счет изменения длины “плазменного столба”.

Ключевые слова: плазменная антенна, плазменный столб, высокочастотный разряд, поверхностная волна, коэффициент стоячей волны

DOI: 10.31857/S0033849424030033, EDN: JVKKXH

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В ряде работ [1–9] показано, что использование плазмы в качестве токонесущего элемента позволяет создавать плазменные антенны при выполнении условия

$$n_e \gg n_{кр}, \quad (1)$$

где $n_{кр}$ — концентрация электронов, при которой рабочая частота ω_p равна плазменной частоте ω_p ,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m}}, \quad (2)$$

e — заряд, m — масса электрона, n_e — концентрация электронов.

Плазменные антенны из газоразрядных трубок [4], в отличие от металлических, допускают регулировку электродинамических параметров электронным способом. Разряд в газоразрядной трубке поддерживается излучением передатчика на частоте ω_p .

Отличительная особенность такого способа возбуждения — возможность изменения длины плазменной области (плазменного столба) при изменении мощности излучения передатчика [5, 7].

Цель данной работы — исследовать возможность частотной перестройки антенны за счет изменения длины “плазменного столба”.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Плазменный столб является эффективным излучателем, если выполняется условие $n_e \gg n_{кр}$. Величину n_e можно определить по измерениям сопротивления Z плазменного столба. Комплексное сопротивление Z является функцией рабочей частоты ω_p , частоты электронных столкновений при заданном давлении газа ν_e и концентрации электронов n_e .

Эксперименты проводили с газоразрядной трубкой длиной $\sim \lambda/4$, являющейся макетом плазменных вибраторных антенн, возбуждаемых излучением собственного передатчика на частоте ω_p .

Газоразрядная трубка, длина плазменного слоя в которой зависит от мощности передатчика, является нагрузкой с переменным сопротивлением Z в линии питания (рис. 1) [5]. Измерение коэффициента стоячей волны (КСВ) позволяет определить величину Z в зависимости от длины плазменного слоя.

Измерение КСВ проводили измерителем мощности и КСВ типа SWR-25 МКП.

Плазменный столб в газоразрядной трубке, наполненной разреженным газом, создавался за счет возбуждения протяженного ВЧ-разряда излучением передатчика [5, 7]. В качестве источника высокочастотных колебаний была использована связная радиостанция (Yaesu-857 на частотах 140 и 430 МГц). Максимальная мощность излучения передатчика 50 Вт.

Схема экспериментального стенда приведена на рис. 1 [5].

Экспериментальный стенд установлен на металлическом основании. Вертикально к основанию установлена лампа дневного света (люминесцентная лампа Navigator NTL-T4-16_860-G5, 16W, диаметр 12 (мм), длина с цоколем 455 мм, длина колбы 430 мм, заполненная аргоном при давлении ~1...3 Торр с насыщенными парами ртути). С обратной стороны основания установлена согласующая линия, подключенная коаксиальным кабелем к измерителю КСВ и передатчику. Для калибровки степени согласования линии питания с нагрузкой использовалась стандартная четвертьволновая металлическая антенна. Для измерения КСВ при нагрузке в виде макета плазменной вибраторной антенны макет устанавливали на место металлической антенны. Результаты измерений зависимости КСВ от мощности передатчика (частота 140 МГц) при нагрузке в виде плазменной антенны приведены на рис. 2. Там же приведены результаты измерений зависимости длины плазменного столба от мощности передатчика на частоте 140 МГц.

Измерения КСВ показали, что с увеличением мощности передатчика величина КСВ с металлической антенной остается постоянной, с плазменной антенной одновременно с ростом длины плазменного столба $l_{ст}$ растет величина

на КСВ от 1.83 до 3.0. Максимальное значение КСВ достигается при длине плазменного столба $\sim 0.9 L_T$. При длине “плазменного столба” примерно равной длине газоразрядной трубки: $l_{ст} \approx L_T$ ($\sim \lambda/4$, мощность передатчика ~ 20 Вт), величина КСВ снижается до 2 и остается на этом уровне при дальнейшем увеличении мощности передатчика. Измерение длины плазменного столба на частоте передатчика 140 и 460 МГц производилось по измерениям длины области свечения люминофора газоразрядной трубки (люминесцентной лампы). Длина плазменного столба на частоте 140 и 460 МГц [7] пропорциональна мощности передатчика в указанном диапазоне мощностей.

3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Отличительной особенностью рассматриваемого способа возбуждения плазменного канала является возможность изменения длины плазменной области (плазменного столба) при изменении мощности излучения передатчика [5, 7]. Разряд в газоразрядной трубке представляет собой плазменный волновод, по которому распространяется поверхностная волна (ПВ), значительная часть энергии которой идет на поддержание плазмы с высокой, превышающей критическую для данной частоты, концентрацией электронов ($n_e > n_{кр}$). Это условие обеспечивает распространение ПВ вдоль плазменного столба [7]. Плазменный столб может быть эффективным излучателем (антенной) если частота ω_n в “плазменном столбе” превышает в два-три раза частоту ω_p [1–3].

Для того чтобы определить возможность управления длиной плазменной антенны, представим плазменную область в виде комплексной нагрузки линии питания генератор-плазменная антенна ($Z_{вх} = R_n + R_p + jX_n$ где R_n , R_p и X_n – сопротивление линии, активное и реактивное сопротивление плазменного столба, соответственно), параметры которой меняются в зависимости от длины плазменного столба и плотности плазмы, создаваемой излучением собственного передатчика [6, 7, 11].

Газоразрядная трубка, заполненная плазмой частично или полностью, с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega)$, соответствующей плазме

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_p(\omega_p + i\nu_e)}, \quad (3)$$

где ν_e – частота столкновений электронов с нейтральными частицами, будет иметь импеданс $Z_n(\omega_n)$ [10]

$$Z_n(\omega_n) = i \frac{1}{\omega_p C_0} \frac{\omega_p(\omega_p + i\nu_e) - \omega_n^2}{\omega_p(\omega_p + i\nu_e) - \omega_n^2}, \quad (4)$$

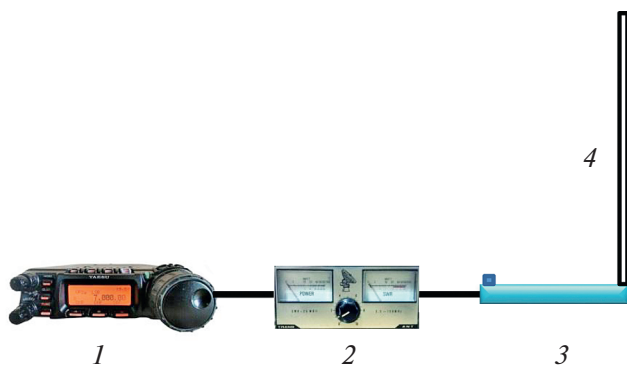


Рис. 1. Схема экспериментального стенда: 1 – передатчик, 2 – измеритель КСВ, 3 – согласующая линия, 4 – газоразрядная лампа.

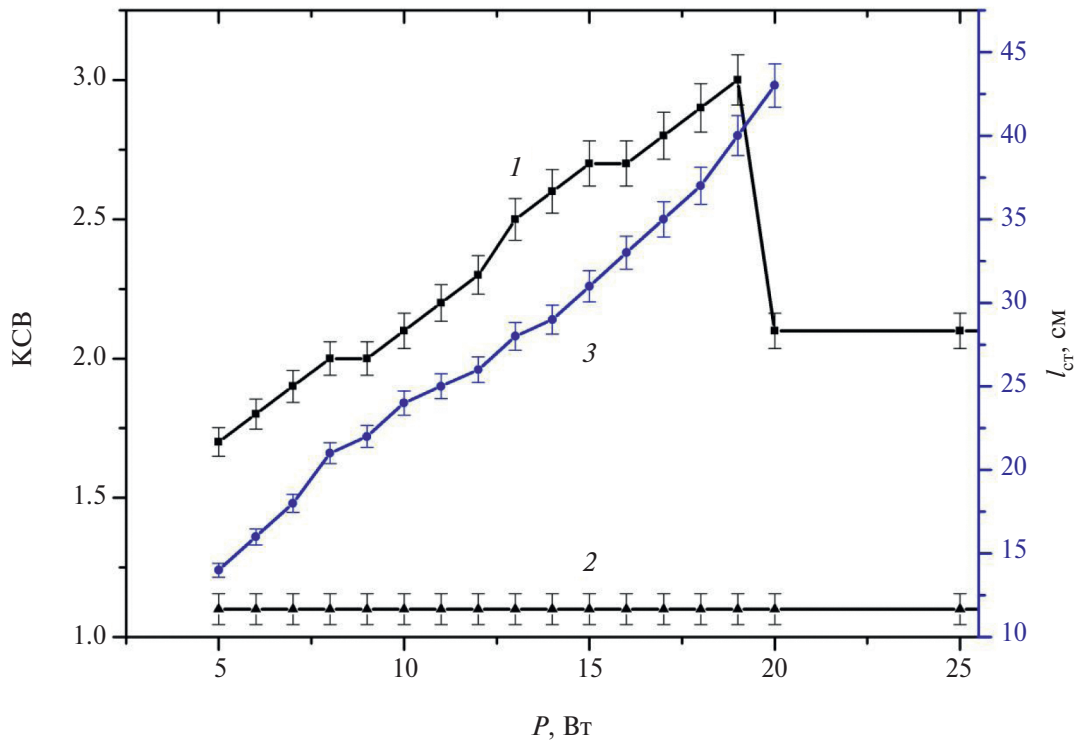


Рис. 2. Зависимость КСВ (1, 2) и длины плазменного столба (3) от мощности передатчика на частоте 140 МГц; 1 – люминесцентная лампа, 2 – штыревая антенна.

где $\omega_r = \omega_p \sqrt{\Delta / L_T}$ – геометрическая плазменная частота, $C_0 = S/4\pi L_T$, Δ – длина вакуумного зазора, v_e – эффективная частота столкновений электронов. Выделяя в (4) действительную и мнимую части, получим активное и реактивное сопротивление $R_p(\omega_p)$ и $X_p(\omega_p)$ газоразрядной трубки, заполненной частично или полностью плазмой:

$$R_p(\omega_p) = \frac{1}{C_0} \frac{v_e(\omega_p^2 - \omega_r^2)}{(\omega_p^2 - \omega_r^2)^2 + \omega_p^2 v_e^2}, \quad (5)$$

$$X_p(\omega_p) = C_0 \frac{(\omega_p^2 - \omega_r^2)^2 + \omega_p^2 v_e^2}{(\omega_p^2 - \omega_r^2)((\omega_p^2 - \omega_r^2) + \omega_p^2 v_e^2)}. \quad (6)$$

На рис. 3 приведены графики реактивной составляющей комплексного сопротивления Z_p для длины плазменного столба $\sim L_T$ и активной составляющей комплексного сопротивления Z_p .

Как видно из рис. 3, величина реактивного сопротивления претерпевает значительные изменения в области $\omega_p \sim (1...2)\omega_r$. Реактивная составляющая Z_p на частотах $> 2.2\omega_r$ мала для всех значений длины плазменного столба. В дальнейшем будем считать сопротивление плазменного столба чисто активным.

Для оценки характера изменения плотности плазмы при увеличении длины плазменного столба на рис. 4 представлены зависимости активной составляющей сопротивления плазменного столба от ω_p ($\omega_p = 9 \times 10^8$ рад/с) для длины плазменного столба l_{ct} , равного $0.5L_T$, $0.75L_T$ и $1.0L_T$.

Из рис. 4 видно, что величина активного сопротивления плазменного столба зависит как от ω_p , так и от длины плазменного столба. При заданной длине плазменного столба (вакуумного зазора), зная величину сопротивления $R(l_{ct})$, можно определить ω_p (n_e).

По результатам измерений КСВ определим величину сопротивления $R_p(l_{ct}, \omega_p)$ плазменного столба определенной длины и соответствующее значение ω_p .

Величина КСВ показывает, какая часть падающей на нагрузку мощности отражается, т.е. позволяет определить величину коэффициента отражения r

$$r = (КСВ - 1)/(КСВ + 1), \quad (7)$$

или при чисто активной нагрузке

$$r = (R_p - R_0)/(R_p + R_0), \quad (8)$$

где R_0 – волновое сопротивление линии питания ($R_0 = 50$ Ом).

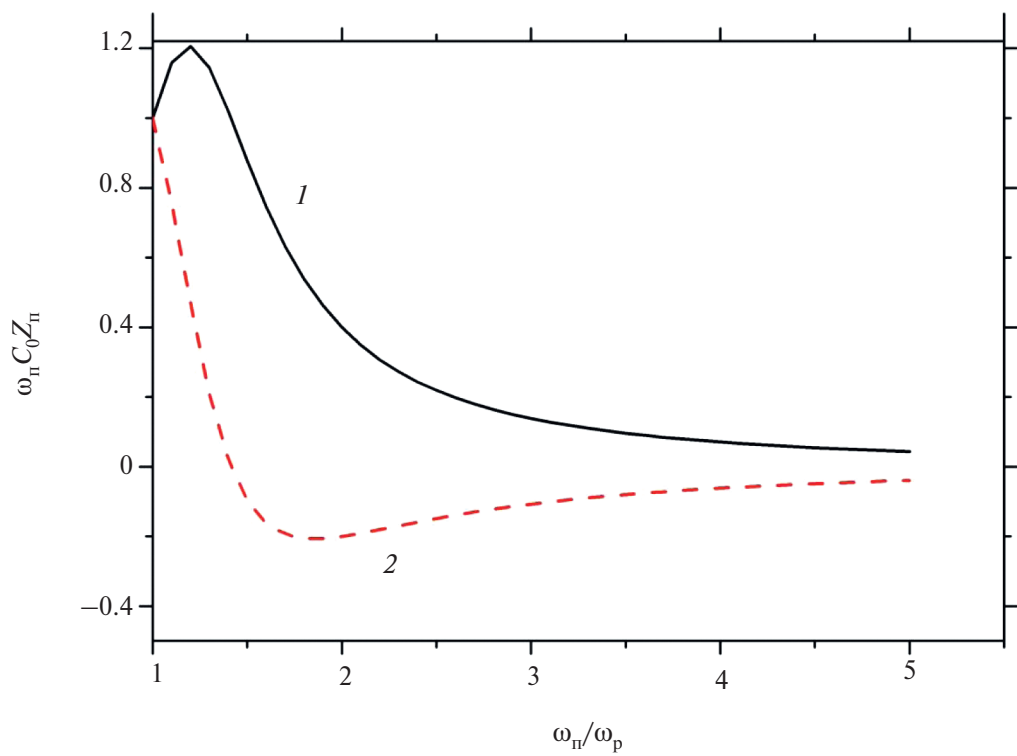


Рис. 3. Зависимости активной (1) и реактивной (2) составляющих сопротивления Z_{π} плазменного конденсатора от ω_{π}/ω_p .

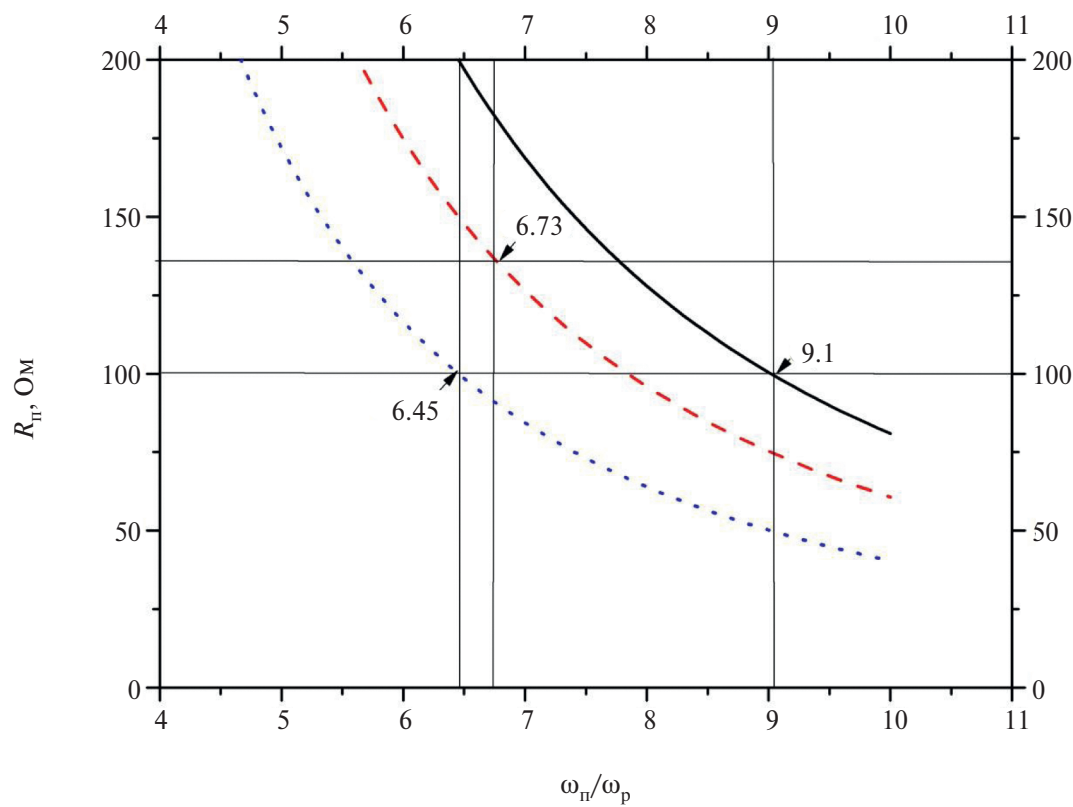


Рис. 4. Зависимости активной составляющей сопротивления плазменного столба от ω_{π} ($\omega_p = 9 \times 10^8$ рад/с) для длины плазменного столба $l_{ст}$: $0.5 L_T$ (пунктир), $0.75 L_T$ (штриховая кривая), $1.0 L_T$ (сплошная). Стрелками отмечены точки, соответствующие значениям сопротивления плазменного столба, полученным по измерениям КСВ.

Результаты измерений и расчетов

r	$l_{\text{ст}}/L_T$	P , Вт	КСВ	$\omega_{\text{п}} \times 10^9$, рад/с	$\omega_{\text{п}}/\omega_{\text{р}}$	$R_{\text{п}}$, Ом	$n_e \times 10^{10}$, см ³
0.33	0.5	8.0	2.0	5.8	6.45	100.8	1.0
0.46	0.75	15.5	2.7	6.2	6.73	135.2	1.2
0.33	1	20	2.0	8.2	9.1	100.8	2.1

Результаты измерений КСВ и расчетов r , $R_{\text{п}}$, $\omega_{\text{п}}$, n_e для длины плазменного столба $(0.5, 0.75, 1.0) \times L_T$ приведены в табл. 1. Расчеты проводились для $\nu_e \approx 1.0 \times 10^9 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{\text{р}} = 0.9 \times 10^9 \text{ рад/с}$. По значениям сопротивления $R_{\text{п}}$ для плазменного столба заданной длины (см. рис. 4) можно определить значение $\omega_{\text{п}}$ (n_e), табл. 1.

Из данных, приведенных в табл. 1, следует, что с увеличением мощности, вкладываемой в разряд, вместе с ростом плазменного столба происходит рост $\omega_{\text{п}}$.

Плотность плазмы в плазменном столбе достигает значений, удовлетворяющих условию $\omega_{\text{п}} > (2...3)\omega_{\text{р}}$ при длине плазменного столба $> 0.5L_T$. Таким образом, при изменении частоты передатчика в пределах границ области перестройки имеется возможность регулировки длины плазменной антенны, т.е. частотной подстройки линии передатчик–антенна.

Концентрация электронов в плазменном столбе повышается вместе с ростом длины плазменного столба и мощности передатчика. При длине плазменного столба, равной половине длины разрядной трубки, плазменный столб может быть эффективной антенной на длине волны $\lambda \sim \lambda_{\text{р}/2}$. Если для возбуждения плазменной области использовать отдельный генератор, то плазменный столб может быть использован в качестве антенны для нескольких передатчиков, длина волны излучения которых лежит в диапазоне $\lambda/4 = (0.5...1)L_T$. Чем выше частота источника возбуждения плазменного столба, тем короче длина волны передатчика, на которой плазменный столб будет эффективным излучателем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

— измерение величины КСВ позволяет определить активное сопротивление плазменного столба и среднее значение плотности n_e в плазменном столбе при заданных значениях мощности и частоты источника возбуждения плазмы;

— с увеличением мощности, вкладываемой в разряд, вместе с ростом плазменного столба происходит рост n_e ;

— возбуждение плазменного столба рассмотренным методом позволяет, меняя мощность источника возбуждения, создавать эффективные излучатели (вибраторные плазменные антенны), длиной которых можно управлять.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института общей физики им. А.М. Прохорова РАН.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alexeff I., Anderson T. // IEEE Trans. 2006. V. PS-34. № 2. P. 166.
<https://doi.org/10.1109/TPS.2006.872180>
2. Истомин Е.Н., Карфидов Д.М., Минаев и др. // Физика плазмы. 2006. Т. 32. № 4. С. 423.
3. Alexeff I., Anderson T., Farshi E. et al. // Phys. Plasm. 2008. V. 15. № 5. P. 057104.
<https://doi.org/10.1063/1.2919157>
4. Сергейчев К.Ф., Минаев И.М. // Труды ИОФАН. М.: Наука, 2014. Т. 70. С. 143.
5. Коновалов В.Н., Кузьмин Г.П., Минаев И.М. и др. // Физика плазмы. 2015. Т. 41. № 9. С. 833.
<https://doi.org/10.1134/S1063780X15090068>
6. Тихонович О.В., Векишин Ю.Е., Кузьмин Г.П. и др. // РЭ. 2020. Т. 65. № 2. С. 165.
<https://doi.org/10.31857/S0033849420020199>
7. Минаев И.М., Рухадзе А.А. // Инж. физика. 2016. № 8. С. 24.
8. Shahzad M.H., Ghaffar Ab., Naz M.Y., Bhatti H.N. // PIER. 2020. V. 92. P. 11.
<https://doi.org/10.2528/PIERM20022403>
9. Kazantsev S.Y., Brusentsev A.S., Titovets P.A. et al. // Generating and Processing in the Field of on Board Communications, Moscow, 2022. P. 11.
<https://doi.org/10.1109/IEEECONF53456.2022.9744361>
10. Александров А.Ф., Кузев М.В. Теоретическая плазменная электротехника. М.: Изд-во МГУ, 2011.
11. Минаев И.М., Тихонович О.В. // Тр. III Межд. конф. “Газоразрядная плазма и синтез наноструктур”. Казань, 1–4 декабря 2022 г. Казань: Бук, 2022. С. 455.

PLASMA ANTENNA WITH FREQUENCY ADJUSTMENT

I. M. Minaev^{a,*}, O. V. Tikhonovich^a, Yu. E. Vekshin^b

^a*Prokhorov General Physics Institute Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia*

^b*16 Central Research Testing Institute of the Ministry of Defense of the Russian Federation
named after Marshal A. I. Belov, Mytishchi Moscow oblast, 140006 Russia*

**E-mail: minaev1945@mail.ru*

Received March 6, 2023; revised April 24, 2023; accepted May 25, 2023

A discharge of limited length (“plasma column”) in a gas-discharge tube filled with a rarefied gas was studied. The discharge is created due to the one-sided excitation of an extended high-frequency discharge supported by a propagating azimuthally symmetric mode of the surface wave. It is shown that a “plasma column” can be an effective plasma antenna at operating frequencies below the plasma frequency (ω_p), with frequency tuning due to changes in the length of the “plasma column”.

Keywords: plasma antenna, plasma column, high-frequency discharge, surface wave, standing wave ratio

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

УДК 621.396.01

СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ САМОЛЕТА

© 2024 г. М. А. Степанов*, А. В. Киселев, В. В. Артюшенко

*Новосибирский государственный технический университет,
просп. Карла Маркса, 20, Новосибирск, 630073 Российская Федерация*

*E-mail: m.stepanov@corp.nstu.ru

Поступила в редакцию 22.12.2022 г.

После доработки 16.05.2023 г.

Принята к публикации 13.11.2023 г.

Рассмотрено моделирование эхосигналов от распределенных радиолокационных объектов с учетом шумов их угловых координат. Приведены соотношения, позволяющие осуществить переход от многоточечной модели произвольного объекта, содержащей десятки, сотни и даже тысячи излучающих точек, к модели, составленной из четырех излучающих точек, расположенных в вершинах квадрата. В качестве примера синтезирована модель самолета, содержащая всего четыре точки. Она получена на основе многоточечной модели, составленной из 56 точек. Методами численного моделирования показано, что угловые шумы, формируемые многоточечной и четырехточечной моделями самолета, имеют совпадающие корреляционные функции и близкие параметры плотности распределения вероятности шумов угловых координат. Полученный результат также подтвержден методами полунатурного моделирования с использованием матричного имитатора.

Ключевые слова: моделирование эхо-сигналов, многоточечная модель, плотность распределения вероятности, кажущийся центр излучения, корреляционные функции, матричный имитатор

DOI: 10.31857/S0033849424030045, **EDN:** JVHGFХ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время при моделировании радиолокационных эхосигналов широко используют геометрические модели отражающих объектов [1–4]. Они представляют собой точки, расположенные в некоторой области пространства. Конфигурация и количество точек, а также параметры отражаемых от них сигналов определяются условиями адекватности модели замещаемому объекту: в частности, адекватностью воспроизведения характеристик угловых шумов, обусловленных тем, что нормаль к фазовому фронту электромагнитной волны, отраженной от большого числа разнесенных по угловым координатам точек, формирует направление на эквивалентный центр отражения, блуждающий по поверхности объекта и даже выходящий за его пределы [5].

С учетом этих случайных блужданий плотность распределения вероятностей (ПРВ) для координат “азимут” и “угол места” объекта имеет вид [5]

$$W(\xi) = \frac{\mu}{2(1 + \mu^2(\xi - m)^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

где ξ — обобщенная угловая координата (азимут или угол места); m — математическое ожидание углового положения; μ — параметр, характеризующий ширину распределения. Параметры m и μ характеризуют угловое положение и угловой размер наблюдаемого объекта. Чем больше величина параметра μ , тем меньше угловой размер объекта. Величины m и μ определяются распределением отражающих точек по объекту. Соотношения для их расчета по заданному распределению отражающих точек приведены в [5].

Как правило, количество точек модели достаточно велико. Это десятки, сотни, а в некоторых случаях тысячи точек. При имитационном моделировании точки модели должны замещаться излучающими антеннами [6]. Учитывая большое количество точек, это

приводит к необходимости использования сложных и дорогих антенных систем, а также устройств формирования подводимых к ним сигналов.

Поэтому актуален переход к модели, содержащей существенно меньшее количество точек — переход к малоточечной геометрической модели объекта. Такие модели существуют и известны [3, 7]. Пути их синтеза теоретически обоснованы, в частности, в [7]. Они заключаются в следующем.

Синтез осуществляется в два этапа. На первом строится многоточечная модель замещаемого объекта. Затем количество точек сокращается до четырех за счет ввода дополнительного условия — условия статистической зависимости сигналов, отражаемых точками.

Рассматривают три вида малоточечных моделей, отличающихся величиной статистической связи между сигналами, подводимыми к излучающим точкам [7]: когерентные, некогерентные и частично когерентные.

К точкам когерентных моделей подводятся сигналы с коэффициентом взаимной корреляции, по модулю равным единице. Параметр μ ПРВ угловых шумов такой модели велик, что соответствует отражениям от точечного объекта, угловое положение которого определяется отношением амплитуд и разностью фаз сигналов, подводимых к точкам модели.

К точкам некогерентной модели подводят некоррелированные нормальные случайные процессы. В силу этого положение кажущегося центра излучения (КЦИ) в разные моменты времени тоже является случайным. Управление параметрами ПРВ обеспечивается путем регулирования отношения дисперсий излучаемых случайных процессов.

К точкам частично когерентной модели подводятся коррелированные случайные процессы с коэффициентом взаимной корреляции, лежащем в диапазоне $r \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. Управление параметрами угловых шумов осуществляется путем изменения дисперсий, подводимых к точкам модели случайных процессов и значений коэффициента их взаимной корреляции.

Нетрудно заметить, что при стремлении модуля коэффициента взаимной корреляции $|r| \rightarrow 1$ частично когерентная модель переходит в полностью когерентную. При стремлении значения коэффициента взаимной корреляции $r \rightarrow 0$ частично когерентная модель переходит в некогерентную.

Таким образом, частично когерентная модель может рассматриваться как общий случай и представляет наибольший интерес.

Вместе с тем представленные в [7] материалы лишь теоретически обосновывают возможность синтеза малоточечных моделей радиолокационных объектов. Их применение для синтеза малоточечных моделей типовых радиолокационных объектов и результаты экспериментальной апробации отсутствуют в литературе.

Цель данной работы — синтезировать четырехточечную геометрическую модель типового радиолокационного объекта (самолета) и провести ее экспериментальную апробацию.

В качестве критерия адекватности моделирования угловых шумов будем использовать обычно применяемые для этих целей их корреляционную функцию, а также ПРВ [4–7].

2. ИСХОДНАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим синтез модели на примере абстрактного самолета, составленного из простейших компонентов (рис. 1) [8–10].

Распределение отражающих точек по его поверхности представлено на рис. 2 [8, 9]. Общее количество точек (обозначим его N) составляет 56: по 15 точек для отражающих элементов каждого из крыльев, 12 — для фюзеляжа, 14 — для хвостового оперения. Их количество и положение хорошо согласуются с данными, приводимыми в литературе. Например, в [11] предлагается использовать 54 точки для самолета SNB, в [12, 13] — 42 для самолета B-2.

Координаты точек (в метрах) приведены в табл. 1. Синтезированная модель и направления осей системы координат изображены на рис. 3. Интенсивность отражений от точек полагается одинаковой.

Каждая из точек многоточечной модели формирует электромагнитную волну со случайной начальной фазой, равномерно распределенной в интервале $[0; 2\pi]$, и доплеровской частотой, определяемой проекцией векторов скорости сближения точек замещаемого объекта и радиолокационной станции (РЛС) на направление визирования точки [14]:

$$fd_i = \frac{v_x x_i + v_y y_i + v_z z_i}{D_i} \frac{2}{\lambda},$$

где v_x , v_y и v_z — проекции скорости сближения объекта и РЛС на координатные оси; $(x_i; y_i; z_i)$ — декартовы координаты i -й блестящей точки объ-

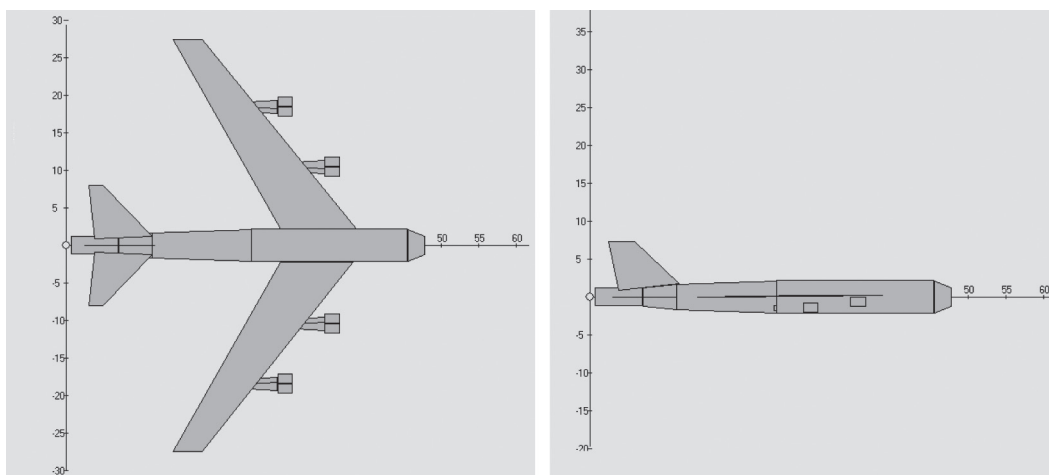


Рис. 1. Модель самолета, составленная из простейших компонентов [8, 9].

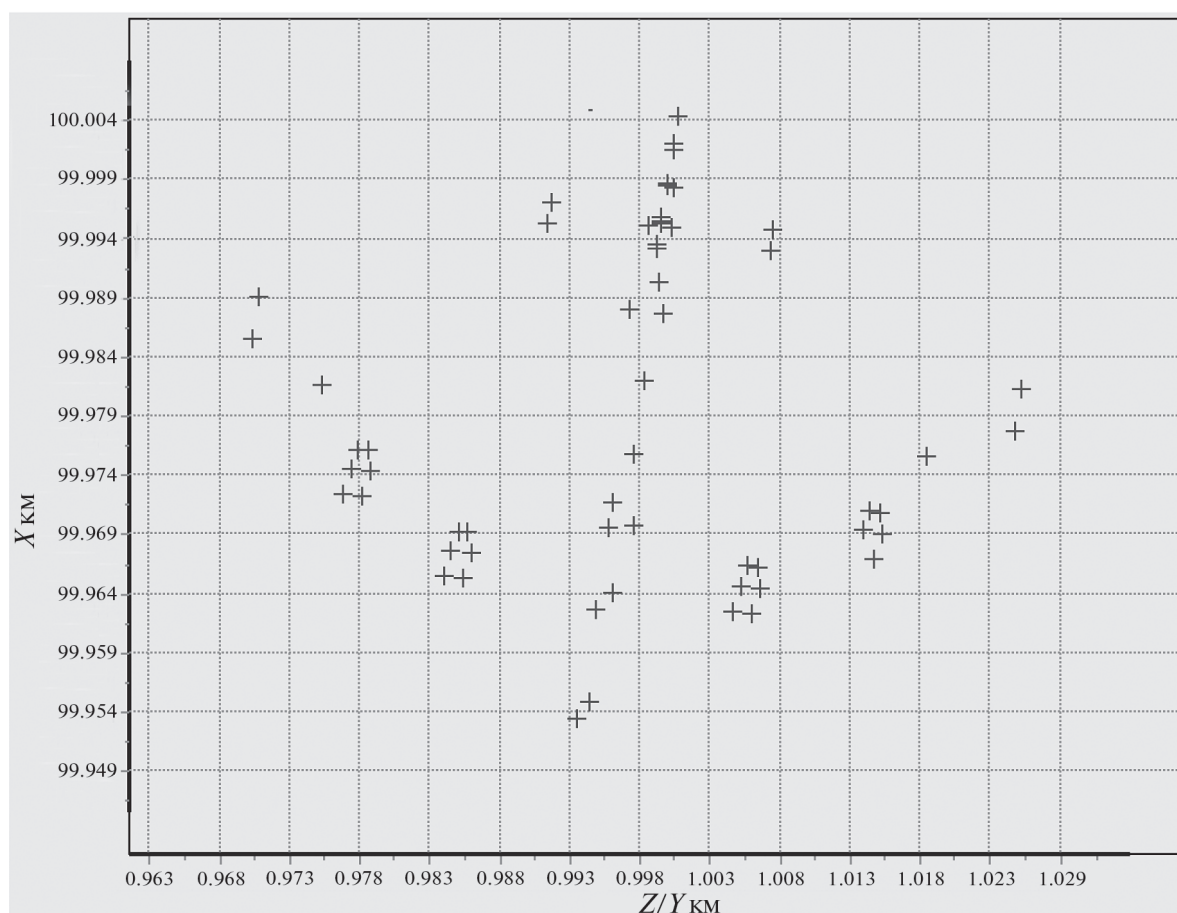


Рис. 2. Распределение отражающих элементов самолета [8, 9].

екта в связанной системе координат с началом в точке размещения фазового центра антенны РЛС; D_i — дальность от РЛС до i -й блестящей точки объекта; λ — длина волны зондирующего сигнала.

3. СИНТЕЗ МАЛОТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ

Руководствуясь результатами [7], синтезируем четырехточечную модель. Ее излучатели $1...4$ располагаются в вершинах квадрата (рис. 4).

Таблица 1. Координаты точек модели (метры)

Точка	X	Y	Z	Точка	X	Y	Z	Точка	X	Y	Z	Точка	X	Y	Z
1	0	0	0	15	7	7	0	29	17	0	26	43	22	0	-17
2	3	0	0	16	14	0	1,5	30	17	0	-26	44	24	0	-17
3	6	0	1	17	14	0	-1,5	31	19	0	22	45	25	0	12
4	6	0	-1	18	20	0	0	32	19	0	-22	46	27	0	12
5	9	0	1	19	25	0	0	33	20	0	20	47	29	0	12
6	9	0	-1	20	30	0	2	34	20	0	-20	48	25	0	9
7	12	0	1	21	30	0	-2	35	22	0	20	49	27	0	9
8	12	0	-1	22	32	0	0	36	24	0	20	50	29	0	9
9	13	0	0	23	38	0	2	37	20	0	17	51	25	0	-12
10	5	0	7	24	38	0	-2	38	22	0	17	52	27	0	-12
11	7	0	7	25	47	0	1	39	24	0	17	53	29	0	-12
12	5	0	-7	26	47	0	-1	40	22	0	-20	54	25	0	-9
13	7	0	-7	27	15	0	26	41	24	0	-20	55	27	0	-9
14	5	7	0	28	15	0	-26	42	20	0	-17	56	29	0	-9

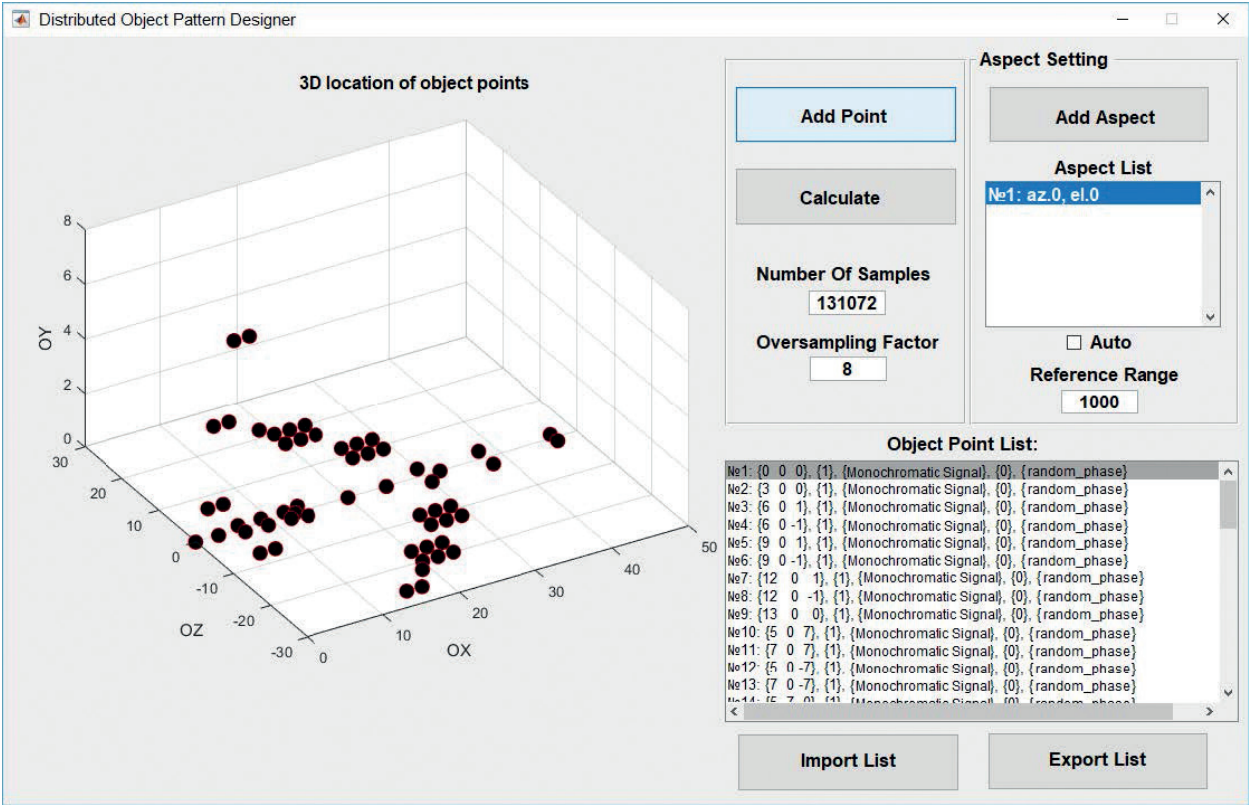


Рис. 3. Синтезированная многоточечная модель (скриншот).

Синтез четырехточечной частично когерентной модели заключается в определении мощностей излучаемых сигналов ($\sigma_{1...4}^2$) и функций $F_{R1...4}(\omega)$ и $F_{S1...4}(\omega)$ – собственных и взаимных спектральных плотностей мощности ква-

дратурных компонент экосигналов от точек четырехточечной модели.

Основные соотношения для искомых параметров (см. [7]) с учетом введенных обозначений примут следующий вид:

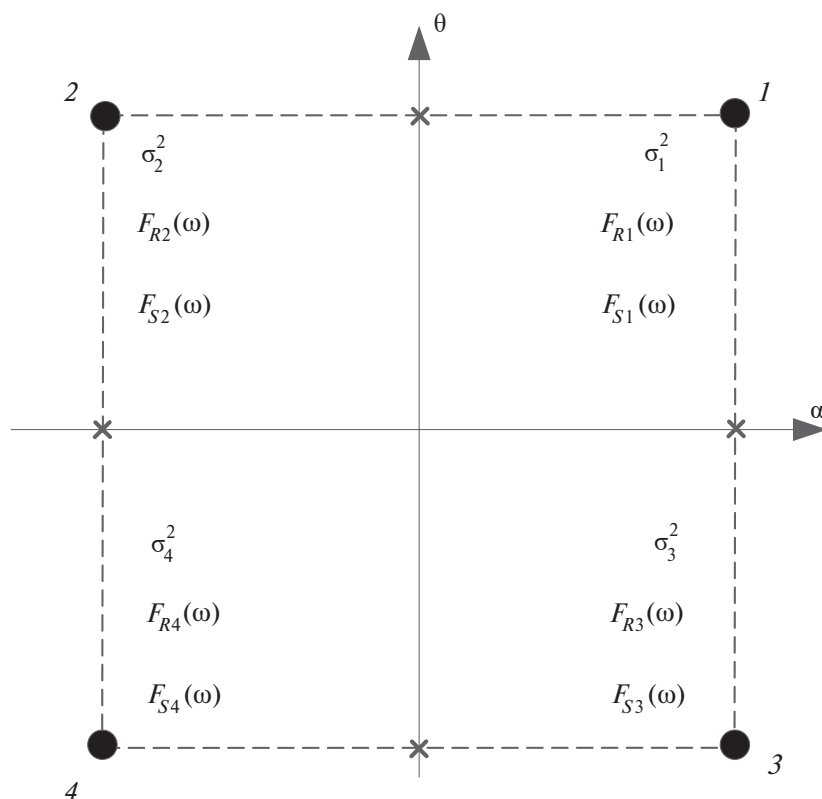


Рис. 4. Четырехточечная модель: 1...4 – излучатели.

