

Том 68, Номер 6

ISSN 0033-8494

Июнь 2023



РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 68, номер 6, 2023

К 85-ЛЕТИЮ ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

Исследование и методы решения задач рассеяния электромагнитных волн на трехмерных анизотропных диэлектрических структурах

А. Б. Самохин, А. С. Самохина 521

Асимптотики локализованных Бесселевых пучков и лагранжевы многообразия

С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. В. Цветкова 527

Френелевские переходные зоны

Е. А. Злобина, А. П. Киселев 542

Математическое моделирование амплитудных, угловых и временных характеристик коротких радиоволн при слабонаклонном зондировании ионосферы

А. С. Крюковский, Д. С. Лукин, Е. В. Михалёва, Д. В. Растягаев 553

Дифракционная теория распространения радиоволн высоких частот в сферически-слоистом ионосферном радиоканале

Н. Н. Зернов, М. А. Бисярин, В. Э. Герм 563

Обеспечение предельной широкополосности систем спутниковой радиосвязи в условиях внутримодовой дисперсии трансionoсферных радиоканалов

Д. В. Иванов, В. А. Иванов, Н. В. Рябова, А. А. Кислицын 571

Многолучевая антенна с полным азимутальным углом обзора на основе слоистой металлодиэлектрической цилиндрической линзы

А. С. Венецкий, В. А. Калошин, Чан Тиен Тханг 579

Приемник сигналов глобальных навигационных спутниковых систем на базе модуля U-BLOX ZED-F9P для ионосферных исследований

Д. А. Когогин, А. В. Соколов, И. А. Насыров, В. О. Дементьев, Р. В. Загреддинов 587

Микроволновая радиометрическая система в задачах прогнозирования опасных атмосферных явлений

Г. Г. Шукин, Е. В. Федосеева, В. В. Булкин, И. Н. Ростокин 598

Оценивание вероятностных характеристик приема частотно-эффективных сигналов при распространении по радиолинии с туманом

Л. Е. Назаров, Б. Г. Кутуза, В. В. Батанов 608

Исследование сверхвысокочастотного радиометрического влажностного зондирования атмосферы для раннего предупреждения опасных явлений погоды

Д. М. Караваев, Ю. В. Кулешов, Г. Г. Шукин 615

Спектральные параметры сигнала в метеорологической радиолокации

Д. А. Денисенков, В. Ю. Жуков, Г. Г. Шукин 621

**К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА**

УДК 517.958

**ИССЛЕДОВАНИЕ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТРЕХМЕРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ**

© 2023 г. А. Б. Самохин^{a, b, *}, А. С. Самохина^{a, b}

^a МИРЭА – Российский технологический университет,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

^b Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Профсоюзная ул., 65, Москва, 117997 Российская Федерация

*E-mail: absamokhin@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.03.2023 г.

После доработки 10.03.2023 г.

Принята к публикации 27.03.2023 г.

На основе объемных сингулярных интегральных уравнений исследованы задачи рассеяния электромагнитных волн на анизотропных диэлектрических структурах. Приведены теоремы существования и единственности решений для широкого класса сред, в том числе для сред без потерь. Описан эффективный метод решения интегральных уравнений на основе метода коллокации и алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье.

DOI: 10.31857/S0033849423060116, EDN: XMYXBC

ВВЕДЕНИЕ

Задачи рассеяния электромагнитных волн на трехмерных анизотропных диэлектрических структурах имеют огромное значение как с теоретической, так и с практической точки зрения. Важной характеристикой задач подобного рода является соотношение длины волны электромагнитного поля и размеров рассеивающей структуры. Если отношение размеров структуры и длины волны достаточно велико, то используются асимптотические методы решения. Огромный вклад в развитие этих методов для широкого класса задач внесли Д.С. Лукин и его ученики – А.С. Крюковский, Е.А. Палкин, Д.В. Растягаев и др. [1–4]. Если длина волны соизмерима или больше размеров рассеивающего объекта, то необходима математически строгая постановка задачи. Исследование рассматриваемых задач имеет принципиальное значение в электродинамике.

В классической постановке задачи рассеяния формулируются следующим образом: необходимо найти решение соответствующих уравнений Максвелла, удовлетворяющее условию излучения на бесконечности и граничным условиям непрерывности тангенциальных компонент поля на поверхностях разрыва параметров среды. При этом корректность классической постановки, а также существование и единственность решения являются важнейшими вопросами при изучении задач рассеяния.

Теорема Пойнтинга, которая доказывается на основе анализа уравнений Максвелла и условий излучения, гарантирует единственность решения для задач рассеяния в средах с затуханием. Следует отметить, что строгое доказательство единственности решения в средах без потерь долгое время было неизвестно, хотя предполагалось, что единственность в этих случаях также имеет место. Однако, на наш взгляд, это не совсем так. В прикладной электродинамике долгое время считалось, что если выполняются условия теоремы единственности, то решение соответствующей задачи рассеяния существует. Но это имеет место только в том случае, если оператор задачи фредгольмов в функциональном пространстве, где рассматривается решение. Попытки доказать фредгольмовость операторов задач, используя классическую дифференциальную постановку, не всегда были успешными.

К интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода сводятся следующие классы задач: рассеяние на однородном изотропном диэлектрическом теле с гладкой границей (можно рассматривать также несколько гладких непересекающихся поверхностей раздела сред внутри тела) [6–8]; рассеяние в ограниченной изотропной среде, диэлектрическая проницаемость которой является всюду дифференцируемой функцией координат и нигде не обращается в ноль [7]. Используя теорию интегральных уравнений Фредгольма, были

доказаны теоремы существования и единственности соответствующих задач. Однако в общей постановке, тем более при наличии анизотропии среды, трехмерные задачи рассеяния электромагнитных волн не могут быть сведены к классическим интегральным уравнениям Фредгольма.

Объемные сингулярные интегральные уравнения относительно неизвестного электромагнитного поля по области неоднородности Q появились в электродинамике в 70-е годы XX в. [9]. Эти уравнения описывают задачи электромагнитного рассеяния на трехмерных неоднородных и анизотропных диэлектрических структурах в самой общей постановке. Кроме того, уравнения могут использоваться при исследовании задач рассеяния, для которых классическая постановка либо невозможна, либо затруднена, например во фрактальных средах или диэлектрических телах с негладкой границей. Однако эти уравнения относятся к многомерным сингулярным интегральным уравнениям, теория которых была построена значительно позже и в меньших деталях по сравнению с теорией интегральных уравнений Фредгольма.

С использованием результатов С.Г. Михлина и его учеников по теории сингулярных уравнений [10, 11] нами впервые были исследованы объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики [5, 15, 16]: получены условия фредгольмовости уравнений, доказаны теоремы существования и единственности решения, исследованы классическая и обобщенная постановки задач. Математически строго получены условия существования резонансных анизотропных диэлектрических структур [14].

Отметим, что в работах Ю.Г. Смирнова и его учеников [12, 13] были рассмотрены на основе интегродифференциальных уравнений задачи рассеяния на трехмерных изотропных диэлектрических структурах и идеально проводящих поверхностях. С использованием теории псевдодифференциальных уравнений были изучены корректные постановки задач, доказаны теоремы существования и единственности.

Вопросы единственности решения задач взаимодействия электромагнитного поля с неоднородной диэлектрической средой, находящейся в трехмерной ограниченной области Q , окруженной свободным пространством, имеют принципиальное значение в электродинамике. Если среда в Q имеет потери, то решение задачи единственно, т.е. при отсутствии внешнего источника поля решение во всем пространстве, в том числе в области Q , может быть только нулевым. При отсутствии потерь в среде, особенно при наличии анизотропии, возникают значительные трудности при доказательстве единственности. В работе [16] было доказано, что для сред без потерь и с гладкими па-

раметрами среды во всем пространстве решение задач единственно, если выполняется условие

$$\sum_{n,m=1}^3 \varepsilon_{nm}(x) \alpha_n \alpha_m \neq 0, \quad x \in Q, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad (1)$$

где ε_{nm} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ в декартовой системе координат. Для изотропной среды условие (1) принимает вид $\varepsilon(x) \neq 0, x \in Q$.

Для получения конкретных решений трехмерных задач рассеяния на сложных структурах возможно использование только численных методов. Когда длина волны значительно меньше характерных размеров объекта рассеивания, вне конкуренции являются асимптотические методы. Однако в квазистатическом и резонансном диапазонах длин волн для нахождения численного решения необходимо использовать строгие постановки задач.