дисперсии (мощности) сигналов –

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{\gamma_\theta^2 \sigma_H^2}{\gamma_\theta^2 + 1 + 2\rho_\alpha \gamma_\alpha}; \\ \sigma_2^2 &= \frac{\gamma_\theta^2 \gamma_\alpha \sigma_H^2}{\gamma_\theta^2 + 1 + 2\rho_\theta \gamma_\theta}; \\ \sigma_3^2 &= \frac{\sigma_H^2}{\gamma_\theta^2 + 1 + 2\rho_\theta \gamma_\theta}; \\ \sigma_4^2 &= \frac{\sigma_H^2 \gamma_\alpha}{\gamma_\theta^2 + 1 + 2\rho_\theta \gamma_\theta}. \end{aligned} \right.$$

Здесь σ_H^2 – суммарная мощность экосигнала, отраженного от замещаемого объекта; γ_α^2 , γ_θ^2 и ρ_α , ρ_θ – определяются соотношениями:

$$\gamma_{\alpha,\theta} = \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{-2m_{\alpha,\theta} \mu_{\alpha,\theta}^2}{1 + m_{\alpha,\theta}^2 \mu_{\alpha,\theta}^2 + \mu_{\alpha,\theta}^2} \right) \right], \quad (3)$$

$$\rho_{\alpha,\theta} = \begin{cases} \frac{(1 - m_{\alpha,\theta}) \gamma_{\alpha,\theta}^2 - 1 - m_{\alpha,\theta}}{2m_{\alpha,\theta} \gamma_{\alpha,\theta}}, & m_{\alpha,\theta} \neq 0; \\ \frac{\mu_{\alpha,\theta}^2 - 1}{\mu_{\alpha,\theta}^2 + 1}, & m_{\alpha,\theta} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

соответственно при подстановке m и μ для плоскостей азимута (индекс α) и угла места (индекс θ).

Собственные и взаимные спектральные плотности мощности ($F_{R1...4}(\omega)$ и $F_{S1...4}(\omega)$ соответственно) сигналов определяются выражениями [7]

$$F_{Ri}(\omega) = \sigma_i^2 r_M(\omega); \quad F_{Si}(\omega) = \sigma_i^2 s_M(\omega), \quad (5)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} r_M(\omega) &= \frac{\sum_{i=1}^N [\xi_{\infty i}^2 \sigma_{\infty i}^2 r_i(\omega)]}{\sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 \xi_{Mi}^2 + \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sigma_i \xi_{Mi} \sigma_k \xi_{Mk} \rho_{i,k}}; \\ s_M(\omega) &= \frac{\sum_{i=1}^N [\xi_{\infty i}^2 \sigma_{\infty i}^2 s_i(\omega)]}{\sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 \xi_{Mi}^2 + \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sigma_i \xi_{Mi} \sigma_k \xi_{Mk} \rho_{i,k}}, \end{aligned} \right.$$

$\rho_{i,k}$ — коэффициент взаимной корреляции сигналов, излучаемых из i -й и k -й точек четырехточечной модели — элемент матрицы:

$$[\rho] = \begin{pmatrix} 1 & \rho_\alpha & \rho_\theta & \rho_\alpha \cdot \rho_\theta \\ \rho_\alpha & 1 & \rho_\alpha \cdot \rho_\theta & \rho_\theta \\ \rho_\theta & \rho_\alpha \cdot \rho_\theta & 1 & \rho_\alpha \\ \rho_\alpha \cdot \rho_\theta & \rho_\theta & \rho_\alpha & 1 \end{pmatrix},$$

$\xi_{\infty i}$ — обобщенная (азимут или угол места) координата i -й точки многоточечной модели; ξ_{Mi} — обобщенная координата (азимут или угол места) координата i -й точки четырехточечной модели; $\sigma_{\infty i}^2$ — мощность сигнала, отраженного от i -й точки многоточечной модели; $r_i(\omega)$ и $s_i(\omega)$ — собственные и взаимные нормированные спектральные плотности мощности сигнала, отраженного от i -й точки многоточечной модели.

Таким образом, получим частично когерентную геометрическую модель, состоящую из четырех точек. Определены мощности сигналов, коэффициенты их взаимной корреляции, а также собственные корреляционно-спектральные свойства. Четыре сигнала, подводимые к точкам модели, представляют собой коррелированные узкополосные нормальные случайные процессы. Их собственные и взаимные спектральные плотности мощности квадратурных компонент определяются выражением (5).

Алгоритм синтеза четырехточечной модели содержит следующие шаги.

Шаг 1. Синтез многоточечной модели замещаемого объекта. Он может осуществляться либо на основе результатов экспериментальных измерений, либо на основе подробных электродинамических моделей замещаемого объекта. В результате будут определены параметры: $\sigma_{\infty i}^2$ — мощность сигнала, отраженного i -й точкой объекта, $\xi_{\infty i}$ — обобщенная координата i -й точки объекта (проекция этой точки на ось “азимут” или “угол места”), $r_i(\omega)$ и $s_i(\omega)$ — собственная и взаимная спектральная плотность мощности сигнала, отраженного от i -й точки; σ_H^2 — суммарная мощность эхосигнала, отраженного от замещаемого объекта.

Шаг 2. Переход от многоточечной модели замещаемого объекта к его четырехточечной частично когерентной модели. Он содержит следующие шаги:

а) определить для двух взаимно ортогональных плоскостей (азимут и угол места) величины γ_α^2 , γ_θ^2 и ρ_α , ρ_θ по соотношениям (3) и (4);

б) по соотношениям (2) определить мощности сигналов, подводимых к точкам четырехточечной геометрической модели;

в) рассчитанными величинами ρ_α , ρ_θ заполнить матрицу коэффициентов взаимной корреляции излучаемых сигналов $[\rho]$.

г) по соотношениям (5) определить спектральные характеристики сигналов, подводимых к точкам четырехточечной геометрической модели.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЧНОГО ИМИТАТОРА

Проверка адекватности полученной модели осуществлялась в два этапа.

На первом использовали методы численного моделирования. Был проведен ряд численных экспериментов со следующими условиями. РЛС и замещаемый объект двигались навстречу друг другу со скоростью 400 м/с. Длина волны РЛС равнялась 0.06 м. Дальность до замещаемого объекта (D_0) принимала значения 10000, 1000 и 500 м. Угловой размер четырехточечной модели составлял 2° по каждой из угловых координат. Эксперимент повторялся 50 раз для каждого набора параметров при разных значениях случайной начальной фазы эхосигналов от точек многоточечной и четырехточечной моделей. В пределах одного эксперимента длина формируемых реализаций сигналов и углового положения центра излучения составляла 16384 отсчета. Временной интервал между отсчетами составлял 5 мкс.

Затем определяли статистические характеристики угловых шумов (ПРВ и корреляционная функция) для многоточечной и четырехточечной моделей.

Основные результаты эксперимента сводятся к следующему.

Параметры ПРВ, m и μ , полученные путем расчета для многоточечной модели традиционным путем (по выражениям из [5] для заданных в табл. 1 функций распределения интенсивности отражения по поверхности объекта) и в результате численного моделирования с использованием многоточечной и малоточечной моделей, приведены в табл. 2. Имеет место хорошее совпадение для обоих параметров.

Корреляционные функции угловых шумов оценивались отдельно для плоскостей “азимут” и “угол места”. Результаты показывают, что корреляционные функции, полученные для мо-

Таблица 2. Параметры ПРВ угловых шумов при носовом ракурсе наблюдения

D_0 , м	Теоретический расчет				Многоточечная модель				Малоточечная модель			
	m_α	μ_α	m_θ	μ_θ	m_α	μ_α	m_θ	μ_θ	m_α	μ_α	m_θ	μ_θ
500	0	0.7	0.028	6.7	0	0.71	0.03	6.9	0	0.69	0.031	6.95
1000	0	1.37	0.014	13.5	0	1.38	0.012	12.5	0	1.35	0.012	14.1
5000	0	6.7	0.0029	67	0	6.9	0	61	0	6.85	0	63

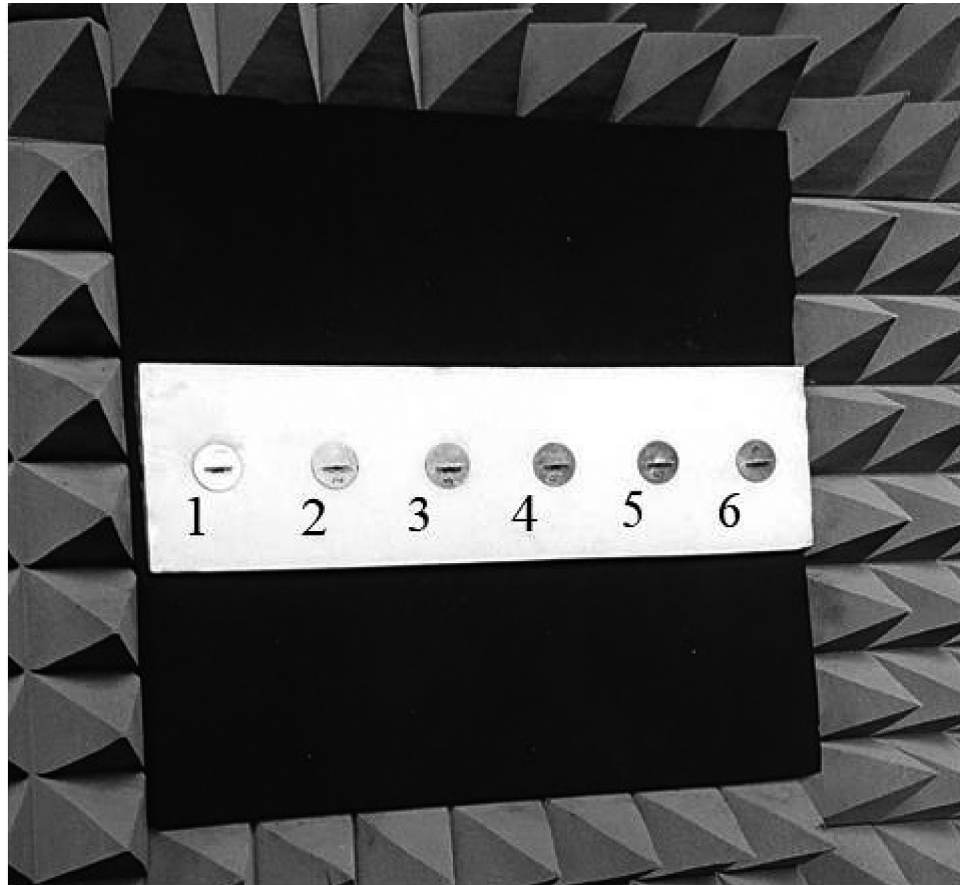


Рис. 5. Излучатели матричного имитатора: 1...6 – антенны.

дели, составленной из 56 точек, и частично когерентной четырехточечной модели, совпадают во всех случаях для обеих угловых координат.

На втором этапе синтезированная малоточечная модель самолета проходила апробацию на макете матричного имитатора, обеспечивающего моделирование экосигналов от распределенных радиолокационных объектов. Внешний вид матрицы излучателей представлен на рис. 5. Она состоит из шести дипольных антенн, размещенных на прямой линии.

В экспериментах были задействованы две антенны: 3 и 5 (см. рис. 5). К ним подводились сиг-

налы, сформированные векторным генератором и имеющие характеристики, определяемые (2) и (5). С учетом того, что матрица излучателей содержит только два активных излучателя, формирование угловых шумов ограничено азимутальной плоскостью. Соответственно, сигналы, подводимые к излучателям матрицы ($s_{M3}(t)$ и $s_{M5}(t)$), определяются по выражениям:

$$s_{M3}(t) = s_1(t) + s_3(t);$$

$$s_{M5}(t) = s_2(t) + s_4(t),$$

где $s_1(t), \dots, s_4(t)$ – сигналы точек, рассчитанные для четырехточечной модели.

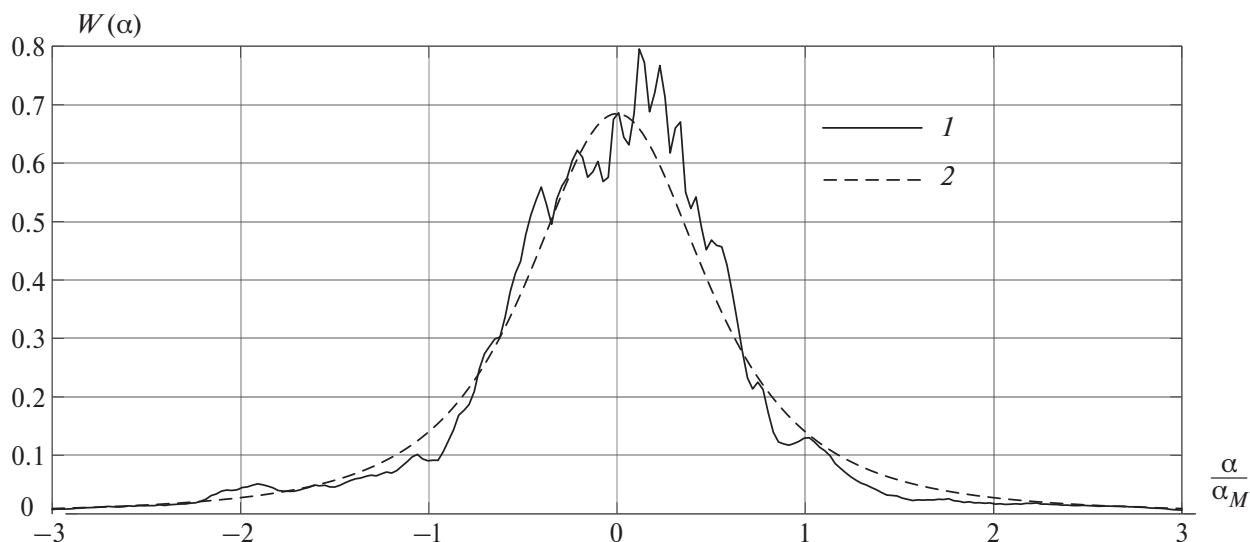


Рис. 6. Экспериментальная (1) и рассчитанная теоретически (2) ПРВ углового шума, полученная с использованием макета матричного имитатора; имитируемая дальность 1000 м.

Приемная часть стенда состоит из двух дипольных антенн, разнесенных в азимутальной плоскости на 80 мм. Она расположена на расстоянии порядка 2.2 м от матрицы излучателей. Таким образом обеспечивались условия дальней зоны для приемных антенн.

Принятый каждой антенной сигнал переносили на видеочастоту и оцифровывали. Количество комплексных отсчетов для каждого канала в одном эксперименте составляло 2^{22} . Частота дискретизации — 15 МГц. Результаты оцифровки поступали в ЭВМ для дальнейшей обработки.

В ЭВМ формировались сигналы, соответствующие суммарной (как сумма отсчетов сигналов каналов) и разностной (как разность отсчетов сигналов каналов) диаграммам направленности. Разнос излучателей матрицы в азимутальной плоскости не превышал половины ширины диаграммы направленности суммарной диаграммы.

Азимутальное положение точки излучения определялось методом моноимпульсной пеленгации. По полученной реализации отсчетов азимутальной координаты проводилась оценка их ПРВ.

На рис. 6 представлена ПРВ, экспериментально полученная и рассчитанная теоретически по соотношению (1) при подстановке в него параметров из табл. 2 для дальности 1000 м. По горизонтальной оси отложен азимутальный угол, нормированный к угловому размеру двухточеч-

ной модели α_M (угловому расстоянию между третьим и пятым излучателями матрицы). Параметры полученной ПРВ углового шума равны $m = 0$; $\mu = 1.4$, что хорошо согласуется с результатами теоретических расчетов и численного моделирования (см. табл. 2).

Помимо ПРВ оценивалась корреляционная функция угловых шумов (рис. 7) и доплеровский принятый сигнала (рис. 8). Последний получен для суммарного сигнала каналов. Нулевому временному сдвигу соответствует отсчет с порядковым номером $2^{22} - 1$. Интервал между отсчетами составляет 66 нс.

Из рис. 7 видно, что нормированная корреляционная функция угловых шумов для многоточечной модели и полученная с использованием матричного имитатора практически совпадают.

В доплеровском спектре (см. рис. 8) принятого сигнала отчетливо видны компоненты, сформированные отражениями от фюзеляжа самолета, элементов, расположенных на крыльях, и хвостового оперения. Форма доплеровского спектра соответствует ожидаемой для носового ракурса наблюдения самолета. Максимальную доплеровскую частоту формируют точки фюзеляжа. Точки на крыльях и хвостовом оперении дают меньшие частотные сдвиги. Эти точки симметричны относительно фюзеляжа, поэтому доплеровские спектры эхосигналов от точек, расположенных слева и справа от фюзеляжа, идентичны.

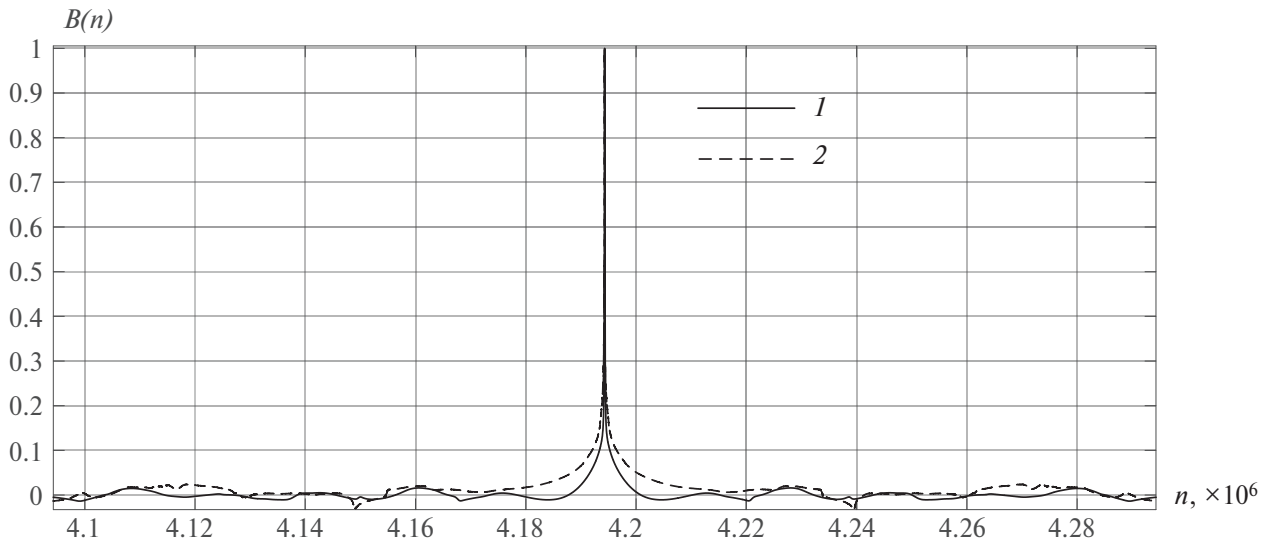


Рис. 7. Нормированная корреляционная функция угловых шумов при носовом ракурсе наблюдения: 1 – эксперимент, 2 – теоретический расчет; имитируемая дальность 1000 м; n – номер отсчета корреляционной функции угловых шумов.

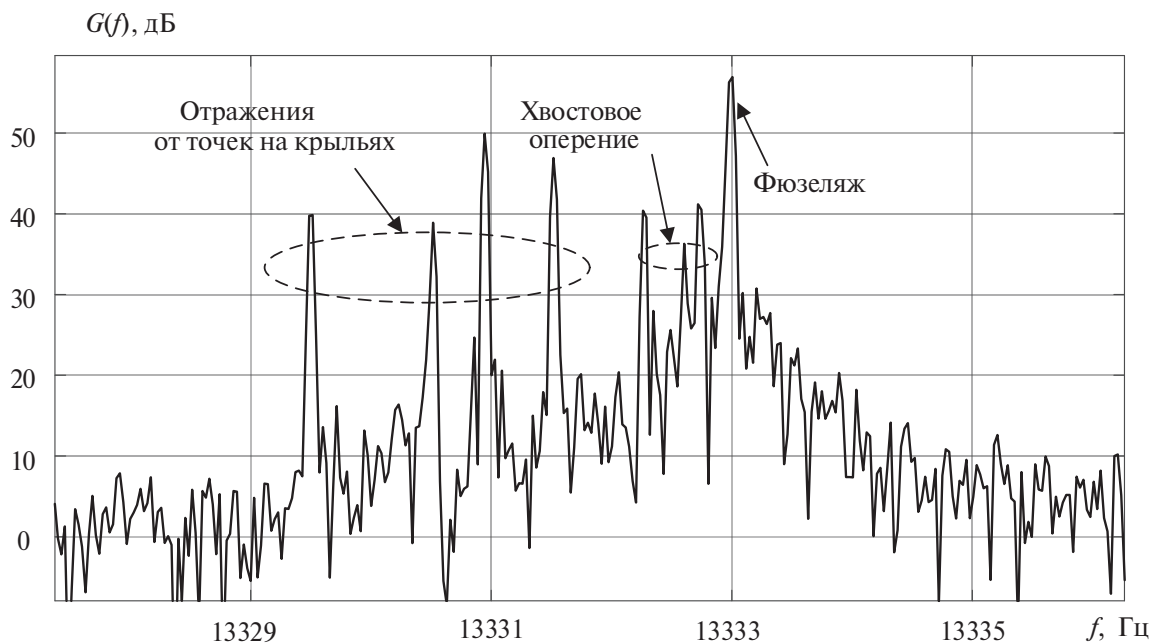


Рис. 8. Доплеровский спектр принятого сигнала.

Сравнение доплеровских спектров, полученных на макете матричного имитатора, формируемых четырехточечной частично когерентной и многоточечной (содержащей 56 точек) моделями, показало совпадение местоположения спектральных компонент и соотношения их уровней.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, четырехточечная частично когерентная геометрическая модель, синтезиро-

ванная с использованием приведенных соотношений, ранее полученных в [7], адекватно замещает многоточечный радиолокационный объект по критерию равенства корреляционных функций угловых шумов и их ПРВ. Это подтверждено результатами численного моделирования и экспериментальными данными, полученными на макете матричного имитатора.

Использование четырехточечной частично когерентной геометрической модели позволило

сократить количество точек для рассмотренного замещающего объекта в 14 раз.

Представленные в работе соотношения могут непосредственно использоваться для синтеза четырехточечных частично когерентных моделей радиолокационных объектов, отражающие свойства которых заданы их многоточечными геометрическими моделями.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Melvin W.L., Scheer J.A.* Principles of Modern Radar: Radar Applications. Edison: Scitech Publ., 2014.
2. *Johnston S.L.* // IEEE Trans. 1997. V. AES-33. № 2. Pt.2. P. 696.
3. *Stepanov M.A., Kiselev A.V.* // J. Computer Systems Sci. Int. 2019. V. 58. № 4. P. 595.
4. *Zhou Jianxiong, Shi Zhiguang, Cheng Xiao, Fu Qiang* // IEEE Trans. 2011. V. GRS-49. № 10. P. 3713.
5. *Островитянов Р.В., Басалов Ф.А.* Статистическая теория радиолокации протяженных целей. М.: Радио и связь, 1982.
6. *Yu Yiwei, Song Jie, Xiong Wei* // 2nd IEEE Intern. Conf. Inform. Communication and Signal Processing. 2019. P. 161.
7. *Podkopaev A.O., Stepanov M.A., Kiselev A.V.* // Radio Sci. V. 56. № 12. P. 6.
8. *Бердышев В.П., Миронов А.М., Помазуев О.Н. и др.* // Журн. Сибирского федерального университета. Сер. Техника и технологии. 2018. Т. 11. № 7. С. 764.
9. *Панов Д.В., Юдин В.А., Караваев С.А.* // Математическая морфология. Электронный математ. и медико-биол. журн. 2009. V. 8. № 3. С. 1–7.
10. *Wang C.-Q., Wang X.-M., Shi X.-L.* // Binggong Xuebao/Acta Armamentarii. 2008. V. 29(12). P. 1479.
11. *Тырыкин С.В., Киселев А.В.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2003. V. 4. P. 76.
12. *Hseuh-Jyh Li, Nabil H. Farhat, Yuhshyen Shen* // IEEE Trans. 1989. V. GRS-27. № 1. P. 98.
13. *Борзов А.Б., Быстров Р.П., Соколов А.В.* // Журн. радиоэлектроники. 1998. № 1. С. 1. <http://jre.cplire.ru/jre/dec98/4/text.html>
14. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. 4-е изд. М.: Наука, 1978.

SYNTHESIS OF A FOUR-POINT MODEL OF AN AIRPLANE

M. A. Stepanov*, A. V. Kiselev, V. V. Artyushenko

Novosibirsk State Technical University, prosp. K. Marksa, 20, Novosibirsk, 630073 Russia

**E-mail: m.stepanov@corp.nstu.ru*

Received December 22, 2022; revised May 16, 2023; accepted November 13, 2023

The modeling of echo signals from distributed radar objects taking into account the noise of their angular coordinates is considered. Relationships are presented that allow the transition from a multipoint model of an arbitrary object containing tens, hundreds and even thousands of emitting points to a model composed of four emitting points located at the vertices of a square. As an example, we synthesized an airplane model containing only four points. It is obtained on the basis of a multipoint model composed of 56 points. Using numerical modeling methods, it has been shown that angular noise generated by multi-point and four-point aircraft models have identical correlation functions and similar parameters of the probability density distribution of angular coordinate noise. The obtained result is also confirmed by semi-natural modeling methods using a matrix simulator.

Keywords: echo signal modeling, multipoint model, probability density function, apparent emission center, correlation functions, matrix simulator

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.3;004.3

ПОВЫШЕНИЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДИКИ ASMD-FSMD С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРОВ НЕБЛОКИРУЮЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ

© 2024 г. В. В. Соловьев*, А. С. Климович

*Белостокский технологический университет,
ул. Вейска, 45А, Белосток, 15-351, Республика Польша*

**E-mail: valsol@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.03.2023 г.

После доработки 05.04.2023 г.

Принята к публикации 27.04.2023 г.

Рассмотрена методика ASMD-FSMD проектирования цифровых устройств, которая заключается в построении блок-схемы автомата с трактом обработки данных (algorithmic state machine with datapath – ASMD), описывающей поведение устройства, и в создании кода проекта на языке Verilog в виде конечного автомата с трактом обработки данных (finite state machine with datapath – FSMD). Одним из направлений развития методики ASMD-FSMD является использование особенностей языка описания аппаратуры (hardware description language – HDL). Выдвинута гипотеза: в методике ASMD-FSMD возможно применение нескольких операторов неблокирующего назначения к одной и той же переменной в одном такте синхронизации, что приведет к увеличению быстродействия устройства. Выдвинутая гипотеза исследована при проектировании синхронных умножителей, реализующих классические алгоритмы умножения *c* и *d*. Экспериментальные исследования подтвердили справедливость выдвинутой гипотезы, при этом быстродействие умножителей увеличивается в два-три раза, а стоимость реализации в большинстве случаев уменьшается по сравнению с традиционным подходом.

Ключевые слова: автомат с трактом обработки данных, конечный автомат с трактом обработки данных, язык описания аппаратуры, операторы неблокирующего назначения, синхронные умножители

DOI: 10.31857/S0033849424030059, EDN: JVEISW

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно проектируемое цифровое устройство принято представлять в виде операционного устройства (datapath) и устройства управления (controller или control unit), которые обычно проектируются отдельно: операционное устройство – в виде совокупности стандартных функциональных узлов (регистров, шин, мультиплексоров и др.), а устройство управления – в виде конечного автомата (finite state machine, FSM).

В работе [1] было предложено объединить вместе операционное и управляющее устройство и представить как конечный автомат с трактом обработки данных (finite state machine with datapath – FSMD). Модель FSMD быстро стала популярной, в работе [2] приведены FSMD для синхронных и асинхронных проектов. Модель FSMD оказалась очень удобной для проверки

эквивалентности двух схем, полученных в результате синтеза или различных проектных преобразований [3, 4]. В [5] предложено цифровую систему представлять в виде сети FSMD, которая приводит к реализации аппаратуры, свободной от гонок.

Общая модель FSMD не всегда удобна при проектировании конкретных приложений, поэтому в ряде работ предлагаются расширения FSMD: для представления архитектуры процессора и ASIC [6] (application-specific integrated circuit), для синхронного доступа к памяти [7], для программ обработки массивов [8]. Уменьшение потребляемой мощности FSMD путем декомпозиции рассматривается в [9], а путем стробирования – в [10]. Эффективности FSM и FSMD сравниваются в работе [11].

Благодаря своей наглядности блок-схемы автоматов (algorithmic state machine, ASM) получили

широкое распространение для представления алгоритма функционирования FSM. Впервые ASM были предложены в [12] как альтернатива графам автоматов. В [13] рассматривается реализация ASM на PROM, FPLA и мультиплексорах. В [14] предлагаются методы минимизации числа вершин ASM. В [15] описывается инструмент ABELITE синтеза контроллеров, основанных на ASM.

Традиционно ASM используются для представления алгоритма функционирования устройства управления, т.е. FSM. В [16] предложено ASM использовать как для описания поведения устройства управления, так и для описания операций, выполняемых в операционном устройстве. Такая ASM получила название блок-схема автомата с трактом обработки данных (algorithmic state machine with datapath, ASMD). Диаграммы ASMD в последнее время все чаще применяются в проектах на FPGA: при реализации промышленных систем управления [17], для реализации функции asin с помощью алгоритма CORDIC [18], при аппаратной реализации криптографического алгоритма AES [19], при проектировании универсального асинхронного приема-передатчика UART [20] и др.

Методика ASMD-FSMD проектирования цифровых устройств впервые представлена в [21]. В методике ASMD-FSMD предложено описывать код проекта на языке Verilog непосредственно по схеме ASMD в виде FSMD. Сравнение методики ASMD-FSMD с традиционным подходом в случае использования в качестве устройства управления автоматов типа Мили и Мура приведено в [22]. В [23] рассматривается использование методики ASMD-FSMD для проектирования устройств цифровой обработки сигналов.

Главным достоинством методики ASMD-FSMD является значительное сокращение времени разработки проектов (в пять-семь раз). Кроме того, использование методики ASMD-FSMD позволяет в большинстве случаев уменьшить стоимость реализации и увеличить быстродействие проектов по сравнению с традиционным подходом. Одним из направлений развития методики ASMD-FSMD является использование особенностей языка описания аппаратуры (hardware description language, HDL).

Цель данной работы – увеличить быстродействие цифровых устройств с помощью использования в методике ASMD-FSMD операторов неблокирующего назначения языка Verilog [24].

1. МЕТОДИКА ASMD-FSMD

Разработка цифровых устройств с помощью методики ASMD-FSMD заключается в построении схемы ASMD поведения устройства и создании кода проекта в виде FSMD на языке Verilog.

Схема ASMD состоит из блоков ASMD, каждый из которых описывает поведение FSMD в одном состоянии в течение одного такта синхронизации (рис. 1). Блок ASMD включает одну вершину состояния (прямоугольник) и может иметь несколько условных вершин (ромбов) и вершин выходов по условию (овалов), причем ромбы могут как предшествовать овалам, так и следовать после овалов. Блок ASMD имеет только один вход, который является входом в вершину состояния, и может иметь один или несколько выходов. Входы и выходы вершин соединяются с помощью дуг. Обратные связи запрещены внутри блока ASMD. Циклы алгоритма и ждущие состояния в схеме ASMD реализуются с помощью внешних (по отношению к блоку ASMD) обратных связей.

Вблизи вершины состояния записывается имя состояния FSMD (например, S_1). В случае FSMD типа Мура внутри вершины состояния (прямоугольника) записываются операции, выполняемые в данном состоянии FSMD (outputs). В случае FSMD типа Мили в вершинах выхода по условию (овалах) записываются операции, выполняемые на данном переходе FSMD (conditional outputs). В условных вершинах (ромбах) записываются логические выражения (condi-

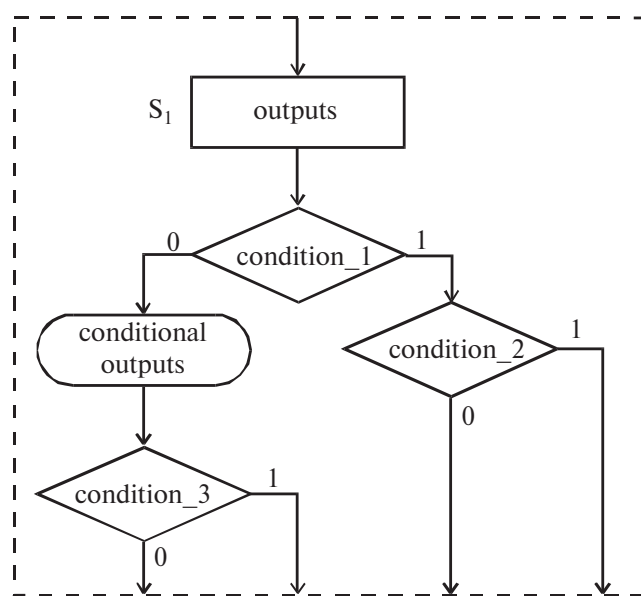


Рис. 1. Блок ASMD.

tion_1, condition_2, ...). Выходы условной вершины обозначаются значениями 0 и 1, которые соответствуют переходам в случае ложного или истинного значения логического выражения. В качестве операций, записываемых в прямоугольниках и овалах, а также в качестве логических выражений могут использоваться любые операции и логические выражения, допустимые в HDL (в нашем случае в языке Verilog).

Схема ASMD представляет собой композицию соединенных между собой блоков ASMD. При этом каждый выход любой вершины ASMD может быть соединен только с одним входом другой вершины, т.е. ветвление алгоритма возможно только в условных вершинах.

Код проекта на языке Verilog строится непосредственно по созданной схеме ASMD. Вначале выполняются необходимые объявления переменных (внутренних регистров устройства) и состояний FSMД. Каждый блок ASMD (состояние FSMД) описывается в виде процедурного блока **begin...end**. Условные вершины описываются с помощью операторов **if**. Присваивание значений переменным описывается с помощью операторов неблокирующего назначения ($\leftarrow$). Операции, выполняемые в прямоугольниках (для FSMД Мура) описываются в начале блока **begin...end**, а операции, выполняемые в овалах (для FSMД Мили) описываются в соответствующих местах операторов **if** (при этом возможно использование операторных скобок **begin...end**).

2. СУТЬ ПРЕДЛАГАЕМОГО ПОДХОДА

Очевидно, что для увеличения быстродействия проекта необходимо минимизировать число состояний FSMД в циклах алгоритма, т.е. в цепях обратной связи ASMD. Пусть с данными, находящимися в регистре (т.е. со значением переменной v), необходимо выполнить несколько последовательных действий: например, сложить содержимое регистра v с содержимым другого регистра w , результат запомнить в исходном регистре ($v = v + w$), сдвинуть содержимое регистра влево или вправо на несколько разрядов ($v = v \ll 1$) и др.

При традиционном подходе для хранения значения переменной необходимо использовать сдвиговый регистр. В этом случае, чтобы загрузить в сдвиговый регистр некоторое значение (результат сложения) и сдвинуть содержимое регистра, необходимо два такта синхронизации: один — для загрузки в регистр внешних данных, а второй — для сдвига содержимого регистра.

Возникает вопрос: а нельзя ли эти действия выполнить за один такт синхронизации. Предпосылкой для такого предположения является то, что в одном блоке ASMD можно использовать несколько вершин выходов по условию (овалов). Кроме того, язык Verilog предоставляет операторы неблокирующего назначения ($\leftarrow$), которые не препятствуют выполнению других операторов в одном и том же процедурном блоке. Отметим также, что для FSMД Мили в одном блоке ASMD можно проверять несколько логических выражений и в зависимости от результатов этих проверок выполнять различные операции с одними и теми же переменными, записывая операции в различных овалах. Другими словами, вопрос в том, можно ли несколько операций с одной и той же переменной выполнять в одном блоке ASMD.

Гипотеза. Использование операторов неблокирующего назначения языка Verilog в методике ASMD-FSMД позволяет выполнить несколько операций с одной и той же переменной за один такт синхронизации, что приводит к увеличению быстродействия устройства, по сравнению с традиционным подходом.

3. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДИКИ ASMD-FSMД ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИНХРОННОГО УМНОЖИТЕЛЯ

Известны следующие классические методы умножения, по которым строятся синхронные умножители [25]:

алгоритм а: когда проверяется младший разряд множителя, множитель сдвигается вправо, а множимое — влево;

алгоритм b: когда проверяется старший разряд множителя, множитель сдвигается влево, а множимое — вправо;

алгоритм с: когда проверяется старший разряд множителя, множитель и частные произведения сдвигаются влево;

алгоритм d: когда проверяется младший разряд множителя, множитель и частные произведения сдвигаются вправо.

Для проверки нашей гипотезы рассмотрим алгоритм умножения *с*. Операционное устройство и конечный автомат в случае традиционного подхода показаны на рис. 2 и 3 соответственно.

Значения чисел A и B поступают на вход операционного устройства. На выходах операци-

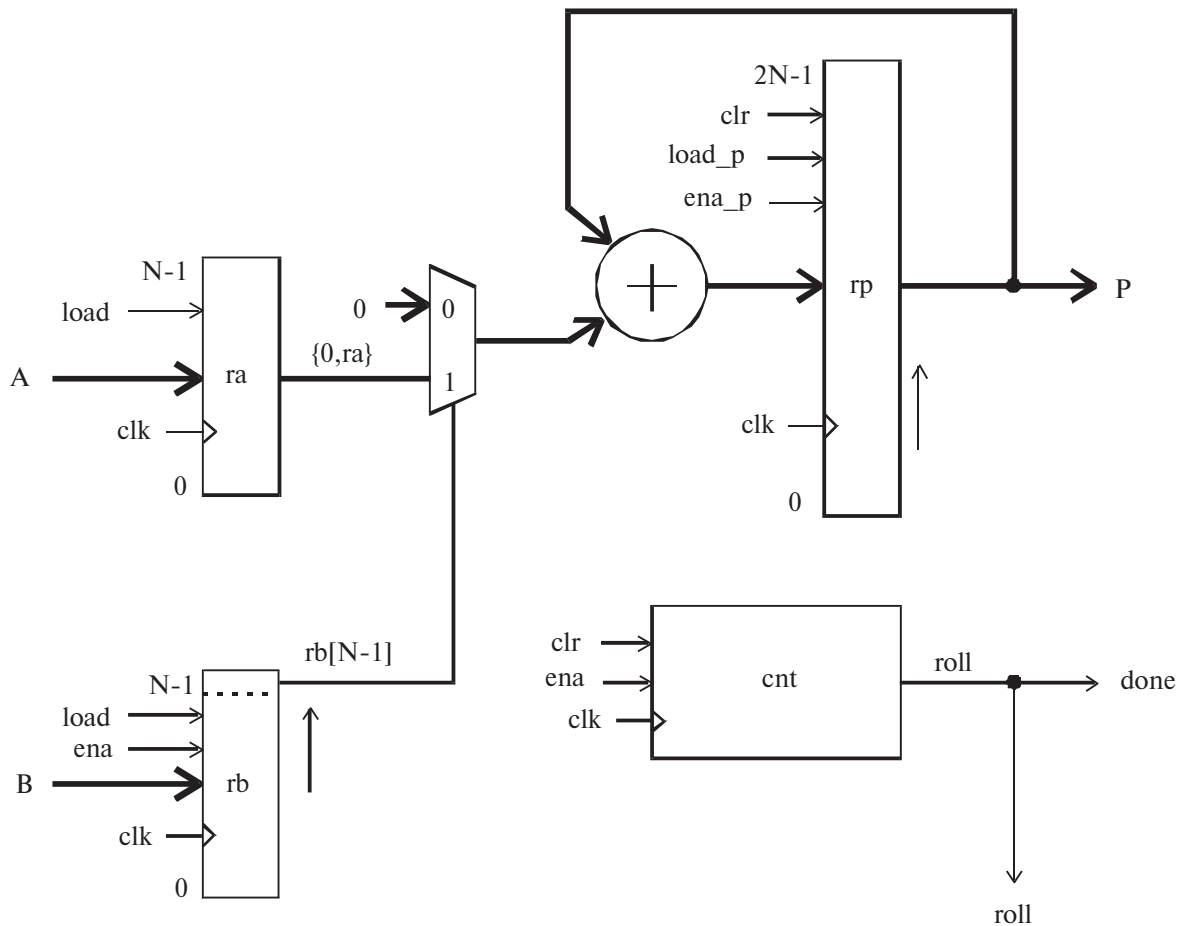


Рис. 2. Операционное устройство синхронного умножителя c .

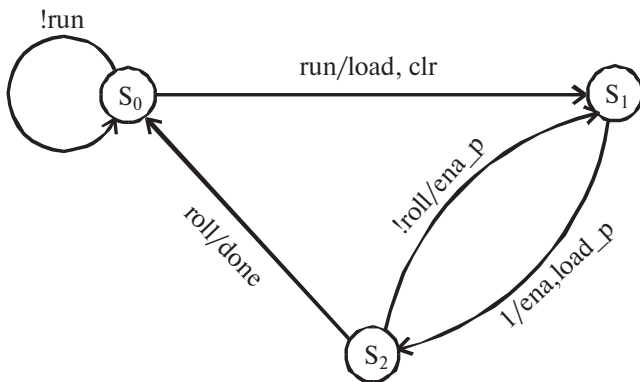


Рис. 3. Устройство управления синхронного умножителя c в виде графа конечного автомата типа Мили.

онного устройства формируется произведение P и сигнал $done$, указывающий на окончание процесса умножения. Значение множимого A (см. рис. 2) загружается в регистр ra , значение множителя B загружается в сдвиговый регистр rb ; произведение P формируется в сдвиговом регистре rp . Сумматор выполняет сложение содержимого регистра rp с множимым A или с нулем. Мультиплексор служит для выбора второ-

го операнда сумматора. Счетчик cnt формирует внутренний сигнал обратной связи $roll$, совпадающий с сигналом $done$, единичное значение которого указывает на окончание процесса умножения.

Процесс умножения чисел A и B , начинается с установки сигнала run . Конечный автомат FSM (см. рис. 3) на основании значений сигналов run и $roll$ формирует необходимые значения следующих управляющих сигналов: $load$ – для загрузки в регистры значений умножаемых чисел A и B ; $load_p$ – для загрузки результата сложения в регистр rp ; clr – для сброса регистра rp и счетчика cnt ; ena – для разрешения операции сдвига содержимого регистра rb и увеличения значения счетчика cnt ; ena_p – для разрешения операции сдвига содержимого регистра rp . Умножитель также управляется сигналом синхронизации clk и сигналом сброса $reset$.

В состоянии S_0 конечный автомат ожидает прихода сигнала run , который запускает процесс умножения путем перехода в состояние S_1 , при этом формируются сигналы $load$ и clr .

Для загрузки результатов суммирования в регистр *gr* и сдвига содержимого регистра *gr* требуется два такта синхронизации, поэтому одному циклу умножения соответствуют два состояния: S_1 и S_2 . При переходе из состояния S_1 в состояние S_2 в регистр *gr* по сигналу *load_p* загружается результат суммирования, а по сигналу *ena* выполняется сдвиг содержимого регистра *rb*. При переходе из состояния S_2 в состояние S_1 по сигналу *ena_p* содержимое регистра *gr* сдвигается влево. Процесс умножения заканчивается (FSM переходит в состояние S_0) после формирования сигнала *roll*.

Таким образом, при традиционном подходе умножение N -битовых чисел A и B с помощью алгоритма c выполняется за $n = 2N + 1$ тактов синхронизации.