Дифференциальные уравнения Максвелла кажутся наиболее подходящими для численного решения подобных задач, поскольку после дискретизации получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженной матрицей по сравнению с полной матрицей, которую имеем в случае интегральных уравнений. Однако для задач рассеяния решение должно удовлетворять условию излучения на бесконечности. Это приводит к тому, что для получения достаточной точности решения необходимо численно находить неизвестное поле в области, которая значительно больше рассеивающей области Q . Поэтому, принимая во внимание трехмерность исходной задачи, при использовании дифференциальных уравнений Максвелла получаем СЛАУ огромной размерности. Тем не менее алгоритмы решения задач рассеяния на основе уравнений Максвелла постоянно совершенствуются и в настоящее время широко используются многими исследователями.

Помимо уравнений Максвелла для численного решения задач рассеяния на однородных и слоисто-однородных изотропных диэлектрических структурах используются поверхностные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода, упомянутые выше.

В объемных сингулярных интегральных уравнениях параметры среды входят в ядра уравнений в простой форме, что делает возможным их численное решение. По-видимому, первое численное решение этих уравнений было приведено в работе [9]. Рассматривалась задача рассеяния плоской волны на неоднородном диэлектрическом параллелепипеде. Методом коллокации задача была аппроксимирована СЛАУ небольшой размерности, которая была решена прямым методом Гаусса. В дальнейшем уравнения использовались для численного решения рядом исследователей, однако широкого применения они пока не получили.

Опишем основные проблемы, которые возникают при численном решении этих уравнений. Для большинства реальных задач в силу трехмерности уравнений после дискретизации уравнений возникают СЛАУ очень большой размерности N , $N \gg 1000$. Очевидно, что использование прямых методов практически невозможно, поскольку в памяти компьютера необходимо хранить $M \sim N^2$ чисел, а для решения СЛАУ нужно выполнить $T \sim N^3$ арифметических операций. Поэтому возможно использование только итерационных методов. В этом случае параметры M и T оцениваются формулами

$$M \sim M_A, \quad T \sim LT_A, \quad (2)$$

где M_A — количество элементов массива чисел, которые необходимы для алгоритма умножения матрицы СЛАУ на вектор; L — количество итераций для получения решения с заданной точностью; T_A — число арифметических операций для умножения матрицы СЛАУ на вектор. Для плотных матриц произвольного вида $M_A = N^2$, $T_A \sim N^2$. Однако для плотных матриц, обладающих определенными свойствами, эти величины могут быть значительно меньше.

В данной статье рассматривается метод численного решения объемных сингулярных интегральных уравнений. С использованием свойств ядер интегральных уравнений и алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье конструируются алгоритмы со значениями M_A и T_A , практически пропорциональными N [5, 17–19].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующий класс задач. В трехмерной ограниченной области Q среда характеризуется кусочно-дифференцируемой тензор функцией диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$, а вне области диэлектрическая проницаемость изотропна и равна ϵ_0 , и везде $\mu = \mu_0$, $\text{Im } \epsilon_0 = 0$, $\text{Im } \mu_0 = 0$, $\text{Re } \epsilon_0 > 0$, $\text{Re } \mu_0 > 0$. Требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в данной среде внешним полем и создаваемое сторонним током $\vec{J}^0$ с временной зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$. Нашей целью является изучение решений уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = -i\omega \epsilon \vec{E} + \vec{J}^0, \quad \text{rot } \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H}, \quad (3)$$

удовлетворяющих условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 r u \right) = 0, \quad r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (4)$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, u — любая из декартовых компонент полей $\vec{E}$ или $\vec{H}$. Кроме того, на поверхно-

стях разрыва параметров среды тангенциальные компоненты полей должны быть непрерывны.

Поставленная задача может быть сведена к объемному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля в Q [5, 15]:

$$\begin{aligned} & \vec{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})\vec{E}(x) - \\ & - \text{v.p.} \int_Q ((\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y), \text{grad}) \text{grad } G(R) dy - \\ & - k_0^2 \int_Q (\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y) G(R) dy = \vec{E}^0(x), \\ & x \in Q, \quad \hat{\epsilon}_r = \hat{\epsilon}/\epsilon_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где G — функция Грина для уравнения Гельмгольца

$$G(R) = \exp(i k_0 R)/(4\pi R), \quad (6)$$

$R = |x - y|$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, а п.в. обозначает сингулярный интеграл, т.е. интеграл за вычетом бесконечно малого шара в окрестности точек x и y .

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В работах [5, 16] доказана следующая теорема единственности решения рассматриваемых задач.

Теорема 1. Пусть тензор функция $\hat{\epsilon}(x)$ является кусочно-дифференцируемой функцией координат, а поверхности разрыва параметров среды — кусочно-гладкие. Далее, тензор-функция $\hat{\epsilon}(x)$ удовлетворяет условию (1), а эрмитова тензор-функция $(\hat{\epsilon}(x) - \hat{\epsilon}^*(x))/(2i)$ неотрицательно определена в каждой точке области Q . Тогда решение однородных уравнений Максвелла (3), удовлетворяющее условиям непрерывности тангенциальных компонент полей на поверхностях разрыва параметров среды и условию излучения на бесконечности, может быть только тривиальным.

Приведенное в теореме условие неотрицательности тензора $(\hat{\epsilon}(x) - \hat{\epsilon}^*(x))/(2i)$ физически означает, что в среде нет генерации энергии, т.е. среда является пассивной. В изотропном случае условие принимает вид $\text{Im } \epsilon(x) \geq 0$.

Для ответа на вопрос о существовании решения рассматриваемых задач сначала необходимо выбрать подходящее для анализа функциональное пространство. Интегралы от квадрата модуля характеристик электромагнитного поля присутствуют в законе сохранения энергии. Значит, можно полагать, что пространство интегрируемых с квадратом вектор-функций является наиболее “физичным” для исследования интегральных уравнений задач электромагнитного рассеяния. Далее будем использовать гильбертово пространство $\tilde{L}_2$ со

скалярным произведением, определяемым формулой

$$(\vec{U}, \vec{V}) = \int \vec{U}(x) \vec{V}^*(x) dx. \quad (7)$$

Дадим несколько определений, используемых далее.

Определение. Пусть A — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Тогда оператор A^* , который также определен в H , называется сопряженным к A , если следующее равенство

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

выполняется для всех $f, g \in H$.

Решения однородного уравнения $Au = 0$ будем называть нулями оператора A . Обозначим размерность подпространства нулей через $n(A)$. Тогда $n(A^*)$ — размерность подпространства нулей сопряженного оператора A^* . Разность

$$\text{Ind } A = n(A) - n(A^*)$$

называется индексом оператора A .

Определение. Линейный оператор A , действующий в гильбертовом пространстве, называется нетеровым оператором, если значения $n(A)$ и $n(A^*)$ конечны.

Определение. Линейный оператор A называется фредгольмовым оператором, если он нетеров и его индекс равен нулю.

Доказано следующее утверждение [5, 15].

Теорема 2. Пусть компоненты тензора $\hat{\varepsilon}(x)$ всюду гильберт-непрерывные функции координат. Тогда, для того чтобы оператор сингулярного интегрального уравнения (5) был нетеровым оператором в $\tilde{L}_2(Q)$, необходимо и достаточно выполнение условия (1).

Для изотропной среды условие (1) принимает вид

$$\varepsilon(x) \neq 0, \quad x \in Q.$$

Теорема 2 имеет принципиальное значение, поскольку с ее помощью доказываются многие важные утверждения.

Доказана следующая теорема существования и единственности решения [5, 16].

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1. Кроме того, тензор-функция $(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})$ может не иметь обратную функцию в Q только на множестве точек меры ноль, например на границе Q . Тогда существует и единственно решение сингулярного интегрального уравнения (5) в гильбертовом пространстве $\tilde{L}_2(Q)$.

Из теоремы 3, следует, что практически для всех ограниченных пассивных диэлектрических

структур Q , удовлетворяющих условию (1), решение задачи рассеяния существует и единственно.

Представляют интерес задачи рассеяния, при которых классическая постановка либо затруднена, либо невозможна. Доказано следующее утверждение при минимальных ограничениях на параметры среды [15].

Теорема 4. Пусть тензор-функция $\hat{\varepsilon}(x)$ — ограниченная функция координат в области Q , а эрмитов тензор $(\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}^*(x))/(2i)$ положительно определен в каждой точке Q . Тогда существует и единственно решение сингулярного интегрального уравнения (5) в гильбертовом пространстве $\tilde{L}_2(Q)$.

Большой интерес представляют среды, в которых условие (1) не выполняется. В работе [14] доказано, что при невыполнении условия (1) в среде без потерь в области неоднородности Q , могут существовать ненулевые решения однородной задачи. Если среда анизотропная, то в области Q может находиться электромагнитная энергия и при этом нет излучения в окружающее пространство.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим применение метода коллокации для численного решения объемного сингулярного интегрального уравнения (5). Отметим важное обстоятельство: ядра интегральных операторов уравнения (5) зависят только от разности декартовых координат точек x и y . Поэтому при дискретизации целесообразно это учитывать с целью получения матрицы СЛАУ, которая будет обладать соответствующими свойствами симметрии.

Для этого в прямоугольной декартовой системе координат введем конечное множество точек — сетку, так чтобы область Q целиком находилась в прямоугольном параллелепипеде Π со сторонами $N_l h_l$, $l = 1, 2, 3$, где h_l — шаги сетки по декартовым координатам. При этом параллелепипед Π разбивается данной сеткой на ячейки (элементарные параллелепипеды) $\Pi(p)$, $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_l = 0, \dots, N_l - 1$. Мы определяем область $\tilde{Q}$ как объединение N_Q ячеек, центры которых лежат внутри области Q . Очевидно, что $N_Q \leq N_1 N_2 N_3$. Тогда выбор сетки определяется формой области Q и требованиями: искомое решение, внешнее поле и параметры среды слабо изменялись внутри ячеек. Узловые точки, в которых определяются значения искомых функций, будем задавать в центрах ячеек $x(p)$ с координатами

$$\begin{aligned} x_1(p) &= p_1 h_1 + \frac{h_1}{2}, & x_2(p) &= p_2 h_2 + \frac{h_2}{2}, \\ x_3(p) &= p_3 h_3 + \frac{h_3}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегральное уравнение (5) может быть преобразовано к следующему виду [18]:

$$\begin{aligned} & \bar{E}(x) + \hat{\gamma}(\hat{E}_r(x) - \hat{I})\bar{E}(x) - \\ & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{Q \setminus \Pi(\epsilon)} (\hat{E}_r(y) - \hat{I})\bar{E}(y), \text{grad} \rangle \text{grad} G(R) dy - \\ & - k_0^2 \int_Q (\hat{E}_r(y) - \hat{I})\bar{E}(y) G(R) dy = \bar{E}^0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\Pi(\epsilon)$ – параллелепипед, диаметр которого ϵ , с центром в точке $x = y$, а $\hat{\gamma}$ – диагональный тензор, зависящий от формы параллелепипеда [18]. Если параллелепипед – куб, то коэффициенты тензора $\hat{\gamma}$ равны, как и для шара, $1/3$.

Интегральное уравнение (9) будем аппроксимировать СЛАУ с размерностью $\sim N_Q$ относительно значений неизвестного поля $u(p)$ в узловых точках области Q

$$u(p) - \sum_{y(q) \in Q} B(p-q) \eta(q) u(q) = u_0(p), \quad x(p) \in Q, \quad (10)$$

где $u(p) \equiv u(x(p))$; $u_0(p) \equiv u_0(x(p))$; $u(q) \equiv u(x(q))$.

Поскольку узловые точки находятся в центре ячеек, точность аппроксимации интегрального оператора $\sim h^2$, где h вычисляется по формуле

$$h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

В (10) $u(p)$ и $u_0(p)$ – векторы, а $B(p-q)$ и $\eta(q)$ – матрицы с размерностью три, которые определяются согласно (9) формулами

$$\eta_{mk}(q) = \varepsilon_{mk}(y(q)) - \delta_{mk}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B_{nm}(p-q) &= \int_{\Pi_q} G(R) \left[\left(\frac{3}{R^2} - \frac{3ik_0}{R} - k_0^2 \right) \alpha_n \alpha_m + \right. \\ &+ \left. \left(k_0^2 + \frac{ik_0}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \delta_{nm} \right] dy, \quad p \neq q. \\ B_{nm}(0) &= -\gamma_n \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$R = \sqrt{(y_1 - x_1(p))^2 + (y_2 - x_2(p))^2 + (y_3 - x_3(p))^2}, \quad (13)$$

а α_n задаются формулами

$$\alpha_n = \frac{x_n(p) - y_n}{|x(p) - y|}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Матрица системы линейных уравнений (10), получившаяся после дискретизации интегрального уравнения, имеет форму блочно-теплицевой матрицы. Очевидно, что основные вычислительные затраты при умножении матрицы СЛАУ на вектор, связаны с вычислением сумм вида

$$W(p) = \sum_{y(q) \in Q} B(p-q) V(q), \quad x(p) \in Q, \quad (15)$$

где трехмерные матрицы $B(p-q)$ определяются формулами (12)–(14).

Для вычисления $W(p)$ в узловых точках $x(p) \in Q$ требуется выполнить $\sim N_Q^2$ арифметических операций. Для уменьшения числа арифметических операций будем применять технику быстрого умножения теплицевых матриц на вектор, основанную на быстром дискретном преобразовании Фурье [20].

Доопределим величины $V(q)$ нулем в точках $x(q)$ параллелепипеда Π , не принадлежащих области Q . Тогда (15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} W(p_1, p_2, p_3) &= \\ &= \sum_{q_1=0}^{N_1-1} \sum_{q_2=0}^{N_2-1} \sum_{q_3=0}^{N_3-1} B(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) V(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \quad (16)$$

Очевидно, что при $x(p) \in Q$ значения $W(p)$ из (15) и (16) совпадают. В (16) матричная функция дискретного аргумента $B(p)$ определена для значений

$$\begin{aligned} & -(N_1 - 1) \leq p_1 \leq (N_1 - 1); \\ & -(N_2 - 1) \leq p_2 \leq (N_2 - 1); \\ & -(N_3 - 1) \leq p_3 \leq (N_3 - 1). \end{aligned}$$

Обозначим через Π_2 параллелепипед со сторонами $2N_1h_1$, $2N_2h_2$ и $2N_3h_3$. Продолжим матричную функцию дискретного аргумента $B(p_1, p_2, p_3)$ на все целочисленные значения p_1, p_2, p_3 , полагая ее периодической по каждой переменной с периодами соответственно $2N_1, 2N_2, 2N_3$. При этом доопределим функции $B(p_1, p_2, p_3)$ нулем в точках $(N_1, p_2, p_3), (p_1, N_2, p_3), (p_1, p_2, N_3)$, где p_1, p_2, p_3 – любые целые числа. Далее доопределим вектор-функцию дискретного аргумента $V(p_1, p_2, p_3)$ нулем во всех узловых точках Π_2 , не принадлежащих Π , и продолжим ее на все целочисленные значения p_1, p_2, p_3 , полагая ее периодической по каждой переменной с периодами соответственно $2N_1, 2N_2, 2N_3$.

Запишем выражение

$$\begin{aligned} W(p_1, p_2, p_3) &= \\ &= \sum_{q_1=0}^{2N_1-1} \sum_{q_2=0}^{2N_2-1} \sum_{q_3=0}^{2N_3-1} B(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) \times \\ &\times V(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом изложенного ясно, что при $x(p) \in \Pi$ функция $W(p_1, p_2, p_3)$ из (17) совпадает со значениями $W(p_1, p_2, p_3)$ из (16). Далее через Π и Π_2 будем обозначать целочисленные параллелепипеды с числом дискретных аргументов по каждой оси N_1, N_2, N_3 и $2N_1, 2N_2, 2N_3$ соответственно. Теперь, проводя дискретное преобразование Фурье по

каждой переменной от обеих частей (17), получим следующее равенство:

$$\tilde{W}(k_1, k_2, k_3) = \tilde{B}(k_1, k_2, k_3) \tilde{V}(k_1, k_2, k_3), \quad k \in \Pi_2. \quad (18)$$