Схема ASMD алгоритма умножения c (рис. 4) состоит из двух блоков ASMD, соответствующих состояниям S_0 и S_1 FSMД Мили. В состоянии S_0 ожидается единичное значение сигнала *run*, при его установке выполняется инициализация переменных. Состояние S_1 соответствует циклу

умножения. При $rb[N-1] = 1$ к содержимому регистра *gr* добавляется значение множимого (в противном случае ничего не добавляется). Затем увеличивается значение счетчика *cnt* и выполняется сдвиг влево содержимого регистра *rb*. В этом же блоке ASMD проверяется значение счетчика *cnt*. Если $cnt = N-1$, то устанавливается флаг *done* и процесс умножения заканчивается, иначе содержимое регистра *gr* сдвигается влево и цикл умножения повторяется.

Отметим, что в одном блоке ASMD выполняется увеличение значения и сдвиг содержимого регистра *gr*, а также увеличение значения счетчика *cnt* и сравнение этого значения с величиной $N-1$. Таким образом, при использовании методики ASMD-FSMD умножение N -битовых чисел A и B по алгоритму c выполняется за $n = N + 1$ тактов синхронизации.

Непосредственно по схеме ASMD на рис. 4 можно записать следующий код FSMД на языке Verilog проекта *mult_c_Mealy_FSMD* синхронного умножителя, реализующего алгоритм умножения c :

```
module mult_c_Mealy_FSMD
#(parameter N=4)
  (input clk, reset, run,
   input [N-1:0] a,b,
   output reg [2*N-1:0] p,
   output reg done);
  reg [2*N-1:0] rp;
  reg [N-1:0] ra,rb;
  reg [N:0] cnt;
  localparam [0:0] s0=0,s1=1; // состояния FSMД
  reg [0:0] state;
  always @(posedge clk, negedge reset)
  if(!reset) state <= s0;
  else
    case (state)
      s0: if(run) begin // описание первого блока ASMD
          rp = 0; cnt <= 0; done <= 0;
          ra <= a;
          rb <= b;
          state <= s1;
        end
      s1: begin // описание второго блока ASMD
          if(rb[N-1]) rp = rp + ra;
          cnt <= cnt + 1'b1;
          rb <= rb << 1;

          if (cnt == N-1) begin
            done <= 1'b1;
            p <= rp;
            state <= s0;
          end
          else begin
            rp = rp << 1;
            state <= s1;
          end
        end
      default: state <= s0;
    endcase
endmodule
```

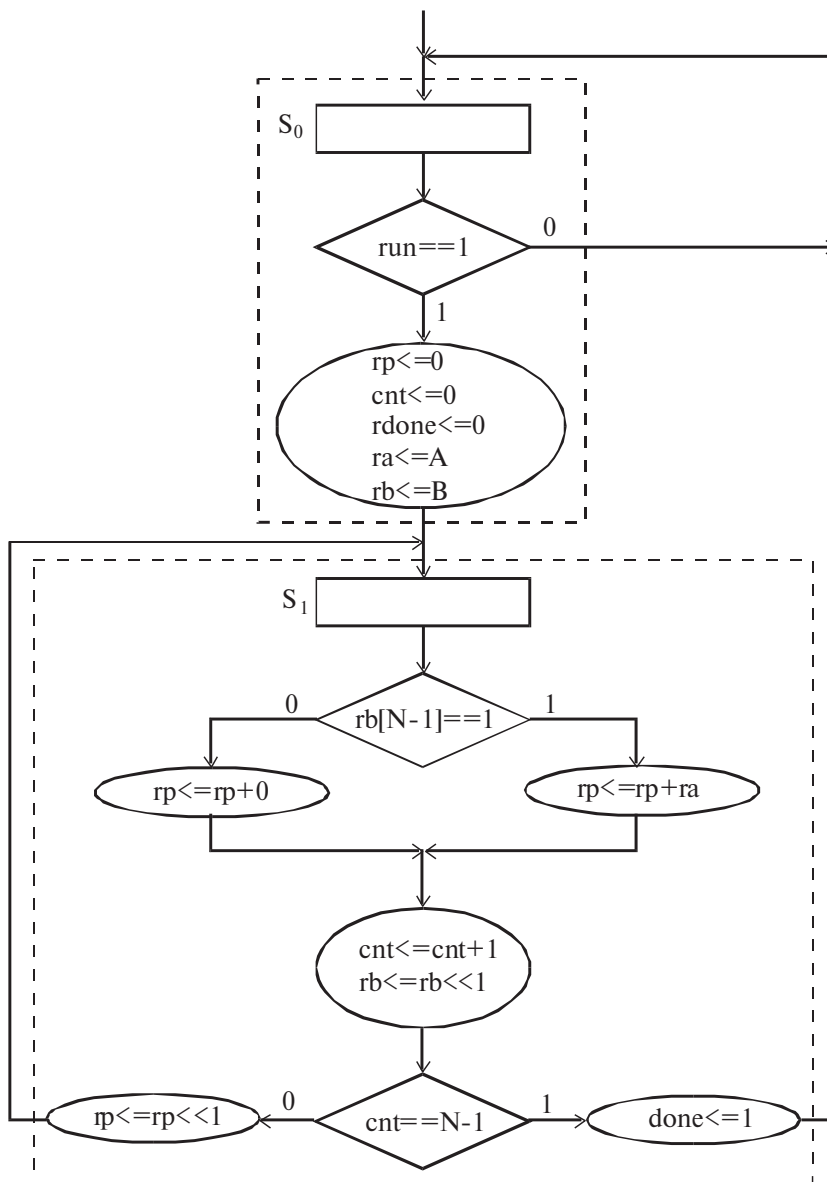


Рис. 4. Схема ASMD алгоритма умножения c . Результаты моделирования проекта `mult_c_Mealy_FSMD` в системе Quartus Prime приведены на рис. 5. Видно, что умножение 4-битовых чисел действительно выполняется за пять тактов синхросигнала clk . Для сравнения на рис. 6 приведены результаты моделирования синхронного умножителя, реализующего алгоритм умножения c , который был спроектирован по традиционной технологии. Как видно, умножение 4-битовых чисел выполняется за девять тактов синхронизации.

Таким образом, наша гипотеза — использование операторов неблокирующего назначения языка Verilog в методике ASMD-FSMD позволяет выполнить несколько операций с одной и той же переменной за один такт синхронизации и увеличить быстродействие устройства — полностью подтвердилась.

Отметим, что возможность выполнения нескольких операций с одной и той же переменной за один такт синхронизации объясняется особенностями реализации компилятором языка Verilog операторов неблокирующего назначения.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование эффективности методики ASMD-FSMD проводили при реализации на FPGA семейства Cyclone IV E с помощью системы Quartus Prime версии 18.1 алгоритмов умножения c и d . При описании алгоритма d схемой ASMD в одном блоке ASMD выполняется добавление к содержимому регистра gr значения регистра ra , а также сдвиг вправо регистра gr .

Алгоритмы умножения c и d были реализованы с помощью традиционного подхода в виде

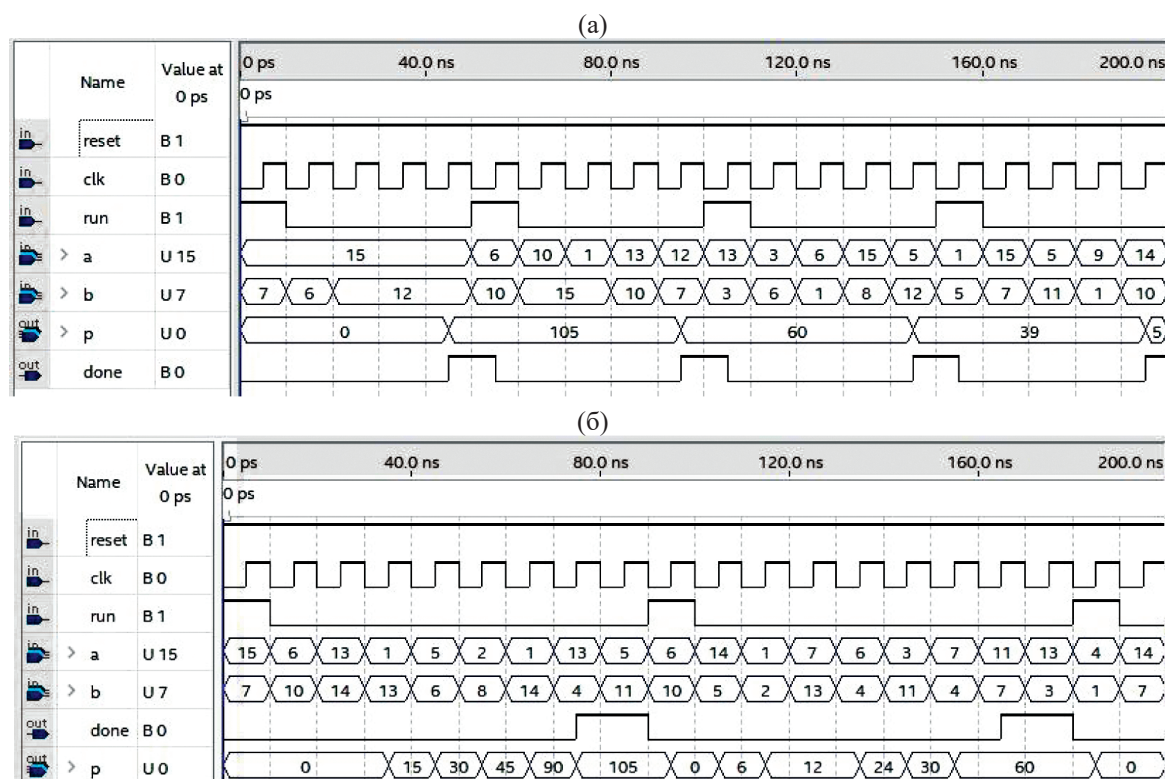


Рис. 5. Результаты моделирования умножителя, спроектированного по методике ASDM-FSMD (а) и построенного по традиционной методике (б).

операционного устройства и устройства управления, а также с помощью методики ASDM-FSMD. Проекты исследовались с шириной входных слов 4, 8, 16, 32, 64 и 128 битов. Результаты экспериментальных исследований приведены в табл. 1.

Анализ табл. 1 показывает, что использование методики ASDM-FSMD позволяет увеличить быстродействие алгоритма c в среднем в 1.96 раза (для примера, mult_c_4 в 1.99 раза) и алгоритма d в 2.45 раза (для примера, mult_c_16 в 2.96 раза). Кроме того, методика ASDM-FSMD позволяет для алгоритма d уменьшить стоимость реализации в среднем в 1.23 раза (для примера, mult_c_16 в 1.31 раза). Увеличение быстродействия в результате применения методики ASDM-FSMD можно также видеть на рис. 6.

Методику ASDM-FSMD также исследовали с помощью системы Vivado версии 2018.2 на FPGA семейства Kintex UltraScale при реализации алгоритмов умножения c и d . Результаты исследований приведены в табл. 2.

Анализ табл. 2 показывает, что использование методики ASDM-FSMD позволяет для алгоритма c увеличить быстродействие в среднем в 1.98 раза (для примера, mult_c_128 в 2.05 раза) и уменьшить стоимость реализации в 1.18 раза (для

примера, mult_c_64 в 1.56 раза). Для алгоритма d быстродействие увеличивается в среднем в 2.10 раза (для примера, mult_d_4 в 2.38 раза), а стоимость реализации уменьшается в 1.59 раза (для примера, mult_d_128 в 1.96 раза). Увеличение быстродействия и уменьшение стоимости реализации в результате применения методики ASDM-FSMD в системе Vivado можно также видеть на рис. 7 и 8 соответственно.

Таким образом, справедливость выдвинутой гипотезы подтвердилась результатами экспериментальных исследований для компиляторов двух популярных систем проектирования: Quartus фирмы Intel и Vivado фирмы Xilinx. При этом наблюдается не только увеличение быстродействия, но также в ряде случаев уменьшение стоимости реализации. С большой вероятностью можно ожидать, что использование методики ASDM-FSMD будет также эффективно и для других систем проектирования, а также для других языков проектирования, например, VHDL.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках применения методики ASDM-FSMD к реализации синхронных умножителей исследована возможность использования в одном блоке ASDM нескольких

Таблица 1. Результаты исследования реализации алгоритмов умножения *c* и *d* в системе Quartus

Пример	Параметр					
	L_T	L_A	L_T/L_A	t_T	t_A	t_T/t_A
mult_c_4	35	35	1.00	40.25	20.22	1.99
mult_c_8	60	65	0.92	93.11	47.82	1.95
mult_c_16	112	138	0.81	183.55	97.72	1.88
mult_c_32	208	270	0.77	452.46	238.75	1.98
mult_c_64	405	540	0.75	1267.69	639.39	1.98
mult_c_128	793	1006	0.79	8216.11	4200.59	1.96
mult_d_4	32	29	1.10	41.77	20.67	2.02
mult_d_8	58	48	1.21	82.48	36.41	2.27
mult_d_16	98	75	1.31	159.26	53.86	2.96
mult_d_32	176	141	1.25	410.87	158.33	2.59
mult_d_64	338	271	1.25	940.51	355.62	2.64
mult_d_128	663	528	1.26	4851.80	2178.69	2.23

Примечания: mult_c_N и mult_d_N – проекты, реализующие алгоритмы умножения *c* и *d* соответственно; *N* – ширина входных слов умножителей в битах; L_T и L_A – число используемых логических элементов FPGA (стоимость реализации) в случае традиционного подхода и при использовании методики ASMD-FSMD соответственно; t_T и t_A – время выполнения операции умножения в наносекундах в случае традиционного подхода и при использовании методики ASMD-FSMD; L_T/L_A и t_T/t_A – отношения соответствующих параметров.

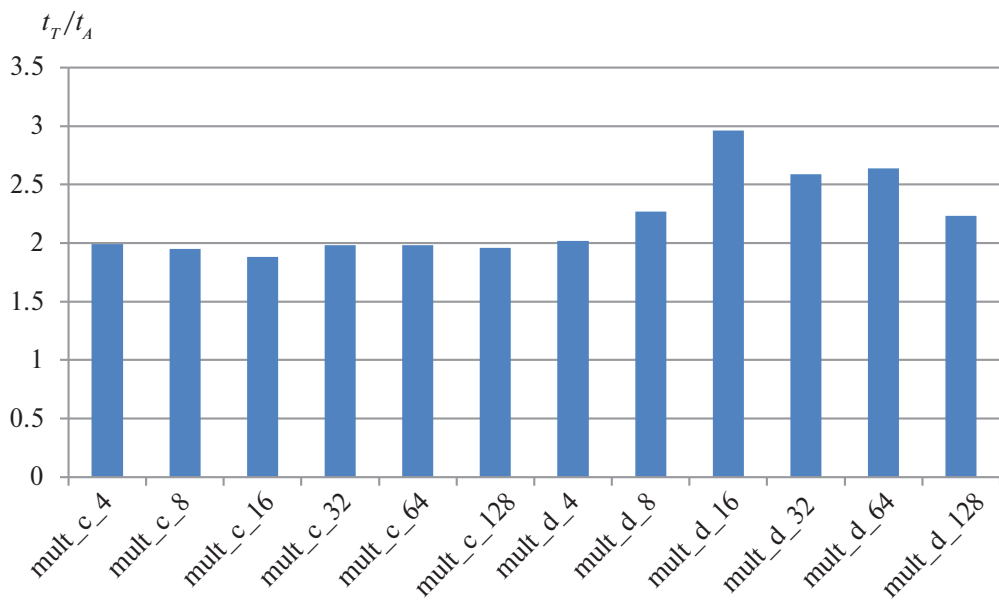


Рис. 6. Коэффициенты (число раз) увеличения быстродействия для каждого примера в системе Quartus.

операторов неблокирующего назначения языка Verilog к одной и той же переменной с целью увеличения быстродействия.

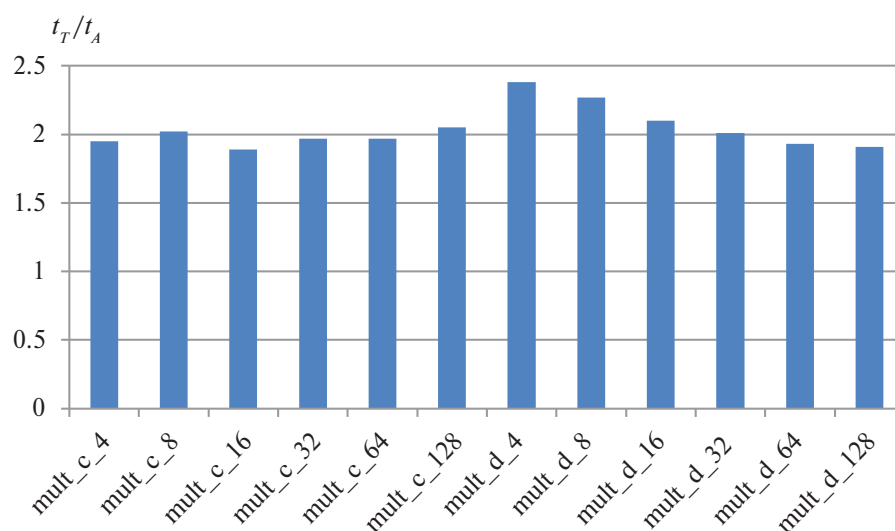
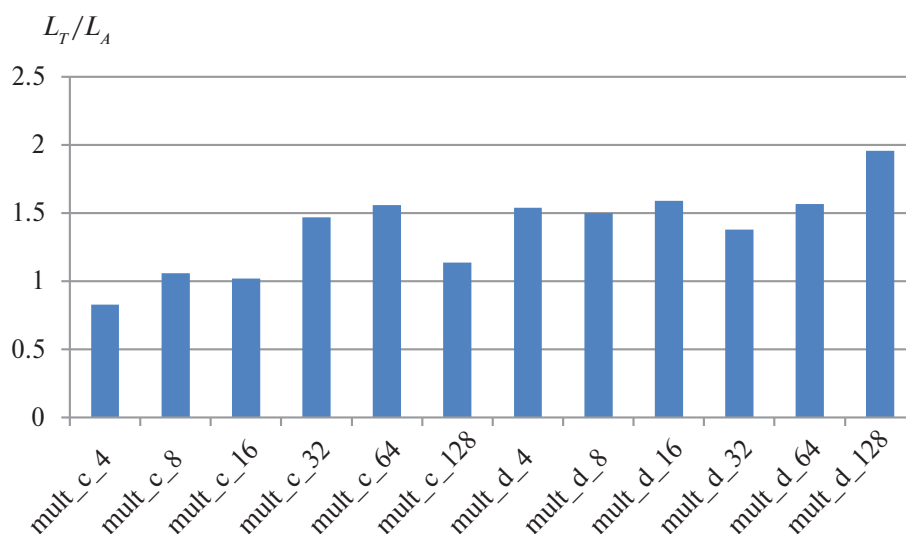
Показано, что в одном блоке ASMD можно применять несколько операторов неблокирующего назначения к одной и той же переменной. При этом все действия в одном блоке ASMD выполняются за один такт синхронизации, что приводит к значительному увеличению быстро-

действия устройства, а в некоторых случаях и к уменьшению стоимости реализации.

Экспериментальные исследования показали, что применение методики ASMD-FSMD для реализации синхронных умножителей позволило увеличить быстродействие в два-три раза и в большинстве случаев уменьшить стоимость реализации, в некоторых случаях почти в два раза.

Таблица 2. Результаты исследования реализации алгоритмов умножения c и d в системе Vivado

Пример	Параметр					
	L_T	L_A	L_T/L_A	t_T	t_A	t_T/t_A
mult_c_4	19	23	0.83	74.56	38.30	1.95
mult_c_8	35	33	1.06	138.79	68.59	2.02
mult_c_16	66	65	1.02	275.55	145.52	1.89
mult_c_32	132	90	1.47	589.23	299.41	1.97
mult_c_64	267	171	1.56	1241.75	629.66	1.97
mult_c_128	528	462	1.14	2537.88	1239.05	2.05
mult_d_4	20	13	1.54	89.49	37.54	2.38
mult_d_8	36	24	1.50	157.24	69.26	2.27
mult_d_16	65	41	1.59	305.59	145.28	2.10
mult_d_32	124	90	1.38	619.21	307.82	2.01
mult_d_64	267	170	1.57	1216.07	629.85	1.93
mult_d_128	525	268	1.96	2466.98	1288.97	1.91

**Рис. 7.** Коэффициенты (число раз) увеличения быстродействия для каждого примера в системе Vivado.**Рис. 8.** Коэффициенты (число раз) уменьшения стоимости реализации для каждого примера в системе Vivado.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белостокского технологического университета (Белосток, Польша, грант WZ/WI-III/5/2023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gajski D.D., Dutt N.D., Wu A.C., Lin S.Y. High-Level Synthesis: Introduction to Chip and System Design. Boston: Kluwer, 1992.
2. Auletta R., Reese B., Traver C. // Proc. Int. Conf. on Computer Design ICCD'93. Cambridge (MA). 3–6 Oct. 1993. N.Y.: IEEE, 1993. P. 178.
3. Karfa C., Sarkar D., Mandal C. // IEEE Trans. 2010. V. CAD-29. № 3. P. 479.
4. Hu J., Wang G., Chen G., Wei X. // IEEE Access. 2019. V. 7. P. 183435.
5. Schaumont P., Shukla S., Verbauwhede I. // Proc. Design Automation & Test in Europe Conf. Verona. 11–14 Jul. 2005. N.Y.: IEEE, 2006. V. 1. P. 6.
6. Zhu J., Gajski D.D. // Proc. 7th Int. Workshop on Hardware/Software Codesign CODES'99. Rome. 3 Mar. 1999. N.Y.: IEEE, 1999. P. 121.
7. Kavvadias N., Masselos K. // Proc. Int. Conf. on Application-Specific Systems, Architectures and Processors. Delft. 9–11 Jul. 2012. N.Y.: IEEE, 2012. P. 157.
8. Banerjee K., Sarkar D., Mandal C. // IEEE Trans. 2014. V. CAD-33. № 12. P. 2015.
9. Hwang E., Vahid F., Hsu Y.C. // Proc. Int. Conf. on Design, Automation and Test in Europe. Munich. 9–12 Mar. 1999. P. 7.
10. Abdullah A.C., Ooi C.Y., Ismail N.B., Mohammed N.B. // Proc. Int. Symp. On Circuits and Systems (ISCAS). Montreal. 22–25 May 2016. N.Y.: IEEE, 2016. P. 1942.
11. Babakov R., Barkalov A., Titarenko L. // Proc. Int. Conf. on The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM). Lviv. 21–25 Feb. 2017. N.Y.: IEEE, 2017. P. 203.
12. Clare C.R. Designing logic systems using state machines. N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1973.
13. Green D.H., Chughtai M.A. // IEE Proc. E-Computers and Digital Techniques. 1986. V. 133. № 4. P. 194.
14. Baranov S. // Proc. Int. Conf. EUROMICRO. Vasteras. 27–27 Aug. 1998. N.Y.: IEEE, 1998. V. 1. P. 176.
15. Jenihhin M., Baranov S., Raik J., Tihomirov V. // Proc. Int. Conf. Latin American Test Workshop (LATW). Quito. 10–13 Apr. 2012. N.Y.: IEEE, 2012. P. 1.
16. Ciletti M.D. Advanced digital design with the Verilog HDL. New Delhi: Prentice Hall of India, 2005.
17. Martín P., Bueno E., Rodríguez F.J., Sáez V. // Proc. Annual Conf. IEEE Industrial Electronics. Porto. 3–5 Nov. 2009. N.Y.: IEEE. P. 2811.
18. Saha A., Ghosh A., Kumar K.G. // Proc. Int. Conf. on Advances in Science and Technology. Bangkok. 19–22 Jan. 2017. Bangkok: Elsevier, 2017. P. 138.
19. Burciu P. // J. Electrical Engineering, Electronics, Control and Computer Science. 2019. V. 5. № 3. P. 1.
20. Sowmya K.B., Shreyans G., Vishnusi R.T. // Proc. Int. Conf. on Communication and Electronics Systems. Coimbatore. 10–12 Jun. 2020. N.Y.: IEEE, 2020. P. 176.
21. Salauyou V. // Proc. Int. Conf. on Dependability and Complex Systems. Wroclaw, Poland, June 28 – July 2. Cham: Springer, 2021. P. 391.
22. Salauyou V., Klimowicz A. // Proc. Int. Conf. on Computer Information Systems and Industrial Management. Elk, Poland, 24–26 Sept. 2021. Cham: Springer, 2021. P. 431.
23. Соловьев В.В. // РЭ. 2021. Т. 66. № 12. С. 1178.
24. Соловьев В.В. Язык Verilog в проектировании встраиваемых систем на FPGA. М.: Горячая линия—Телеком, 2020.
25. Соловьев В.В. Основы языка проектирования цифровой аппаратуры Verilog. 2-е изд. М.: Горячая линия—Телеком, 2021.

INCREASING THE SPEED OF DIGITAL DEVICES USING THE ASMD-FSMD METHOD USING NON-BLOCKING OPERATORS

V. V. Solov'ev*, A. S. Klimovicz

Bialystok University of Technology, Bialystok, 15-351 Poland

*E-mail: valsol@mail.ru

Received March 6, 2023; revised April 5, 2023; accepted April 27, 2023

The ASMD-FSMD method for designing digital devices is considered, which consists of constructing a block diagram of an algorithmic state machine with a data path (ASMD), which describes the behavior of the device, and creating project code in Verilog in the form of a finite state machine with a data processing path. (finite state machine with datapath – FSMD). One of the directions for the development of the ASMD-FSMD methodology is the use of features of the hardware description language (HDL). A hypothesis has been put forward: in the ASMD-FSMD technique, it is possible to apply several non-blocking assignment operators to the same variable in one synchronization cycle, which will lead to an increase in device performance. The hypothesis put forward was investigated in the design of synchronous multipliers that implement the classical multiplication algorithms c and d. Experimental studies have confirmed the validity of the put forward hypothesis, while the speed of the multipliers increases two to three times, and the cost of implementation in most cases decreases compared to the traditional approach.

Keywords: algorithmic state machine with a data processing path, finite state machine with a data processing path, hardware description language, non-blocking assignment operators, synchronous multipliers

УДК 538.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗОЛИРУЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА
В СВЕРХТОНКОЙ (42 Å) ПЛЕНКЕ ОКИСЛА КРЕМНИЯ

© 2024 г. Е. И. Гольдман, Г. В. Чучева*, И. А. Шушарин

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московской обл., 141190 Российская Федерация

*E-mail: gvc@ms.ire.rssi.ru

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.

После доработки 05.06.2023 г.

Принято к публикации 26.06.2023 г.

На основе ранее выполненных измерений туннельных вольт-амперных характеристик структур металл-SiO₂-Si (МОП) проведено моделирование изолирующего рельефа в сверхтонкой (4.2 нм) пленке окисла кремния. Потенциал в диэлектрике задавался в форме трапеции, боковые склоны которой имитировали переходные слои, а верхнее основание — объем SiO₂. Вычислены параметры модели — высота барьера и координаты угловых точек трапеции, исходя из требования максимальной близости экспериментальной и теоретической производных по напряжению от логарифма тока. Обнаружены общие, с более тонкими пленками (3.7 нм) окисла кремния, черты изолирующего потенциала: барьер занимает до половины номинального объема диэлектрического промежутка и сдвинут к полемому электроду, а его склон в сторону полупроводниковой подложки гораздо более пологий по сравнению с примыкающим к затвору.

Ключевые слова: туннельные вольт-амперные характеристики, моделирование изолирующего рельефа, производные по напряжению от логарифма тока

DOI: 10.31857/S0033849424030061, **EDN:** JVBQXB

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сверхтонкие (с толщиной менее 5 нм) слои окисла кремния являются в настоящее время и останутся в перспективе минимум одного-двух десятков лет основным изолятором, используемым в производстве работающих и новых структур нанoeлектроники [1]. На это указывают два обстоятельства. Во-первых, при термическом окислении кремния [2], особенно в его наиболее современной форме — радикальном термическом окислении с генерацией водяного пара у поверхности Si (in situ steam generation — ISSG) [3], — удается создавать бездефектные, практически не содержащие электронных ловушек пленки SiO₂ с высокими надежностными характеристиками. Это относится к активным элементам для электроизолирующих областей интегральных схем. Во-вторых, достигнуты толщины пленок оксида кремния под затвором в несколько атомных слоев [4]. А материалы-кандидаты на замену окисла кремния таких свойств еще не достигли. Таким образом, массовый переход в нанoeлектронной технологии от пленок SiO₂ к изолирующим слоям из диэлектриков с проницаемостью, существенно большей, чем у диоксида кремния, или сегнетоэлектриков — это вопрос не ближайшего будущего.

Современные методы проектирования нанoeлектронных элементов подразумевают проведение

обширных компьютерных вычислений из первых принципов с целью создания численных моделей работы квантовых структур и предсказания значений параметров приборов на их основе [5]. Для построения волновых функций электронов у границы раздела (ГР) кремний–окисел необходимо задавать профиль потенциала в изолирующем слое. В то же время нет никаких теоретических оснований, разрешающих для неупорядоченных материалов, коими являются и окисел кремния, и рассматриваемые в качестве его замены различные керамики, представлять волновую функцию электрона в типичном для метода эффективной массы виде — произведения медленно изменяющейся амплитуды и осциллирующей на атомных расстояниях функции координат [6]. Тем не менее фактически этим представлением пользуется абсолютное большинство исследователей электронных явлений на ГР полупроводник–SiO₂. Начиная с 70-х годов прошлого века были проведены в рамках метода эффективной массы расчеты различных квантовых эффектов и развита теория двумерного электронного газа [7]. Применение для описаний явлений на контактах с окислом уравнения Шредингера с эффективной массой электрона m означает, что используемый рельеф потенциала в изолирующем промежутке $U(z)$ (z — координата по нормали к ГР Si–SiO₂) и значение m должны быть некими величинами, которые после всех расчетов приводят

к совпадающим с экспериментом результатам. Таким образом, функцию $U(z)$ и величину m нужно определять из измерений на пленках SiO_2 в опытах, результаты которых зависят от потенциального рельефа в окисле. Для этих целей наиболее подходят эксперименты по туннелированию электронов сквозь изолирующий барьер. Отметим, что при такой постановке эффективные потенциальный рельеф $U(z)$ и масса m становятся зависимыми от индивидуальных особенностей объекта исследования — толщины пленки изолятора и технологии приготовления образца.

Атомная структура неупорядоченного окисла кремния не стыкуется с кристаллическими решетками полупроводников, из которых готовят активные элементы нанoeлектроники. Поэтому на ГР Si-SiO_2 возникает переходный слой, и его минимальная толщина при термическом окислении кремния составляет 2 атомных слоя [8]. Для сверхтонких оксидов переходы между кристаллической подложкой и SiO_2 , а также между окислом и затвором, например, из поли-Si, занимают от 35 до 100 процентов объема сверхтонкого изолятора [8]. Чем тоньше диэлектрик, тем выше доля переходных слоев в его объеме, и тем сильнее свойства его и массивного окисла различаются. Контакты кристаллической подложки с окислом и SiO_2 с поликремнием или иным материалом затвора формируются в неодинаковых технологических процессах и поэтому имеют разную кристаллическую структуру. Следовательно, нужно ожидать и разных, несимметричных по форме координатных зависимостей профиля изолирующего потенциала на этих ГР. Последнее обстоятельство согласуется с результатами экспериментов [9, 10].

Алгоритм построения из экспериментальных туннельных вольт-амперных характеристик (ВАХ) сверхтонких слоев SiO_2 зависимостей эффективно-го изолирующего потенциала от координаты и величины массы туннелирующего электрона был построен в [11] и далее развит в [12]. Решение задачи обращения экспериментальных данных основано на вычислении из полевых зависимостей туннельного тока $I(V)$ на ветвях ВАХ обеднения и обогащения кремния функций

$$f(V) = \left[\frac{z_2(V)}{H} \right]^{3/2} - \left[\frac{z_1(V)}{H} \right]^{3/2}.$$

Здесь $V = |V_i|$, V_i — падение внешнего напряжения на окисле, $z_1(V)$ и $z_2(V)$ — координаты ближней и дальней точек поворота, H — толщина слоя SiO_2 . В работе [11] было показано, что

$$f(V) = -\frac{4\bar{V}^{1/2}}{\pi} \int_0^{x_{\max}} \dot{\Phi}(V + x^2) dx, \quad (1)$$

где $\bar{V} = \left(\frac{9\hbar^2}{32mH^2q} \right)$ — константа с размерностью на-

пряжения, $\hbar$ — постоянная Планка, q — элементарный заряд, $x_{\max} = (V_{\max} - V)^{1/2}$ — максимальное значение переменной интегрирования, $V_{\max}$ — падение напряжения на слое окисла, отвечающее снятию изолирующего барьера,

$$\dot{\Phi}(V) = -\frac{d}{dV} \ln \left[\frac{I(V)}{I_*} \right] < 0,$$

I_* — нормировочное значение туннельного тока. В реальной экспериментальной ситуации подаваемые напряжения ограничены из-за опасности пробоя образца $V < V_{\Pi}$ (V_{Π} — максимальное напряжение, при котором фиксируется туннельный ток). Для окисла кремния характерно $V_{\Pi} < V_{\max}$, поэтому в [11, 12] функцию $f(V)$ разделяли на две части:

$$f(V) = \bar{f}(V) + \dot{f}(V),$$

$$\bar{f}(V) = \frac{4\bar{V}^{(1/2)}}{\pi} \int_0^{x_{\Pi}} \left[-\dot{\Phi}(V + x^2) \right] dx,$$

$x_{\Pi} = (V_{\Pi} - V)^{1/2}$, а добавок $\dot{f}(V)$ вычисляли для модельного вида потенциала $U(z)$ с параметрами, максимально сближающими экспериментальную и модельную ВАХ. Такой подход оправдан, если в достаточно широком диапазоне напряжений удовлетворяется соотношение $\bar{f}(V) \gg \dot{f}(V)$ (именно для проверки выполнения этого неравенства в [11, 12] и рассчитывались функции $\dot{f}(V)$), иначе при дальнейшем рассмотрении будет получаться не реальная картина, а смоделированная).

Если область напряжений, где проводились измерения ВАХ, слишком узка, $V_{\Pi} \ll V_{\max}$, то реализуется случай $\bar{f}(V) \leq \dot{f}(V)$. В этих условиях недостаточно данных опыта для построения реальной зависимости $U(z)$, и приходится ограничиваться только модельными представлениями о потенциальном рельефе.

Цель данной работы — рассмотреть методы построения моделей профиля изолирующего потенциала и проанализировать получающиеся результаты именно для таких экспериментальных случаев.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПРОФИЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ИЗ ПОЛЕВЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ТУННЕЛЬНОГО ТОКА ЧЕРЕЗ СВЕРХТОНКИЙ ИЗОЛИРУЮЩИЙ СЛОЙ

В качестве исходных экспериментальных данных были приняты результаты опытов, приведенные в работе [10]. Образцы представляли собой структуры на кремниевой подложке с полевым

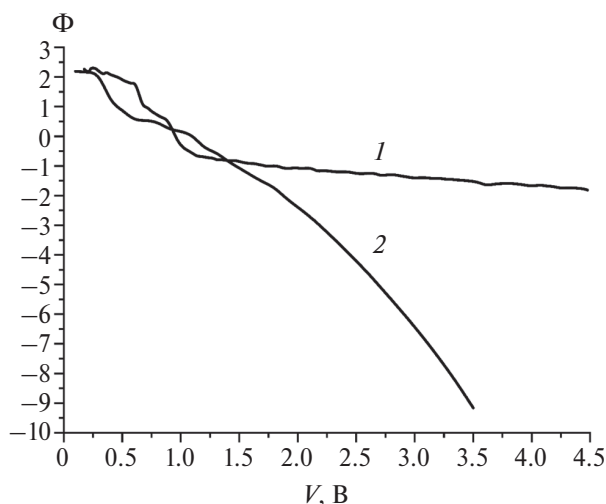


Рис. 1. Экспериментальные зависимости логарифма туннельного тока МОП-структур от напряжения: 1 — ветвь ВАХ, отвечающая обеднению полупроводника, 2 — ветвь ВАХ, отвечающая обогащению полупроводника.

электродом Al- n^+ -Si: P (концентрация доноров в поликремнии $N_d^+ \approx 10^{20} \text{ см}^{-3}$, площадь полевого электрода $S = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2$), изолированным от (100) n -Si слоем полученного при высокотемпературном окислении SiO_2 с оптической толщиной $h \approx 4.2 \text{ нм}$. Измерения [10] ВАХ и вольт-фарадных характеристик (ВФХ) образцов проводились в специальном нестационарном режиме, когда значения высокочастотных емкостей и тока отвечают одному и тому же состоянию образца. Данные высокочастотных ВФХ МОП-структур позволяют определить зависимости от полевого напряжения изгиба зон в полупроводнике и падения внешнего напряжения на изолирующем слое V_i . Подробности, касающиеся как свойств исследованных структур, так и методов измерений и обработки их результатов, приведены в [10]. На рис. 1 показаны экспериментальные зависимости тока через окисел от модуля падения напряжения на изолирующем слое при положительной (инжекция электронов из полупроводника, ветвь обогащения кремния свободными электронами) и отрицательной (инжекция электронов из полевого электрода, ветвь обеднения кремния свободными электронами) полярностях V_g .

Графики ветвей тока построены в логарифмическом масштабе:

$$\Phi_{\text{обог}}(V) = -\ln[I(V)/I_*] \text{ для } V_g > 0,$$

$$\Phi_{\text{обедн}}(V) = -\ln[I(V)/I_*] \text{ для } V_g < 0,$$

где V_g — полевое напряжение, $V = |V_i|$, нормировочное значение тока $I_* = 10^{-12} \text{ А}$. Максимальные напряжения, при которых фиксировался ток, составили для ветвей обеднения и обогащения

кремния соответственно $V_{\text{II}} = 4.5$ и 3.5 В . Фактически функции $\Phi(V)$ рассматриваются как аналог показателя экспоненты в квантово-механической вероятности туннелирования сквозь барьер, поэтому возникает знак минус перед логарифмом. Как следует из выражения (1), информация о рельефе потенциала в изолирующем слое содержится в производных от функций $\Phi(V)$. Поэтому, а не только из необходимости избавиться от привязки к нормировочному значению тока I_* , требуется вычислить зависимости $\Phi_{\text{обедн}}(V)$ и $\Phi_{\text{обог}}(V)$. Поскольку (см. рис. 1) экспериментальные данные зашумлены, для взятия производных нужно использовать метод регуляризации Тихонова [13]. В соответствии с [14] для сглаживания по Гауссу имеем

$$\frac{d\Phi}{dV} \approx \frac{2\pi}{\varepsilon^3} \int_{V-3\varepsilon}^{V+3\varepsilon} (V' - V)\Phi(V') \exp\left[-\frac{\pi(V' - V)^2}{\varepsilon^2}\right] dV', \quad (2)$$

где параметр ε имеет смысл разрешения по переменной V . С ростом ε систематическая ошибка счета увеличивается, а связанная с шумом — падает. Путем перебора значений ε было установлено, что в середине интервала измеренных напряжений минимальная сумма систематической и шумовой погрешностей достигается при $\varepsilon = 0.3 \text{ В}$. Результаты дифференцирования показаны на рис. 2.

Из-за нелокальности функционала (2) и в связи с отсутствием данных за пределами измеренного диапазона напряжений в окрестности минимального и максимального V возникает “краевой эффект” — систематическая ошибка счета резко

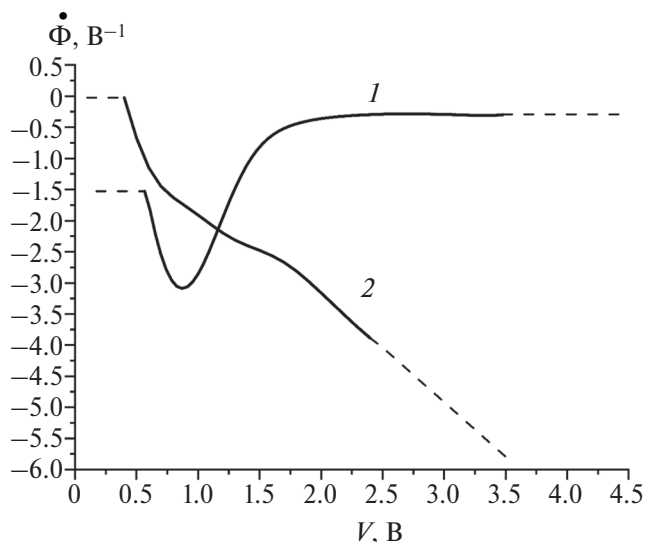


Рис. 2. Производные от экспериментальных зависимостей логарифма туннельного тока от напряжения: 1 — ветвь ВАХ, отвечающая обеднению полупроводника, 2 — ветвь ВАХ, отвечающая обогащению полупроводника; пунктиром отмечены области вблизи минимального и максимального напряжений, построенные интерполяцией результатов из близлежащих “надежных” интервалов.

нарастает. Поэтому вблизи V_{II} кривые построены линейной интерполяцией результатов из близлежащих “надежных” интервалов, а в области малых напряжений резко нарастающие “хвосты” заменены константами (см. пунктир на рис. 2).

Для формирования модели профиля изолирующего потенциала будем использовать трапециевидальную форму зависимости от координат:

$$U_{\text{мод}}(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < a_l - b_l, \\ \frac{z - a_l}{b_l} + 1, & a_l - b_l < z < a_l, \\ 1, & a_l < z < H - a_r, \\ -\frac{z - (H - a_r)}{b_r} + 1, & H - a_r < z < H - (a_r - b_r), \\ 0, & H - (a_r - b_r) < z < H. \end{cases} \quad (3)$$

Параметры этого потенциала — высота барьера U_* и безразмерные характеристики угловых точек a_l/H , b_l/H , a_r/H , b_r/H — должны подчиняться неравенствам

$$\frac{b_l}{H} < \frac{a_l}{H} < 1 - \frac{a_r}{H}, \quad \frac{a_r}{H} > \frac{b_r}{H}.$$

Выбор такой формы рельефа удобен тем, что боковые склоны трапеции имитируют переходные слои, а постоянная величина малого основания — объем однородного окисла кремния. Построение профиля потенциала в виде (3) уже применялось ранее [12] для расчета начального шага процедуры последовательных приближений. Однако использовать данные [12] для нашего образца опасно: как уже указывалось в разд. 1, эффективные потенциальный рельеф $U(z)$ и масса m зависят от индивидуальных особенностей объекта исследований — толщины пленки изолятора и технологии приготовления образца. Ниже будут проанализированы и общие, и зависящие от толщины окисла черты реального изолирующего профиля для различных сверхтонких SiO_2 . Конкретные значения параметров потенциала и эффективной массы

туннелирующего электрона определяли из условия максимального сближения модельной $\dot{\Phi}_{\text{мод}}(V)$ и экспериментальной $\dot{\Phi}(V)$ характеристик. С этой целью путем перебора значений параметров функции (3) подбирали их комбинацию, минимизирующую функционал

$$\Omega = \frac{\int_0^{V_{II \text{ обедн}}} [\dot{\Phi}_{\text{обедн}}(V) - \dot{\Phi}_{\text{мод обедн}}(V)]^2 dV}{V_{II \text{ обедн}}} + \frac{\int_0^{V_{II \text{ обог}}} [\dot{\Phi}_{\text{обог}}(V) - \dot{\Phi}_{\text{мод обог}}(V)]^2 dV}{V_{II \text{ обог}}}. \quad (4)$$

Зависимость $\dot{\Phi}_{\text{мод}}(V)$ вычисляли как

$$\dot{\Phi}_{\text{мод}}(V) = \frac{d}{dV} \left(\frac{8m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int_{z_{\text{мод}1}}^{z_{\text{мод}2}} \left[U_{\text{мод}}(z) - \frac{qV}{H} z \right]^{1/2} dz$$

(координаты точек поворота рассчитывали исходя из выражения (3)) и учитывали, что уровни туннелирования на ветвях ВАХ, отвечающих обеднению и обогащению кремния, различаются на энергию Ферми электронов в полупроводнике:

$$E_F = T \ln \frac{N_c}{N_d},$$

где T — температура в энергетических единицах, N_c — эффективная плотность состояний в зоне проводимости кремния, N_d — концентрация легирования полупроводника. Возможность пренебрежения шириной зоны уровней туннелирования по энергии для нашей задачи обоснована в [11]. Отметим, что разделение потенциала в изоляторе на две составляющие — собственное поле с профилем $U(z)$ и внешнее поле $qV(z/H)$ — требует установления начала отсчета напряжения V . Удобно считать, что в равновесии $V = 0$. Тогда потенциал $U(z)$ должен содержать вклады и от зарядов, фиксированных в изолирующем промежутке, и от контактной разности потенциалов полевой электрод—полупроводник.