Число арифметических операций и объем требуемой памяти для вычисления $W(p)$, $p \in \Pi$, оцениваются формулами [5, 17]:

$$T_A \approx 10N_1N_2N_3(\text{LOG}(N_1) + 2\text{LOG}(N_2) + 4\text{LOG}(N_3)). \quad (19)$$

$$M_A = 6(N_1 + 1)(N_2 + 1)(N_3 + 1) + 6N_1N_2N_3 + 12N_2N_3. \quad (20)$$

В (19) $\text{LOG}(N)$ обозначает целочисленный логарифм, т.е. сумму всех простых делителей числа N . Например, $\text{LOG}(1000) = 21$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены основные результаты исследований задач рассеяния электромагнитных волн на трехмерных диэлектрических структурах на основе объемных сингулярных интегральных уравнений. Приведены теоремы существования и единственности решений поставленных задач, в том числе для сред без потерь. На основе метода коллокации и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье изложен эффективный алгоритм решения рассматриваемых задач.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. // РЭ. 2006. Т. 51. № 10. С. 1155.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С. // РЭ. 2003. Т. 48. № 8. С. 912.
3. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции. М.: МФТИ, 1999.
4. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013.
5. Самохин А.Б. Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики. М.: Техносфера, 2021.
6. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
7. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
8. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели в электродинамике. М.: Высш. шк., 1991.
9. Livesay P.E., Chen K. // IEEE Trans. 1974. V. MTT-22. № 12. P. 1273.
10. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
11. Michlin S.G., Prösdorf S. Singular Integral Equations. N.Y.: Akademie Verlag, 1986.
12. Смирнов Ю.Г., Цупак А.А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М.: Русайнс, 2016.
13. Смирнов Ю.Г., Цупак А.А. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 4. С. 702.
14. Самохин А.Б. // РЭ. 2021. Т. 66. № 6. С. 571.
15. Самохин А.Б. // Дифф. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1215.
16. Самохин А.Б., Смирнов Ю.Г. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 1. С. 85.
17. Самохин А.Б., Самохина А.С. // Электромагн. волны и электрон. системы. 2012. Т. 17. № 9. С. 28.
18. Самохин А.Б., Самохина А.С., Шестопалов Ю.В. // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 9. С. 1251.
19. Самохин А.Б. // Рос. технол. журн. 2022. № 10. С. 70.
20. Воеводин В.В., Тыртышиников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.

К 85-ЛЕТИЮ ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ БЕССЕЛЕВЫХ ПУЧКОВ И ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

© 2023 г. С. Ю. Доброхотов^a, *, В. Е. Назайкинский^a, А. В. Цветкова^a^a Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
просп. Вернадского, 101, корп. 1, Москва, 119526 Российская Федерация

*E-mail: s.dobrokhотов@gmail.com

Поступила в редакцию 19.02.2023 г.

После доработки 19.02.2023 г.

Принята к публикации 25.03.2023 г.

Рассмотрены асимптотические решения типа бесселевых пучков трехмерного уравнения Гельмгольца, т.е. решения, имеющие максимумы в окрестности оси z и описываемые на нормальных к ней плоскостях функциями Бесселя. Поскольку функции Бесселя медленно убывают на бесконечности, то энергия таких решений оказывается неограниченной. Описаны подходы к локализации таких решений, основанные на их представлении в виде канонического оператора Маслова на подходящих лагранжевых многообразиях с простыми каустиками, имеющими вид вырожденных и невырожденных складок. Получены эффективные формулы для указанных решений в виде функций Бесселя и Эйри сложного аргумента.

DOI: 10.31857/S0033849423060037, EDN: XLSMQI

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассмотрим задачи, определяющие волновые пучки, связанные с функциями Бесселя. Если для описания волновых пучков использовать уравнение Гельмгольца

$$\tilde{\Delta}u + k^2u = 0, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1)$$

то решения, описывающие радиально симметричные пучки, локализованные в окрестности оси z и называемые пучками Бесселя, представляются в виде

$$u = \exp\left(\frac{i\beta z}{h}\right) J_0\left(\frac{\rho}{h}\right), \quad k^2 = \frac{\beta^2 + 1}{h^2}, \quad (2)$$

где J_0 — функция Бесселя, ρ — полярный радиус на плоскости $\mathbb{R}_{x_1, x_2}^2$ (т.е. $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$), $h > 0$, β — параметры, характеризующие пучок. Поскольку мы считаем, что пучок локализован в окрестности оси $z = 0$, то это означает, что параметр h предполагается малым. В этом случае частота k оказывается большой, и ее удобно представить в виде $k = k'/h$ и использовать k' вместо k (далее штрих не приводим).

Отметим, что квадрат модуля функции (2) (или ее вещественной части) неинтегрируем в $\mathbb{R}^3$ и не принадлежит естественному энергетическому

пространству, например $L^2(\mathbb{R}^3)$. Это обстоятельство затрудняет практическое использование волновых пучков такого типа.

Разумеется, эта проблема не является новой в волновых задачах. Рассмотрим, например, решение одномерного волнового уравнения с постоянной скоростью

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

в виде плоской волны

$$u = A \exp\left(\frac{i}{h} \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

(или вещественную часть этой функции), где $A = \text{const}$ — амплитуда, ω/h характеризует частоту. Понятно, что квадрат этой функции при каждом t неинтегрируем, но если мы умножим ее на функцию $\chi(x - ct)$, где $\chi(x)$ — гладкая финитная срезающая функция, равная 1 на некотором отрезке $[a, b]$ и равная нулю вне некоторого большего отрезка $[a - \delta, b + \delta]$ ($\delta > 0$), то получим решение (волновой пакет)

$$u = A \chi(x - ct) \exp\left(\frac{i}{h} (\omega t - kx)\right)$$

($k = \omega/c$ — волновое число), которое уже обладает конечной энергией.

В том случае, когда скорость $c(x)$ является переменной, решение волнового уравнения в виде

плоской волны найти, как правило, уже нельзя, но у него можно найти быстро осциллирующие асимптотические решения вида

$$u = A(x) \exp\left(\frac{i}{h}(\omega t - S(x))\right),$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{\omega}{c(y)} dy, \quad A(x) = \sqrt{c(x)},$$

где $h > 0$ — малый положительный параметр, характеризующий частоту осцилляций. Локализовать это решение можно, умножив на срезающую функцию χ , что дает

$$u = \sqrt{c(x)} \chi(X(x, t)) \exp\left(\frac{i}{h}(\omega t - S(x))\right),$$

$$X(x, t) = S^{-1}(S(x) - \omega t),$$

где $S^{-1}(y)$ — функция обратная к $S(x)$.

Вернемся к вопросу о локализации решения типа (2). Можно попытаться умножить его на некоторую гладкую финитную (срезающую) функцию $\chi(x_1, x_2, z)$, однако этот способ не дает нужного результата — получаемая функция перестает быть решением исследуемого уравнения. Причина состоит в том, что с точки зрения квазиклассического приближения и геометрической оптики решение (2) связано с задачами с каустиками и фокальными точками, и тогда срезающая функция, образно говоря, “переплывает” через особенности такого типа, поэтому введение срезающей функции требует более сложных рассуждений.

Изучение особенностей типа каустик и особенностей более общего типа — лагранжевых сингулярностей — относится к области науки, известной как теория катастроф. Ей посвящено большое количество публикаций как чисто математических, так и с приложениями к конкретным физическим задачам, связанным с распространением волн. Среди них укажем работы [1–4], которые содержат обширные библиографии. Рассматриваемые здесь задачи с одной стороны, достаточно просты — каустики имеют вид складки, а с другой — нестандартны, поскольку каустики оказываются вырожденными при проектировании на физическое пространство.

Напомним, что при наличии в задаче каустик и фокальных точек для построения асимптотических решений метод Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна (ВКБ) не работает, и поэтому следует применять другие подходы. Мы применим один из самых универсальных и мощных инструментов построения квазиклассических асимптотик — канонический оператор Маслова [5, 6]. При этом будем использовать недавно предложенные его модификации, дающие более эффективные формулы в окрестности каустик и, кроме того, позволяющие расширить класс задач, в которых канонический оператор может быть применен [7].

Также будем использовать простые приемы, которые позволяют выразить канонический оператор в окрестности каустик в виде специальных функций сложного аргумента [8].

2. КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР НА ЛАГРАНЖЕВОМ МНОГООБРАЗИИ, ОТВЕЧАЮЩЕМ ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ, И ИХ “ЛОКАЛИЗАЦИЯ”

Канонический оператор Маслова связан с геометрическими объектами в фазовых пространствах — лагранжевыми многообразиями, которые возникают при исследовании задачи классической гамильтоновой механики, соответствующей исходной задаче в частных производных. Приведем такие многообразия, отвечающие функциям Бесселя, кратко повторив для полноты изложения некоторые соображения из [9].

Функции Бесселя $J_s\left(\frac{\rho}{h}\right)$ являются решением обыкновенного дифференциального уравнения Бесселя, но нам удобнее ввести функции $J_s\left(\frac{\rho}{h}\right) \exp(is\varphi)$ (φ — полярный угол) и рассмотреть их как с овместное решение спектральных задач для коммутирующих операторов с частными производными — оператора Лапласа и оператора углового момента

$$\hat{p}^2 w \equiv -h^2 \Delta w = w,$$

$$\hat{M} w \equiv (x_2 \hat{p}_1 - x_1 \hat{p}_2) w = \gamma w,$$

$$\hat{p}_j = -ih \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \gamma = sh.$$

Операторам $\hat{H} = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2$ и $\hat{M}$ соответствуют символы $H = p_1^2 + p_2^2$ и $M = x_2 p_1 - x_1 p_2$, определяющие два гамильтониана в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{\mathbf{p}, \mathbf{x}}^4$ с координатами $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Как видим, скобка Пуассона $\{H, M\} = 0$ и, согласно теореме Лиувилля, множество $\Lambda^B(\gamma) = \{(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{\mathbf{p}, \mathbf{x}}^4 : H = 1, M = \gamma\}$ определяет двумерное лагранжево многообразие, инвариантное относительно сдвигов g_H^t, g_M^τ вдоль траекторий гамильтоновых систем с гамильтонианами H и M . Это многообразие некомпактно и топологически представляет собой двумерный “лиувилев” цилиндр в $\mathbb{R}_{\mathbf{p}, \mathbf{x}}^4$, который можно записать в виде

$$\Lambda^B = \{\mathbf{p} = \mathbf{P}^B(\alpha, \psi) = \mathbf{n}(\psi),$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}^B(\alpha, \psi) = \alpha \mathbf{n}(\psi) - \gamma \mathbf{n}'(\psi) | \alpha \in \mathbb{R}, \psi \in [0, 2\pi)\},$$

$$\mathbf{n}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Параметры α, ψ определяют координаты на многообразии Λ^B . Зададим на Λ^B некоторую гладкую (2π -периодическую по ψ) функцию $A(\alpha, \psi)$. Кроме того, зафиксируем на Λ^B (центральную) точку $(\alpha = +0, \psi = 0)$. Якобиан $J^B = \det \frac{\partial \mathbf{X}^B(\alpha, \psi)}{\partial(\alpha, \psi)}$ проектирования многообразия Λ^B на физическую плоскость $\mathbb{R}_x^2$ равен α . В случае, когда $\gamma \neq 0$, равенство $\alpha = 0$ определяют окружность

$$\Gamma = \{\mathbf{p} = \mathbf{n}(\psi), \mathbf{x} = -\gamma \mathbf{n}'(\psi)\} \in \Lambda^B \in \mathbb{R}_{\mathbf{p}, \mathbf{x}}^4,$$

и ее проекция $\Gamma_x = \{\mathbf{x} = -\gamma \mathbf{n}'(\psi)\} \in \mathbb{R}_x^2$ на плоскость $\mathbb{R}_x^2$ также является окружностью. Кривая Γ_x — это простая каустика типа складки [1, 2]. Однако в случае $\gamma = 0$ особое множество вырождается в точку $\mathbf{x} = 0$ — “вырожденную складку”.

Проекция многообразия Λ^B на физическую плоскость $\mathbb{R}_x^2$ двулистно накрывает двумерную плоскость с удаленной внутренностью круга $|\mathbf{x}| < \gamma$. В данной работе нас интересует вырожденный случай $\gamma = 0$, тогда проекция Λ^B в физическое пространство — это две склеенные в точке $\mathbf{x} = 0$ плоскости.

Нам потребуется фаза на Λ^B

$$S = \int_{(+0,0)}^{(\alpha,\psi)} \langle \mathbf{P}^B, d\mathbf{X}^B \rangle = \alpha$$

и индекс Маслова $m(\alpha, \psi)$ пути, соединяющего центральную точку $(\alpha = +0, \psi = 0)$ с точкой (α, ψ) :

$$m = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arg \det \left(\frac{\partial(\mathbf{X} - i\varepsilon \mathbf{P})}{\partial(\alpha, \psi)} \right) \Big|_{(+0,0)}^{(\alpha,\psi)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arg(\alpha - i\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases}.$$

В силу этого факта индекс Маслова замкнутых путей на Λ^B равен 0: замкнутый путь можно выбрать с $\alpha \neq 0$, тогда приращение аргумента якобиана равно 0, что и означает, что индекс равен нулю. У каждой точки $\mathbf{x} \neq 0$, такой что $\mathbf{x} = \rho \mathbf{n}(\varphi)$ ($\rho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ — полярные координаты) на плоскости $\mathbb{R}_x^2$ существует два прообраза на лагранжевом многообразии Λ^B с координатами

$$\alpha^+ = \rho, \quad \psi^+ = \varphi \quad \text{и} \quad \alpha^- = -\rho, \quad \psi^- = \varphi + \pi.$$

Знак “+” соответствует верхнему листу многообразия Λ^B , а знак “−” — нижнему.

Построим функцию w в виде канонического оператора Маслова $K_{\Lambda^B}^h[A]$. Классическая конструкция канонического оператора предполагает покрытие лагранжева многообразия картами (областями) Ω_j , в которых не обращается в ноль один из якобианов проектирования на канонические плоскости со смешанными координатно-импульсными переменными, последующее построение локальных “предканонических операторов” и их суммирование. В случае особых карт, т.е. когда якобиан $J^B = \det \frac{\partial \mathbf{X}^B}{\partial(\alpha, \psi)}$ обращается в ноль на подмноже-

стве карты Ω_j , предканонический оператор определяется в виде интеграла по импульсным переменным. В рассматриваемом примере карт, по меньшей мере, четыре и все они особые [10]. В работе [7] предложены новые интегральные представления для предканонических операторов, основанные на интегрировании сразу по части подходящих координат на лагранжевом многообразии. Такие представления, во-первых, часто упрощают вычисление интегралов, во-вторых, сокращают число карт и, в-третьих, позволяют расширить класс задач, асимптотические решения которых можно найти с помощью канонического оператора.

Применение модифицированных формул для канонического оператора в рассматриваемом примере дает такое представление [9]:

$$w = K_{\Lambda^B}^h A = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi h}} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} e^{i \operatorname{pr} \left(\frac{i}{h} \langle \mathbf{n}(\psi), \mathbf{x} \rangle \right)} A(\langle \mathbf{n}(\psi), \mathbf{x} \rangle, \psi) d\psi. \quad (3)$$

Если выбрать $A = 1$, то, очевидно, получим

$$w = K_{\Lambda^B}^h 1 = \frac{\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{h}} J_0\left(\frac{|\mathbf{x}|}{h}\right). \quad (4)$$

Вместе с тем из общих свойств канонического оператора следует, что при $h \ll 1$ носитель функции w совпадает с проекцией носителя $\operatorname{supp} A(\alpha, \psi)$ на физическую плоскость $\mathbb{R}_x^2$. Поэтому, выбирая A финитной по переменной α , получим уже локализованную функцию. Задача состоит в том, чтобы выразить (3) через специальные функции. Имеется несколько способов вывода соответствующих формул [8, 11], мы используем простой “наивный” способ, основанный на сравнении асимптотик функций Бесселя и ВКБ асимптотики канонического оператора вне окрестности фокальной точки.