Таблица 1. Связь констант, входящих в выражения для $\dot{\Phi}_{\text{мод}}$, с параметрами модельного потенциала для разных ветвей ВАХ МОП-структуры

Ветви ВАХ	V_{max}	ζ	η	χ	γ
Обеднение	$\frac{U_* H}{q a_l}$	$\frac{a_l}{H}$	$\frac{a_l}{b_l}$	$\frac{a_l}{b_r}$	$\frac{(a_l/H)}{1 - (a_r/H)}$
Обогащение	$\frac{(U_* - E_F) H}{q a_r}$	$\frac{a_r}{H}$	$\frac{a_r U_*}{b_r (U_* - E_F)}$	$\frac{a_r U_*}{b_l (U_* - E_F)}$	$\frac{(a_r/H)}{1 - (a_l/H)}$

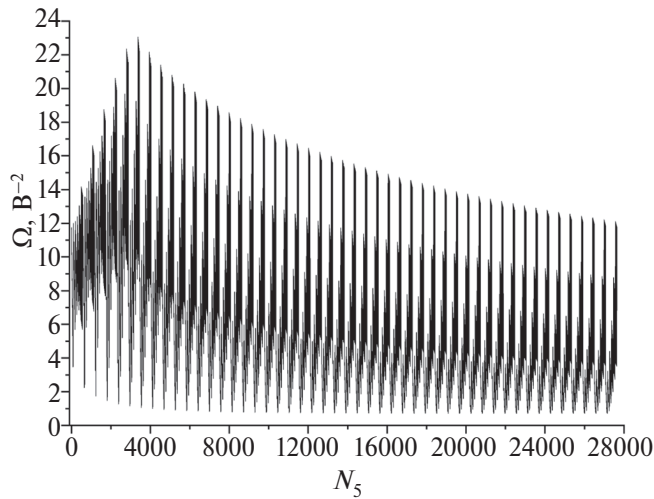


Рис. 3. Зависимость функционала Ω от номера пятерки N_s параметров модельного трапецеидального потенциала для $m/m_0 = 1.8$.

Для производных от модельных зависимостей при $V < \gamma V_{\max}$ получаем

$$\dot{\Phi}_{\text{мод}} = -\frac{\zeta^{3/2} \eta V_{\max} (V_{\max} - V)^{1/2} [V^2 - (4 - \eta) V_{\max} V + 2\eta V_{\max}^2]}{2\bar{V}^{1/2} (\eta V_{\max} - V)^2 V^2} +$$

$$+ \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^{3/2} \frac{\chi V_{\max} (\gamma V_{\max} - V)^{1/2} [-V^2 + (\chi + 4\gamma) V_{\max} V + 2\chi V_{\max}^2]}{2\bar{V}^{1/2} (\chi V_{\max} + V)^2 V^2},$$

а при $\gamma V_{\max} < V < V_{\max}$ —

$$\dot{\Phi}_{\text{мод}} = -\frac{\zeta^{3/2} \eta V_{\max} (V_{\max} - V)^{1/2} [V^2 - (4 - \eta) V_{\max} V + 2\eta V_{\max}^2]}{2\bar{V}^{1/2} (\eta V_{\max} - V)^2 V^2},$$

где $V_{\max}$ — напряжение снятия барьера. Выражения для констант, входящих в формулы для $\dot{\Phi}_{\text{мод}}$, приведены в табл. 1.

Минимизацию функционала (4) проводили отдельно по каждому значению эффективной массы m из набора $m/m_0 = 0.2, 0.4, \dots, 1.8, 2.0$ (m_0 — масса свободного электрона) путем перебора чисел Ω , отвечающих разным комбинациям значений параметров функции $U_{\text{мод}}(z)$. Всего для каждой m было рассмотрено более 27500 комбинаций и использована схема последовательных переходов ко все более сужающимся интервалам между соседними величинами исходных параметров зависимости (3). При всех значениях масс график зависимости Ω от номера комбинации параметров N_s функции $U_{\text{мод}}(z)$ носит осциллирующий характер (рис. 3).

Локальным минимумам на этой зависимости соответствует форма трапеции (3) со сдвигом в сторону полевого электрода. На фоне числа

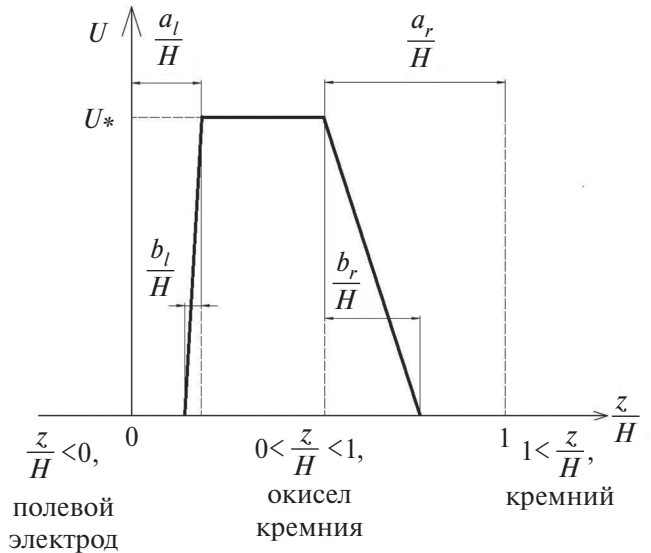


Рис. 4. Модельный профиль изолирующего потенциала в МОП-структуре со сверхтонким окислом.

$$\Xi = \frac{\int_0^{V_{\text{II обедн}}} [\dot{\Phi}_{\text{обедн}}(V)]^2 dV}{V_{\text{II обедн}}} +$$

$$+ \frac{\int_0^{V_{\text{II обог}}} [\dot{\Phi}_{\text{обог}}(V)]^2 dV}{V_{\text{II обог}}} = 74.486 \text{ В}^{-2}$$

минимальное и по массам, и по параметрам трапеции значение $\Omega_{\min} = 0.7232194 \text{ В}^{-2}$ выглядит привлекательно, и оно соответствует $m/m_0 = 1.8$ и комбинации $U_* = 24.5 \text{ эВ}$, $a_l/H = 0.133$, $a_r/H = 0.6$, $b_l/H = 0.014$, $b_r/H = 0.333$. Причем при смене значения эффективной массы изменение у $\Omega_{\min}$ происходит только в третьем знаке после запятой. Вид модельного изолирующего рельефа для найденных параметров потенциала (3) представлен на рис. 4.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Найденное значение высоты изолирующего барьера $U_* = 24.5 \text{ эВ}$ приводит к напряжениям его снятия $V_{\max} \approx 184 \text{ В}$ на ветви ВАХ обеднения кремния и $V_{\max} \approx 40.5 \text{ В}$ на ветви обогащения. Поэтому, с одной стороны, для данных экспериментов реализуется случай $V_{\text{II}} \ll V_{\max}$, и поэтому более строгие построения реального потенциального профиля, чем применение модельных форм типа (3), проводить нельзя. С другой стороны, полученное в результате максимального сближения экспериментальных и модельных характеристик значение высоты изолирующего барьера $U_* = 24.5 \text{ эВ}$ выглядит завышенным. Оно существенно превосходит

найденную ранее для более тонкого окисла (3.7 нм) величину $U_* = 3.52$ эВ [12]. По-видимому, сказываются недостатки, присущие модельному подходу построения профиля изолирующего потенциала. На смещение трапеции (3) в сторону кремния реакция функционала (4) резкая — величина $\Omega_{\min}$ повышается в десятки раз, а на увеличение величины эффективной массы туннелирующего электрона реакция слабая — $\Omega_{\min}$ изменяется с ростом m лишь только в третьем знаке после запятой. Поскольку $\Phi_{\text{мод}} \propto (m / U_*)^{1/2}$, неточности в определении m приводят к таким же относительным ошибкам в значении U_* . Иная картина восстановления реального изолирующего рельефа возникает при процедуре последовательных приближений данных, относящихся к разным ветвям ВАХ [11, 12]. Способ определения значения эффективной массы туннелирующего электрона по наилучшему переходу с ростом номера приближения n ветвей $U_{\text{обог}}^{(n)}(z)$ и $U_{\text{обедн}}^{(n)}(z)$ в единую кривую потенциального рельефа оказывается в общем комплексе построения $U(z)$ и поэтому более надежен.

Несмотря на перечисленные критические моменты модельного метода построения изолирующего профиля в сверхтонком слое окисла кремния, такой подход позволяет определить ряд общих черт для подзатворных пленок SiO_2 разной толщины. В первую очередь это касается пространственной области сосредоточения потенциала — высокий барьер занимает отнюдь не весь номинальный объем изолятора. Для образца, исследованного в данной работе, изолирующий потенциал сосредоточен в 0.4 объема SiO_2 . Близкий результат получали и в случае окисла кремния толщиной 3.7 нм [12]. Еще одна важная общая деталь потенциального профиля подзатворных пленок SiO_2 разной толщины — их форма несимметрична по отношению к подложке и полемому электроду (см. рис. 4). Барьер “придвинут” к ГР с поликремнием, его склон со стороны затвора гораздо круче, чем со стороны подложки. В результате ВАХ подобных объектов имеют резко асимметричный вид — нарастание тока с напряжением на ветви ВАХ обогащения кремния гораздо сильнее, чем на ветви обеднения [9, 10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обнаруженные ранее [12] и подтвержденные в данной работе общие черты потенциального профиля подзатворных сверхтонких пленок SiO_2 разной толщины — высокий барьер сосредоточен в менее половины их номинального объема и сдвинут к ГР с поликремнием — это важный результат исследований нанометровых кремниевых структур. Объяснение этого явления требует специальных исследований, в рамках данной статьи этот факт можно только констатировать.

В научном мире все более возрастает интерес к изолирующим слоям из диэлектриков с диэлектрической проницаемостью, большей, чем у диоксида кремния или сегнетоэлектриков. Имеет место постепенное уменьшение толщин этих материалов в работающих структурах с целью приближения к десяткам ангстрем. Поэтому развитие исследований потенциального профиля тонких изолирующих слоев следует ожидать на структурах с изолирующими материалами, заменяющими окисел кремния.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (тема № 075-01110-23-01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zwanenburg F.A., Dzurak A.S., Morello A. et al. // *Rev. Mod. Phys.* 2013. V. 85. № 3. P. 961. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.961>.
2. Красников Г.Я., Горнев Е.С., Матюшкин И.В. // *Электрон. техника. Сер. 3. Микроэлектроника*. 2018. С. 63.
3. Черняев М.В., Горохов С.А., Патюков С.И., Резванов А.А. // *Электрон. техника. Сер. 3. Микроэлектроника*. 2022. С. 31.
4. Muller D.A., Sorsch T., Moccio S. et al. // *Nature*. 1999. V. 399. № 6738. P. 758. <https://doi.org/10.1038/21602>.
5. Vasudevan R., Pilania G., Balachandran P.V. // *J. Appl. Phys.* 2021. V. 129. P. 070401. <https://doi.org/10.1063/5.0043300>.
6. Тахтамиров Э.Е., Волков В.А. // *ЖЭТФ*. 1999. Т. 116. № 5. С. 1843.
7. Андо Т., Фаулер А., Стерн Ф. *Электронные свойства двумерных систем*. М.: Мир, 1985.
8. Барабан А.П., Булавинов В.В., Коноров П.П. *Электроника слоев на кремнии*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
9. Гольдман Е.И., Левашов С.А., Чучева Г.В. // *ФТП*. 2019. Т. 53. № 4. С. 481. <https://doi.org/10.21883/FTP.2019.04.47444.9011>.
10. Белорусов Д.А., Гольдман Е.И., Нарышкина В.Г., Чучева Г.В. // *ФТП*. 2021. Т. 55. № 1. С. 24. <https://doi.org/10.21883/FTP.2021.01.50379.9511>.
11. Гольдман Е.И., Ждан А.Г., Кухарская Н.Ф., Черняев М.В. // *ФТП*. 2008. Т. 42. № 1. С. 94.
12. Гольдман Е.И., Чучева Г.В., Шушарин И.А. // *ФТП*. 2022. Т. 56. № 3. С. 328. <https://doi.org/10.21883/FTP.2022.03.52119.9756>.
13. Тихонов А.Н., Арсенин В.А. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1986.
14. Гольдман Е.И., Иванов В.А. Адаптивный тихоновский алгоритм построения производных экспериментальных зависимостей. Препринт ИРЭ АН СССР № 22(551). М.: ИРЭ АН СССР, 1990. 24с.

MODELLING OF INSULATING POTENTIAL IN ULTRA-THIN (42 Å) SILICON OXIDE FILM

E. I. Goldman, G. V. Chucheva*, I. A. Shusharin

Fryazino branch Kotelnikov Institute of Radio-engineering and Electronics of RAS, Vvedensky Square, 1, Fryazino, Moscow region, 141190 Russia

**E-mail: gvc@ms.ire.rssi.ru*

Received June 5, 2023; revised June 5, 2023; accepted June 26, 2023

Based on previously conducted measurements of the tunneling current-voltage characteristics of metal-SiO₂-Si (MOS) structures, modeling of the insulating potential in an ultra-thin (4.2 nm) silicon oxide film was performed. The potential in the dielectric was defined in the shape of a trapezoid, with the lateral slopes simulating transition layers and the top base representing the bulk of SiO₂. The model parameters – the barrier height and the coordinates of the trapezoid's corner points – were calculated to achieve the maximum match between the experimental and theoretical voltage derivatives of the current logarithm. Common features of the insulating potential, similar to those in thinner silicon oxide films (3.7 nm), were identified: the barrier occupies up to half of the nominal volume of the dielectric gap and is shifted towards the gate electrode, with its slope towards the semiconductor substrate being much more gradual compared to the slope adjacent to the gate.

Keywords: tunneling current-voltage characteristics, insulating potential modeling, voltage derivatives of the current logarithm

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ГЕОМЕТРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

© 2024 г. Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой*

ВЭИ – филиал ФГУП “РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина”,
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 12.07.2022 г.

После доработки 12.07.2022 г.

Принята к публикации 27.08.2022 г.

На наборе эталонных точных решений, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и элементарными функциями, исследованы геометризованные модели плоских электронных пучков в I -, φ - и W -представлениях. Проведено сопоставление возможностей геометризованного подхода и параксиальной теории.

Ключевые слова: плоские электронные пучки, геометризованные модели, эталонные точные решения, геометризованный подход, параксиальная теория

DOI: 10.31857/S0033849424030078, **EDN:** JUZAEZ

ВВЕДЕНИЕ

Последние десятилетия характеризуются повышенным интересом специалистов по сильноточной электронике к разномасштабным задачам: осесимметричным пучкам с высокой компрессией и потокам с сильно вытянутым прямоугольным или эллиптическим сечением, также существенно изменяющим свои размеры. Исследования по преимуществу проводятся с использованием коммерческих программ траекторного анализа, вопросы тестирования которых остаются открытыми, а несоответствие результатам теории в сингулярной прикатодной зоне и необеспеченность формирования торцов ленточных пучков очевидны. Точность математических моделей не является единственным фактором, определяющим успешную разработку новой техники. Однако неадекватность моделирования, выражающаяся в неподтвержденной способности проводить расчеты с ошибкой порядка десятых долей процента, и грубые для такой точности нарушения принятой гидродинамической картины потока вблизи катода, могут быть компенсированы только за счет экспериментальной доводки прибора.

Применение лобовых численных методов не всегда является обязательным, что демонстрируют результаты работ по трехмерным мно-

гопучковым системам [1], эллиптическим [2], осесимметричным и ленточным пучкам [3–5] с высокой компрессией. Приближенные теоретические модели могут не только приводить к решению подобных задач с требуемой точностью, но и быть полезны в качестве нулевого приближения при разработке электронно-оптических систем с принципиально новыми параметрами. Такого рода проблемы, в которых отсутствуют заданные электроды, а известны только желаемые характеристики пучка по геометрии, току и напряжению, являются по сути задачами синтеза, решаемыми численными методами.

Приближенные теоретические модели основываются на классической теории сплошных параксиальных потоков, узких криволинейных трубчатых и ленточных пучков [6], теории Овчарова [7, 8] для двумерных течений, трехмерной параксиальной теории Данилова [9], моделях пучков с эллиптическим сечением [10–13] и геометризованных моделях [14–18]. Построения, относящиеся к ленточным пучкам неограниченной ширины, позволяют рассматривать выделенные из них фрагменты с эллиптическим или прямоугольным сечением.

Геометризованная теория плотных релятивистских потоков основана на введении заранее неизвестной, в общем случае неортогональной,

системы координат x^i ($i = 1, 2, 3$), связанной с траекториями (линии x^1) или трубками тока (поверхности $x^2 = \text{const}$). Уравнения пучка дополняются условиями евклидовости пространства — нелинейными уравнениями в частных производных второго порядка относительно элементов метрического тензора g_{ik} . Полученную систему в двумерном случае удалось представить в виде соотношения на трубке тока и эволюционных уравнений, которые позволяют нарастить “тело” пучка на заданную базовую поверхность с известными продольными распределениями геометрических и физических параметров.

Соотношение на трубке тока имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно функции $h_2 = \sqrt{g_{22}}$, продольной переменной в котором может быть произвольная функция длины дуги образующей $x^1 = f(l)$, $f(0) = 0$, в то время как поперечная координата x^2 входит как параметр. Эволюционная система образована уравнениями в частных производных первого порядка от параметров задачи по x^2 , правые части которых определены продольными зависимостями на базовой трубке тока. Этот вариант геометризованной теории удобно называть l -представлением [14].

В работах [15–17] построено ϕ -представление теории с потенциалом ϕ электрического поля в качестве продольной координаты $x^1 = \phi$ во всем поле течения. Неортогональность системы в l -варианте носила локальный характер и была связана с выполнением условий термоэмиссии в ρ - и T -режимах. В ϕ -варианте система x^i в принципе неортогональна. От l -к ϕ -представлению нельзя перейти по формулам, связывающим уравнения в двух криволинейных системах. Потенциал ϕ , утратив статус искомой функции и становясь независимой переменной, меняет структуру исходных уравнений, в частности, уравнение Пуассона становится уравнением первого порядка.

Третий вариант геометризованной теории, W -представление [18], основан на использовании потенциала обобщенного импульса $\vec{P} = \nabla W$ для отсчета в продольном направлении во всем поле течения, $x^1 = W$. Условием потенциальности потока является отсутствие нормальной компоненты магнитного поля на катоде.

Цель работы — исследование точности трех вариантов геометризованных моделей с использованием эталонных точных решений уравне-

ний плоского пучка, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и элементарными функциями, и сопоставление результатов с классическим параксиальным подходом. Вопросам тестирования приближенных моделей посвящены также работы [19–21].

Задачей геометризованных построений в системе, связанной с трубками тока, является формулировка всех параметров пучка в виде фрагментов рядов Тэйлора по поперечной координате x^2 . В общем случае для этого необходимо проинтегрировать соотношение на базовой поверхности $x^2 = 0$ в первом, втором, третьем и т.д. приближениях относительно функций $h_2, h_{2,2}, h_{2,22}, \dots$ ($h_{2,2} \equiv \partial h_2 / \partial x^2$). При тестировании распределения параметров и форма базовой поверхности определяются точным решением. Однако в численном интегрировании упомянутых соотношений нет необходимости. Задача сводится к записи эталонного решения в системе x^1, x^2 , построении первых членов ряда Тэйлора для известных параметров потока и сравнении результата с точными выражениями. Сопоставление геометризованной и параксиальной моделей возможно в задачах, где условия эмиссии допускают использование последней: например, параксиальная теория не подходит для описания осесимметричного и планарного гиротронов при эмиссии в ρ -режиме.

Ограничимся фрагментами рядов Тэйлора с третьими производными, учитывая, что общие геометризованные модели построены до третьего приближения включительно [14].

1. ТЕЧЕНИЕ С ТРАЕКТОРИЯМИ-ОКРУЖНОСТЯМИ

Решение [22] описывает эмиссию в ρ -режиме с полуплоскости $\psi = 0$ и траекториями $R = \text{const}$ (R, ψ — полярные координаты) при отсутствии магнитного поля (рис. 1):

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{U(\psi)}{R^2}, \quad 2U = (2J_0)^{2/3} \sin^{4/3} \frac{3\psi}{2}, \\ \rho &= \frac{1}{R^4} \frac{J_0}{\sqrt{2U}}, \quad J = \frac{J_0}{R^5}, \quad J_0 = \text{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ϕ, ρ, J — потенциал электрического поля, плотность пространственного заряда и плотность тока эмиссии соответственно. Выражения в (1) и ниже записаны в нормировках, устраняющих все физические постоянные используемой системы единиц из уравнений пучка [6, 14].

Полярные координаты связаны с геометрией течения, поэтому вопрос о точности геометризованной модели сводится к построению ряда Тэйлора по поперечной координате $x^2 \equiv \eta$ для наиболее быстро меняющейся функции – $J = J(R)$. В работе [20] отмечено влияние вида этой переменной на точность приближенного решения. Примем за ось пучка линию $R = 1$. Результаты двух вариантов определения поперечной координаты:

$$\begin{aligned} \eta &= R, \quad \bar{\eta} = R_e - 1, \\ \bar{J} &= R^{-5} \approx 1 - 5\bar{\eta} + 15\bar{\eta}^2 - 35\bar{\eta}^3; \\ \eta &= \ln R, \quad \bar{\eta} = \ln\left(\frac{R}{R_e}\right), \\ \bar{J} &= R^{-5} \approx 1 - 5\bar{\eta} + \frac{25}{2}\bar{\eta}^2 - \frac{125}{6}\bar{\eta}^3, \end{aligned} \tag{2}$$

приведены в табл. 1, 2 ($R = R_e$ – граница пучка, $\bar{J}_{ex}$ – точное значение, $\bar{J}_{ap}$ – три приближения геометризованной модели и параксиальное приближение, характеризующееся постоянной плот-

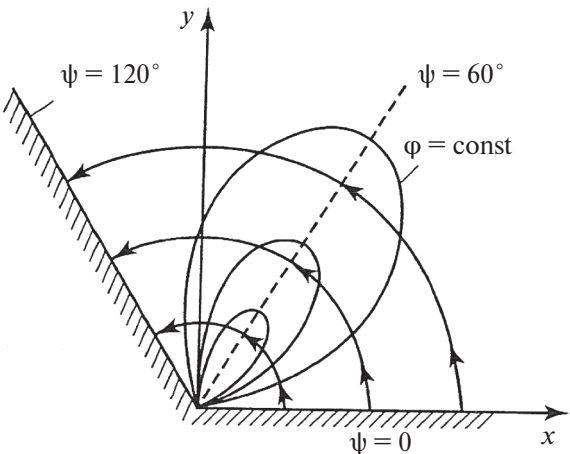


Рис. 1. Течение с траекториями-окружностями с полуплоскости $\psi = 0$, ρ -режим.

ностью тока по сечению пучка, δ_J – относительная ошибка в процентах).

Видно, что во всех случаях уже первое приближение геометризованной теории имеет большую точность, чем параксиальный подход, высшие приближения улучшают результат, а пе-

Таблица 1. Течение с траекториями-окружностями, $\eta = R - 1$

R_e	$\bar{\eta}$	$\bar{J}_{ex}$	$\bar{J}_{ap}$				$\delta_J, \%$			
1.1	0.1	0.62092	0.5	0.65	0.615	1	19.47	4.68	0.95	61.05
0.9	−0.1	1.69351	1.5	1.65	1.685	1	11.43	2.57	0.50	40.95
1.15	0.15	0.49718	0.25	0.5875	0.447	1	49.72	18.17	5.59	101
0.85	−0.15	2.25 375	1.75	2.0875	2.206	1	22.35	7.38	2.14	55.63
1.2	0.2	0.40190	0	0.6	0.32	1	100	49.29	20.38	149
0.8	−0.2	3.05180	2	2.6	2.88	1	34.46	14.80	5.63	67.23

Примечания. В таблицах 1–5 для параметров $\bar{J}_{ap}$, δ_J первые три столбца соответствуют трем приближениям геометризованной теории, четвертый – параксиальной модели.

Таблица 2. Течение с траекториями-окружностями, $\eta = \ln(R)$

R_e	$\bar{\eta}$	$\bar{J}_{ex}$	$\bar{J}_{ap}$			$\delta_J, \%$		
1.1	0.09531	0.62092	0.5235	0.6370	0.6190	15.70	2.59	0.52
0.9	−0.10536	1.69351	1.5268	1.6656	1.6899	9.84	1.64	0.20
1.15	0.13976	0.49718	0.3012	0.5454	0.4885	39.42	9.69	1.75
0.85	−0.16252	2.25375	1.8126	2.1428	2.2322	19.57	4.93	0.96
1.2	0.18232	0.40190	0.088	0.504	0.378	78.10	25.40	5.90
0.8	−0.22314	3.05180	2.1157	2.7381	2.9696	30.67	10.28	2.69

переход от $\bar{\eta} = R_e - 1$ к $\bar{\eta} = \ln R_e$ существенно снижает уровень ошибки. Использование в качестве $\bar{\eta}$ функций $R_e^\alpha - 1$, $\alpha = 1/2, 1/4$ также приводит к повышению точности, но не столь значительно, как в табл. 2:

$$\begin{aligned} R_e &= 1.2 : \alpha = 1/2, \delta_J = 11.4\%; \\ \alpha &= 1/4, \delta_J = 8.43\%. \end{aligned} \quad (3)$$

Использование ф-варианта геометризованной теории для рассматриваемого решения невозможно из-за появления сингулярной линии $\psi = 60^\circ$, совпадающей с линией симметрии.

2. ЭМИССИЯ СО СПИРАЛЬНОГО КАТОДА

В спиральных координатах p, q , связанных с полярными координатами R, ψ соотношениями

$$\begin{aligned} R &= \exp(b_1 p + b_2 q), \quad \psi = b_1 q - b_2 p, \quad b_1^2 + b_2^2 = 1; \\ b_1, b_2 &= \text{const}; \\ h &= h_1 = h_2 = \exp(b_1 p + b_2 q), \end{aligned} \quad (4)$$

где h_1, h_2 — коэффициенты Ляме, существует точное решение вида

$$\begin{aligned} v_p &= \exp(\alpha b_2 q) U(p), \quad v_q = \exp(\alpha b_2 q) V(p), \\ \Phi &= \exp(2\alpha b_2 q) \Phi(p), \quad \rho = \exp[2(\alpha - 1)q] \sigma(p), \quad (5) \\ J &= J_0 \exp[(3\alpha - 2)q]. \end{aligned}$$

Условия термоэмиссии могут быть выполнены на кривой $p = 0$; v_p, v_q — компоненты скорости. При $\alpha = -1$ имеем $v_q \equiv 0$, так что априори известны спиральные траектории $q = \text{const}$; в случае $\alpha = 0$ потенциал постоянен на линиях $p = \text{const}$.

Эквипотенциали — спирали, l-представление. Ортогональная система, связанная с траекториями потока, определена формулами

$$x^1 = -q - \int \frac{U}{V} dp, \quad x^2 \equiv \eta = q - \int \frac{U}{V} dp. \quad (6)$$

Производные от координат p, q по новым переменным x^1, x^2 и коэффициенты Ляме в этой системе описываются выражениями

$$\begin{aligned} p_{,1} &= -\frac{UV}{2\Phi}, \quad q_{,1} = -\frac{V^2}{2\Phi}; \quad p_{,2} = -\frac{UV}{2\Phi}, \quad q_{,2} = \frac{U^2}{2\Phi}; \\ h_1 &= \frac{hV}{\sqrt{2\Phi}}, \quad h_2 = \frac{hU}{\sqrt{2\Phi}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для высших производных от p, q имеем

$$\begin{aligned} p_{,22} &= -\left(\frac{UV}{2\Phi}\right)' p_{,2}, \quad p_{,222} = -\left(\frac{UV}{2\Phi}\right)'' p_{,2}^2 - \left(\frac{UV}{2\Phi}\right)' p_{,22}; \\ q_{,22} &= \left(\frac{U^2}{2\Phi}\right)' p_{,2}, \quad q_{,222} = \left(\frac{U^2}{2\Phi}\right)'' p_{,2}^2 + \left(\frac{U^2}{2\Phi}\right)' p_{,22}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $\eta = \eta_a$ — уравнение оси:

$$q = \eta_a + \int_0^p \frac{V}{U} dp. \quad (9)$$

Формулы (7)–(9) позволяют построить ряды, соответствующие трем приближениям геометризованной теории

$$\begin{aligned} p_{ap} &= p + p_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} p_{,22} \bar{\eta}^2 + \frac{1}{6} p_{,222} \bar{\eta}^3, \quad \bar{\eta} = \eta_e - \eta_a, \\ q_{ap} &= q + q_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} q_{,22} \bar{\eta}^2 + \frac{1}{6} q_{,222} \bar{\eta}^3. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) при фиксированном значении $\eta = \eta_e$ являются параметрическими уравнениями (p — параметр) для приближенной границы пучка. Для оценки ошибки ее достаточно сравнить с точной кривой

$$\eta_e = q - \int \frac{V}{U} dp. \quad (11)$$

Чтобы провести аналогичное сравнение для потенциала, представим функцию $\Phi(p)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{ap} &= \Phi(p_{ap}) = \Phi(p) + \Phi'(p) \bar{p} + \\ &+ \frac{1}{2} \Phi''(p) \bar{p}^2 + \frac{1}{6} \Phi'''(p) \bar{p}^3 = \\ &= \Phi + \Phi' p_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} (\Phi' p_{,22} + \Phi'' p_{,2}^2) \bar{\eta}^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{6} \Phi' p_{,222} + \frac{1}{2} \Phi'' p_{,2} p_{,22} + \frac{1}{6} \Phi''' p_{,2}^3 \right) \bar{\eta}^3, \\ \bar{p} &= p_{ap} - p. \end{aligned} \quad (12)$$

Третья производная Φ''' может быть выражена через производные низших порядков из системы дифференциальных уравнений для решения (5)

$$\Phi''' = -\Phi'' \left(b_1 - \frac{U'}{U} + b_2 \frac{V}{U} \right). \quad (13)$$

Эквипотенциали — спирали, Φ -представление. Введем неортогональную систему x^1, x^2 с потенциалом в качестве продольной координаты

$$x^1 = \Phi(p), \quad x^2 \equiv \eta = q - \int \frac{V}{U} dp. \quad (14)$$

Для первых производных от p, q по x^1, x^2 имеем

$$p_{,1} = \frac{1}{\Phi'}, \quad q_{,1} = \frac{V}{U} \frac{1}{\Phi'}, \quad p_{,2} = 0, \quad q_{,2} = 1. \quad (15)$$

Метрика в системе (14) определена формулами

$$h_1 = h \frac{\sqrt{2\Phi}}{U\Phi'}, \quad h_2 = 1, \quad g_{12} = \frac{V}{U} \frac{1}{\Phi'}, \quad (16)$$

причем все высшие производные от p, q по x^2 — нули.

В результате для траектории получим точное выражение

$$q_e = q + q_{,2}\bar{\eta} = \eta_e + \int \frac{V}{U} dp. \quad (17)$$

Наиболее быстро меняющейся функцией для рассматриваемых в этом разделе решений является плотность тока эмиссии. Учитывая, что на катоде $p = 0$ значения η и q совпадают, имеем ($q_a = 0$)

$$\begin{aligned} \bar{J}_{ex} &= \exp(-2b_2q), \\ \bar{J}_{ap} &= 1 - 2b_2q + 2b_2^2q^2 - \frac{4}{3}b_2^3q^3, \\ \bar{J} &\equiv J/J_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Значения $\bar{J}_{ex}$, $\bar{J}_{ap}$ и относительной ошибки δ_J приведены в табл. 3 для $b_2 = 0.4$. Радиус кривизны катода на базовой поверхности равен 1.09, а расстояние между верхней и нижней кромками пучка $\eta_e = \pm 0.5$ составляет 0.971 и имеет тот же

порядок величины при перепаде плотности тока $J_-/J_+ = 2.27$. Пучок с такими параметрами является существенно непараксиальным и рассчитывается с ошибкой 0.15 %.

Подчеркнем, что при работе в неортогональной системе в силу (15) точно определяется не только траектория, но и все зависящие от p функции.

Траектории — спирали, l -представление. Для решения (5) при $\alpha = -1$ ортогональная система p, q изначально связана с геометрией потока. Чтобы оценить ошибку приближенного вычисления траекторий в геометризованной модели, необходимо рассмотреть функции

$$\begin{aligned} x &= \exp(b_1p + b_2q) \cos(b_1q - b_2p), \\ y &= \exp(b_1p + b_2q) \sin(b_1q - b_2p), \end{aligned} \quad (19)$$

разложив их в ряд по q вблизи оси $q_a = 0$:

$$\begin{aligned} x &= \exp(b_1p) \left\{ \cos b_2p + (b_1 \sin b_2p + b_2 \cos b_2p)q + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2}(b_2^2 - b_1^2) \cos b_2p + b_1b_2 \sin b_2p \right] q^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[b_1 \left(-\frac{1}{6}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 \right) \sin b_2p + b_2 \left(\frac{1}{6}b_2^2 - \frac{1}{2}b_1^2 \right) \cos b_2p \right] q^3 \right\}, \\ y &= \exp(b_1p) \left\{ -\sin b_2p + (b_1 \cos b_2p - b_2 \sin b_2p)q + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2}(b_1^2 - b_2^2) \sin b_2p + b_1b_2 \cos b_2p \right] q^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[b_1 \left(-\frac{1}{6}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 \right) \cos b_2p + b_2 \left(\frac{1}{2}b_1^2 - \frac{1}{6}b_2^2 \right) \sin b_2p \right] q^3 \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

На рис. 2 приведены граница пучка и форма катода в трех приближениях геометризованной модели для расходящегося и сходящегося потоков. Все функции продольной координаты p определены точным решением. Для плотности тока имеем

Таблица 3. Течение со спирального катода с эквипотенциалами $p = \text{const}$, Φ -представление

q	$\bar{J}_{ex}$	$\bar{J}_{ap}$			$\delta_J, \%$		
0.1	0.92312	0.92000	0.92320	0.92311	0.34	0.0087	0.0011
0.3	0.78663	0.76000	0.78880	0.78650	3.39	2.76	0.017
0.5	0.67032	0.60000	0.68000	0.66933	10.49	1.44	0.15
-0.1	1.08329	1.08000	1.08320	1.08329	0.30	0.0083	0.00072
-0.3	1.27125	1.24000	1.26880	1.27110	2.46	0.19	0.012
-0.5	1.49182	1.40000	1.48000	1.49067	6.15	0.79	0.077

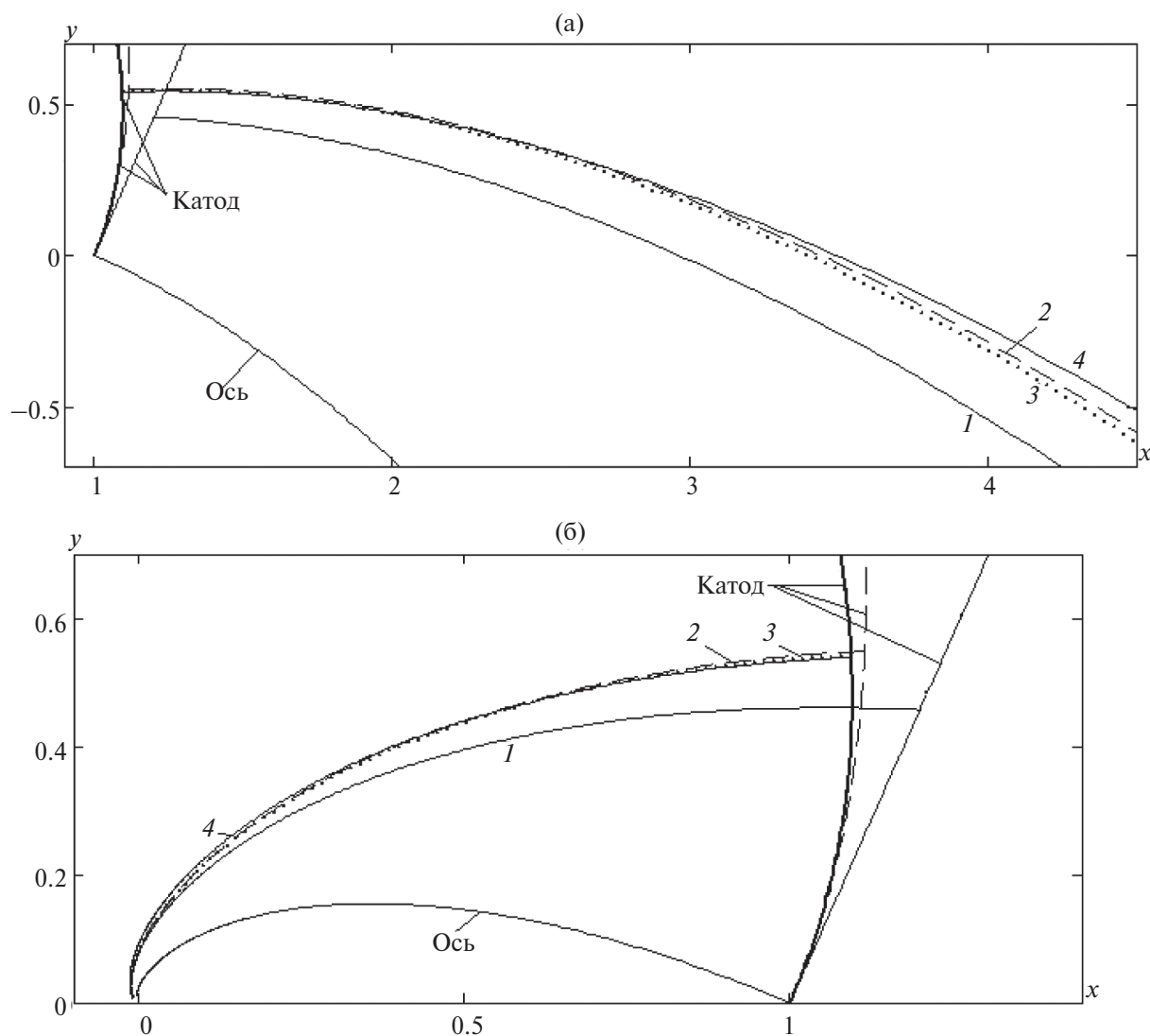


Рис. 2. Граница пучка и форма катода в трёх приближениях (1, 2, 3) l -представления геометризванной теории (4 – точное решение, траектории – спирали), расходящийся поток (а), сходящийся поток (б).

Таблица 4. Течение со спирального катода с траекториями $q = \text{const}$, l -представление

q	$\bar{J}_{ex}$	$\bar{J}_{ap}$			$\delta_j, \%$		
0.1	0.81873	0.80000	0.82000	0.81867	2.29	0.15	0.0073
0.2	0.67032	0.60000	0.68000	0.66933	10.49	1.45	0.15
0.3	0.54881	0.40000	0.58000	0.54400	18.00	5.68	0.88
0.4	0.44933	0.20000	0.52000	0.43467	53.99	19.63	3.26
0.5	0.36788	0.00000	0.50000	0.33333	100	35.91	9.39

$$\begin{aligned} \bar{J}_{ex} &= \exp(-5b_2q), \\ \bar{J}_{ap} &= 1 - 5b_2q + \frac{25}{2}b_2^2q^2 - \frac{125}{6}b_2^3q^3. \end{aligned} \quad (21)$$

В табл. 4 приведены точные и приближенные значения этого параметра и уровень относительной ошибки.

Траектории – спирали, Φ -представление. Неортогональная система x^1, x^2 при $\alpha = -1$ имеет вид

$$\begin{aligned} x^1 &= \exp(-2b_2q)\Phi(p), \quad x^2 \equiv \eta = q; \\ h_1 &= h \exp(2b_2q) \frac{1}{\Phi'}, \quad h_2 = h \left(1 + 4b_2^2 \frac{\Phi^2}{\Phi'^2} \right)^{1/2}, \\ g_{12} &= 2b_2 \exp(2b_2q) \frac{\Phi}{\Phi'^2}; \\ p_{,1} &= \exp(2b_2q) \frac{1}{\Phi'}, \quad q_{,1} = 0; \quad p_{,2} = 2b_2 \frac{\Phi}{\Phi'}, \quad q_{,2} = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Высшие производные от q по x^2 равны нулю, а для производных от p получаем

$$\begin{aligned} p_{,22} &= 2b_2 \left(\frac{\Phi}{\Phi'} \right)' p_{,2}, \\ p_{,222} &= 2b_2 \left[\left(\frac{\Phi}{\Phi'} \right)'' p_{,2}^2 + \left(\frac{\Phi}{\Phi'} \right)' p_{,22} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Траектории в системе (22) определяются точно, а для сравнения приближенного и точного значений зависящих от p функций необходимо учесть приближенное выражение для этой координаты, описываемое формулами (12) при замене $\bar{\eta} \rightarrow q$. Использование в (12) формул из (22), (23) приводит к факторизации зависимости от p и ошибке, не зависящей от этой координаты:

$$\Phi(p_{ap}) = \Phi(p) \left(1 + b_2q + 2b_2^2q^2 + \frac{4}{3}b_2^3q^3 \right). \quad (24)$$

Точка p на оси пучка $q_a = 0$ задает значение потенциала $\Phi(p)$, сохраняющееся на эквипотенциали $x^1 = \text{const}$ при переходе на траекторию $x^2 = q$. Точное значение Φ на новой траектории в точке p_{ap} , в которую мы приходим, необходимо сравнить со значением $\Phi = \Phi(p)$:

$$\Phi = \exp(-2b_2q)\Phi(p_{ap}) \sim \Phi_{ex} = \Phi(p). \quad (25)$$

Отличие от единицы комплекса

$$k = \exp(-2b_2q) \left(1 + 2b_2q + 2b_2^2q^2 + \frac{4}{3}b_2^3q^3 \right) \quad (26)$$

определяет ошибку приближенного решения, которая совпадает с оценкой плотности тока эмиссии в табл. 3. Для существенно непараксиального потока $q_e = \pm 0.5$ она составляет десятые доли процента.