Именно, с учетом равенств для S , J^B , m , используя стандартную ВКБ-формулу (в неособой карте) для функции (3), при $|x| \geq \delta > 0$ получим

$$\begin{aligned} w = & \exp\left(-\frac{im(\alpha^+)\pi}{2}\right) \frac{A(\alpha^+, \psi^+)}{\sqrt{|J^B(\alpha^+, \psi^+)|}} \times \\ & \times \exp\left(\frac{iS(\alpha^+, \psi^+)}{h}\right) + \exp\left(-\frac{im(\alpha^-)\pi}{2}\right) \times \\ & \times \frac{A(\alpha^-, \psi^-)}{\sqrt{|J^B(\alpha^-, \psi^-)|}} \exp\left(\frac{iS(\alpha^-, \psi^-)}{h}\right) = \\ & = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \left(\frac{A(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho}} \exp\left(\frac{i}{h}\rho - \frac{i\pi}{4}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{A(-\rho, \varphi + \pi)}{\sqrt{\rho}} \exp\left(-\frac{i}{h}\rho + \frac{i\pi}{4}\right)\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Между тем в малой окрестности начала координат (фокальной точки) функцию (3) можно представить в виде комбинации функции Бесселя и, возможно, ее производной, т.е. функции J_1 [11]. Такое представление порождает анзац для асимптотики решения в виде

$$w = a_1(x, h)J_0(\Phi(x, h)) + ia_2(x, h)J_1(\Phi(x, h)), \quad (6)$$

где $\Phi(x, h)$, $a_j(x, h)$ – некоторые гладкие при $|x| > 0$ функции, причем $\Phi(x, h) > 0$ при $|x| > 0$.

Для получения такого анзаца и его дальнейшей реализации используем подход, апеллирующий к лагранжеву многообразию и возможности представления канонического оператора в окрестности каустик в виде некоторых специальных функций, а не такие подходы, как метод эталонных уравнений или метод сращивания асимптотических разложений. Иначе говоря, мы упрощаем ответ, полученный в виде канонического оператора, используя общий подход, находящийся в рамках теории функций. Конкретные дифференциальные уравнения проявляются при построении подходящих лагранжевых многообразий.

Укажем еще на некоторые важные факты. Хотя представление (5) не работает в фокальных точках, где $J^B = 0$, сами функции $J^B(\alpha^\pm, \psi^\pm)$, $S(\alpha^\pm, \psi^\pm)$, $A(\alpha^\pm, \psi^\pm)$ определены, как функции от (x_1, x_2) , при этом анзац (6) работает в достаточно широкой окрестности нулей функции $\Phi(x, h)$ (подробнее см. далее замечание 4). Таким образом, сравнивая асимптотику (6) с ВКБ-асимптотикой (5) в неособой области (где $\rho \neq 0$), можно получить выражения для Φ , $a_{1,2}$ через S , J^B и A . Именно, считая, что при отходе от точки $x = 0$ фаза возрастает, можно заменить функции Бесселя на их асимптотики, что дает

$$\begin{aligned} w \approx & a_1(x, h) \sqrt{\frac{2}{\pi\Phi(x, h)}} \cos\left(\Phi(x, h) - \frac{\pi}{4}\right) + \\ & + ia_2(x, h) \sqrt{\frac{2}{\pi\Phi(x, h)}} \sin\left(\Phi(x, h) - \frac{\pi}{4}\right) = \\ & = \sqrt{\frac{2}{\pi\Phi(x, h)}} \left(\frac{a_1(x, h) + a_2(x, h)}{2} \times \right. \\ & \times \exp\left(i\Phi(x, h) - \frac{i\pi}{4}\right) + \frac{a_1(x, h) - a_2(x, h)}{2} \times \\ & \times \exp\left(-i\Phi(x, h) + \frac{i\pi}{4}\right) \Big). \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы определить функции Φ, a_j , сравним (7) и (5), откуда находим

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{\rho}{h}, \quad a_1 = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2h}} \times \\ \times (A(\rho, \varphi) + A(-\rho, \varphi + \pi)), \\ a_2 = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2h}} (A(\rho, \varphi) - A(-\rho, \varphi + \pi)). \end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению.

Утверждение 1. Справедливо представление

$$\begin{aligned} w = K_{\Lambda^B}^h A = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2h}} \times \\ \times \left((A(\rho, \varphi) + A(-\rho, \varphi + \pi)) J_0\left(\frac{\rho}{h}\right) + \right. \\ \left. + i(A(\rho, \varphi) - A(-\rho, \varphi + \pi)) J_1\left(\frac{\rho}{h}\right) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Замечание 1. Если $A \equiv 1$, то (8) совпадает с представлением (4).

Замечание 2. Если выбрать функцию A финитной, то и функция (8) также будет финитной.

Замечание 3. Отметим, что полученная функция гладко зависит от переменных (x_1, x_2) . Этот факт легко установить в радиально симметричном случае, когда A зависит только от α . Действительно, в этом случае a_1 и a_2/ρ , а также $J_0(\rho/h)$ и $\rho J_1(\rho/h)$ – четные по ρ функции. В случае, когда A зависит также и от φ , раскладывая в ряд Фурье, получаем гладкие по (x_1, x_2) функции:

$$\begin{aligned} A(\rho, \varphi) + A(-\rho, \varphi + \pi) = \frac{c_0(\rho) + c_0(-\rho)}{2} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [\rho(c_n(\rho) + (-1)^n c_n(-\rho)) \cos(n\varphi) + \\ + (d_n(\rho) + (-1)^n d_n(-\rho)) \sin(n\varphi)], \end{aligned}$$

$$\rho(A(\rho, \varphi) - A(-\rho, \varphi + \pi)) = \rho \frac{c_0(\rho) - c_0(-\rho)}{2} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [\rho(c_n(\rho) - (-1)^n c_n(-\rho)) \cos(n\varphi) + \\ + (d_n(\rho) - (-1)^n d_n(-\rho)) \sin(n\varphi)].$$

Замечание 4. Отметим также, что формулу (8) можно было получить, опираясь на модифицированные интегральные представления для канонического оператора и формулу коммутации канонического оператора с псевдодифференциальным [10]. Здесь же мы, по существу, воспользовались тем фактом, что уравнения $\mathbf{p} = \mathbf{n}(\psi)$, $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{n}(\psi)$ локально задают нормальную форму в окрестности вырожденных особенностей лагранжевых многообразий типа складки. В окрестности таких особенностей канонический оператор представляется в виде функций Бесселя, что позволяет в результате простого сравнения асимптотик функций Бесселя и ВКБ получать глобальные формулы. Такой подход кажется нам более простым и легко алгоритмизуемым. Поэтому будем использовать его и далее, учитывая соображение о нормальных формах.

3. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ БЕССЕЛЕВЫ ПУЧКИ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Обсудим теперь вопрос о бесселевых пучках в трехмерном случае. В некоторых случаях, чтобы получить формулы для пучков, можно использовать комплексный метод ВКБ и его модификации [12]. Однако здесь обсудим более простой путь, не вполне аккуратный с математической точки зрения, но конструктивный и эффективный с точки зрения конкретных вычислений, который состоит в следующем. Пучки являются (асимптотическими) решениями уравнения Гельмгольца (1), удовлетворяющими при $z = 0$ условию

$$u|_{z=0} = w = K_{\Lambda^B}^h[A(\alpha)]. \quad (9)$$

Будем считать, что $A(\alpha)$ — финитная функция, причем для простоты будем считать, что она не зависит от ψ . Решение задачи (1), (9) не единственно: можно найти два решения, описывающие пучки, условно говоря, распространяющиеся в разные стороны вдоль оси z , и нужно добавить еще одно условие, выделяющее один из пучков. Но формально можно представить уравнения Гельмгольца в виде (напомним, что здесь и далее в качестве k мы берем $k' = hk$ и опускаем штрихи)

$$\left(ih \frac{\partial}{\partial z} + \sqrt{k^2 + h^2 \Delta} \right) \left(ih \frac{\partial}{\partial z} - \sqrt{k^2 + h^2 \Delta} \right) u = 0. \quad (10)$$

Тогда решения, описывающие волны, бегущие в одну сторону, будут удовлетворять одному из псевдодифференциальных уравнений

$$-ih \frac{\partial u}{\partial z} = \pm \sqrt{k^2 + h^2 \Delta} u. \quad (11)$$

Переменная z играет роль времени, причем производная по z входит в эти уравнения в первой степени и они в некотором смысле аналогичны уравнениям Шредингера. Интересующее нас решение является решением задачи Коши для (11) с начальным условием (9). Эти уравнения являются некорректными, но их использование как вспомогательных для вычисления квазиклассических асимптотик уравнения Гельмгольца с заданными граничными условиями представляется очень удобным: для получения квазиклассических асимптотик решения задачи Коши имеется простой конструктивный алгоритм [6]. Проще говоря, некорректность не проявляется на классе конструируемых асимптотических решений и, после того как асимптотическое решение u задачи Коши (9), (11) будет построено, его прямая подстановка в уравнение Гельмгольца дает малую невязку по параметру h . То есть получаемая функция является, по крайней мере, формальным асимптотическим решением уравнения Гельмгольца.

Ограничимся в дальнейшем уравнением со знаком “+”, уравнение со знаком “−” рассматривается аналогично. Для построения асимптотических решений задачи (11), (9) воспользуемся стандартной схемой [5, 6], состоящей из следующих шагов. Символ оператора $-\sqrt{k^2 + h^2 \Delta}$ — классический гамильтониан $L = -\sqrt{k^2 - |\mathbf{p}|^2}$ — и начальное условие (9) порождают задачу Коши для гамильтоновой системы:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{k^2 - |\mathbf{p}|^2}}, \quad (12)$$

с начальными условиями из Λ^B

$$\mathbf{p}|_{z=0} = \mathbf{n}(\psi), \quad \mathbf{x}|_{z=0} = \alpha \mathbf{n}(\psi).$$

Ее решения определяют фазовый поток g_L^z и дают семейство лагранжевых многообразий $\Lambda_z^B = g_L^z \Lambda^B$, полученных сдвигом начального многообразия Λ^B на время z

$$\Lambda_z^B = \left\{ \mathbf{p} = \mathbf{P}_z(\alpha, \psi) \equiv \mathbf{n}(\psi), \mathbf{x} = \mathbf{X}_z(\alpha, \psi) \equiv \right. \\ \left. \equiv \left(\alpha + \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}} \right) \mathbf{n}(\psi) \right\}. \quad (13)$$

Как видим, многообразия Λ_z^B совпадают, как геометрические объекты, т.е. Λ^B инвариантно отно-

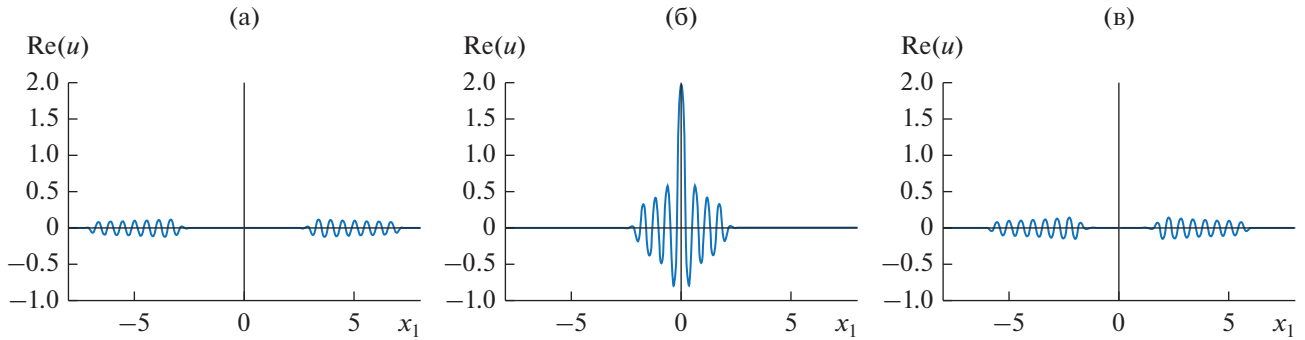


Рис. 1. Действительная часть локализованного пучка Бесселя (14) в зависимости от x_1 при $x_2 = 0$ для $z = -2$ (а), 0 (б) и 1.5 (в).

сительно сдвигов g_L^z . Амплитуда A сохраняется вдоль траекторий системы (12), поэтому на лагранжевых многообразиях Λ_z^B амплитуда равна $A(\alpha)$. Поскольку фаза, как решение уравнения эйконала, определяется неоднозначно, а с точностью до некоторой функции, зависящей от z , необходимо определить набег фазы в асимптотике рассматриваемого решения. Он определяется интегралом

$$\phi = \int_0^z (\langle \mathbf{p}, L_{\mathbf{p}} \rangle - L) dz = z \frac{k^2}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Координаты (α, ψ) можно использовать на всех многообразиях Λ_z^B . Тогда согласно общей теории [5, 6] решение задачи Коши (11), (9) представляется в виде

$$u = \exp\left(\frac{i}{h} \frac{zk^2}{\sqrt{1 - k^2}}\right) K_{\Lambda_z^B}^h [A(\alpha)],$$

причем в качестве центральной точки на Λ_z^B выбирается точка с координатами $(0+, 0)$, как и на начальном многообразии. Перейдем в последней формуле к координатам

$$(\alpha', \psi) = \left(\alpha + \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}, \psi \right).$$

Поскольку в старой системе координат центральная точка имела координаты $\alpha = +0$, $\psi = +0$, то в новой системе координат центральная точка будет иметь координаты $\alpha' = +\frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}$, $\psi = +0$. Далее воспользуемся тем, что смена отмеченной точки дает дополнительный фазовый множитель, т.е. канонический оператор Маслова на лагранжевом многообразии Λ_z^B с отмеченной точкой $\left(+\frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}, +0 \right)$ равен каноническому оператору

Маслова на лагранжевом многообразии Λ_z^B с отмеченной точкой $(+0, +0)$, умноженному на $\exp\left(-\frac{iz}{h\sqrt{k^2 - 1}}\right)$. Учитывая эти соображения, полученный ранее фазовый множитель $\exp\left(\frac{i\phi}{h}\right)$, а также тот факт, что Λ_z^B в новых координатах совпадает с Λ^B , приходим к окончательной формуле

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(\frac{iz\sqrt{k^2 - 1}}{h}\right) K_{\Lambda^B}^h \left[A\left(\alpha' - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right) \right] = \\ &= \exp\left(\frac{iz\sqrt{k^2 - 1}}{h}\right) \frac{\sqrt{\pi} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2h}} \times \\ &\times \left(\left(A\left(\rho - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right) + A\left(-\rho - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right) \right) J_0\left(\frac{\rho}{h}\right) + \right. \\ &\left. + i \left(A\left(\rho - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right) - A\left(-\rho - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right) \right) J_1\left(\frac{\rho}{h}\right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Она определяет асимптотические решения, описывающие локализованные бesselовы пучки уравнения Гельмгольца. Полученное решение проиллюстрировано на рис. 1.

Замечание 5. В теории волновых пучков часто используется параксиальное приближение. Напомним простой вывод соответствующего уравнения в рассматриваемом случае. Можно искать решение в виде

$$u = \exp\left(\frac{ikz}{h}\right) v(z, x_1, x_2)$$

и считать, что амплитудная функция v меняется медленно по сравнению с быстроосциллирующей плоской волной. Тогда, подставляя решение такого вида в (1), можно пренебречь второй производной $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, откуда приходим к уравнению Шредингера

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} v = \frac{\hbar^2}{2k} \Delta v. \quad (15)$$

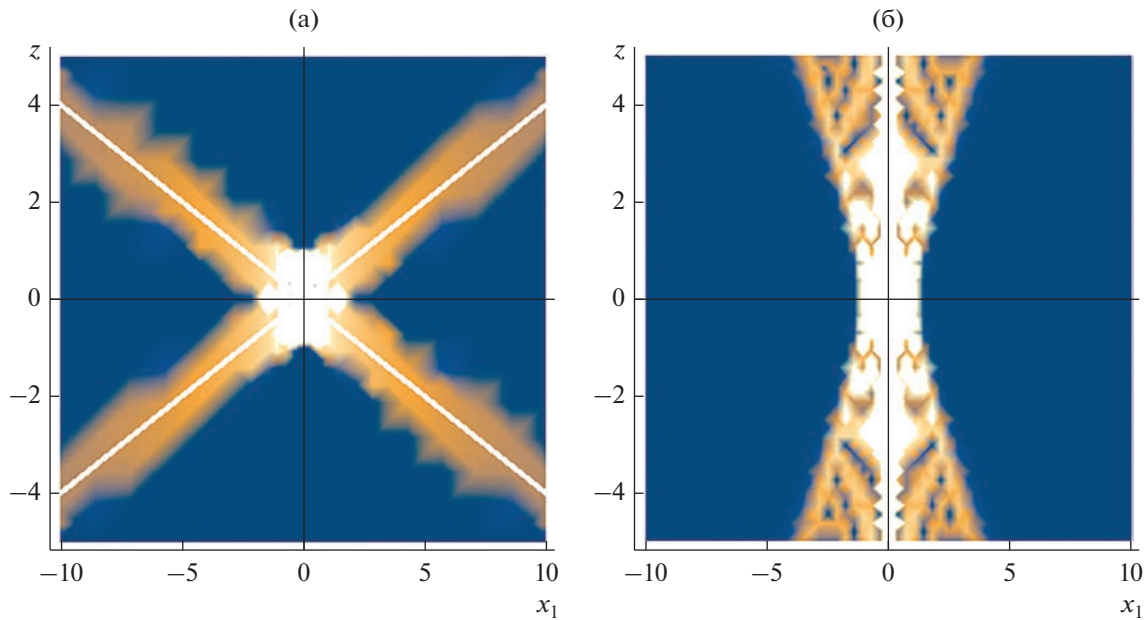


Рис. 2. Интенсивность локализованного пучка Бесселя (14) при $x_2 = 0$ (а) и пучка Лагерра–Гаусса (39) при $x_2 = 0$ (б): чем больше модуль значения, тем более светлый цвет.