Таким образом, при работе в ортогональной системе с решением (5) при $\alpha = -1$ приближенно вычисляется траектория, а в варианте неортогональной системы – функции от p с точностью, определяемой только удалением от оси пучка. Ошибка при расчете плотности тока эмиссии одинакова.

Траектории – спирали, параксиальная модель. Параксиальная модель спирального потока с осью $q_a = 0$ описывается уравнением для толщины пучка $f(l)$ и точным соотношением для потенциала $\Phi = \Phi(p)$

$$\begin{aligned} 2\Phi \frac{d^2f}{dl^2} + \frac{d\Phi}{dl} \frac{df}{dl} + \left(\frac{d^2\Phi}{dl^2} + 4k_1^2\Phi \right) f &= \frac{J_0 f_0}{\sqrt{2\Phi}}, \\ \frac{d^2\Phi}{dp^2} + 4b_2^2\Phi &= \exp(b_1p) \frac{J_0}{\sqrt{2\Phi}}, \quad f_0 \equiv f(0), \end{aligned} \quad (27)$$

где l, k_1 – длина дуги и кривизна оси, соответственно.

Перейдем к аргументу p в уравнении для f и исключим из него вторую производную потенциала

$$\begin{aligned} l &= \int \exp(b_1p) dp = \frac{1}{b_1} [\exp(b_1p) - 1], \\ \frac{d}{dl} &= \exp(-b_1p) \frac{d}{dp}; \\ 2\Phi \frac{d^2f}{dp^2} + \left(\frac{d\Phi}{dp} - 2b_1\Phi \right) \frac{df}{dp} - b_1 \frac{d\Phi}{dp} f &= \\ &= \exp(2b_1p) \frac{J_0}{\sqrt{2\Phi}} [f_0 - \exp(-b_1p) f]. \end{aligned} \quad (28)$$

Получим начальные данные $f_0, (df/dp)_0$ для уравнения (28). Отсчитанное по нормали к оси расстояние f между траекториями $q_a = 0$ и $q = q_e$ точного решения входит в формулы, связывающие координаты (x_e, y_e) и (x, y) :

$$\begin{aligned} x_e &\equiv X = x - f \sin \theta, \\ y_e &\equiv Y = y + f \cos \theta, \\ \text{tg} \theta &= \frac{dy}{dx} = \frac{-b_1 \sin b_2p - b_2 \cos b_2p}{b_1 \cos b_2p - b_2 \sin b_2p}, \\ \text{tg} \theta|_{p=0} &= -\frac{b_2}{b_1}; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &\exp(b_1p_e + b_2q_e) \cos(b_1q_e - b_2p_e) = \\ &= \exp(b_1p) \cos b_2p + f(b_1 \sin b_2p + b_2 \cos b_2p), \\ &\exp(b_1p_e + b_2q_e) \sin(b_1q_e - b_2p_e) = \\ &= -\exp(b_1p) \sin b_2p + f(b_1 \cos b_2p - b_2 \sin b_2p). \end{aligned}$$

Величина f_0 соответствует точке $p = q = 0$. Уравнения (29) для этого случая могут быть трансформированы следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(\cos b_1 q_e - \frac{b_2}{b_1} \sin b_1 q_e \right) \cos b_2 p_e + \\ & + \left(\sin b_1 q_e + \frac{b_2}{b_1} \cos b_1 q_e \right) \sin b_2 p_e = \\ & = \exp(-b_1 p_e - b_2 q_e), \\ f_0 & = \frac{1}{b_1} \exp(b_1 p_e + b_2 q_e) \sin(b_1 q_e - b_2 p_e), \end{aligned} \quad (30)$$

причем первое из них служит для вычисления p_e .

Параметр p_e является функцией p . Продифференцируем соотношения (29) по p и исключим комплекс $\exp(b_1 p_e + b_2 q_e)(dp_e/dp)$, записав результат при $p = 0$:

$$\left(\frac{df}{dp} \right)_0 = (1 + b_2 f_0) \operatorname{tg}(b_1 q_e - b_2 p_e). \quad (31)$$

Выражения (30), (31) определяют начальные данные для уравнения (21), в котором вместе с уравнением (27) постоянная J_0 может быть исключена при помощи дополнительной нормировки:

$$\Phi = J_0^{2/3} \bar{\Phi}. \quad (32)$$

Точные значения полного тока I_{ex} и трех приближений геометризованной теории I_{ap} определены следующими формулами, причем параксиальному приближению соответствует первый член ряда:

$$\begin{aligned} I_{ex} & = \int_0^{q_e} \exp(b_2 q) \bar{J}(q) dq = \\ & = \frac{1}{4b_2} [1 - \exp(-4b_2 q_e)], \\ I_{ap} & = q_e - 2b_2 q_e^2 + \frac{8}{3} b_2^3 q_e^3. \end{aligned} \quad (33)$$

Значения этих параметров и величина относительной ошибки приведены в табл. 5 для пучков разной ширины.

3. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Геометризованная модель, l-представление. Для решения [24] (рис. 3) возможен только l-вариант

геометризованной теории, так как в Φ -представлении все элементы метрического тензора в плоскости инъекции $x = 0$ обращаются в бесконечность вследствие того, что эквипотенциали в этом сечении касательны к траекториям:

$$\begin{aligned} u & = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}, \\ v & = \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}, \quad 2\varphi = \frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}, \\ \rho & = \frac{8}{(\operatorname{ch} 2y + \cos 2x)^2}, \quad \operatorname{ch} 2y + \cos 2x = \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (34)$$

где u, v — компоненты скорости в декартовых координатах.

Ортогональная система, связанная с трубками тока $x^2 = \operatorname{const}$, определена формулами

$$x^1 = \operatorname{th} y \operatorname{tg} x, \quad x^2 \equiv \eta = \operatorname{ch} 2y + \cos 2x. \quad (35)$$

Коэффициенты Ляме, точные значения потенциала, нормального поля, плотности пространственного заряда и кривизны траектории описываются выражениями

$$\begin{aligned} h_1 & = \frac{2 \operatorname{ch}^2 y \cos^2 x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 2y - \cos^2 2x}}, \quad h_2 = \frac{1}{2 \sqrt{\operatorname{ch}^2 2y - \cos^2 2x}}; \\ 2\varphi & = \frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x} = \frac{1}{\eta} (\eta - 2 \cos 2x), \quad \rho = \frac{8}{\eta^2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & = \frac{1}{(\operatorname{ch} 2y + \cos 2x)^2} \frac{\operatorname{ch} 2y \cos 2x - 1}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x} = \\ & = \frac{1}{\eta^2} \frac{(\eta - \cos 2x) \cos 2x - 1}{\eta - 2 \cos 2x}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} & = \frac{2}{(\operatorname{ch} 2y + \cos 2x)^{3/2}} \frac{\operatorname{ch} 2y \cos 2x - 1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}} = \\ & = \frac{2}{\eta^{3/2}} \frac{(\eta - \cos 2x) \cos 2x - 1}{\sqrt{\eta - 2 \cos 2x}}, \\ k & = \frac{2}{(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)^{3/2}} \frac{\operatorname{ch} 2y \cos 2x - 1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}} = \\ & = \frac{2}{\sqrt{\eta}} \frac{(\eta - \cos 2x) \cos 2x - 1}{(\eta - 2 \cos 2x)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Для производных от x, y по новым координатам x^1, x^2 получаем

$$\begin{aligned}
x_{,1} &= \frac{2}{D} \operatorname{sh} 2y \operatorname{ch}^2 y \cos x, & y_{,1} &= \frac{2}{D} \sin 2x \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y, \\
x_{,2} &= -\frac{\sin 2x}{D}, & y_{,2} &= \frac{\operatorname{sh} 2y}{D}, & D &= \operatorname{ch}^2 2y - \cos^2 2x; \\
x_{,22} &= -\frac{\cos 2x}{D} x_{,2} + \frac{\sin 2x}{2D^2} D_{,2}, \\
y_{,22} &= \frac{\operatorname{ch} 2y}{D} y_{,2} - \frac{\operatorname{sh} 2y}{2D^2} D_{,2}, \\
D_{,2} &= \operatorname{sh} 4y y_{,2} + \sin 4x x_{,2}; \\
x_{,222} &= \frac{2 \sin 2x}{D} x_{,2}^2 + \frac{2 \cos 2x}{D^2} x_{,2} D_{,2} - \\
&\quad - \frac{\cos 2x}{D} x_{,22} - \frac{\sin 2x}{D^3} D_{,2}^2 + \frac{\sin 2x}{2D^2} D_{,22}, \\
y_{,222} &= \frac{2 \operatorname{sh} 2y}{D} y_{,2}^2 - \frac{2 \operatorname{ch} 2y}{D^2} y_{,2} D_{,2} + \\
&\quad + \frac{\operatorname{ch} 2y}{D} y_{,22} + \frac{\operatorname{sh} 2y}{D^3} D_{,2}^2 - \frac{\operatorname{sh} 2y}{2D^2} D_{,22}, \\
D_{,22} &= 4 \operatorname{ch} 4y y_{,2}^2 + \operatorname{sh} 4y y_{,22} + \\
&\quad + 4 \cos 4x x_{,2}^2 + \sin 4x x_{,22}.
\end{aligned}$$

(37)

Параметрические уравнения границы пучка $\eta = \eta_e$ с параметром x определены выражениями

$$\begin{aligned}
x_{ap} &= x + x_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} x_{,22} \bar{\eta}^2 + \frac{1}{6} x_{,222} \bar{\eta}^3, & \bar{\eta} &= \eta_e - \eta_a, \\
y_{ap} &= y + y_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} y_{,22} \bar{\eta}^2 + \frac{1}{6} y_{,222} \bar{\eta}^3.
\end{aligned}$$

(38)

Для трех приближений потенциала при использовании соотношений (38) имеем

$$\begin{aligned}
\Phi_{ap} &= \Phi \left(1 + \bar{\Phi}_1 \bar{\eta} + \bar{\Phi}_2 \bar{\eta}^2 + \bar{\Phi}_3 \bar{\eta}^3 \right), \\
\bar{\Phi}_1 &= \bar{C}_1 - \bar{H}_1, \\
\bar{\Phi}_2 &= \bar{C}_2 - \bar{H}_1 \bar{C}_1 - \bar{H}_2 + \bar{H}_1^2, \\
\bar{\Phi}_3 &= \bar{C}_3 - \bar{H}_1 \bar{C}_2 + \bar{C}_1 (-\bar{H}_2 + \bar{H}_1^2) - \\
&\quad - \bar{H}_3 + 2 \bar{H}_1 \bar{H}_2 - \bar{H}_1^3; \\
\operatorname{ch} 2y_{ap} &= H_0 + H_1 \bar{\eta} + H_2 \bar{\eta}^2 + H_3 \bar{\eta}^3,
\end{aligned}$$

Таблица 5. Течение со спирального катода с траекториями $q = \text{const}$, сопоставление по току пучка I с параксиальной моделью

q	I_{ex}	I_{ap}			$\delta_I, \%$		
0.1	0.092411	0.1	0.09200	0.092427	8.20	0.44	0.018
0.2	0.17116	0.2	0.16800	0.17141	16.90	1.84	0.15
0.3	0.23826	0.3	0.22800	0.23952	25.90	4.31	0.53
0.4	0.29544	0.4	0.27200	0.29931	35.39	7.93	1.30
0.5	0.34417	0.5	0.30000	0.35333	45.28	12.83	2.66

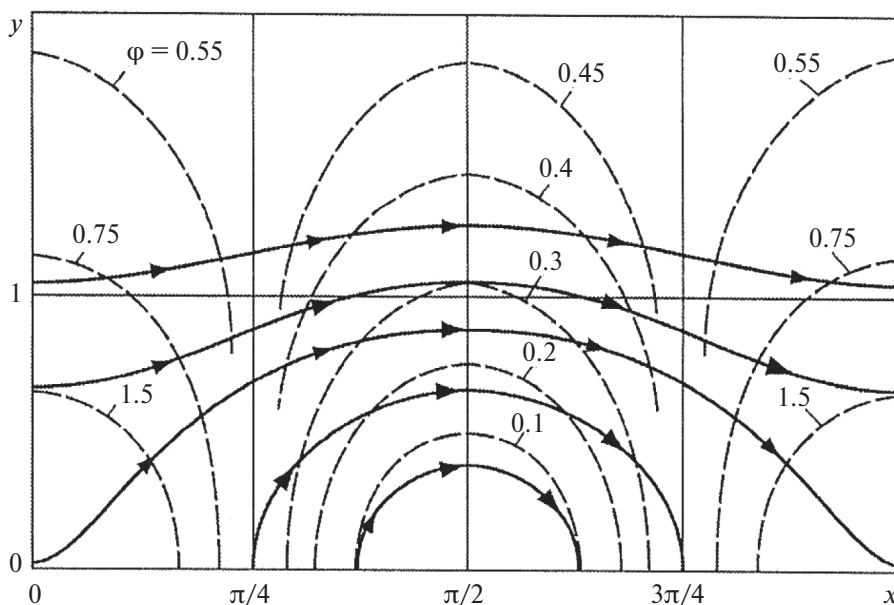


Рис. 3. Плоское периодическое электростатическое течение, штриховые линии – эквипотенциалы, сплошные – траектории.

$$\begin{aligned}
H_0 &= \operatorname{ch} 2y, \quad H_1 = 2\operatorname{sh} 2y y_{,2}, \\
H_2 &= \operatorname{sh} 2y y_{,22} + 2\operatorname{ch} 2y y_{,2}^2, \\
H_3 &= \frac{1}{3} \operatorname{sh} 2y y_{,222} + \\
&\quad + 2\operatorname{ch} 2y y_{,2} y_{,22} + \frac{4}{3} \operatorname{sh} 2y y_{,2}^3; \\
\cos 2x_{ap} &= C_0 + C_1 \bar{\eta} + C_2 \bar{\eta}^2 + C_3 \bar{\eta}^3, \\
C_0 &= \cos 2x, \quad C_1 = -2 \sin 2x x_{,2}, \\
C_2 &= -\sin 2x x_{,22} - 2 \cos 2x x_{,2}^2, \\
C_3 &= -\frac{1}{3} \sin 2x x_{,222} - 2 \cos 2x x_{,2} x_{,22} + \frac{4}{3} \sin 2x x_{,2}^3; \\
\bar{H}_k &= \frac{H_k + C_k}{H_0 + C_0}, \quad \bar{C}_k = \frac{H_k - C_k}{H_0 - C_0}, \quad 2\varphi = \frac{H_0 - C_0}{H_0 + C_0},
\end{aligned} \quad (39)$$

где φ — потенциал на базовой трубке тока.

Формулы для прочих параметров пучка могут быть получены аналогичным образом.

Параксиальные модели рассматриваемого и последующих эталонных точных решений построены в работе [21].

Результаты расчетов. На рис. 4 приведены функции из (37), по которым можно судить о тенденции рядов к сходимости.

Значения параметров приближенного решения с базовой трубкой тока $\eta_a = 2.1$ ($\eta = 2$ — тра-

ектория-сепаратриса) при начальной ширине пучка $f(0) = 0.05$, полученные на основании геометризованной (столбцы 1–3) и параксиальной (столбец 4) моделей, содержит табл. 6 (точные величины φ , E , k с индексами $ex0$ соответствуют оси пучка при $x = 0$). Для кривизны границы пучка и поля на границе введены аналогичные обозначения. Координаты максимумов абсолютной разности и относительной ошибки обязательно совпадают.

Из табл. 6 видно, что при достаточно большом для этого решения значении $f(0)$ в целом более выгодным оказывается третье приближение, хотя монотонная сходимость по приближениям для φ , E нарушена в плоскости инжекции. Третье приближение позволяет вычислить потенциал и кривизну границы с ошибкой $\delta \sim 4\%$, поле — с ошибкой $\delta \sim 1\%$. Параксиальная модель сильно ему уступает: $\delta_\varphi \sim 6\%$, $\delta_E \sim 38\%$, $\delta_k \sim 34\%$. Сама граничная траектория в параксиальном приближении вычисляется с большей точностью, чем при геометризованном описании: $\Delta Y \sim 3 \cdot 10^{-3}$ и $\Delta Y \sim 9 \cdot 10^{-3}$, соответственно. Траектория и ее кривизна вычисляются независимым образом, что и объясняет различие приведенного уровня ошибок.

Величина $f(0) = 0.05$ составляет примерно пятую часть от характерного линейного размера задачи $L_* \sim 1/k(0)$. На рис. 5 приведены

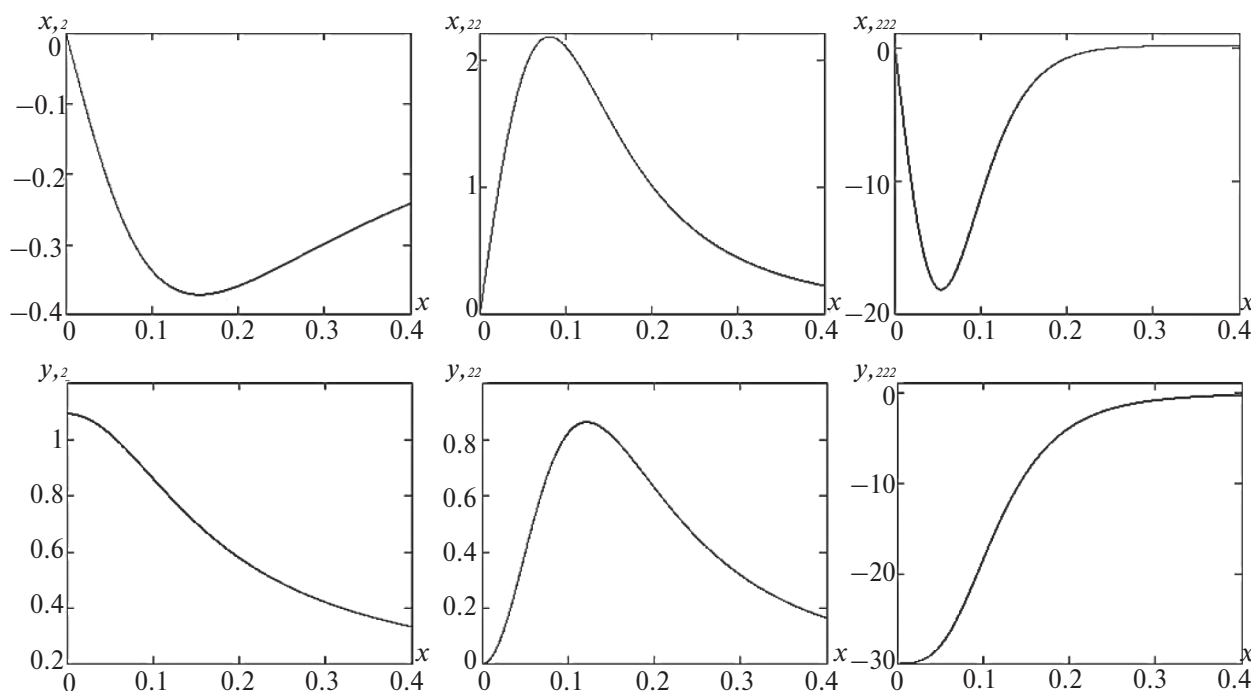


Рис. 4. Производные от x , y по x^1 , x^2 для периодического течения.

Таблица 6. Параметры плоского периодического течения в трех приближениях l -представления теории и на основании параксиальной модели

$\varphi_{ex0} = 0.0352, E_{ex0} = 0.2466, k_{ex0} = 3.504, f(0) = 0.05$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	2.83×10^{-3}	1.56×10^{-3}	1.38×10^{-3}	2.23×10^{-30}
x_Δ	0.186	0	0	0.0352
$\varphi_{ex\Delta}$	0.0671	0.0352	0.0352	0.0330
$\varphi_{ap\Delta}$	0.0668	0.0368	0.0366	6.35
$\delta\varphi_m$	0.79	4.44	3.91	0
x_δ	0	0	0	6.35
$\delta\varphi_\Delta$	0.42	4.44	3.91	6.35
$\delta\varphi_0$	0.79	4.44	3.91	
ΔE_m	5.43×10^{-3}	3.50×10^{-3}	3.34×10^{-3}	0.094
x_Δ	0.082	0.05	0	0
$E_{ex\Delta}$	0.2238	0.2375	0.2466	0.2466
$E_{ap\Delta}$	0.2293	0.2340	0.2433	0.1523
δE_m	6.45	1.48	1.36	38.25
x_δ	0.377	0.055	0	0.1523
δE_Δ	2.43	1.48	1.36	38.25
δE_0	0.57	1.10	1.36	38.25
Δk_m	0.432	0.222	0.135	1.194
x_Δ	0	0.05	0.045	0
$k_{ex\Delta}$	3.504	3.170	3.226	3.504
$k_{ap\Delta}$	3.072	2.948	3.361	2.310
δk_m	12.34	7.09	4.21	34.06
x_δ	0	0.05	0.04	0
δk_Δ	12.34	7.00	4.19	34.06
δk_0	12.34	3.48	1.37	34.06

Примечания. Здесь и далее в таблицах: $\Delta\varphi_m$ и x_Δ — максимальное отклонение от точного значения $|\varphi_{ex0} - \varphi_{ap\Delta}|$ для потенциала и соответствующая координата на оси пучка; $\delta\varphi_m$ и x_δ — относительная ошибка в процентах $|(\varphi_{ex} - \varphi_{ap})/\varphi_{ex}|$ и координата, в которой достигается максимум; $\delta\varphi_\Delta$, $\delta\varphi_0$ — относительные ошибки в точке максимальной абсолютной разности и в плоскости инжекции.

функции φ , $\Delta\varphi$, $\delta\varphi$; E , ΔE ; k , Δk , δk ; за пределами рисунков отклонения от точных значений уменьшаются.

Укажем уровень ошибок для более узких пучков, демонстрирующий быстрый рост при сопоставлении со случаем $f(0) = 0.05$. При $f(0) = 0.02$, 0.03 имеем

$$\begin{aligned} f(0) = 0.02 : \delta\varphi \sim 0.8 \%, \delta E \sim 0.7 \%, \delta k \sim 1.1 \%; \\ f(0) = 0.03 : \delta\varphi \sim 1.7 \%, \delta E \sim 0.9 \%, \delta k \sim 1.4 \%. \end{aligned} \quad (40)$$

Параксиальная модель при $f(0) = 0.03$ улучшает свои показатели по сравнению с табл. 6, однако продолжает сильно отставать от геометризованного подхода:

$$\begin{aligned} f(0) = 0.03 : \delta\varphi \sim 2.7 \%, \\ \delta E \sim 14.6 \%, \delta k \sim 14.4 \%. \end{aligned} \quad (41)$$

4. ПОТОК С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Решение с траекториями-гиперболами (рис. 6) описывается соотношениями [24]

$$\begin{aligned} u &= (\Omega + \omega)y, \quad v = (\Omega - \omega)x, \\ \omega &= \frac{1}{2}H_z, \quad \Omega > \omega, \\ 2\varphi &= (\Omega - \omega)^2 x^2 + (\Omega + \omega)^2 y^2, \\ \rho &= 2(\Omega^2 + \omega^2), \\ (\Omega + \omega)^2 y^2 - (\Omega - \omega)^2 x^2 &= \text{const}, \\ \bar{\Omega} &= \frac{\Omega + \omega}{\Omega - \omega}\omega. \end{aligned} \quad (42)$$

Тестовая задача о потоке с гиперболической осью при $\bar{\Omega} = 1$ позволяет исследовать элек-

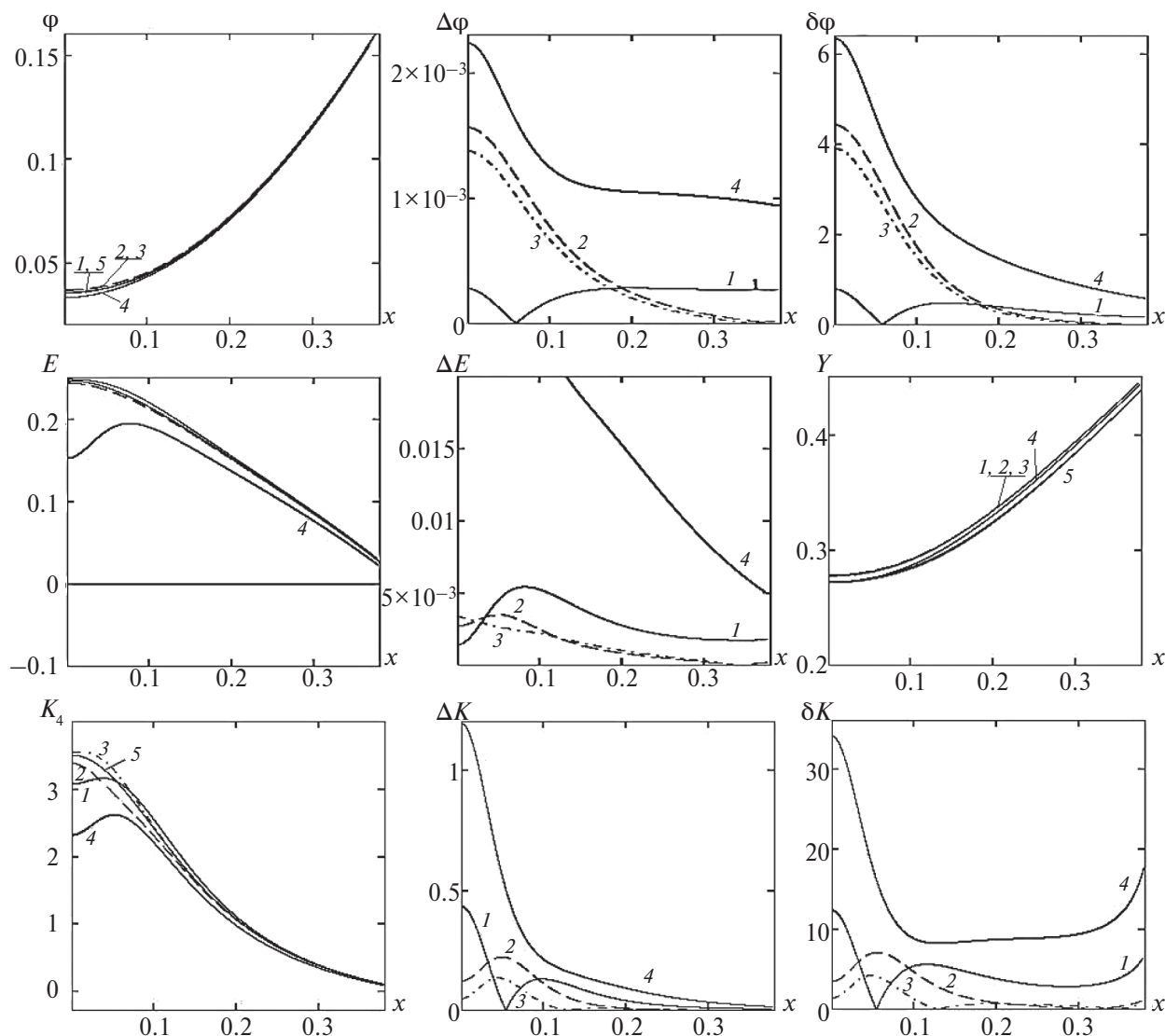


Рис. 5. Функции, характеризующие приближенные модели для периодического течения.

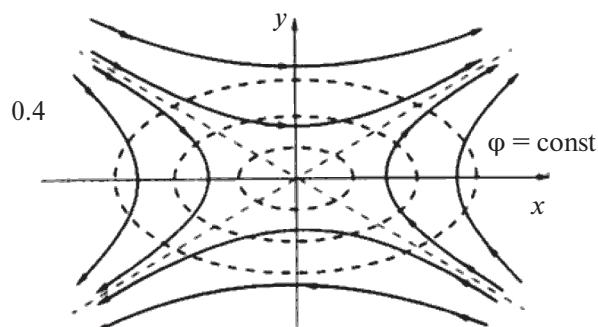


Рис. 6. Течение с траекториями-гиперболами в однородном магнитном поле.

тростатические течения [25] и оценить влияние кривизны $|k| = \bar{\Omega}$ базовой траектории $\eta_a = 1$ в точке старта $x = 1$. Величина $|k|$ возрастает с увеличением параметров H_z и $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega} = \frac{1 + H_z}{1 - H_z}, \quad \Omega = \frac{1}{2}. \quad (43)$$

Значения производной кривизны

$$k'(1) = 3\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1) \quad (44)$$

при $\bar{\Omega} = 10$ достигает 330.

Как и в предыдущем случае (разд. 3), использование ϕ -варианта теории невозможно из-за одинакового наклона траекторий и эквипотенциалей в плоскости инжекции $y = 0$. Однако эта тестовая задача позволяет судить об эффективности трех моделей: параксиальной и геометризованной в l - и W -представлениях.

Геометризованная модель, l -представление. Ортогональная система x^1, x^2 , связанная с

трубками тока $x^2 = \text{const}$, определена выражениями

$$x^1 = yx^{\bar{\Omega}}, \quad x^2 \equiv \eta = (x)^2 - \bar{\Omega}y^2. \quad (45)$$

Для коэффициентов Ляме и параметров пучка из точного решения имеют место формулы

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{x^{1-\bar{\Omega}}}{\sqrt{D}}, \quad h_2 = \frac{1}{2\sqrt{D}}, \quad D = x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2; \\ \bar{\Phi} &= \frac{\Phi}{(\Omega - \omega)^2} = \frac{1}{2}(x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2) = \\ &= \frac{1}{2}[\eta + \bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2], \quad (46) \\ E &= \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} = -\frac{x^2 - \bar{\Omega}^3 y^2}{\sqrt{D}} = \frac{-\eta + \bar{\Omega}(\bar{\Omega}^2 - 1)y^2}{[\eta + \bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2]^{1/2}}, \\ k &= -\frac{\bar{\Omega}\eta}{D^{3/2}} = -\frac{\bar{\Omega}\eta}{[\eta + \bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Производные от декартовых координат x, y по криволинейным координатам x^1, x^2 описываются выражениями

$$\begin{aligned} x_{,1} &= \frac{\bar{\Omega}yx^{1-\bar{\Omega}}}{D}, \quad y_{,1} = \frac{x^{2-\bar{\Omega}}}{D}; \\ x_{,2} &= \frac{x}{2D}, \quad y_{,2} = -\frac{\bar{\Omega}y}{2D}, \quad D_{,2} = 2(xx_{,2} + \bar{\Omega}^2 y_{,2}); \\ x_{,22} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_{,2}}{D} - \frac{x}{D^2}D_{,2}\right), \quad y_{,22} = \frac{\bar{\Omega}}{2}\left(-\frac{y_{,2}}{D} + \frac{y}{D^2}D_{,2}\right); \quad (47) \\ x_{,222} &= \frac{x_{,22}}{2D} - \frac{x_{,2}}{D^2}D_{,2} + \frac{x}{D^3}D_{,2}^2 - \frac{x}{2D^2}D_{,22}, \\ y_{,222} &= \bar{\Omega}\left(-\frac{y_{,22}}{2D} + \frac{y_{,2}}{D^2}D_{,2} - \frac{y}{D^3}D_{,2}^2 + \frac{y}{2D^2}D_{,22}\right), \\ D_{,22} &= 2(xx_{,22} + x_{,2}^2) + 2\bar{\Omega}^2(y_{,22} + y_{,2}^2). \end{aligned}$$

Формулы (38) справедливы и в этом случае при $\eta_a = x^2 - \bar{\Omega}y^2$, а для потенциала имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{ap} &= \left[\frac{\Phi}{(\Omega - \omega)^2} \right]_{ap} = \frac{1}{2}\Phi(1 + \bar{\Phi}_1\bar{\eta} + \bar{\Phi}_2\bar{\eta}^2 + \bar{\Phi}_3\bar{\eta}^3), \\ \Phi &= x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2; \quad \Phi_1 = 2(xx_{,2} + \bar{\Omega}^2 y_{,2}), \\ \Phi_2 &= xx_{,22} + x_{,2}^2 + \bar{\Omega}^2(y_{,22} + y_{,2}^2), \quad (48) \\ \Phi_3 &= \frac{1}{3}xx_{,222} + x_{,2}x_{,22} + \bar{\Omega}^2\left(\frac{1}{3}yy_{,222} + y_{,2}y_{,22}\right); \\ \bar{\Phi}_k &\equiv \frac{\Phi_k}{\Phi}. \end{aligned}$$

Геометризованная теория, W -представление. Неортогональная система координат x^1, x^2 и соответствующая ей метрика описываются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x^1 &\equiv W = \Omega xy, \\ x^2 &\equiv \eta = (x)^2 - \bar{\Omega}y^2, \\ \bar{D} &= x^2 + \bar{\Omega}y^2; \\ h_1 &= \frac{\sqrt{x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2}}{\bar{\Omega}\bar{D}}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\bar{D}}, \quad (49) \\ g_{12} &= -\frac{1}{2\Omega\bar{D}}; \\ \Omega &\neq \bar{\Omega}, \quad D \neq \bar{D}. \end{aligned}$$

Точные значения параметров пучка для эталонного решения те же, что и в (46). Для производных от x, y по x^1, x^2 получаем

$$\begin{aligned} x_{,1} &= \frac{\bar{\Omega}y}{\Omega\bar{D}}, \quad y_{,1} = \frac{x}{\Omega\bar{D}}; \\ x_{,2} &= \frac{x}{2\bar{D}}, \quad y_{,2} = -\frac{y}{2\bar{D}}, \\ \bar{D}_{,2} &= 2(xx_{,2} + \bar{\Omega}yy_{,2}); \\ x_{,22} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_{,2}}{\bar{D}} - \frac{x}{\bar{D}^2}\bar{D}_{,2}\right), \\ y_{,22} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{y_{,2}}{\bar{D}} + \frac{y}{\bar{D}^2}\bar{D}_{,2}\right); \quad (50) \\ x_{,222} &= \frac{x_{,22}}{2\bar{D}} - \frac{x_{,2}}{\bar{D}^2}\bar{D}_{,2} + \frac{x}{\bar{D}^3}\bar{D}_{,2}^2 - \frac{x}{2\bar{D}^2}\bar{D}_{,22}, \\ y_{,222} &= -\frac{y_{,22}}{2\bar{D}} + \frac{y_{,2}}{\bar{D}^2}\bar{D}_{,2} - \frac{y}{\bar{D}^3}\bar{D}_{,2}^2 + \frac{y}{2\bar{D}^2}\bar{D}_{,22}, \\ \bar{D}_{,22} &= 2(xx_{,22} + x_{,2}^2) + 2\bar{\Omega}(yy_{,22} + y_{,2}^2). \end{aligned}$$

Приближенные выражения для параметров потока те же, что и в случае ортогональной системы, например, (48) для Φ .

Результаты расчетов. Зависимость коэффициентов (26) от продольной координаты при $\bar{\Omega} = 1, 5, 10$ представлена на рис. 7. Поведение параметров электростатического потока $\bar{\Omega} = 1$ в трех приближениях l -модели и в параксиальном случае демонстрирует рис. 8 при $f(0) = 0.2$.

В табл. 7 приведена числовая информация для этого варианта. Результаты параксиальной теории значительно уступают данным геоме-

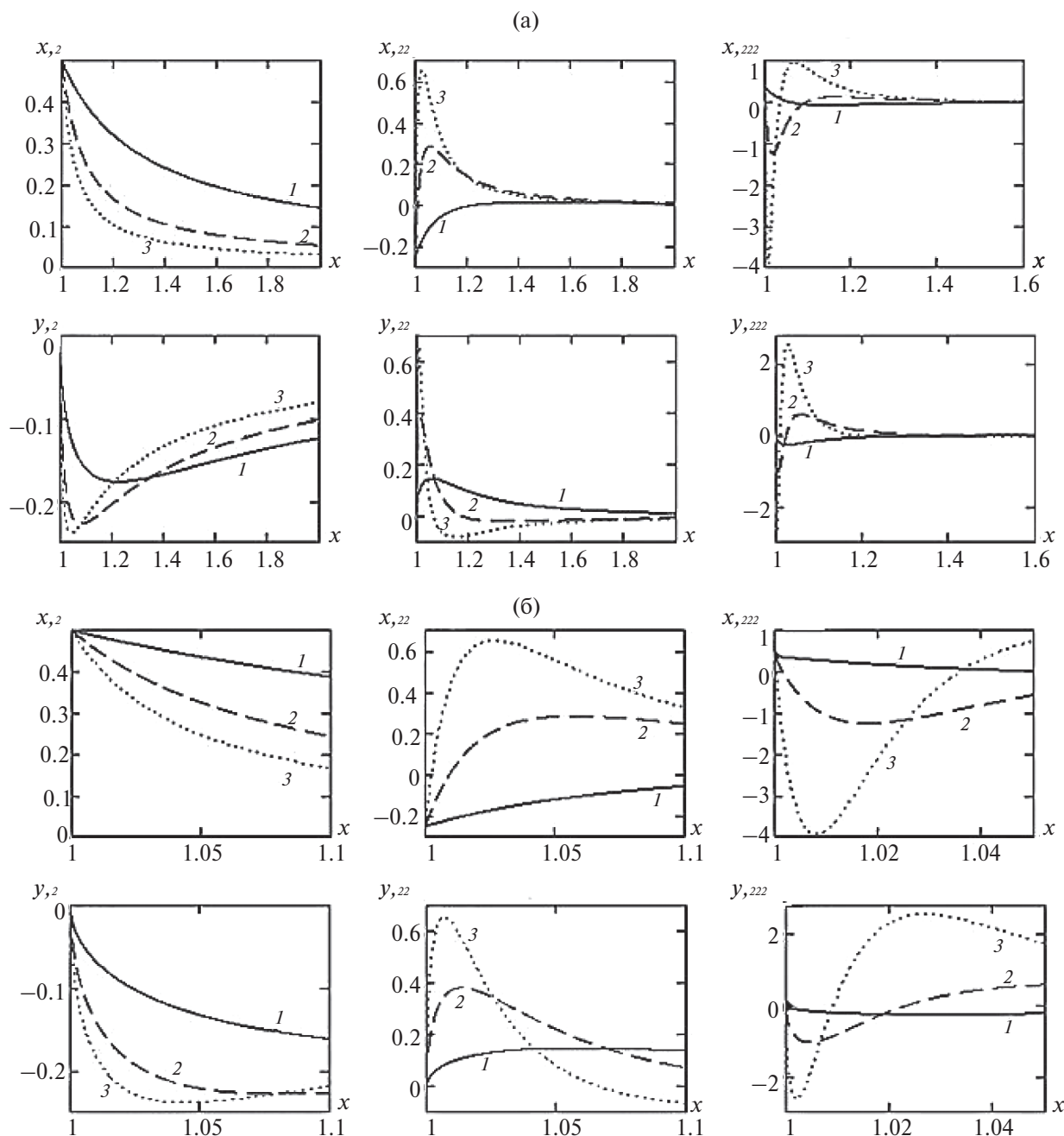


Рис. 7. Производные от x , y по x^1 , x^2 для течения с траекториями-гиперболами (а), в окрестности плоскости инъекции (б) при $\Omega = 1$ (1), 5 (2) и 10 (3).

тризованной модели, сходимость по приближениям которой явно прослеживается, особенно по полю E и кривизне k : $\delta E \sim 0.2\%$, $\delta k \sim 0.9\%$ против δE , $\delta k \sim 70\%$. Максимальная ошибка задачи в третьем приближении меньше 1 %, а ее рост при увеличении толщины пучка в два раза, до $f(0) = 0.4$, отражен в табл. 8.

Перейдем к рассмотрению потоков в магнитном поле при $\bar{\Omega} = |k| = 5$. Уже при $f(0) = 0.1$ параксиальная модель приводит к форме грани-

цы, которая качественно отличается от точной кривой: зависимость $X = X(Y)$ становится немонотонной, причем максимальные пятидесятикратные ошибки по E , k имеют место вблизи точки старта слева от нее (рис. 9).

Сравнение коэффициентов (47), (50) геометризованной теории в l - и W -представлениях приведено на рис. 10. Результаты расчетов для начальной ширины пучка $f(0) = 0.2$ для этих случаев содержат табл. 9, 10. Величина относи-

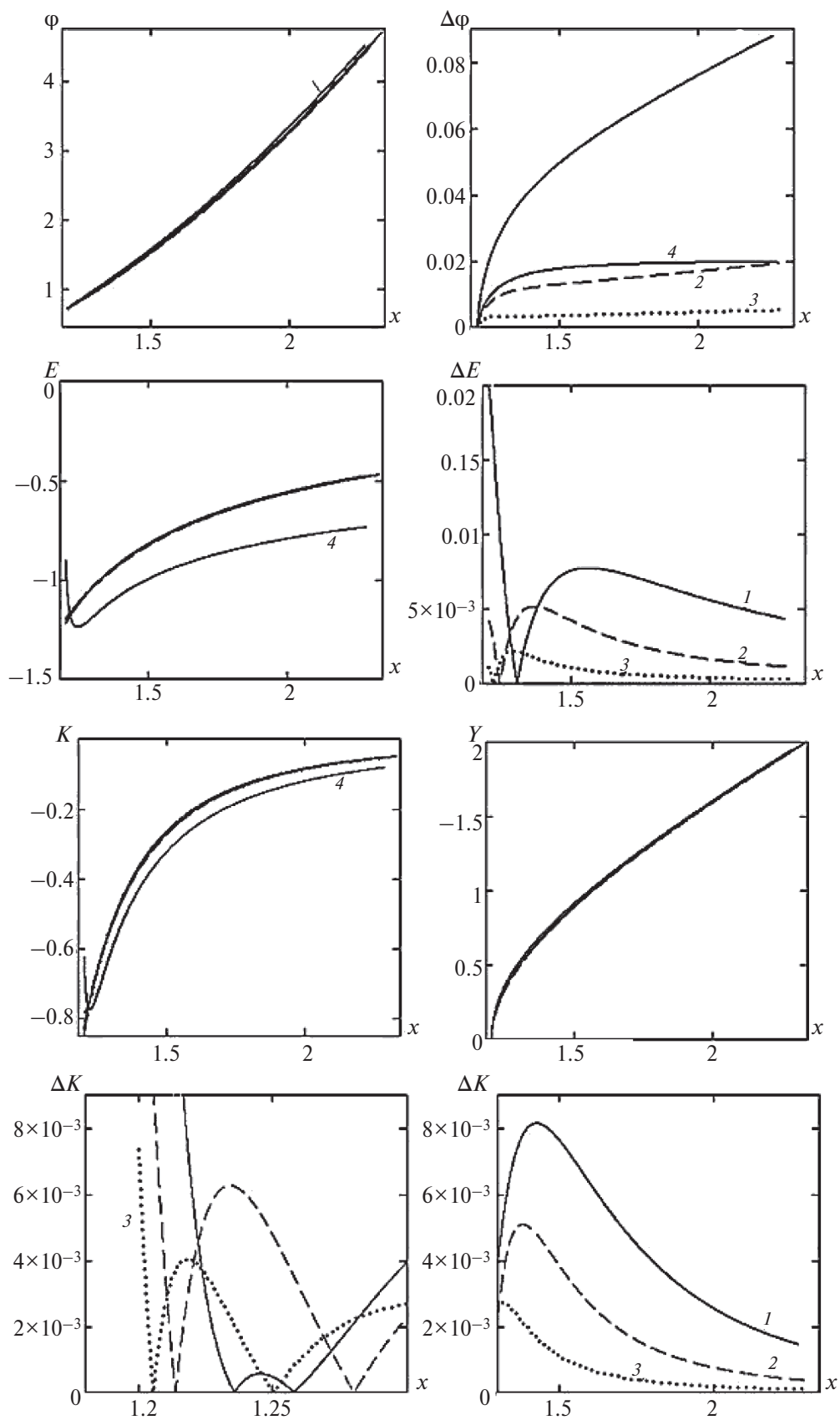


Рис. 8. Функции, характеризующие приближенные модели для электростатического течения с траекториями-гиперболами ($\Omega = 1$); 1, 2, 3 – приближение геометриванной теории, 4 – параксиальная модель.

Таблица 7. Параметры электростатического потока $\bar{\Omega} = 1$ с траекториями-гиперболами, $f(0) = 0.2$

$\bar{\Omega} = 1, \varphi_{ex0} = 0.72, E_{ex0} = -1.2, k_{ex0} = -0.833, f(0) = 0.2$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	0.107	0.023	6.05×10^{-3}	0.02
x_Δ	2.714	2.729	1.307	2.680
$\varphi_{ex\Delta}$	6.654	6.676	6.645	6.717
$\varphi_{ap\Delta}$	6.761	6.740	6.651	6.736
$\delta\varphi_m$	3.39	1.04	0.35	1.38
x_δ	1.384	1.307	1.256	1.328
$\delta\varphi_\Delta$	1.61	0.34	0.09	0.30
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	0.02	5.18×10^{-3}	2.18×10^{-3}	-0.3
x_Δ	1.2	1.357	1.282	1.2
$E_{ex\Delta}$	-1.2	-0.955	-1.0523	-1.2
$E_{ap\Delta}$	-1.22	-0.960	-1.0516	-0.9
δE_m	1.67	0.55	0.21	71.48
x_δ	1.2	1.394	1.297	2.73
δE_Δ	1.67	0.54	0.21	25
δE_0	1.67	0.35	0.10	25
Δk_m	0.053	0.019	7.35×10^{-3}	0.208
x_Δ	1.2	1.2	1.2	1.2
$k_{ex\Delta}$	-0.8333	-0.8333	-0.8333	-0.8333
$k_{ap\Delta}$	-0.78	-0.8526	-0.8260	-0.625
δk_m	6.4	2.31	0.88	72.49
x_δ	1.2	1.2	1.2	2.730
δk_Δ	6.4	2.31	0.88	24.6
δk_0	6.4	2.31	0.88	25.0

Таблица 8. Параметры электростатического потока $\bar{\Omega} = 1$ с траекториями-гиперболами, $f(0) = 0.4$

$\bar{\Omega} = 1, \varphi_{ex0} = 0.98, E_{ex0} = -1.4, k_{ex0} = -0.714286, f(0) = 0.4$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	0.43	0.198	0.112	0.08
x_Δ	2.708	2.824	2.767	2.771
$\varphi_{ex\Delta}$	6.353	6.993	6.678	6.698
$\varphi_{ap\Delta}$	6.783	6.795	6.790	6.778
$\delta\varphi_m$	14.39	7.62	6.12	5.09
x_δ	1.496	1.529	1.418	1.475
$\delta\varphi_\Delta$	6.78	2.83	1.67	1.19
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	0.08	0.048	0.044	1.4
x_Δ	1.4	1.575	1.443	1.399
$E_{ex\Delta}$	-1.4	-1.131	-1.320	-1.403
$E_{ap\Delta}$	-1.48	-1.179	-1.2758	-3.04×10^{-3}
δE_m	5.71	4.30	3.37	101.07
x_δ	1.4	1.599	1.451	2.771
δE_Δ	5.71	4.25	3.36	99.78
δE_0	5.71	2.51	1.44	22.23
Δk_m	0.194	0.151	0.125	0.706
x_Δ	1.4	1.4	1.4	1.399
$k_{ex\Delta}$	-0.7143	-0.7143	-0.7143	-0.7076
$k_{ap\Delta}$	-0.52	-0.8656	-0.5891	-1.55×10^{-3}
δk_m	27.2	21.18	17.52	105.83
x_δ	1.4	1.4	1.4	2.772
δk_Δ	27.2	21.18	17.52	99.78
δk_0	27.2	21.18	17.52	22.22

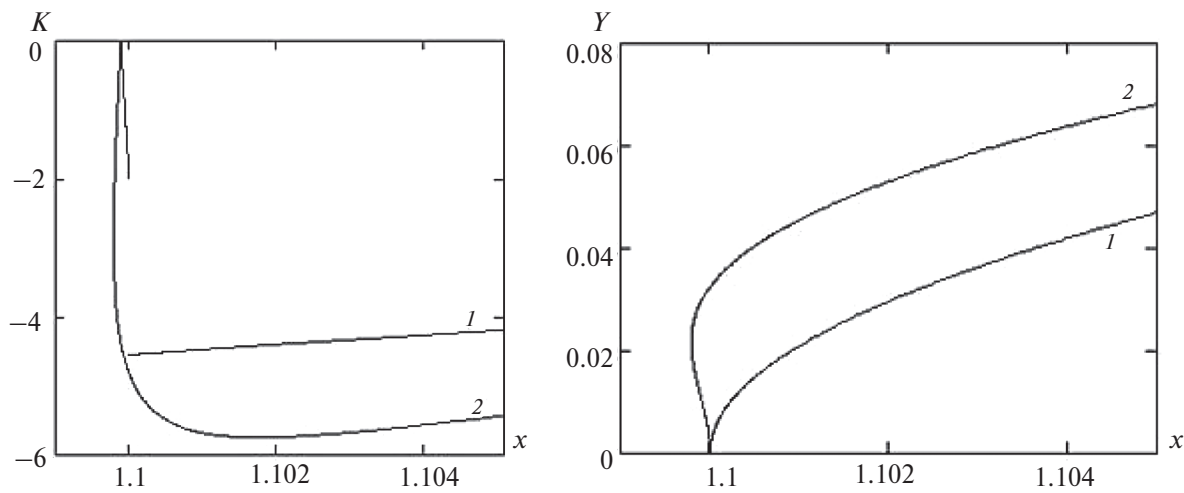


Рис. 9. Траектория границы пучка с осью-гиперболой при $\Omega = 5, f(0) = 0.1$; 1 – точное решение, 2 – параксиальная модель.

Таблица 9. Параметры течения с траекториями-гиперболами, l -представление, $\bar{\Omega} = 5, f(0) = 0.2$

Параметр	$\bar{\Omega} = 5, \varphi_{ex0} = 0.72, E_{ex0} = -1.2, k_{ex0} = -4.167, f(0) = 0.2$		
	Номер приближения		
	1	2	3
$\Delta\varphi_m$	0.294	0.062	0.028
x_Δ	2.445	2.462	1.194
$\varphi_{ex\Delta}$	14.332	14.477	0.680
$\varphi_{ap\Delta}$	14.626	14.515	0.708
$\delta\varphi_m$	17.65	6.36	4.06
x_δ	1.181	1.224	1.195
$\delta\varphi_\Delta$	2.05	0.42	4.12
$\delta\varphi_0$	0	0	0
ΔE_m	1.549	0.728	0.430
x_Δ	1.184	1.225	1.199
$E_{ex\Delta}$	-2.128	0.0167	-1.232
$E_{ap\Delta}$	-0.579	-0.712	-0.802
δE_m	—	—	39.98
x_δ	1.225	1.225	1.206
δE_Δ	72.79	43.59	34.9
δE_0	1.70	0.35	0.094
Δk_m	2.537	1.037	0.839
x_Δ	1.176	1.225	1.199
$k_{ex\Delta}$	-6.225	-2.985	-4.204
$k_{ap\Delta}$	-3.687	-4.022	-3.365
δk_m	43.67	34.75	20.11
x_δ	1.19	1.225	1.20
δk_Δ	40.75	34.74	19.96
δk_0	6.41	2.30	0.89

тельной ошибки опускается, если точное значение функции близко к нулю. На рис. 11 изображены параметры потока в W -представлении.

Параксиальный подход непригоден для описания решения с этим набором параметров ($\bar{\Omega} = 5, f(0) = 0.2$) в силу того, что нефизичные

деформации траектории с ростом $f(0)$ не только усугубляются, но и приводят к следующему выражению для угла наклона границы пучка в точке старта:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1 - \bar{\Omega}f(0)}{0}.$$

(51)

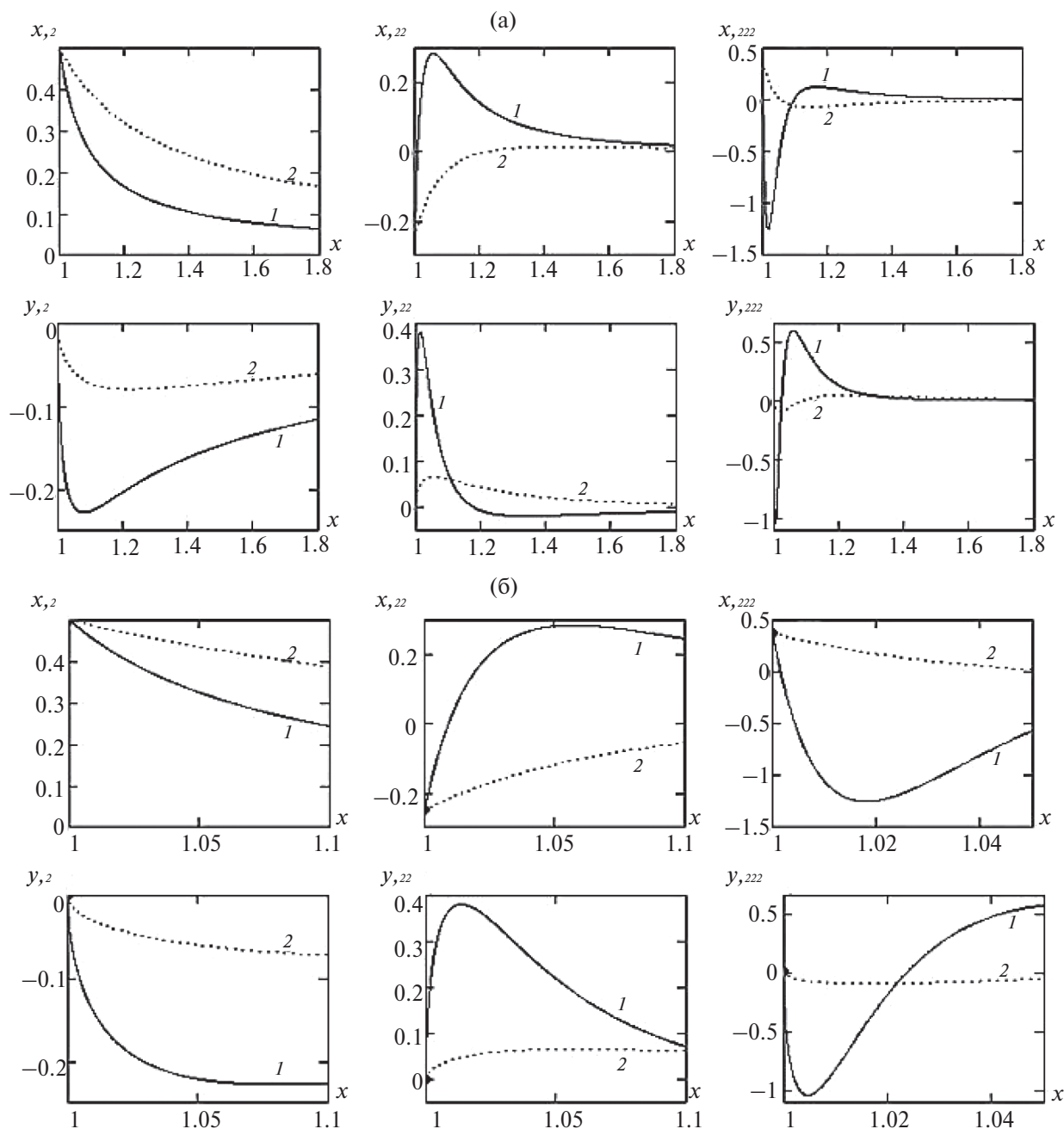


Рис. 10. Производные от x, y по x^1, x^2 для потока с осью – гиперболой $\Omega = 5$ (а), в окрестности плоскости инъекции (б); 1 – l -представление, 2 – W -представление.

При $f(0) = 0.2$ правая часть в (51) приобретает вид неопределенности $0/0$, а при $f(0) > 0.2$ обращается в $-\infty$ вместо $+\infty$.

Из табл. 9, 10 видно, что ошибка вычисления φ, E, k при использовании ортогональных координат составляет 4, 35 и 20 %, а в неортогональном варианте – 1, 7 и 3 %. Обратим внимание на тот факт, что начальная ширина пучка 0.2 равна

радиусу кривизны оси в точке старта, поэтому он не может считаться узким.

При $\bar{\Omega} = 10, L_* = 0.1, f(0) = 0.05$ l -приближение геометризованной теории в третьем приближении характеризуется следующими величинами:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_m &= 0.07\%, \quad E_{ex\Delta} = -0.2158, \quad E_{ap\Delta} = -0.1901, \\ \delta E_{\Delta} &= 12.05\%, \quad \delta k_m = 0.72\%. \end{aligned} \quad (52)$$

Таблица 10. Параметры течения с траекториями-гиперболами, W -представление, $\bar{\Omega} = 5, f(0) = 0.2$

Параметр	Номер приближения		
	1	2	3
$\bar{\Omega} = 5, \varphi_{ex0} = 0.72, E_{ex0} = -1.2, k_{ex0} = -4.167, f(0) = 0.2$			
$\Delta\varphi_m$	0.291	0.063	0.017
x_Δ	2.475	2.483	2.411
$\varphi_{ex\Delta}$	14.781	14.897	13.832
$\varphi_{ap\Delta}$	15.072	14.834	13.849
$\delta\varphi_m$	6.28	2.15	1.23
x_δ	1.289	1.269	1.256
$\delta\varphi_\Delta$	1.97	0.42	0.12
$\delta\varphi_0$	0	0	0
ΔE_m	0.372	0.143	0.082
x_Δ	1.337	1.282	1.255
$E_{ex\Delta}$	3.671	2.109	1.186
$E_{ap\Delta}$	4.044	1.966	1.268
δE_m	—	—	—
x_δ	1.225	1.225	1.225
δE_Δ	10.13	6.78	6.90
δE_0	0.90	0.35	0.095
Δk_m	0.267	0.096	0.065
x_Δ	1.200	1.200	1.237
$k_{ex\Delta}$	-4.167	-4.167	-2.572
$k_{ap\Delta}$	-3.900	-4.263	-2.507
δk_m	11.07	5.12	2.67
x_δ	1.353	1.290	1.250
δk_Δ	6.40	2.31	2.52
δk_0	6.40	2.30	0.89

При $f(0) = 0.2$ в качестве границы потока получается линия с неупорядоченными самопересечениями, в то время как ошибки W -модели соответствуют величинам

$$\delta\varphi \sim 2.6\%, \delta E_\Delta \sim 5\%, \delta k \sim 4.6\%. \quad (53)$$

На рис. 12, 13 представлено поведение коэффициентов разложения (50) для $\bar{\Omega} = 5, 10$ и параметры потока с начальной шириной 0.2 при $\bar{\Omega} = 10$. В табл. 11 приведена соответствующая числовая информация. За пределами рисунков ошибки приближенного решения быстро убывают.

Для W -модели при $\bar{\Omega} = 10, x = 100, y \sim 32, \Delta y \sim 3.5 \cdot 10^{-4}$ относительная ошибка при $f(0) = 0.2$ и компрессии ~ 300 составляет $\sim 1 \times 10^{-3}\%$. Необходимая точность алгоритма при таких компрессиях оценивается величиной ошибки в $3 \times 10^{-3}\%$. Ошибки $\delta\varphi \sim 2.2 \times 10^{-3}\%$, $\delta E \sim 1.1 \times 10^{-3}\%$, $\delta k \sim 3.4 \times 10^{-3}\%$ удовлетворяют этому требованию. Плотность тока относительно ее величины в плоскости инжекции возрастает также в 300 раз, однако необходимо помнить, что рассматриваемое решение характеризуется постоянной плотностью пространственного заряда.

5. ПОТОК С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Эталонное решение с эллиптическими орбитами частиц (рис. 14) в однородном магнитном поле [23], как и решение с гиперболическими траекториями, позволяет рассмотреть течение с большой кривизной оси в плоскости инжекции и с еще большими значениями ее производной, т.е. задачу с высокими градиентами параметров, особенно сложную для приближенных моделей. Геометризованное описание возможно только в l -варианте теории: φ -представление не работает по той же причине, которая была названа в разд. 3, 4, а в W -варианте возникает сингулярная прямая $y = \sqrt{\bar{\Omega}}x$, на которой производные от x, y по x^1, x^2 обращаются в бесконечность.

Эталонное решение описывается формулами

$$\begin{aligned}
 u &= (\omega + \Omega)y, \quad v = -(\omega - \Omega)x, \quad \omega = \frac{1}{2}H_z, \quad \omega > \Omega; \\
 2\varphi &= (\Omega - \omega)^2 x^2 + (\Omega + \omega)^2 y^2, \\
 \rho &= 2(\Omega^2 + \omega^2), (\omega - \Omega)x^2 + (\omega + \Omega)y^2 = \text{const}; \\
 \bar{\Omega} &= \frac{\omega - \Omega}{\omega + \Omega}.
 \end{aligned} \quad (54)$$

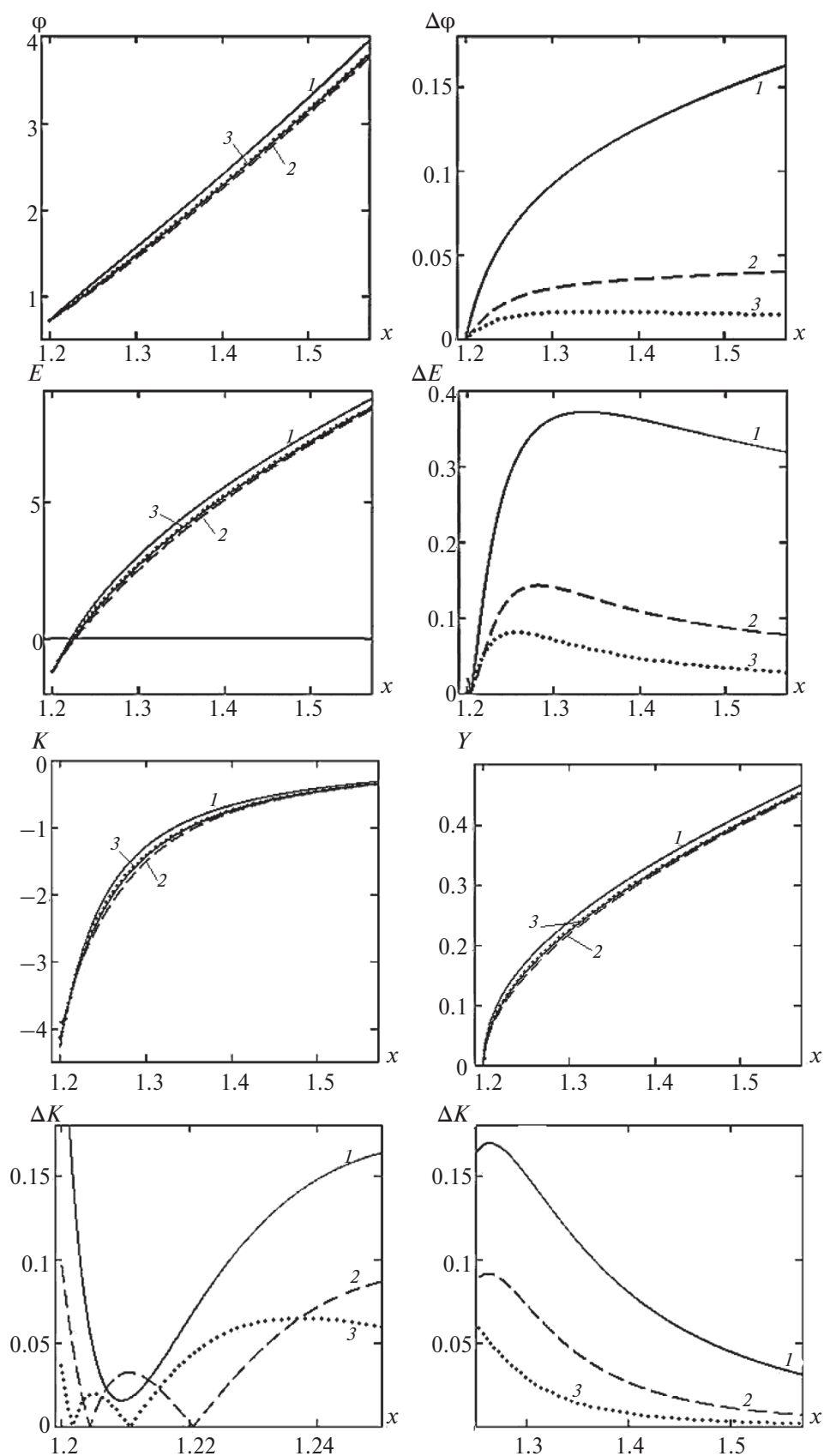


Рис. 11. Функции, характеризующие W -представление геометризованной теории для течения с гиперболическими траекториями при $\Omega = 5, f(0) = 0.2$.

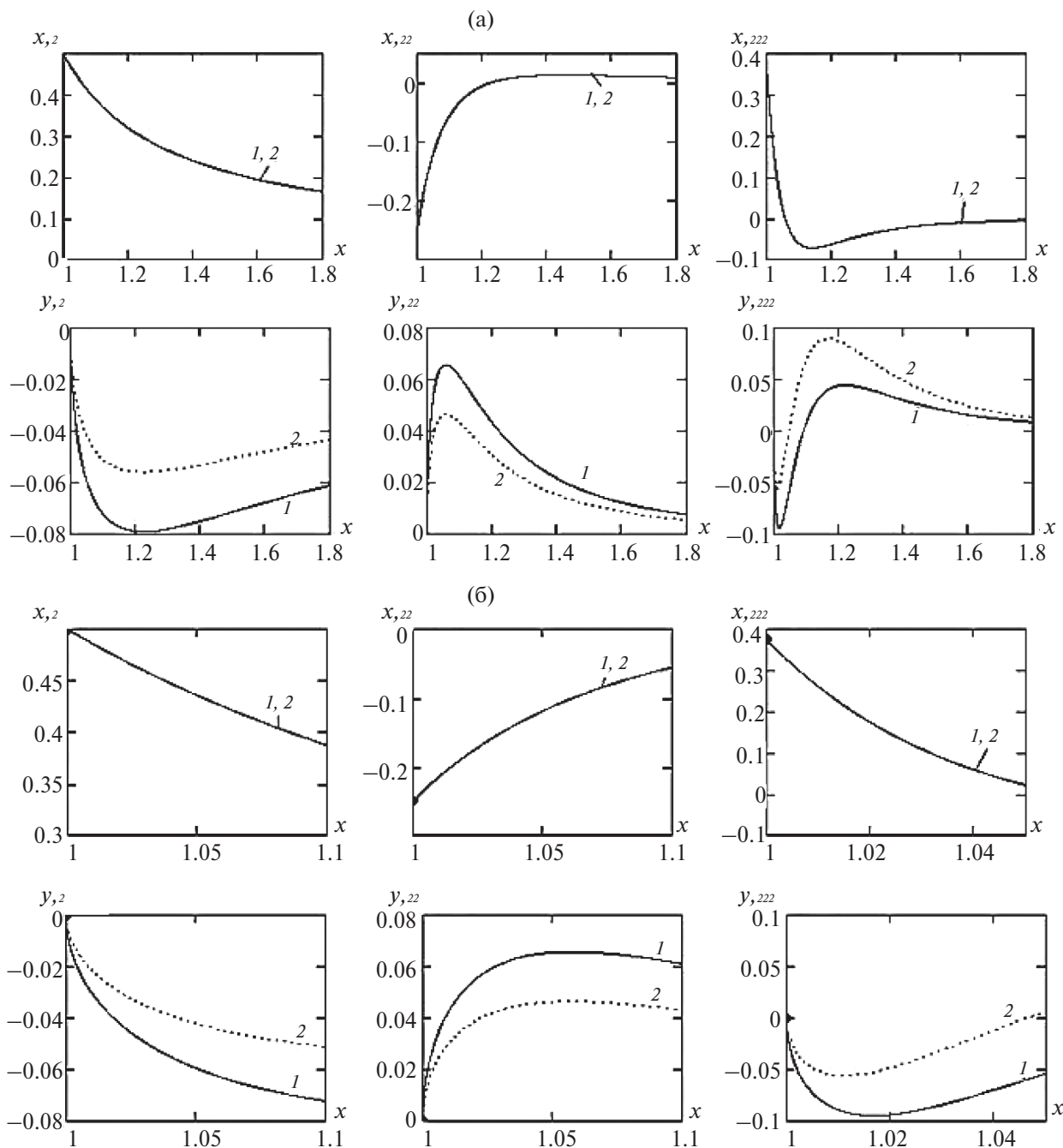


Рис. 12. Производные от x , y по x^1 , x^2 для течения с траекториями-гиперболами, W -вариант теории (а), окрестность плоскости инъекции (б), $\Omega = 5$ (1) и 10 (2).

Геометризованная модель, l -представление. Ортогональная система x^1 , x^2 для решения (55) и соответствующие коэффициенты Ляме имеют вид

$$x^1 = \frac{y^{\bar{\Omega}}}{x}, \quad x^2 \equiv \eta = \bar{\Omega}(x)^2 + y^2; h_1 = \frac{x^2 y^{1-\bar{\Omega}}}{\sqrt{\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2}}, \quad h_2 = \frac{1}{2\sqrt{\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2}}. \quad (55)$$

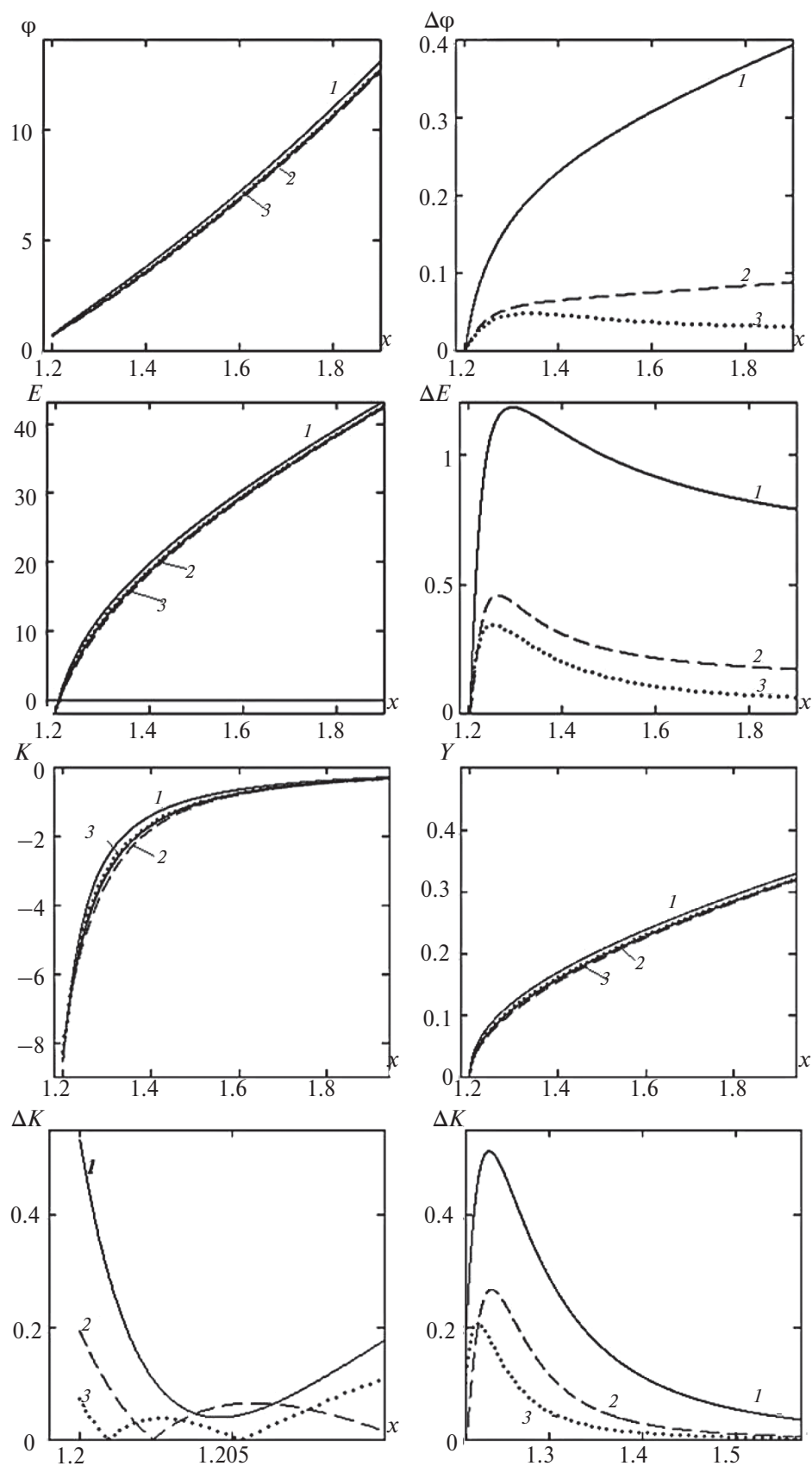
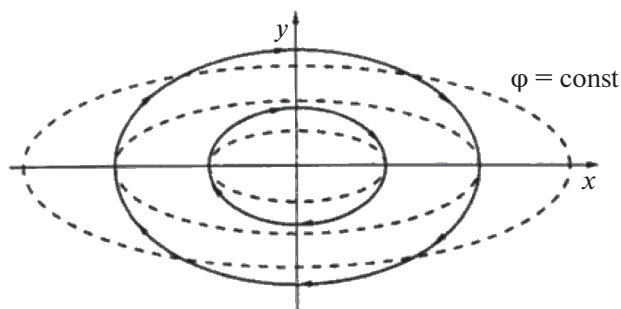


Рис. 13. Функции, характеризующие W -представление геометризованной теории, для течения с гиперболическими траекториями при $\Omega = 10, f(0) = 0.2$.

Таблица 11. Параметры течения с траекториями-гиперболами, W -представление, $\bar{\Omega} = 10, f(0) = 0$

Параметр	Номер приближения		
	1	2	3
$\bar{\Omega} = 10, f(0) = 0.2, \varphi_{ex0} = 0.72, E_{ex0} = -1.2, k_{ex0} = -8.333$			
$\Delta\varphi_m$	0.728	0.155	0.048
x_Δ	3.330	3.345	1.313
$\varphi_{ex\Delta}$	53.796	54.340	2.275
$\varphi_{ap\Delta}$	54.524	54.185	2.323
$\delta\varphi_m$	8.46	2.99	2.60
x_δ	1.261	1.253	1.254
$\delta\varphi_\Delta$	1.35	0.28	2.10
$\delta\varphi_0$	0	0	0
ΔE_m	1.181	0.457	0.341
x_Δ	1.293	1.261	1.252
$E_{ex\Delta}$	10.757	7.647	6.670
$E_{ap\Delta}$	11.938	7.190	7.011
δE_m	—	—	—
x_δ	1.206	1.206	1.206
δE_Δ	10.98	5.97	5.11
δE_0	1.67	0.35	0.094
Δk_m	0.533	0.267	0.207
x_Δ	1.200	1.238	1.223
$k_{ex\Delta}$	-8.333	-3.761	-4.910
$k_{ap\Delta}$	-7.800	-4.028	-4.703
δk_m	17.12	8.11	4.62
x_δ	1.293	1.258	1.234
δk_Δ	6.40	7.09	4.22
δk_0	6.40	2.31	0.88

**Рис. 14.** Течение с эллиптическими орбитами в однородном магнитном поле.

Параметры потока из точного решения описываются формулами

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{(\omega + \Omega)^2} = \frac{1}{2}(\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2) = \\ &= \frac{1}{2}[\bar{\Omega}\eta - (\bar{\Omega} - 1)y^2], \\ E &= \frac{\bar{\Omega}^2 x^3 + y^2}{\sqrt{\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2}} = \frac{\bar{\Omega}^2 \eta - (\bar{\Omega} - 1)y^2}{\sqrt{\bar{\Omega}\eta - (\bar{\Omega} - 1)y^2}},\end{aligned}\quad (56)$$

$$k = -\frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega}x^2 + y^2)}{(\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\bar{\Omega}\eta}{[\bar{\Omega}\eta - (\bar{\Omega} - 1)y^2]^{3/2}}.$$

Для производных от x, y по x^1, x^2 получаем

$$\begin{aligned}x_{,1} &= -\frac{x^2 y^{2-\bar{\Omega}}}{D}, \quad y_{,1} = \frac{\bar{\Omega} x^3 y^{1-\bar{\Omega}}}{D}, \quad D = \bar{\Omega}^2 x^2 + y^2; \\ x_{,2} &= \frac{\bar{\Omega} x}{2D}, \quad y_{,2} = \frac{y}{2D}; \\ x_{,22} &= \frac{\bar{\Omega}}{2} \left(\frac{x_{,2}}{D} - \frac{x}{D^2} D_{,2} \right), \quad y_{,22} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{,2}}{D} - \frac{y}{D^2} D_{,2} \right), \\ D_{,2} &= 2\bar{\Omega}^2 x x_{,2} + 2y y_{,2}; \\ x_{,222} &= \frac{\bar{\Omega}}{2} \left(\frac{x_{,22}}{D} - 2 \frac{x_{,2}}{D^2} D_{,2} + 2 \frac{x}{D^3} D_{,2}^2 - \frac{x}{D^2} D_{,22} \right), \\ y_{,222} &= \frac{1}{2} \left(\frac{y_{,22}}{D} - 2 \frac{y_{,2}}{D^2} D_{,2} + 2 \frac{y}{D^3} D_{,2}^2 - \frac{y}{D^2} D_{,22} \right), \\ D_{,22} &= \bar{\Omega}^2 (x x_{,22} + x_{,2}^2) + 2(y y_{,22} + y_{,2}^2).\end{aligned}\quad (57)$$

Потенциал в трех приближениях геометризованной теории определен выражениями

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{ap} &= \left[\frac{\Phi}{(\omega + \Omega)^2} \right]_{ap} = \\ &= \frac{1}{2} \Phi \left(1 + \bar{\Phi}_1 \bar{\eta} + \bar{\Phi}_2 \bar{\eta}^2 + \bar{\Phi}_3 \bar{\eta}^3 \right), \\ \Phi &= \eta_a + \bar{\Omega}(\bar{\Omega} - 1)x^2; \\ \Phi_1 &= 2(\bar{\Omega}^2 x x_{,2} + y y_{,2}), \\ \Phi_2 &= \bar{\Omega}^2 (x x_{,22} + x_{,2}^2) + y y_{,22} + y_{,2}^2, \\ \Phi_3 &= \bar{\Omega}^2 \left(\frac{1}{3} x x_{,222} + x_{,2} x_{,22} \right) + y y_{,222} + y_{,2} y_{,22}; \\ \bar{\Phi}_k &\equiv \Phi_k / \Phi.\end{aligned}\quad (58)$$

Результаты расчетов. Результаты исследования потоков с эллиптической осью представлены на рис. 15, 16.

Производные от x, y по поперечной координате x^2 для $\bar{\Omega} = 0.16$ (отношение полуосей $a/b = 1/\sqrt{\bar{\Omega}}$) приведены на рис. 15. При увеличе-

нии $\bar{\Omega}$ область резких градиентов все более концентрируется вблизи вершины эллипса с большей кривизной, причем значения производных сильно возрастают. Для $\bar{\Omega} = 0.04$ ($a/b = 5$) порядок функций $x_{,2}, x_{,22}, x_{,222}$ и $y_{,2}, y_{,22}, y_{,222}$ составляет 2, 10, 60 и 1, 6, 70; для $\bar{\Omega} = 0.01$ ($a/b = 10$) – 3, 70, 1600 и 2, 20, 2500. На рис. 16 приведены характеристики параметров потока при $\bar{\Omega} = 0.16$, $f(0) = 0.1$, $f(a) = 0.25$, где $f(a)$, а также величины с индексами exa соответствуют вершине с большей кривизной. Числовую информацию для этого случая и для $\bar{\Omega} = 0.04$, $f(0) = 0.05$, $f(a) = 0.25$; $\bar{\Omega} = 0.01$, $f(0) = 0.01$, $f(a) = 0.1$ содержат табл. 12–14.

Максимальная ошибка приближенного решения имеет место не в вершине с наибольшим значением кривизны контура, а в ее окрестности, размер которой уменьшается с ростом $\bar{\Omega}^{-1}$. Во всех случаях три приближения геометризованной теории обнаруживают тенденцию к сходимости. Рассмотренные варианты характеризуются следующими геометрическими параметрами и уровнем ошибки решения задачи в целом:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= 0.16, \quad k_a = 2.5, \quad L_* = 0.4, \quad f(0) = 0.1, \quad f(a) = 0.25 = 0.625 L_*, \quad \delta k \sim 1.6\%; \\ \bar{\Omega} &= 0.16, \quad k_a = 2.5, \quad L_* = 0.4, \quad f(0) = 0.2, \quad f(a) = 0.5 = 1.25 L_*, \quad \delta k \sim 33\%; \\ \bar{\Omega} &= 0.04, \quad k_a = 5, \quad L_* = 0.2, \quad f(0) = 0.05, \quad f(a) = 0.25 = 1.25 L_*, \quad \delta k \sim 38\%; \\ \bar{\Omega} &= 0.01, \quad k_a = 10, \quad L_* = 0.1, \quad f(0) = 0.01, \quad f(a) = 0.1 = L_*, \quad \delta k \sim 15\%.\end{aligned}\quad (59)$$

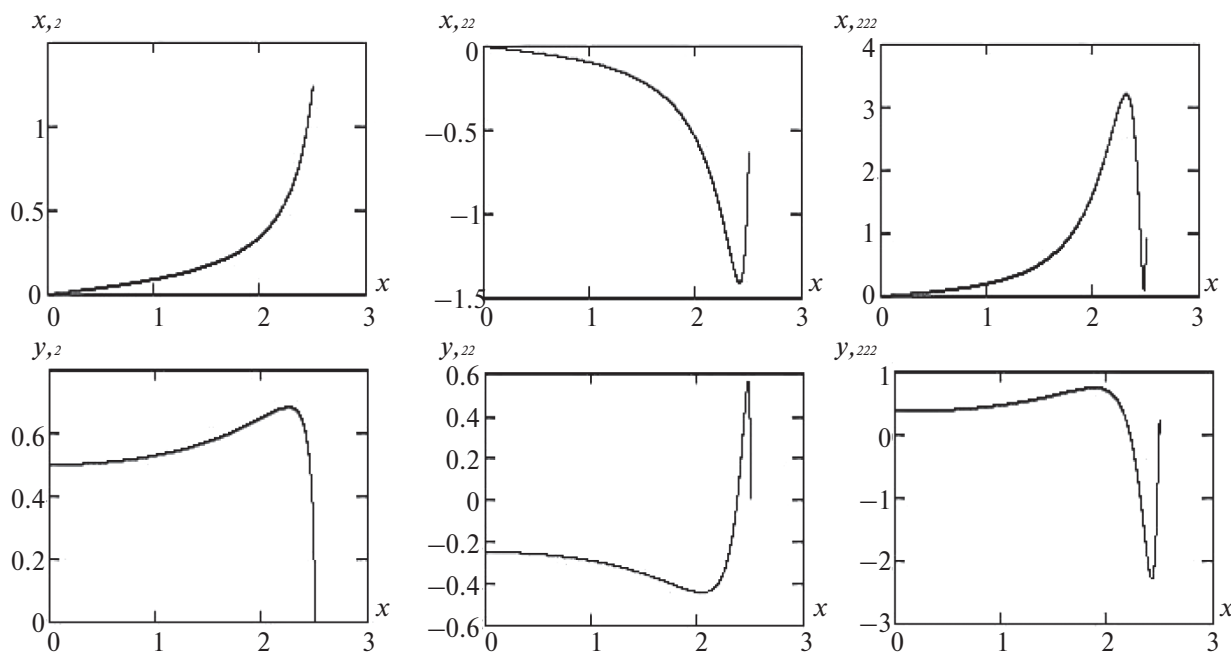


Рис. 15. Производные от x, y по x^1, x^2 для течения с эллиптическими орбитами при $\Omega = 0.16$.

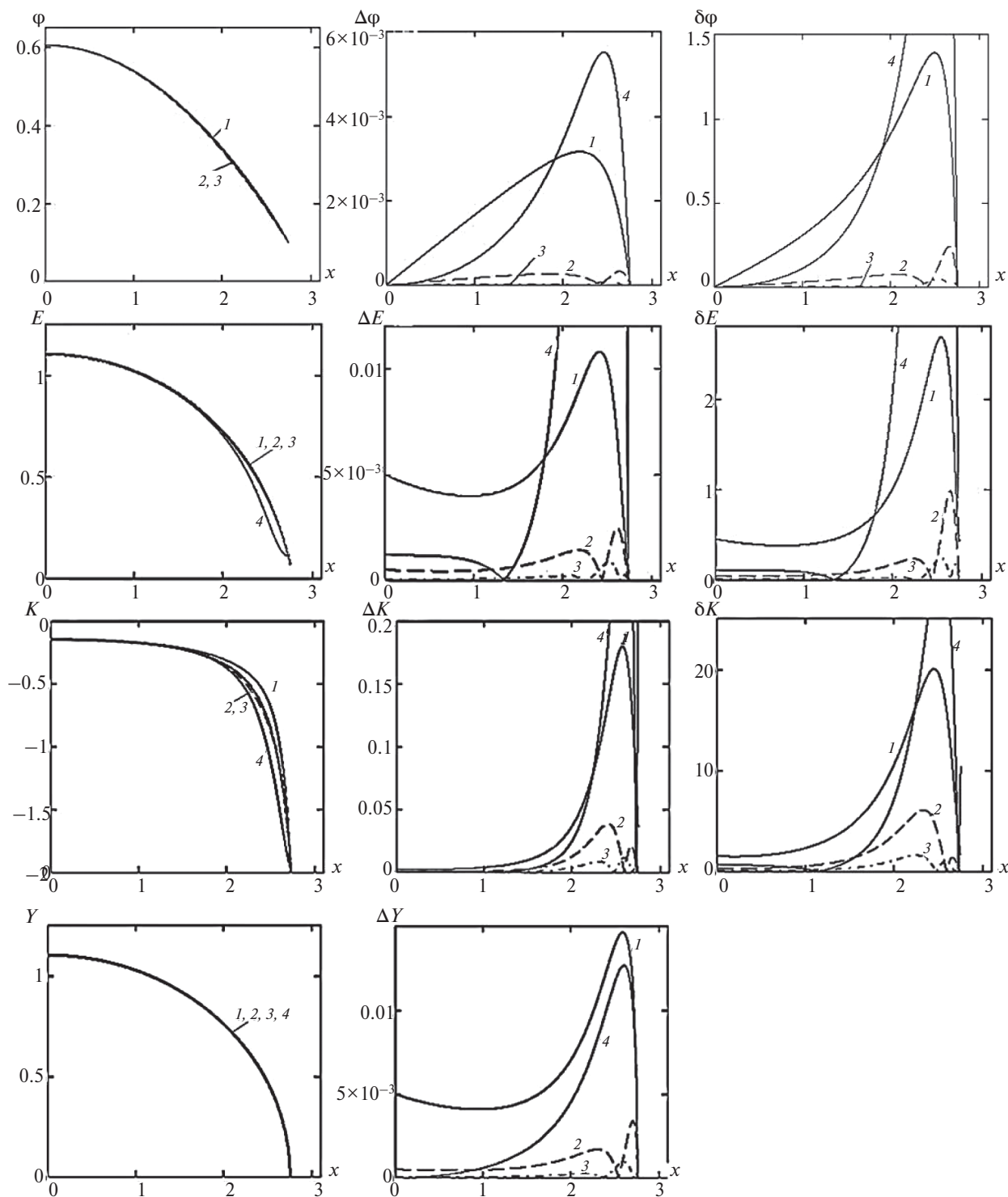


Рис. 16. Функции, характеризующие приближенные модели, для течения с эллиптическими орбитами при $\Omega = 0.16$, $f(0) = 0.1, f(a) = 0.25$; 1, 2, 3 – приближения геометриванной теории, 4 – параксиальная модель.

Все эти пучки нельзя считать узкими по принципу $f \ll L_*$, однако при вычислении потенциала параксиальная модель для четырех вариантов (59) дает ошибку $\delta\varphi \sim 7, 9, 13, 10 \%$

соответственно, с существенно меньшей точностью определяя поле и кривизну. Удвоение ширины пучка при $\bar{\Omega} = 0.16$ приводит к увеличению ошибки по φ, E, k в 12, 12 и 20 раз.

Таблица 12. Параметры течения с эллиптическими орбитами, $\bar{\Omega} = 0.16$ ($a/b = 2.5$)

$\bar{\Omega} = 0.16, \varphi_{ex0} = 0.097, E_{ex0} = 0.07, k_{ex0} = -2.273, f(0) = 0.1, f(a) = 0.25$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	3.16×10^{-3}	3.23×10^{-4}	8.23×10^{-5}	5.51×10^{-3}
x_Δ	2.167	2.628	2.501	2.45
$\varphi_{ex\Delta}$	0.289	0.141	0.185	0.202
$\varphi_{ap\Delta}$	0.286	0.141	0.185	0.207
$\delta\varphi_m$	1.39	0.24	0.049	3.10
x_δ	2.492	2.657	2.543	2.572
$\delta\varphi_\Delta$	1.09	0.23	0.046	2.73
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	0.011	2.46×10^{-3}	8.75×10^{-4}	0.11
x_Δ	2.409	2.611	2.516	2.564
$E_{ex\Delta}$	0.465	0.272	0.372	0.324
$E_{ap\Delta}$	0.476	0.274	0.371	0.214
δE_m	2.68	0.98	0.24	65.24
x_δ	2.543	2.645	2.541	2.746
δE_Δ	2.32	0.90	0.24	34.02
δE_0	0.46	0.047	6.03×10^{-3}	65.24
Δk_m	0.18	0.039	0.012	0.34
x_Δ	2.570	2.405	2.591	2.603
$k_{ex\Delta}$	-1.058	-0.679	-1.134	-1.182
$k_{ap\Delta}$	-0.878	-0.718	-1.146	-1.521
δk_m	20.0	6.09	1.63	32.03
x_δ	2.448	2.331	2.245	2.523
δk_Δ	17.00	5.67	1.04	28.76
δk_0	1.55	0.27	0.05	10.44

Таблица 13. Параметры течения с эллиптическими орбитами, $\bar{\Omega} = 0.04$ ($a/b = 5$)

$\bar{\Omega} = 0.04, \varphi_{ex0} = 0.022, E_{ex0} = 8.4 \times 10^{-3}, k_{ex0} = -4.762, f(0) = 0.05, f(a) = 0.25$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	1.07×10^{-3}	2.57×10^{-4}	7.52×10^{-5}	7.20×10^{-3}
x_Δ	4.654	5.117	5.026	5.028
$\varphi_{ex\Delta}$	0.135	0.049	0.067	0.066
$\varphi_{ap\Delta}$	0.134	0.048	0.067	0.073
$\delta\varphi_m$	1.37	0.60	0.22	13.40
x_δ	5.085	5.162	5.204	5.137
$\delta\varphi_\Delta$	0.79	0.53	0.11	10.92
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	0.023	0.016	7.26×10^{-3}	0.109
x_Δ	5.027	5.120	5.045	5.110
$E_{ex\Delta}$	0.257	0.179	0.244	0.189
$E_{ap\Delta}$	0.280	0.195	0.236	0.081
δE_m	10.34	9.75	5.88	711.11
x_δ	5.113	5.153	5.190	5.252
δE_Δ	8.91	8.91	2.98	57.35
δE_0	0	0	0	—
Δk_m	1.006	0.726	0.444	1.082
x_Δ	5.115	5.157	5.083	5.246
$k_{ex\Delta}$	-0.038	-1.910	-1.202	-4.496
$k_{ap\Delta}$	-0.439	-1.285	-1.646	-3.414
δk_m	87.13	41.27	37.70	72.94
x_δ	5.027	5.136	5.074	5.083
δk_Δ	69.63	37.99	36.92	24.07
δk_0	0.38	0.032	2.9×10^{-3}	28.44

Таблица 14. Параметры течения с эллиптическими орбитами, $\bar{\Omega} = 0.01$ ($a/b = 10$)

Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\bar{\Omega} = 0.01, \varphi_{ex0} = 5.101 \times 10^{-3}, E_{ex0} = 1.01 \times 10^{-3}, k_{ex0} = -9.901, f(0) = 0.01, f(a) = 0.1$				
$\Delta\varphi_m$	4.61×10^{-5}	8.43×10^{-6}	1.30×10^{-6}	1.22×10^{-3}
x_Δ	9.362	10.027	9.967	9.996
$\varphi_{ex\Delta}$	0.07620	0.01240	0.01830	0.01540
$\varphi_{ap\Delta}$	0.07619	0.01237	0.01832	0.01700
$\delta\varphi_m$	0.25	0.098	0.030	10.077
x_δ	0.028	10.062	10.075	10.05
$\delta\varphi_\Delta$	0.06	0.068	7.10×10^{-3}	7.94
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	8.14×10^{-3}	4.68×10^{-3}	1.71×10^{-3}	0.045
x_Δ	10.004	10.048	10.066	10.042
$E_{ex\Delta}$	0.1136	0.07340	0.0530	0.08010
$E_{ap\Delta}$	0.1218	0.07804	0.0547	0.03541
δE_m	8.46	7.05	3.86	64.88
x_δ	10.046	10.062	10.075	10.062
δE_Δ	7.16	6.38	3.23	55.80
δE_0	0	0	0	25.00
Δk_m	1.339	0.899	0.380	1.93
x_Δ	10.042	10.062	10.027	10.047
$k_{ex\Delta}$	-3.1585	-4.2897	-2.6241	-3.385
$k_{ap\Delta}$	-1.8199	-3.3909	-3.0041	-5.316
δk_m	54.02	22.74	14.70	61.91
x_δ	10.000	10.055	10.023	10.028
δk_Δ	42.38	20.95	14.48	57.02
δk_0	0.20	0	0	24.50

Точность вычисления кривизны границы является весьма жестким критерием. В трех последних вариантах (59) при указанных значениях δk потенциал и поле определяются с ошибками 0.59, 2.9 %; 0.22, 5.9 %; 0.007, 3.9 %, а отклонение приближенной траектории от точной составляет 2...3 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование точности геометризованных моделей на эталонных точных решениях как при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, так и в бескатодных вариантах, продемонстрировало превосходство этого подхода над классической параксиальной теорией. Геометризованные построения обнаруживают сходимость по приближениям и с высокой точностью (относительная ошибка — десятки доли процента) гарантируют возможность описания потоков, которые не могут быть отнесены к узким в соответствии с неравенством $f \ll L_*$, где

f — ширина пучка, L_* — характерный линейный размер задачи.

Сказанное справедливо и для разномасштабных тестовых проблем, наиболее сложных для приближенного описания, с начальной кривизной оси пучка ~ 10 при градиенте кривизны ~ 300 . Использование третьего приближения теории приводило к повышению точности, поэтому формулировка этого подхода в случаях, не рассмотренных в монографии [14] и упоминаемых в ней работах, представляется актуальной задачей.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыровой В.А. // Прикл. физика. 1997. № 2–3. С. 69.
2. Акимов П.И., Гаврилин А.А., Никитин А.П. и др. // РЭ. 2018. Т. 63. № 11. С. 1303.
3. Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В., Тореев А.И., Шаталина С.А. // РЭ. 2008. Т. 53. № 3. С. 344.

4. Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В. // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1126.
5. Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В. // РЭ. 2020. Т. 65. № 5. С. 507.
6. Сыровой В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
7. Овчаров В.Т. // РЭ. 1962. Т. 7. № 8. С. 1368.
8. Овчаров В.Т., Пензяков В.В. // РЭ. 1970. Т. 15. № 8. С. 1651.
9. Данилов В.Н. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 5. С. 3.
10. Пензяков В.В., Олейников В.И. // РЭ. 1975. Т. 20. № 5. С. 1049.
11. Сыровой В.А. // РЭ. 2008. Т. 53. № 8. С. 999.
12. Сыровой В.А. // РЭ. 2011. Т. 56. № 1. С. 111.
13. Сыровой В.А. // РЭ. 2016. Т. 61. № 7. С. 692.
14. Сыровой В.А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
15. Сыровой В.А. // РЭ. 2013. Т. 58. № 6. С. 614.
16. Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 502.
17. Сыровой В.А. // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 82.
18. Сыровой В.А. // РЭ. 2022. Т. 67. № 6. С. 615.
19. Васьковский А.В., Неганова Л.А., Сыровой В.А. // Прикл. физика. 1998. № 3–4. С. 33.
20. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
21. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2020. Т. 65. № 12. С. 1209.
22. Meltzer B. // J. Electr. Contr. 1956. V. 2. № 2. P. 118.
23. Kirstein P.T., Kino G.S. // J. Appl. Phys. 1958. V. 29. № 12. P. 1758.
24. Kirstein P.T. // J. Appl. Phys. 1958. V. 4. № 5. P. 425.
25. Meltzer B. // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62B. № 355. P. 431.

STUDYING THE ACCURACY OF GEOMETRIZED MODELS OF RIBBON ELECTRON BEAMS

T. M. Saproнова, V. A. Syrovoy*

*All-Russian Electrotechnical Institute – branch of the Russian Federal Nuclear Center All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics named after academician E.I. Zababakhin,
Krasnokazarmennaya Str., 12, Moscow, 111250 Russia
E-mail: red@cplire.ru

Received July 12, 2022; revised July 12, 2022; accepted August 27, 2022

Using a set of standard exact solutions described by ordinary differential equations and elementary functions, geometrized models of plane electron beams in I -, and W -representations were studied. A comparison is made of the capabilities of the geometrized approach and the paraxial theory.

Keywords: plane electron beams, geometrized models, reference exact solutions, geometrized approach, paraxial theory

НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 621.3.049.774.2

АНАЛИЗ ПАССИВНОГО СМЕСИТЕЛЯ ЧАСТОТ С УПРАВЛЕНИЕМ ПО ТОКУ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЗАЩИТНЫХ ИНТЕРВАЛОВ СИГНАЛОВ ГЕТЕРОДИНА

© 2024 г. Т. Д. Чан, А. С. Коротков*

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, 195251 Российская Федерация*

**E-mail: korotkov@spbstu.ru*

Поступила в редакцию 03.10.2022 г.

После доработки 15.03.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Предложена обобщенная методика анализа схемы пассивного смесителя частот с управлением по току при использовании защитных интервалов между соседними импульсами сигналов гетеродина. Приведены результаты расчета и моделирования в среде Micro-Cap для двух случаев входного импеданса смесителя: RLC -контур, RC -цепь. Рассмотрены зависимости модуля передаточного импеданса смесителя для различных длительностей защитных интервалов.

Ключевые слова: пассивный смеситель частот, гетеродин, модуль передаточного смесителя, защитный интервал

DOI: 10.31857/S0033849424030085, **EDN:** JUYVNY

ВВЕДЕНИЕ

Благодаря высокой линейности и низким шумам пассивные смесители с управлением по току применяются в многофункциональных и многодиапазонных приемо-передающих устройствах [1–4]. В гомодинном приемнике с преобразованием сигнала в основной полосе частот после усиления на радиочастоте на постоянный ток шум смесителя ухудшает отношение сигнал/шум и, как следствие, общий коэффициент шума приемника также ухудшается. Пассивные смесители имеют низкие фликкерные шумы, поскольку постоянный ток через ключи не протекает. Однако белый и фликкерный шумы транскондуктивного усилителя преселектора, который усиливает сигнал в основной полосе частот, могут появляться на выходе смесителя во время перекрытия импульсов сигнала гетеродина. Кроме того, ключи (транзисторы в ключевом режиме) вносят белый шум в выходной сигнал смесителя также во время перекрытия импульсов сигналов гетеродина, когда ключи закрыты [5, 6]. Определенным недостатком схемы пассивного смесителя при использовании в гомодинном приемнике является появ-

ление интермодуляционных искажений второго порядка. Хотя использование балансных схем позволяет устранить нелинейные гармоники четного порядка, рассогласование параметров между транзисторами в ключах по-прежнему вызывает просачивание интермодуляционных составляющих на выход. В [7] показано, что просачивание входного сигнала в цепь гетеродина и рассогласование между ключами создают интермодуляционную гармонику второго порядка на выходе смесителя только во время перекрытия импульсов сигналов гетеродина. На практике импульсы сигналов гетеродина не могут следовать без перекрытий, как теоретически предположено в работе [8], из-за рассогласования параметров элементов в цепи гетеродина. В данной работе предлагается ввести защитные интервалы, т.е. промежутки времени, в течение которых сигналы отсутствуют, между соседними импульсами сигналов гетеродина для устранения возможного перекрытия.

Цель работы — анализ схемы пассивного смесителя с управлением по току с защитными интервалами сигналов гетеродина.

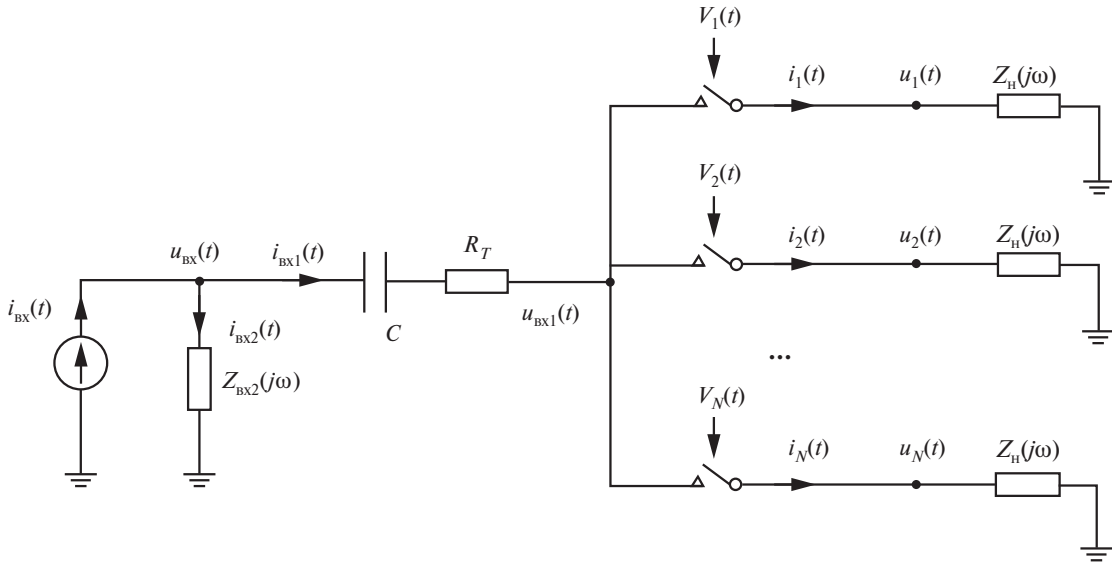


Рис. 1. Структурная схема переключаемой части пассивного смесителя частот с управлением по току: $i_{\text{BX}}(t)$ — независимый входной ток, $u_{\text{BX}}(t)$ — входное напряжение, $Z_{\text{BX}}(j\omega)$ — входной импеданс, $Z_{\text{H}}(j\omega)$ — импеданс цепи нагрузки, $i_{\text{BX1}}(t)$ — ток, поступающий в переключаемую часть смесителя, $i_k(t)$ — ток, протекающий через k -е плечо, $i_{\text{BX2}}(t)$ — ток, протекающий через входной импеданс, $u_k(t)$ — напряжение на k -м плече, C — разделительный конденсатор.

1. АНАЛИЗ СХЕМЫ СМЕСИТЕЛЯ С ЗАЩИТНЫМИ ИНТЕРВАЛАМИ

1.1. Система уравнений для расчета входного тока $I_{\text{ex}}(j\omega)$

Структурная схема переключаемой части пассивного смесителя частот с управлением по току с защитными интервалами представлена на рис. 1.

В отличие от идеализированной схемы, рассмотренной в [8], введены защитные интервалы между соседними импульсами сигналов гетеродина $V_{0k}(t)$. Относительная длительность интервалов составляет $\tau = t_0 N / T_r$, где t_0 — абсолютная длительность защитного интервала, N — число плеч, T_r — период сигнала гетеродина. На рис. 2 представлена нормированная управляющая функция k -го ключа $V_k(t) = V_{0k}(t) / V_0$, где V_0 — максимальное значение сигнала гетеродина, причем

$$V_k(t) = 1, t \in \left[(v + (k-1)/N)T_r, (v + (k-1 + \tau)/N)T_r \right],$$

$$V_k(t) = 0, t \notin \left[(v + (k-1)/N)T_r, (v + (k-1 + \tau)/N)T_r \right],$$

$$v \in Z.$$

Разложим функцию $V_k(t)$ в ряд Фурье

$$V_k(t) = \frac{a_{0,k}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n,k} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right),$$

где коэффициенты определены как

$$a_{0,k} = \frac{2}{T_r} \int_0^{T_r} V_k(t) dt = \frac{2\tau}{N},$$

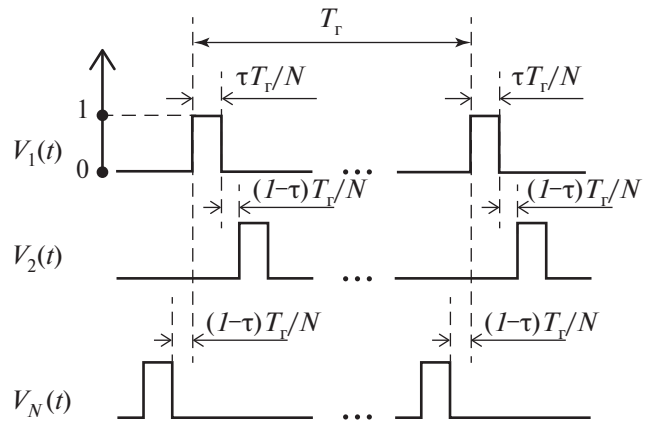


Рис. 2. Нормированная управляющая функция k -го ключа $V_k(t)$.

$$a_{n,k} = \frac{2}{T_r} \int_0^{T_r} V_k(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{N}\right) \cos\left(\frac{n\pi((2k-2+\tau))}{N}\right),$$

$$b_{n,k} = \frac{2}{T_r} \int_0^{T_r} V_k(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{N}\right) \sin\left(\frac{n\pi(2k-2+\tau)}{N}\right).$$

Тогда функция $V_k(t)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} V_k(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_{n,k} + jb_{n,k}) \exp(-jn\omega_r t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(j\varphi_{n,k}) \exp(-jn\omega_r t), \end{aligned}$$

где

$$A_n = \frac{\tau}{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi\tau}{N}\right), \varphi_{n,k} = \frac{n\pi(2k-2+\tau)}{N}.$$

Используя методику анализа и расчета передаточного импеданса пассивного смесителя частот с управлением по току [8], получим преобразование Фурье для тока $i_k(t)$:

$$I_k(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(j\varphi_{n,k}) I_{\text{BX1}}(j\omega + nj\omega_r).$$

Номер коэффициента n показывает, во сколько раз по сравнению с $I_{\text{BX1}}(j\omega)$ частотный сдвиг для тока $I_{\text{BX1}}(j\omega + n\omega_r)$ превышает ω_r . Таким образом, преобразование Фурье для $i_k(t)$ является суммой преобразований Фурье для $i_{\text{BX1}}(t)$ с частотными сдвигами $n\omega_r$ и соответствующими весовыми коэффициентами. При этом преобразование Фурье $U_k(j\omega)$ напряжения k -го плеча $u_k(t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} U_k(j\omega) &= Z_H(j\omega) I_k(j\omega) = \\ &= Z_H(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(j\varphi_{n,k}) I_{\text{BX1}}(j\omega + nj\omega_r). \end{aligned} \quad (1)$$

В течение защитных интервалов все ключи разомкнуты. Следовательно, в этих отрезках времени напряжение $u_{\text{BX1}}(t)$ равно входному напряжению $u_{\text{BX}}(t)$. Это значит, что $u_{\text{BX1}}(t) = u_k(t)$ при $V_k(t) = 1$, $u_{\text{BX1}}(t) = u_{\text{BX}}(t)$ при $V_k(t) = 0$ для всех k . Таким образом, напряжение $u_{\text{BX1}}(t)$ составляет

$$u_{\text{BX1}}(t) = u_{\text{BX}}(t) V_{\text{BX}}(t) + \sum_{k=1}^N u_k(t) V_k(t), \quad (2)$$

где $V_{\text{BX}}(t)$ – нормированная управляющая функция входного напряжения $u_{\text{BX1}}(t)$, причем

$$\begin{aligned} V_{\text{BX}}(t) &= 1, \quad t \in [(h+\tau)T_r/N, (h+1)T_r/N], \\ V_{\text{BX}}(t) &= 0, \quad t \notin [(h+\tau)T_r/N, (h+1)T_r/N], \quad h \in Z. \end{aligned}$$

Нормировочная функция $V_{\text{BX}}(t)$ представлена на рис. 3.

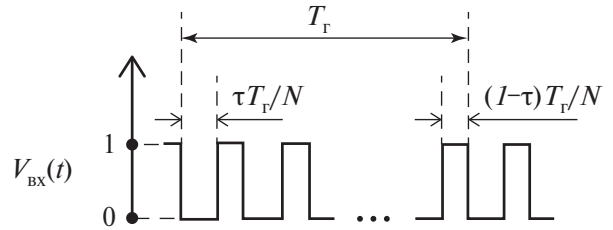


Рис. 3. Нормированная управляющая функция $V_{\text{BX}}(t)$.

Разложим функцию $V_{\text{BX}}(t)$ в ряд Фурье:

$$V_{\text{BX}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cos\left(\frac{2pN\pi t}{T_r}\right) + \sum_{p=1}^{+\infty} b_p \sin\left(\frac{2pN\pi t}{T_r}\right),$$

где коэффициенты определены как

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_r/N} \int_0^{T_r/N} V_{\text{BX}}(t) dt = 2(1-\tau), \\ a_p &= \frac{2}{T_r/N} \int_0^{T_r/N} V_{\text{BX}}(t) \cos\left(\frac{2pN\pi t}{T_r}\right) dt = \\ &= -\frac{2}{p\pi} \sin(p\pi\tau) \cos(p\pi\tau), \\ b_p &= \frac{2}{T_r/N} \int_0^{T_r/N} V_{\text{BX}}(t) \sin\left(\frac{2pN\pi t}{T_r}\right) dt = \\ &= -\frac{2}{p\pi} \sin(p\pi\tau) \sin(p\pi\tau). \end{aligned}$$

Функция $V_{\text{BX}}(t)$ в более общем виде представляется в виде

$$\begin{aligned} V_{\text{BX}}(t) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_p + jb_p) \exp(-jpN\omega_r t) = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_p \exp(-jpN\omega_r t), \end{aligned}$$

где

$$B_p = -\tau \operatorname{sinc}(p\pi\tau) \exp(jp\pi\tau), \quad p \neq 0, B_p = 1 - \tau, \quad p = 0.$$

Применив преобразование Фурье для выражения (2), получим

$$\begin{aligned} U_{\text{BX1}}(j\omega) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_p U_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r) + \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp(j\varphi_{m,k}) U_k(j\omega + mj\omega_r). \end{aligned} \quad (3)$$

Номер коэффициента m показывает, во сколько раз по сравнению с $U_k(j\omega)$ частотный

сдвиг для напряжения $U_k(j\omega + mj\omega_r)$ превышает ω_r , номер коэффициента p показывает, во сколько раз по сравнению с $U_{\text{BX}}(j\omega)$ и $I_{\text{BX1}}(j\omega)$ частотный сдвиг для тока $U_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r)$ и $I_{\text{BX1}}(j\omega + pNj\omega_r)$

больше, чем для $N\omega_r$ соответственно. Согласно схеме рис. 1 входные токи и напряжения связаны соотношением

$$U_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r) = [I_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r) - I_{\text{BX1}}(j\omega + pNj\omega_r)]Z_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r).$$

Вместе с тем в соответствии с [8] получим

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp(j\phi_{m,k}) U_k(j\omega + mj\omega_r) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[N \exp(jp\pi\tau) I_{\text{BX1}}(j\omega + pNj\omega_r) \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m A_{pN-m} Z_{\text{H}}(j\omega + mj\omega_r) \right].$$

Откуда следует, что выражение (3) представляется в виде

$$U_{\text{BX1}}(j\omega) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_p [I_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r) - I_{\text{BX1}}(j\omega + pNj\omega_r)] Z_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[N \exp(jp\pi\tau) I_{\text{BX1}}(j\omega + pNj\omega_r) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m A_{pN-m} Z_{\text{H}}(j\omega + mj\omega_r) \right]. \quad (4)$$

Учитывая, что

$$U_{\text{BX1}}(j\omega) = [I_{\text{BX}}(j\omega) - I_{\text{BX1}}(j\omega)] Z_{\text{BX}}(j\omega) - I_{\text{BX1}}(j\omega)(R_{\text{T}} + Z_{\text{C}}(j\omega)), \quad (5)$$

из (4) и (5) следует

$$\begin{aligned} & I_{\text{BX1}}(j\omega) [Z_{\text{BX}}(j\omega) + R_{\text{T}} + Z_{\text{C}}(j\omega)] + \\ & + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[N \exp(jp\pi\tau) I_{\text{BX1}}(j\omega + pNj\omega_r) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m A_{pN-m} Z_{\text{H}}(j\omega + mj\omega_r) \right] - \\ & - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_p I_{\text{BX1}}(j\omega + pNj\omega_r) Z_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r) = \\ & = I_{\text{BX}}(j\omega) Z_{\text{BX}}(j\omega) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_p I_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r) Z_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_r). \end{aligned} \quad (6)$$

Если входной ток представлен как комплексный экспоненциальный сигнал $i_{\text{BX}}(t) = I_{\text{BX}} \exp(j\omega_{\text{BX}} t)$ с амплитудой I_{BX} и частотой ω_{BX} , то ток $I_{\text{BX1}}(j\omega)$ описывается составляющими на частотах $\omega_{\text{BX}} + rN\omega_r$, где целое число r характеризует частотный сдвиг $rN\omega_r$ данных составляющих по сравнению с основной составляющей на частоте ω_{BX} . Тогда для всего множества значений r имеем систему уравнений ма-

тричного вида относительно комплексного сигнала входного тока:

$$(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3) \mathbf{I}_{\text{BX1}} = \begin{bmatrix} \dots \\ -B_{-1} \\ 1 - B_0 \\ -B_1 \\ \dots \end{bmatrix} Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}), \quad (7)$$

где

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Z_1(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_r) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & Z_1(j\omega_{\text{BX}}) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & Z_1(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_r) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_2 &= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Q_1(0, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q_1(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q_1(-2, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & Q_1(1, \omega_{\text{BX}}) & Q_1(0, \omega_{\text{BX}}) & Q_1(-1, \omega_{\text{BX}}) & \dots \\ \dots & Q_1(2, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q_1(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q_1(0, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \\
\mathbf{M}_3 &= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Q_2(0, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q_2(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q_2(-2, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & Q_2(1, \omega_{\text{BX}}) & Q_2(0, \omega_{\text{BX}}) & Q_2(-1, \omega_{\text{BX}}) & \dots \\ \dots & Q_2(2, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q_2(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q_2(0, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{\text{BX1}} = \begin{bmatrix} \dots \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_{\Gamma}) \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}}) \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_{\Gamma}) \\ \dots \end{bmatrix}, \\
Q_1(p, \omega) &= \left\{ \frac{N \exp(jp\pi\tau) \sin[(a - pN)\pi\tau/N] \sin[(1 - \tau/N)\pi a]}{\pi(pN - a) \sin(\pi a)} + \tau \text{sinc}(p\pi\tau) \exp(jp\pi\tau) \right\} Z_{\text{H}}(j\omega), \\
a &= -\frac{1 + j\omega C_{\text{H}} R_{\text{H}}}{j\omega_{\Gamma} C_{\text{H}} R_{\text{H}}}, \quad Z_1(j\omega) = Z_{\text{BX}}(j\omega) + R_{\Gamma} + Z_{\text{C}}(j\omega), \quad Q_2(p, \omega) = B_p Z_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_{\Gamma}).
\end{aligned}$$

Из (7) видно, что если нет защитных интервалов, т.е. $\tau = 1$, то $B_p = 0$ и $Q_2(p, \omega) = 0$ для всех p и ω . При этом система (7) совпадает с системой уравнений (11) в [8].

1.2. Расчет передаточного импеданса смесителя при входном импедансе как RLC-контуре

Решим систему уравнений (7) для случая, когда входной импеданс $Z_{\text{BX}}(j\omega)$ является параллельным RLC-контуром. Значения элементов контура L_{BX} и C_{BX} выбираются так, чтобы контур был настроен на входную частоту ω_{BX} . Это зна-

чит, что $j\omega_{\text{BX}} C_{\text{BX}} + 1/(j\omega_{\text{BX}} L_{\text{BX}}) = 0$ и, следовательно, $Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) = R_{\text{BX}}$. При этом $|Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})|$ много больше, чем $|Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + pNj\omega_{\Gamma})|$, где $p \neq 0$, который рассчитан по следующей формуле:

$$|Z_{\text{BX}}(j\omega)| = \left| \frac{1}{1/R_{\text{BX}} + j\omega C_{\text{BX}} + 1/(j\omega L_{\text{BX}})} \right|.$$

В этом случае пренебрежем в матрице $\mathbf{M}_3$ импедансом $Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + pNj\omega_{\Gamma})$, где $p \neq 0$. Таким образом,

$$\mathbf{M}_3 \approx \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & Q_2(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & Q_2(0, \omega_{\text{BX}}) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & Q_2(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & B_{-1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & B_0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & B_1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}).$$

Рассмотрим случай, когда нагрузка является параллельной RC-цепью (резистор R_{H} и конденсатор C_{H} соединены параллельно).

Тогда, если учесть, что $|Z_{\text{H}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma})|$ много меньше, чем $|Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})|$, то матрица $\mathbf{M}_2$ примет вид

$$\mathbf{M}_2 \approx \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Q_1(0, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q_1(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & Q_1(0, \omega_{\text{BX}}) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & Q_1(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q_1(0, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

При этих приближениях система уравнений (7) преобразуется к выражению

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Z_2(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_{\Gamma}) & Z_3(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & Z_2(j\omega_{\text{BX}}) - B_0 Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & Z_3(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Z_2(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \mathbf{I}_{\text{BX1}} = \begin{pmatrix} \dots \\ -B_{-1} \\ 1 - B_0 \\ -B_1 \\ \dots \end{pmatrix} Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}),$$

где

$$Z_2(j\omega) = Z_1(j\omega) + Q_1(0, \omega), Z_3(p, \omega) = -B_p Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) + Q_1(p, \omega).$$

Решение этой системы уравнений получаем по формуле

$$\mathbf{I}_{\text{BX1}} = \frac{Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{Z_2(j\omega_{\text{BX}}) - B_0 Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})} \times \begin{pmatrix} \dots \\ \frac{-B_{-1} [Z_2(j\omega_{\text{BX}}) - Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})] - (1 - B_0) Q_1(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma})}{Z_2(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_{\Gamma})} \\ 1 - B_0 \\ \frac{-B_1 [Z_2(j\omega_{\text{BX}}) - Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})] - (1 - B_0) Q_1(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma})}{Z_2(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_{\Gamma})} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (8)$$

Если нет защитных интервалов, т.е. $\tau = 1$, то $B_r = 0$ для всех r . Тогда решение (8) упрощается:

$$\mathbf{I}_{\text{BX1}} = \frac{Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{Z_2(j\omega_{\text{BX}})} \times \begin{pmatrix} \dots \\ \frac{-Q_1(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma})}{Z_2(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_{\Gamma})} \\ 1 \\ \frac{-Q_1(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma})}{Z_2(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_{\Gamma})} \\ \dots \end{pmatrix} = \frac{Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{Z_2(j\omega_{\text{BX}})} \times \begin{pmatrix} \dots \\ -c \\ \frac{(b + N)Z_2(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_{\Gamma})}{1} \\ 1 \\ \frac{-c}{(b - N)Z_2(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_{\Gamma})} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$c = \frac{jN \sin(b(\pi - \pi/N)) \sin(b\pi/N)}{\pi \omega_{\Gamma} C_{\text{H}} \sin(b\pi)}.$$

Поскольку параметры $|g| \ll 1$ и $b \approx 1$, то $1 + g \approx 1$, $b + pN \approx 1 + pN$. При этих приближениях

решение (9) совпадает с решением системы уравнений (11) в [8].

Из (1) выходное напряжение на первом плече при $k = 1$ на промежуточной частоте $\omega_{\text{пч}} = \omega_{\text{BX}} - \omega_{\Gamma}$ определяется выражением

$$U_1(j\omega_{\text{BX}} - j\omega_{\Gamma}) = Z_{\text{H}}(j\omega_{\text{BX}} - j\omega_{\Gamma}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp\left(j \frac{n\pi\tau}{N}\right) I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + (n-1)j\omega_{\Gamma}).$$

Ток $I_{\text{BX1}}(j\omega)$ состоит из составляющих на частотах $\omega = \omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}$, поэтому $n - 1 = rN$. Следовательно,

$$U_1(j\omega_{\text{BX}} - j\omega_{\Gamma}) = Z_{\text{H}}(j\omega_{\text{BX}} - j\omega_{\Gamma}) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_{rN+1} \exp\left(j \frac{(rN+1)\pi\tau}{N}\right) I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}). \quad (10)$$

Для подавления комбинационных гармоник на выходе используется цепь компенсации гармоник на основе сумматора и фазовращателей, показанная в [8]. На сумматор выходное напряжение

в k -м плече добавляется с весовым коэффициентом $K_{\text{в}}$ и с фазой $\phi_k = \phi_0 - 2\pi k/N$, где ϕ_0 — начальный сдвиг фазы. Из (9) и (10) получим выражение для передаточного импеданса смесителя:

$$Z_{\text{см}} = \frac{U_1(j\omega_{\text{BX}} - j\omega_{\Gamma})NK_{\text{B}} \exp(j\phi_0)}{I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})} = \frac{Z_{\text{H}}(j\omega_{\text{BX}} - j\omega_{\Gamma})Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})NK_{\text{B}} \exp(j\phi_0)}{Z_2(j\omega_{\text{BX}}) - B_0 Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})} \times$$

$$\times \left[\left(1 - B_0 + \frac{B_0 [Z_2(j\omega_{\text{BX}}) - Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})] + (1 - B_0)Q_1(0, \omega_{\text{BX}})}{Z_2(j\omega_{\text{BX}})} \right) A_1 \exp\left(j \frac{\pi\tau}{N}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_{rN+1} \exp\left(j \frac{(rN+1)\pi\tau}{N}\right) \frac{B_{-r} (Z_2(j\omega_{\text{BX}}) - Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})) + (1 - B_0)Q_1(-r, \omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma})}{Z_2(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma})} \right].$$

1.3. Расчет передаточного импеданса смесителя при входном импедансе как RC-цепи

Решим систему уравнений (7) для случая, когда входной импеданс $Z_{\text{BX}}(j\omega)$ является параллельной RC-цепью. Входные токи и напряжения связаны соотношением

$$U_{\text{BX}}(j\omega) = I_{\text{BX}2}(j\omega)Z_{\text{BX}}(j\omega) = (I_{\text{BX}}(j\omega) - I_{\text{BX}1}(j\omega))Z_{\text{BX}}(j\omega). \quad (11)$$

Как правило, внутреннее сопротивление ключа в открытом состоянии R_{Γ} составляет сотни ом. Вместе с тем, модуль импеданса RC-цепи на входе смесителя, настроенной на частоту f_{BX}

в диапазоне гигагерц, имеет модуль импеданса менее 10 Ом. Поэтому сопротивление R_{Γ} много больше, чем модуль импеданса входной RC-цепи. Следовательно, даже в случае достаточно большой емкости разделительного конденсатора $C_{\text{ток}}$ $I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})$ много больше, чем $I_{\text{BX}1}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma})$. Тогда входное напряжение $U_{\text{BX}}(j\omega)$ считается неизменным при незначительном изменении защитного интервала. Однако RC-цепь является частотно-избирательной, поэтому будем считать, что входное напряжение $U_{\text{BX}}(j\omega)$ состоит из одной составляющей на входной частоте ω_{BX} .

Выражение (6) с учетом (11) представляется следующим образом:

$$I_{\text{BX}1}(j\omega)[Z_{\text{BX}}(j\omega) + R_{\Gamma} + Z_{\text{C}}(j\omega)] + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[Ne^{jp\pi\tau} I_{\text{BX}1}(j\omega + pNj\omega_{\Gamma}) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m A_{pN-m} Z_{\text{H}}(j\omega + mj\omega_{\Gamma}) \right] =$$

$$= I_{\text{BX}}(j\omega)Z_{\text{BX}}(j\omega) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_p U_{\text{BX}}(j\omega + pNj\omega_{\Gamma}).$$

При этом для всего множества значений r имеем систему уравнений матричного вида

$$(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)\mathbf{I}_{\text{BX}1} = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 0 & \dots \\ Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_{-1} \\ B_0 \\ B_1 \\ \dots \end{vmatrix} \times U_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) \quad (12)$$

Для решения уравнения (12) следует найти обратную матрицу суммы матриц $(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)$. По теореме, приведенной в [9], для обращения необходимо преобразовать матрицу $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ к виду суммы $\mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_5$, где $\mathbf{M}_4$ — диагональная матрица, $\mathbf{M}_5$ — матрица, ранг которой равен 1. Для этого представим $\mathbf{M}_4$ и $\mathbf{M}_5$ как

$$\mathbf{M}_4 = \mathbf{M}_1 + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Q_3(0, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q_3(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q_3(-2, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & Q_3(1, \omega_{\text{BX}}) & Q_3(0, \omega_{\text{BX}}) & Q_3(-1, \omega_{\text{BX}}) & \dots \\ \dots & Q_3(2, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q_3(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q_3(0, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Q_4(\omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & Q_4(\omega_{\text{BX}}) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & Q_4(\omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

$$Q_3(p, \omega) = \tau \text{sinc}(p\pi\tau) \exp(jp\pi\tau) Z_H(j\omega), \quad Q_4(\omega) = Q_3(0, \omega) + Z_1(j\omega),$$

$$\mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Q_5(0, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q_5(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q_5(-2, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & Q_5(1, \omega_{\text{BX}}) & Q_5(0, \omega_{\text{BX}}) & Q_5(-1, \omega_{\text{BX}}) & \dots \\ \dots & Q_5(2, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q_5(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q_5(0, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$Q_5(p, \omega) = \frac{N \exp(jp\pi\tau) \sin[(a - pN)\pi\tau/N] \sin[(1 - \tau/N)\pi a]}{\pi(pN - a) \sin(\pi a)} Z_H(j\omega).$$

Применив теорему из [9], найдем обратную матрицу $(\mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_5)$ и получим решение системы уравнений (12):

$$I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}}) = \frac{I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) - B_0 U_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{Q_4(\omega_{\text{BX}})} -$$

$$- \frac{Q_5(0, \omega_{\text{BX}}) I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{(1 + g_1) Q_4^2(\omega_{\text{BX}})} + \frac{U_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{1 + g_1} \sum_{w=-\infty}^{+\infty} \frac{B_{-w} Q_5(w, \omega_{\text{BX}})}{Q_4(\omega_{\text{BX}} + wN\omega_{\Gamma}) Q_4(\omega_{\text{BX}})}, \quad (13)$$

$$I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}) = \frac{-B_{-r} U_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{Q_4(\omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma})} -$$

$$- \frac{Q_5(-r, \omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma}) I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{(1 + g_1) Q_4(\omega_{\text{BX}}) Q_4(\omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma})} + \frac{U_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{1 + g_1} \sum_{w=-\infty}^{+\infty} \frac{B_{-w} Q_5(w - r, \omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma})}{Q_4(\omega_{\text{BX}} + wN\omega_{\Gamma}) Q_4(\omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma})}, \quad (14)$$

где

$$g_1 = \sum_{w=-\infty}^{+\infty} \frac{Q_5(0, \omega_{\text{BX}} + wN\omega_{\Gamma})}{Q_4(\omega_{\text{BX}} + wN\omega_{\Gamma})}.$$

Входное напряжение $U_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})$ рассчитано по методике, изложенной в [8]. Рассмотрим полученное решение для случая, когда нет защитных интервалов, т.е. при $\tau = 1$. Тогда $B_p = 0$ для всех p . Причем

$$Q_5(-r, \omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma}) = \frac{c}{rN + b},$$

$$Q_5(0, \omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma}) = \frac{c}{(rN + b)^2},$$

$$Q_4(\omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma}) = Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}) + R_{\Gamma} +$$

$$+ Z_C(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}) + Z_H(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}),$$

где

$$b = (1 + j\omega_{\text{BX}} R_{\text{H}} C_{\text{H}}) / (j\omega_{\Gamma} R_{\text{H}} C_{\text{H}}).$$

При этом выражения (13) и (14) совпадают с решением системы уравнений (11) в [8].

Для подавления комбинационных гармоник на выходе смесителя также используется схема

компенсации, рассмотренная в разд. 1.1. Выражение для передаточного импеданса смесителя в данном случае рассчитывается по формуле

$$Z_{\text{CM}} = \frac{U_1(j\omega_{\text{BX}} - j\omega_{\Gamma}) N K_{\text{B}} \exp(j\varphi_0)}{I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})} =$$

$$= Z_H(j\omega_{\text{BX}} - j\omega_{\Gamma}) N K_{\text{B}} \exp(j\varphi_0) \times$$

$$\times \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_{rN+1} \exp\left(j \frac{(rN + 1)\pi\tau}{N}\right) \frac{I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma})}{I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}.$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА И МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании схемы пассивного смесителя с RLC -контуром входного импеданса задаются следующие параметры: амплитуда входного тока $i_{\text{BX}}(t)$ 1 мА с частотой $f_{\text{BX}} = 2.1$ ГГц; нагрузкой в каждом плече является параллельная RC -цепь, причем $R_{\text{H}} = 500$ Ом, $C_{\text{H}} = 10$ пФ; входной импеданс также является параллельной RLC -цепью, причем $R_{\text{BX}} = 500$ Ом, $C_{\text{BX}} = 2.87$ пФ, $L_{\text{BX}} = 2$ нГ; сопротивление ключа в открытом состоянии $R_{\Gamma} = 100$ Ом; число плеч $N = 4$; разделительный конденсатор $C = 10$ пФ. Частота гетеродина со-

ставляет $f_T = 2.0$ ГГц. Результат моделирования и расчета модуля передаточного импеданса смесителя для различных значений τ показан на рис. 4. Ошибка между моделированием и расчетом составляет менее 0.8 %. По результатам исследования влияния защитного интервала на значения $|Z_{cm}|$ рекомендуется выбирать значение τ от 0.7 до 1.0. При этом $|Z_{cm}|$ изменяется не более 0.02 дБ от его значения при $\tau = 1$.

При моделировании схемы пассивного смесителя с входным импедансом в виде параллельной RC -цепи используются значения $R_{вх} = 500$ Ом, $C_{вх} = 10$ пФ. Остальные элементы и параметры схемы соответствуют случаю RLC -контура. Результат моделирования и расчета модуля передаточного импеданса смесителя для различных значений τ показан на рис. 5.

Ошибка между моделированием и расчетом для данного случая составляет менее 5 %. По результатам исследования влияния защитного интервала на значения $|Z_{cm}|$ рекомендуется выбирать значение τ от 0.8 до 1.0. При этом $|Z_{cm}|$ изменяется не более 1.2 дБ от его значения при $\tau = 1$. Однако $|Z_{cm}|$ для случая RC -цепи входного импеданса в 13...15 раз меньше, чем для случая RLC -контура в данном диапазоне τ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исследована схема пассивного смесителя с управлением по току при использовании защитных интервалов τ между соседними импульсами сигнала гетеродина для двух случаев входного импеданса: RLC -контур, RC -цепь. Моделирование схемы смесителя в среде

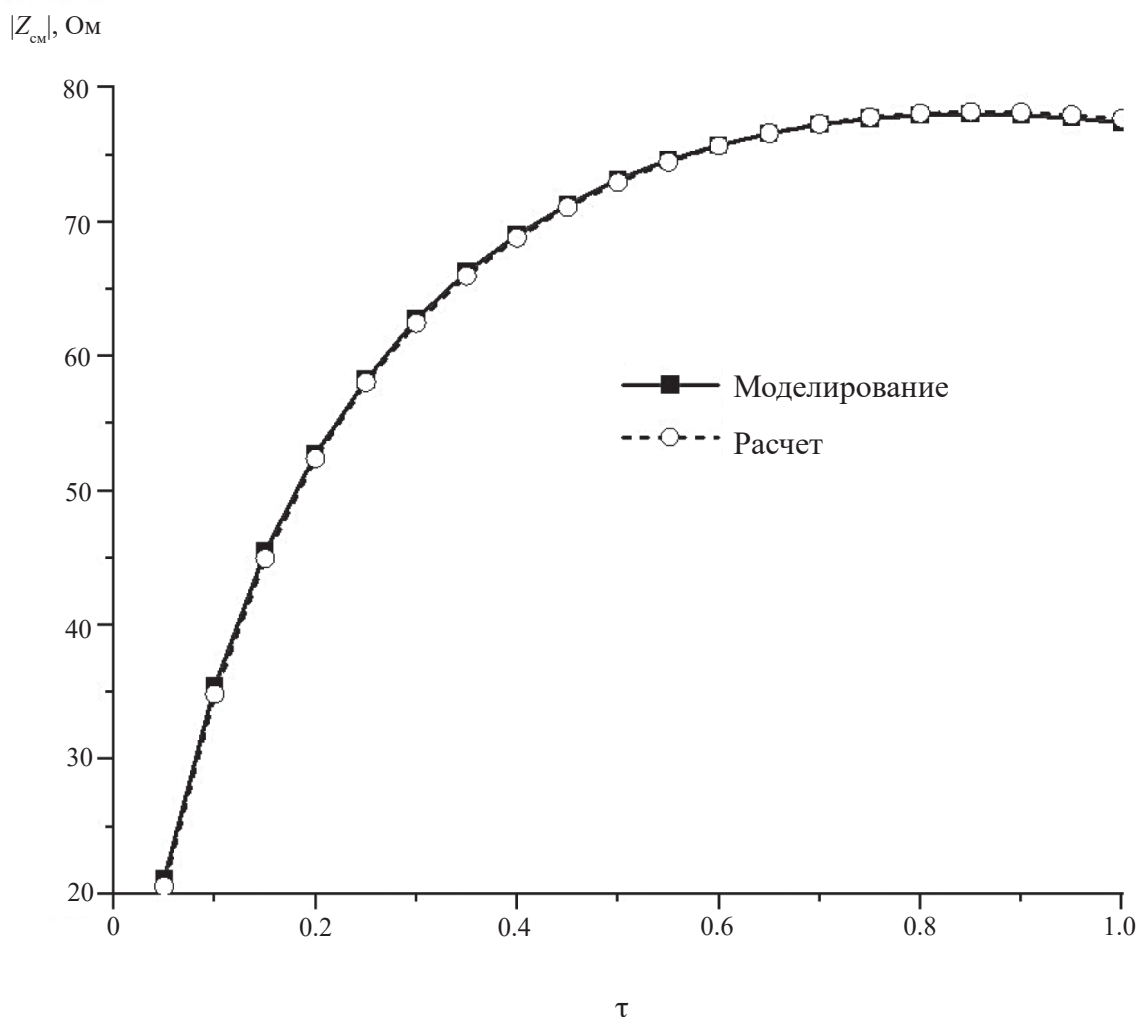


Рис. 4. Зависимость модуля передаточного импеданса смесителя $|Z_{cm}|$ от τ для случая RLC -контура входного импеданса.

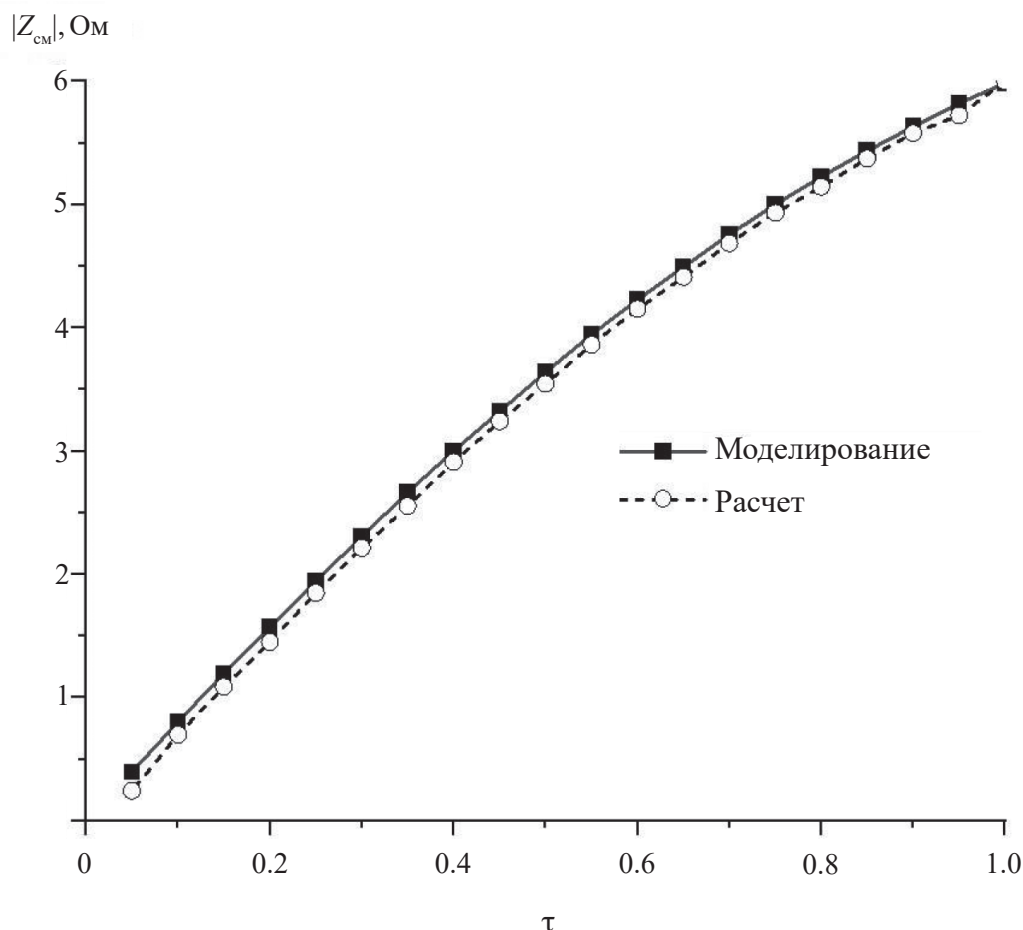


Рис. 5. Зависимость модуля передаточного импеданса смесителя $|Z_{cm}|$ от τ для случая RC -цепи входного импеданса.

Micro-Cap подтвердило справедливость полученных результатов. По результатам исследования рекомендуется выбирать значения $\tau = 0.7 \dots 1.0$ для случая RLC -контура и $0.8 \dots 1.0$ для случая RC -цепи. При этих значениях функция $|Z_{cm}|$ уменьшается от значения при $\tau = 1$ не более 0.02 и 1.2 дБ соответственно. Значение неравномерности функции $|Z_{cm}|$ при изменении защитного интервала τ в рекомендованных диапазонах меньше для случая RLC -контура, чем для случая RC -цепи, и составляет 1% и 13% соответственно.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Научного центра мирового уровня "Передовые цифровые технологии" (соглашение от 20.04.2022 № 075-15-2022-311).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lin F., Mak P. I., Martins R. P. // IEEE Circuits and Systems Magazine. 2015. V. 15. № 1. P. 12.
2. Wu H., Murphy D., Darabi H. // IEEE J. of Solid-State Circuits. 2019. V. 54. № 3. P. 796.
3. Han J., Kwon K. // IEEE Trans. 2020. V. CS-I-67. № 6. P. 1881.
4. Bae S., Kim D., Kim D. et al. // IEEE Trans. 2021. V. CS-I-68. № 2. P. 892.
5. Darabi H., Abidi A. A. // IEEE J. of Solid-State Circuits. 2000. V. 35. № 1. P. 15.
6. Chehrizi S., Mirzaei A., Abidi A. A. // IEEE Trans. 2010. V. CS-I-57. № 2. P. 332.
7. Chehrizi S., Mirzaei A., Abidi A. A. // IEEE Trans. 2009. V. CS-I-56. № 12. P. 2556.
8. Коротков А. С., Чан Т. Д. // РЭ. 2023. Т. 68. № 1. С. 83.
9. Kenneth S. M. // Mathem. Magazine. 1981. V. 54. № 2. P. 67.

ANALYSIS OF A PASSIVE FREQUENCY MIXER WITH CURRENT CONTROL BY USING PROTECTIVE INTERVALS OF HETERODYNE SIGNALS

T. D. Tran, A. S. Korotkov*

Peter the Great St-Petersburg Polytechnic University, Polytechnicheskaya Str., 29, St-Petersburgh, 195251 Russia

**E-mail: korotkov@spbstu.ru*

Received October 3, 2022; revised March 15, 2023; accepted April 24, 2023

A generalized technique for analyzing a current-controlled passive frequency mixer circuit using guard intervals between adjacent heterodyne signal pulses is proposed. The results of calculations and simulations in the Micro-Cap environment are presented for two cases of mixer input impedance: RLC circuit, RC circuit. The dependences of the modulus of the transfer impedance of the mixer for various durations of protective intervals are considered.

Keywords: passive frequency mixer, heterodyne, transfer mixer module, protective interval

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТОВОЛОКОННОЙ ЛИНИИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕДАЧИ АНАЛОГОВОГО СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНОГО СИГНАЛА

© 2024 г. И. Ю. Таценко*, А. Б. Устинов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,
ул. Профессора Попова, 5, Санкт-Петербург, 197022 Российская Федерация

*E-mail: abitur.tatsenko@mail.ru

Поступила в редакцию 02.08.2023 г.

После доработки 26.08.2023 г.

Принята к публикации 24.09.2023 г.

Исследовано влияние мощности оптического излучения на точку однодецибелной компрессии, гармонические искажения и динамический диапазон по помехам оптоволоконной линии передачи сверхвысокочастотного (СВЧ) сигнала. Показано, что увеличение мощности оптического излучения приводит к уменьшению мощности однодецибелной компрессии и увеличению гармонических искажений и не приводит к изменению динамического диапазона по помехам. Найдено, что динамический диапазон, свободный от помех, составил около 85...87 дБ.

Ключевые слова: оптоволоконно, оптоволоконная линия передачи, нелинейные искажения, интермодуляционные искажения

DOI: 10.31857/S0033849424030093, **EDN:** JUFCKK

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В последние годы все больший интерес вызывает передача аналоговых и цифровых сверхвысокочастотных (СВЧ) сигналов по оптоволоконной линии передачи (ОВЛП) [1–6]. К основным преимуществам ОВЛП можно отнести малые размеры и вес устройств, низкие потери оптического излучения в оптоволоконне, а также возможность реализации широких полос пропускания каналов (десятки-сотни гигагерц). Блок-схема стандартной ОВЛП (рис. 1) содержит следующие компоненты: лазер, электрооптический модулятор, одномодовое оптоволоконно и фотодетектор. Входной СВЧ-сигнал, подаваемый на управляющий вход электрооптического модулятора, модулирует по амплитуде оптическую несущую. Модулированный оптический сигнал распространяется в оптоволоконной линии задержки и приходит на фотодетектор. Фотодетектор преобразует оптический сигнал в электрический. ОВЛП является пассивным устройством, так как оптическая несущая модулируется непосредственно СВЧ-сигналом и в схеме ОВЛП не используются элементы усиления сигнала. За счет низких потерь в оптоволоконне передача радиосигналов по оптоволокону является более предпочтительной по сравнению с коаксиальными кабелями.

Важной задачей при создании ОВЛП является повышение коэффициента передачи СВЧ-сигнала. В работе [1] был предложен метод повышения коэффициента передачи за счет управления рабочей

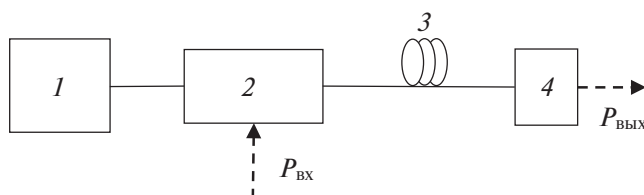


Рис. 1. Блок-схема экспериментального макета ОВЛП: 1 — лазер, 2 — электрооптический модулятор, 3 — оптоволоконно, 4 — фотодетектор.

точкой модулятора, а также исследовано изменение коэффициента нелинейных искажений при смещении рабочей точки модулятора из квадратуры. Другим возможным способом повышения коэффициента передачи является использование в схеме ОВЛП лазера со сравнительно высокой мощностью оптического излучения и фотодетектора с высоким фототоком [4]. Коэффициент передачи ОВЛП можно рассчитать с помощью известного выражения

$$H_P = 10 \lg(P_{\text{вых}}/P_{\text{вх}}).$$

Здесь $P_{\text{вх}}$ — мощность СВЧ-сигнала, подаваемого на управляющий вход электрооптического модулятора, а $P_{\text{вых}}$ — мощность СВЧ-сигнала на выходе фотодетектора, которая рассчитывается следующим образом:

$$P_{\text{вых}} = R \left(P_{\text{лаз}} S J_1 \left(\frac{\pi V_0}{V_\pi} \right) \sin \left(\frac{\pi V_{\text{см}}}{V_\pi} \right) \right), \quad (1)$$

где R — сопротивление нагрузки фотодетектора, $P_{\text{лаз}}$ — мощность лазера, S — чувствительность фотодетектора, $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка, V_0 — амплитуда модулирующего СВЧ-сигнала, подаваемого на вход электрооптического модулятора, $V_{\text{см}}$ — напряжение смещения рабочей точки модулятора, V_{π} — полуволновое напряжение электрооптического модулятора. Из формулы (1) видно, что при фиксированном значении мощности $P_{\text{вх}}$, увеличение мощности лазера $P_{\text{лаз}}$ будет приводить к увеличению мощности СВЧ-сигнала на выходе фотодетектора $P_{\text{вых}}$ и к увеличению коэффициента передачи ОВЛП H_p .

Кроме повышения коэффициента передачи ОВЛП, важной задачей является передача сигнала на большие расстояния без искажений. Известно, что если амплитуда СВЧ-сигнала, подаваемого на вход электрооптического модулятора, приближается к полуволновому напряжению модулятора, то из-за нелинейности передаточной характеристики модулятора на выходе ОВЛП могут появляться гармонические искажения и компрессия одночастотного сигнала, а также интермодуляционные искажения. Основными параметрами, описывающими искажения в ОВЛП, являются коэффициент гармонических искажений, динамический диапазон по помехам (SFDR), точка однодецибелной компрессии и выходная точка пересечения третьего порядка (OIP3).

Первые широкополосные ОВЛП с положительным коэффициентом передачи были продемонстрированы в работах, посвященных разработке оптоэлектронных СВЧ-генераторов [7, 8]. Влияние же мощности лазерного излучения на нелинейные искажения СВЧ-сигнала, передаваемого через ОВЛП, до сих пор остается неизученным.

Цель данной работы — исследовать влияние мощности оптического излучения на компрессию, гармонические искажения и интермодуляционные искажения СВЧ-сигнала, передаваемого в ОВЛП с положительным коэффициентом передачи.

2. ИЗМЕРЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОВЛП

Экспериментальный макет ОВЛП (см. рис. 1) состоит из лазера 1 с регулируемой мощностью до 1 Вт на длине волны излучения 1550 нм, электрооптического модулятора Маха—Цендера 2 с полуволновым напряжением 1.6 В и оптическими потерями около 5 дБ, оптоволокну 3 длиной 1 км и фотодетектора 4 с номинальной чувствительностью 0.8 А/Вт в диапазоне 0...10 ГГц и максимальным фототоком 90 мА.

На первом этапе работы было исследовано влияние мощности лазера на амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) ОВЛП. Измерение проводили с помощью векторного анализатора цепей. На рис. 2 показаны результаты измерений АЧХ при различной

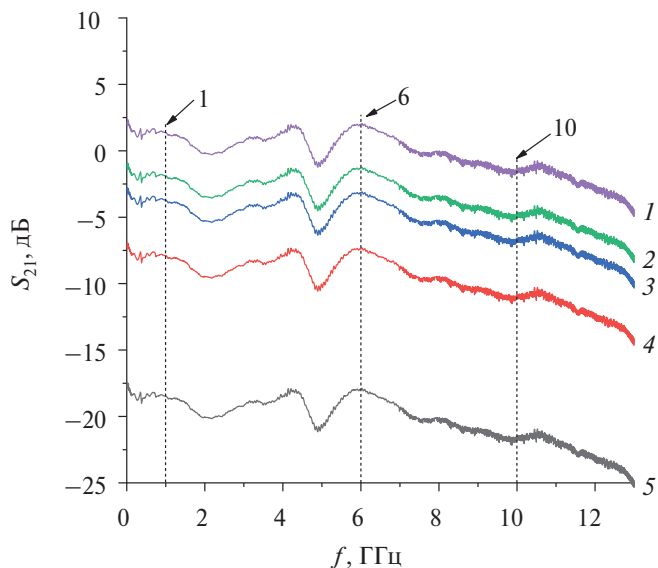


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики ОВЛП при различной мощности лазера, $P_{\text{лаз}} = 14.8$ (1), 20.4 (2), 22.7 (3), 23.6 (4), 25.4 дБм (5); вертикальными линиями отмечены частоты 1, 6 и 10 ГГц.

мощности оптического излучения, подаваемого на оптический вход электрооптического модулятора.

Видно, что с увеличением мощности лазера потери в ОВЛП уменьшаются. Это находится в хорошем соответствии с результатами, которые были показаны в работе [4]. При увеличении мощности лазера до 25.4 дБм коэффициент передачи ОВЛП становится положительным в диапазоне частот 0...10 ГГц. Спад АЧХ по частоте обусловлен частотной зависимостью чувствительности фотодетектора, которая была рассмотрена в работе [4]. Неравномерность АЧХ вызвана плохим согласованием фотодетектора с последующим СВЧ-трактом на некоторых частотах.

3. ИЗМЕРЕНИЕ ОДНОДЕЦИБЕЛЬНОЙ КОМПРЕССИИ В ОВЛП

На следующем этапе работы проводились исследования, направленные на определение входной мощности, при которой возникает однодецибелная компрессия выходного СВЧ-сигнала. Для этого измеряли АЧХ ОВЛП, по которым на разных частотах определяли вносимые потери H_p . Мощность СВЧ-сигнала $P_{\text{вх}}$, подаваемого на СВЧ-вход ОВЛП, задавалась векторным анализатором цепей. Мощность СВЧ-сигнала на выходе ОВЛП рассчитывалась по выражению

$$P_{\text{вых}} [\text{дБм}] = P_{\text{вх}} [\text{дБм}] + H_p [\text{дБ}]. \quad (2)$$

Измерения проводили при мощности оптического излучения 20.4 и 25.4 дБм, что соответствовало коэффициенту передачи ОВЛП около -10 и 0 дБ соответственно. Результаты измерений представлены на рис. 3.

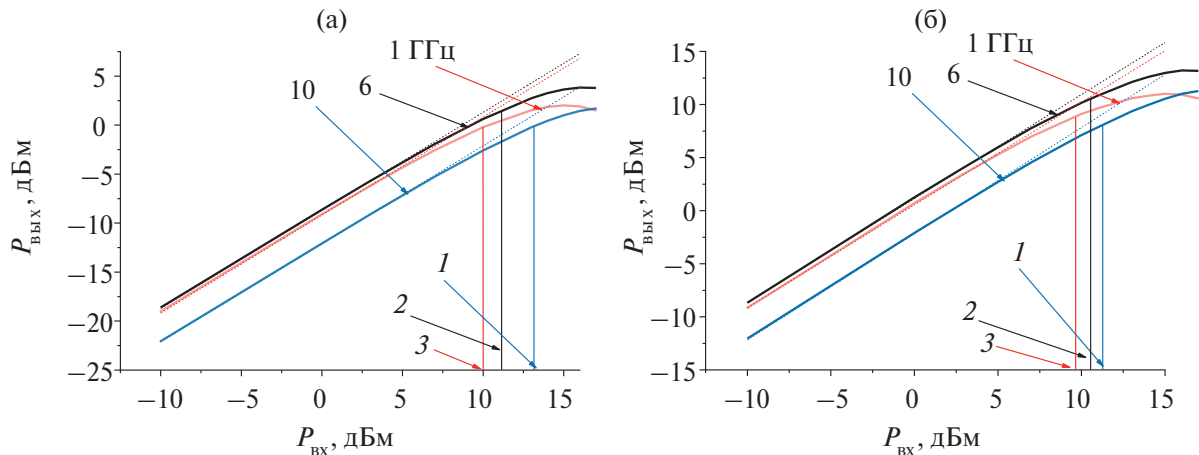


Рис. 3. Передаточные характеристики по мощности ОВЛП при $f = 1, 6$ и 10 ГГц: (а) $P_{\text{лаз}} = 20.4$ дБм, $P_{\text{ldb}} = 13.2$ (1), 11.1 (2), 10 дБм (3), (б) $P_{\text{лаз}} = 25.4$ дБм, $P_{\text{ldb}} = 11.2$ (1), 10.5 (2), 9.6 дБм (3).

Из рис. 3 видно, что с увеличением частоты входного СВЧ-сигнала происходит сдвиг точки одностенной компрессии в сторону более высоких значений входной мощности. Так, при частоте входного СВЧ-сигнала 1 ГГц одностенная компрессия сигнала возникает при входной мощности СВЧ-сигнала, равной 10 дБм, а при частоте 10 ГГц значение мощности СВЧ-сигнала, при которой возникает одностенная компрессия, увеличивается до 13.2 дБм. Это обусловлено тем, что с увеличением частоты передаваемого сигнала происходит увеличение полуволнового напряжения электрооптического модулятора. Следует отметить, что основная компрессия СВЧ-сигнала возникает из-за синусоидальной характеристики коэффициента передачи электрооптического модулятора.

Как показано на рис. 3б, увеличение мощности лазера до 25.4 дБм приводит к небольшому уменьшению мощности одностенной компрессии, т.е. к дополнительной компрессии СВЧ-сигнала. Одностенная компрессия СВЧ-сигнала на частотах 1, 6 и 10 ГГц возникает при мощностях входного СВЧ-сигнала 9.6, 10.5 и 11.2 дБм соответственно. Связано это с тем, что при высокой мощности оптического излучения, падающего на фотодетектор, происходит компрессия чувствительности фотодетектора [9, 10]. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что повышение мощности лазера помимо увеличения коэффициента передачи ОВЛП приводит к уменьшению значения точки одностенной компрессии, что необходимо учитывать при проектировании ОВЛП.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ИСКАЖЕНИЙ В ОВЛП

Блок-схема экспериментального макета для измерения гармонических искажений в ОВЛП представлена на рис. 4. Методика измерений

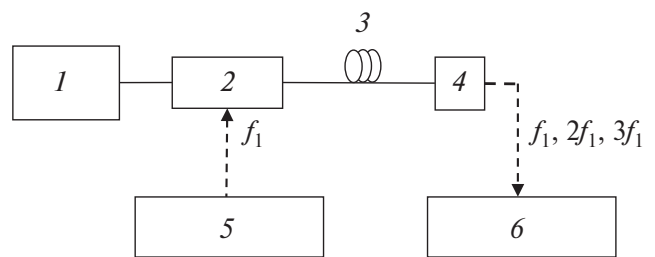


Рис. 4. Блок-схема экспериментального макета для измерений гармонических искажений в ОВЛП: 1 — лазер, 2 — электрооптический модулятор, 3 — оптоволокно, 4 — фотодетектор, 5 — генератор СВЧ-сигнала, 6 — анализатор спектра.

заклучалась в следующем. От СВЧ-генератора 5 на СВЧ-вход электрооптического модулятора подавался синусоидальный сигнал на частоте $f_1 = 1$ ГГц. Выход фотодетектора был подключен к анализатору спектра 6, с помощью которого измеряли амплитуды основной и кратных гармоник.

Спектр СВЧ-сигнала с гармоническими искажениями (ГИ) показан на рис. 5а. На вход ОВЛП был подан сигнал мощностью 10 дБм на частоте 1 ГГц, а на выходе наблюдались кратные гармоники вплоть до 5 ГГц. На рис. 5б, 5в представлены результаты измерения ГИ в ОВЛП. Из полученных результатов видно, что увеличение мощности оптического излучения приводит к значительному увеличению мощности гармоники на удвоенной частоте. При высокой мощности оптического излучения ватт-амперная характеристика фотодетектора переходит от линейного участка к участку насыщения, и из-за этого возникают дополнительные искажения передаваемого СВЧ-сигнала [11].

Коэффициент ГИ был рассчитан следующим образом:

$$K_{\text{ГИ}} = \sqrt{\sum_{i \geq 2} P_i^2} / P_1, \quad (3)$$

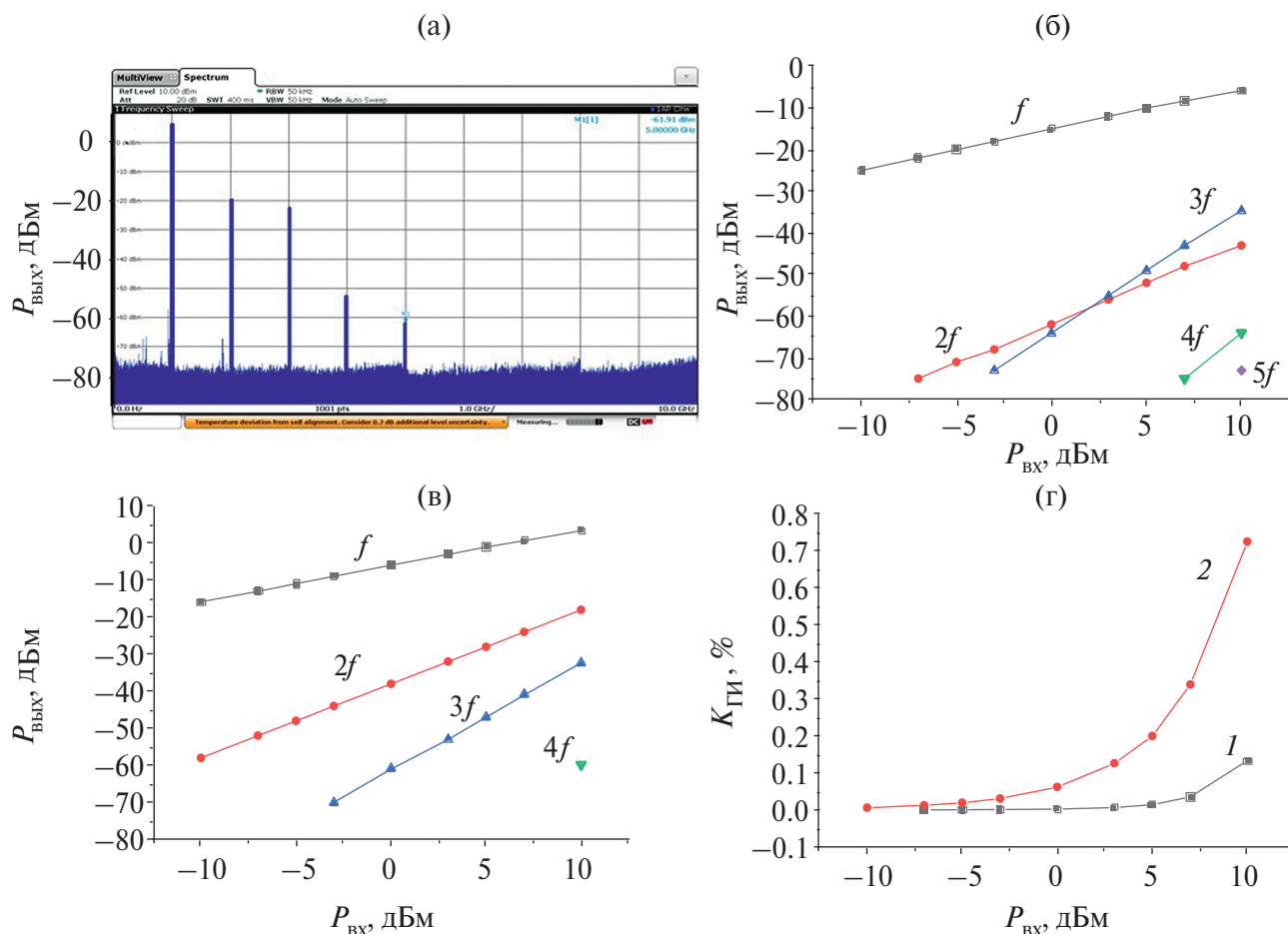


Рис. 5. Типичный спектр выходного сигнала с гармоническими искажениями (а); результаты измерения гармонических искажений в ОВЛП при $P_{\text{лаз}} = 20.4$ (б) и 25.4 дБм (в); зависимость коэффициента гармонических искажений от мощности входного СВЧ-сигнала (г): $P_{\text{лаз}} = 20.4$ (1) и 25.4 дБм (2).

где P_i — мощность i гармоники сигнала. На рис. 5г показана зависимость коэффициента ГИ от мощности входного СВЧ-сигнала. Как видно из рисунка, при мощности лазера 20.4 дБм коэффициент ГИ составляет около 0.1%. Увеличение мощности лазера до 25.4 дБм приводит к более сильному росту коэффициента ГИ (см. рис. 5г, кружочки). Максимальное значение коэффициента ГИ составило 0.72%.

Сопоставим коэффициенты ГИ, полученные в данной работе при различных мощностях СВЧ-сигнала, с результатами, опубликованными в [1]. В работе [1] коэффициент ГИ составил 0.5%, при этом частота СВЧ-сигнала составила 97 МГц, $P_{\text{ВХ}} = 7$ дБм, $H_p = -3$ дБ. Кроме того, необходимо отметить, что в конструкции ОВЛП между электрооптическим модулятором и фотодетектором был использован оптический усилитель. В данной работе коэффициент ГИ для $P_{\text{ВХ}} = 7$ дБм составил 0.34% на частоте сигнала 1 ГГц, а $H_p = +2$ дБ.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕРМОДУЛЯЦИОННЫХ ИСКАЖЕНИЙ В ОВЛП

Исследование интермодуляционных искажений является важным этапом исследований ОВЛП, так как эти искажения определяют параметры SFDR и OIP3. Блок-схема экспериментального макета для измерений интермодуляционных искажений показана на рис. 6. На вход электрооптического модулятора через сумматор 7 подавались два синусоидальных сигнала с одинаковой амплитудой на частотах f_1 и $f_2 = f_1 + \Delta f$. На выходе ОВЛП с помощью анализатора спектра измерялась мощность основных гармоник и гармоник интермодуляции ($2f_1 - f_2$, $2f_2 - f_1$, $3f_1 - 2f_2$, $3f_2 - 2f_1$). При проведении измерений расстояние между частотами f_1 и f_2 выбирали равным 200 и 500 МГц.

Типичные зависимости выходной мощности основных и интермодуляционных гармоник от мощности входных СВЧ-сигналов на частотах $f_1 = 2$ ГГц, $f_2 = 2.5$ ГГц при мощности лазера 20.4 и 25.4 дБм представлены на рис. 7. При мощности оптического излучения 20.4 дБм SFDR составил около 85.5 дБ, при увеличении мощности лазера

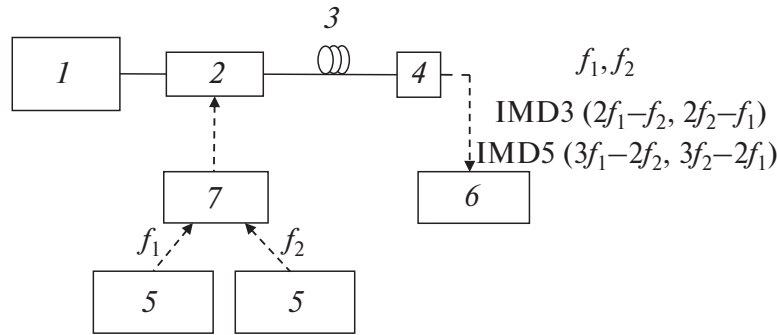


Рис. 6. Блок-схема экспериментального макета для измерения интермодуляционных искажений: 1 — лазер, 2 — электрооптический модулятор, 3 — оптоволоконно, 4 — фотодетектор, 5 — генератор СВЧ-сигнала, 6 — анализатор спектра, 7 — сумматор.

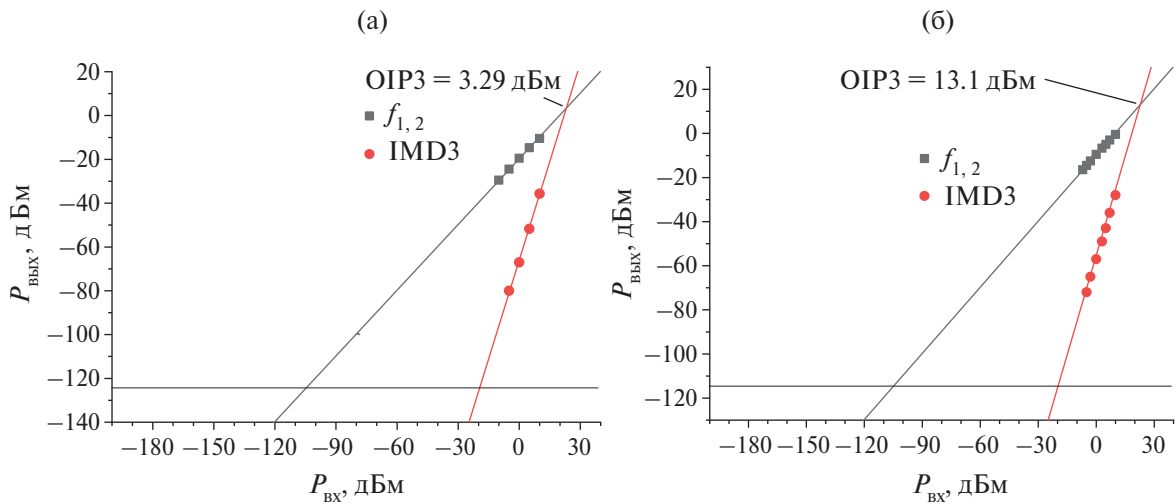


Рис. 7. Зависимости выходной мощности основных и интермодуляционных гармоник от входной мощности СВЧ-сигнала при $f_2 - f_1 = 500$ МГц: (а) $P_{\text{лаз}} = 20.4$, уровень шума -124 дБм, SFDR = 85 дБ; (б) $P_{\text{лаз}} = 25.4$ дБм, уровень шума -114 дБм, SFDR = 86.5 дБ; точки — эксперимент, сплошная линия — линейная экстраполяция экспериментальных данных для определения OIP3.

Таблица 1. Значения OIP3 и SFDR при $P_{\text{лаз}} = 20.4$ и 25.4 дБм, $\Delta f = 200$ и 500 МГц

f , ГГц	OIP3, дБм		SFDR, дБ	
	200 МГц	500 МГц	200 МГц	500 МГц
$P_{\text{лаз}} = 20.4$ дБм				
2	3.89	3.29	85.5	85
4	4.7	3.25	85.7	84.8
6	6.54	6	87	86.5
8	5.13	5.27	86.3	86.3
10	1.9	3.2	84.1	84.9
$P_{\text{лаз}} = 25.4$ дБм				
2	15.54	13.1	86.5	84.7
4	16.27	14.46	86.8	85.6
6	16.51	15.41	87.1	86.3
8	16.17	13.82	87.1	85.4
10	15.1	11.82	86	84

до 25.4 дБм значение SFDR практически не изменилось, это обусловлено тем, что с ростом мощности оптического излучения увеличивается вклад RIN-шума в общий уровень шума в ОВЛП.

Такие же измерения были проведены и на других частотах, вплоть до 10 ГГц, значения показателей SFDR и OIP3 приведены в табл. 1.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что увеличение расстояния между частотами f_1 и f_2 не влияет на динамический диапазон по помехам и на показатель OIP3. При мощности оптического излучения 20.4 дБм показатель OIP3 имеет значения порядка 3...5 дБм. Повышение мощности лазера улучшает параметр OIP3, увеличивая его до значений порядка 13...15 дБм. Увеличение мощности лазера не приводит к изменениям параметра SFDR, который равен приблизительно 85...87 дБ. Для сравнения отметим, что ОВЛП, представленная в работе [3], имеет SFDR около 66 дБ при уровне шума системы -125 дБм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, полученные результаты дают возможность оценить влияние мощности лазера на нелинейные искажения СВЧ-сигнала в ОВЛП. Показано, что увеличение мощности лазера позволяет увеличить коэффициент передачи ОВЛП, но при этом уменьшается значение точки однодецибельной компрессии и увеличиваются гармонические искажения. Поэтому при проектировании ОВЛП необходимо учитывать влияние мощности лазера, для того чтобы получить необходимый коэффициент передачи с нужным уровнем гармонических искажений и компрессии сигнала.

Исследование влияния мощности лазера на интермодуляционные искажения СВЧ-сигнала в ОВЛП показало, что при увеличении мощности лазера динамический диапазон по помехам практически не изменяется. Таким образом, за счет использования лазера с относительно высокой мощностью оптического излучения можно увеличить коэффициент передачи ОВЛП без ухудшения динамического диапазона по помехам.

Одним из возможных способов улучшения характеристик ОВЛП является использование фотодетектора с более высоким фототоком, что позволит уменьшить гармонические искажения и дополнительно увеличить коэффициент передачи ОВЛП. Кроме того, использование лазера с более низким RIN-шумом позволит увеличить динамический диапазон по помехам за счет уменьшения уровня выходного шума.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (в рамках госзадания, проект FSEE-2020-0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров А.Н., Тронева А.В., Лебедев В.В. и др. // ЖТФ. 2015. Т. 85. № 5. С. 131.
2. Muniz A.L.M., Noque D.F., Borges R.M. et al. // Microwave Opt. Technol. Lett. 2017. V.59. № 9. P. 2185. <https://doi.org/10.1002/mop.30704>
3. Noque D.F., Borges R.M., Muniz A.L.M. et al. // Opt. Commun. 2018. V. 414. P. 191. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2018.01.015>
4. Таценко И.Ю., Легкова Т.К., Иванов А.В., Устинов А.Б. // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2020. Т. 23. № 4. С. 48. <https://doi.org/10.32603/1993-8985-2020-23-4-48-56>
5. Sánchez E., Pérez-López D., dasMahapatra P., Capmany J. // Optics Express. 2021. V. 29. № 10. P. 14757. <https://doi.org/10.1364/OE.423613>
6. Li P., Dai Z., Yan L., Yao J. // Opt. Express. 2022. V. 30. № 5. P. 6690. <https://doi.org/10.1364/OE.449274>
7. Ackerman E.I., Betts G.E., Burns W.K. et al. // Proc. IEEE/MTT-S International Microwave Symposium, Honolulu, HI, USA 03–08 June. 2007. N.Y.: IEEE, 2007. P. 51.
8. Russell H.V., Regan M.D., Prince J.L. et al. // Proc. Intern. Topical Meeting on Microwave Photonics. Victoria, BC, Canada, 03–05 Oct. 2007. N.Y.: IEEE, 2007. P. 84. <https://doi.org/10.1109/MWP.2007.4378142>
9. Williams K.J., Esman R.D. // Electron. Lett. 1992. V. 8. № 28. P. 731. <https://doi.org/10.1049/el:19920463>
10. Урик В.Дж., МакКинни Дж.Д., Вилльямс К.Дж. Основы микроволновой фотоники. М.: Техносфера, 2016.
11. Hayes R.R., Persechini D.L. // IEEE Photonics Technol. Lett. 1993. V. 5. № 1. P. 70. <https://doi.org/10.1109/68.185064>

INVESTIGATION OF OPTICAL FIBER LINE WITH A POSITIVE TRANSMISSION RATIO OF ANALOG MICROWAVE SIGNAL

I. Yu. Tatsenko*, A. B. Ustinov

Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", Prof. Popov Str., 5, Saint-Petersburg, 197022 Russia
*E-mail: abitur.tatsenko@mail.ru

Received August 2, 2023; revised August 26, 2023; accepted September 24, 2023

The influence of optical radiation power on the one-decibel compression point, harmonic distortion and dynamic range due to interference in a fiber-optic transmission line of an ultra-high frequency (microwave) signal has been studied. The line had a positive microwave signal transmission coefficient, and there were no amplification elements between the input and output. The amplification effect was achieved through the use of increased power of the carrier optical radiation and a photodetector with a high photocurrent. It has been shown that an increase in optical radiation power leads to a decrease in one-dB compression power and an increase in harmonic distortion, but an increase in optical radiation power does not lead to a change in the dynamic range of interference. It was found that the dynamic range free from interference was about 85...87 dB.

Keywords: optical fiber, optical fiber transmission line, nonlinear distortion, intermodulation distortion