(Это же уравнение можно получить, по крайней мере формально, из (11) в результате представления в (11) оператора

$$\sqrt{k^2 - h^2 \Delta} = k - \frac{1}{2k} h^2 \Delta + O(1/k^3)$$

и последующего выделения из решения множителя $\exp(ikz/h)$.)

Асимптотика решения $v(z, \mathbf{x})$ задачи (15) с начальным условием (9) определяется каноническим оператором $K_{\tilde{\Lambda}_z^B}^h A$, где $\tilde{\Lambda}_z^B$ получен сдвигом Λ^B вдоль гамильтонова векторного поля с гамильтонианом $\tilde{L} = \frac{1}{2k} |\mathbf{p}|^2$ и принимает вид

$$\tilde{\Lambda}_z^B = \left\{ \mathbf{x} = \left(\alpha + \frac{z}{k} \right) \mathbf{n}(\psi), \quad \mathbf{p} = \mathbf{n}(\psi) \right\}.$$

Таким образом, в параксиальном приближении

$$\begin{aligned} u &\approx \exp\left(\frac{ikz}{h}\right) K_{\tilde{\Lambda}_z^B}^h [A] \approx \\ &\approx \exp\left(\frac{izk}{h} \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)\right) \frac{\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2h}} \times \\ &\times \left(\left(A\left(\mathbf{p} - \frac{z}{k}\right) + A\left(-\mathbf{p} - \frac{z}{k}\right) \right) J_0\left(\frac{\rho}{h}\right) + \right. \\ &\left. + i \left(A\left(\mathbf{p} - \frac{z}{k}\right) - A\left(-\mathbf{p} - \frac{z}{k}\right) \right) J_1\left(\frac{\rho}{h}\right) \right), \end{aligned}$$

что близко к решению (14) при больших k .

4. “СИЛЬНАЯ” ЛОКАЛИЗАЦИЯ БЕССЕЛЕВЫХ ПУЧКОВ И АСИМПТОТИКА ПУЧКОВ ЛАГЕРРА–ГАУССА В РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Как отмечено выше, проведенная локализация бesselевых пучков имеет такое свойство, что чем сильнее их локализация, тем на меньшем отрезке оси z их амплитуда не обращается в ноль. Вместе с тем хорошо известно, что гауссовы пучки распространяются на далекие расстояния, не сильно расплываясь. При этом, если в нормальной плоскости к оси распространения z имеются осцилляции, то возникают известные пучки Лагерра–Гаусса (подробнее, а также про другие классы пучков см. [13, 14]). Мы хотим показать, что такие пучки также представляют собой локализацию бesselевых пучков, но уже другого типа. При этом, в отличие от локализованных пучков Бесселя, которые при движении вдоль оси z сначала собираются, фокусируются, а затем расплываются (рис. 2а, ось z направлена вверх), пучки Лагерра–Гаусса практически не расплываются, а распространяются в канале (рис. 2б).

Отметим, что медленное затухание бesselевых пучков в направлении, нормальном к оси z , имеет геометрическую природу: лагранжево многообразие Λ^B не компактно, поэтому (асимптотический) носитель канонического оператора K_{Λ^B} — это двумерная плоскость. Напомним, что лагранжево многообразие Λ^B представляет собой совместную поверхность уровня гамильтонианов

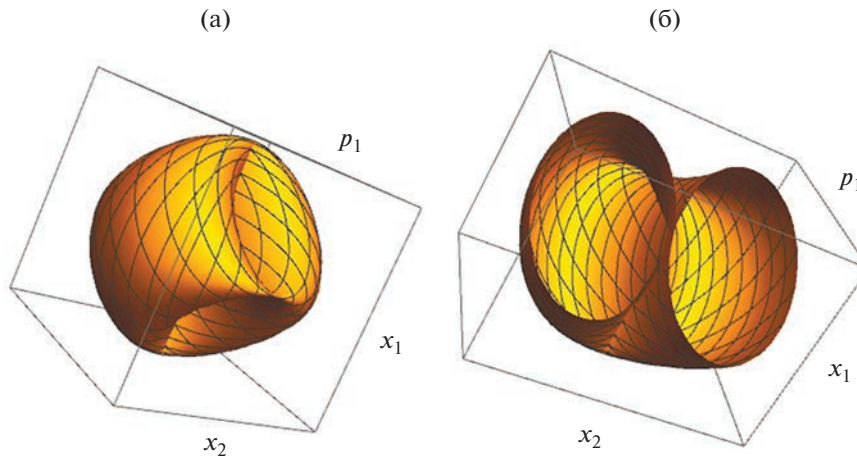


Рис. 3. Лагранжево многообразие Λ^L (а) и его сечение (б).

$H = p_1^2 + p_2^2$ и $M = p_1x_2 - p_2x_1$ и некомпактность связана с гамильтонианом H . Заменим первый гамильтониан на гамильтониан гармонического осциллятора $\mathcal{H} = p_1^2 + p_2^2 + \sigma_0^2(x_1^2 + x_2^2)$, тогда задаваемая константами $\mathcal{E} > 0, \gamma \geq 0$ поверхность уровня

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}, \quad M = \gamma \quad (16)$$

— это ограниченное множество, представляющее при $\gamma \neq 0$ двумерный тор Лиувилля (двумерное лагранжево многообразие) Λ^L (рис. 3). Вместо энергии $\mathcal{E}$ удобно использовать другой параметр $R_0 = \frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\sigma_0}$, тогда проекция Λ^L на двумерную плоскость $\mathbb{R}_x^2$ двусторонне покрывает кольцо с границами-окружностями $\rho \equiv |\mathbf{x}| = \gamma$ и $|\mathbf{x}| = R_0$. В радиально симметричном случае $\gamma = 0$, т.е. внутренняя граница стягивается в точку, Λ^L превращается в вырожденный тор, проекция Λ^L на физическую плоскость $\mathbb{R}_x^2$ становится кругом и, в отличие от проекции Λ^B , является *ограниченным* множеством. При этом, забегая вперед, скажем, что его граница — окружность $|\mathbf{x}| = R_0$ — это простая каустика, а точка $\mathbf{x} = 0$, как и в случае многообразия Λ^B , это сильная фокальная точка, представляющая собой вырожденную простую кастику. Именно этот случай с $\gamma = 0$ будем рассматривать далее.

Схема дальнейших рассуждений аналогична, используемой в разд. 3. Сначала строим канонический оператор Маслова, отвечающий многообразие Λ^L , причем ограничиваемся радиально симметричным случаем и представляем его в виде функций Бесселя и Эйри. При квантовании симво-

лов гамильтонианов $\mathcal{H}$ и M получаем двумерный оператор Шредингера $\hat{\mathcal{H}}$ для радиально симметричного гармонического осциллятора и двумерный оператор $\hat{M}$ момента. Поэтому построенные функции представляют собой асимптотики при больших номерах радиально симметричных собственных функций оператора $\hat{\mathcal{H}}$, которые, как известно, представляются в виде функций Гаусса–Лагерра.

Затем строим асимптотические решения задачи Коши с начальными условиями в виде канонического оператора, заданного на многообразии Λ^L . Для упрощения вычислений вместо уравнения (11) мы используем его параксиальное приближение. Именно, будем искать решение трехмерного уравнения Гельмгольца в виде

$$u = \exp\left(-\frac{ikz}{h}\right)v(z, \mathbf{x}),$$

пренебрегая второй производной $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$. Получим задачу Коши для уравнения Шредингера

$$-ih \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{2k} h^2 \Delta v, \quad v|_{z=0} = K_{\Lambda^L}[1]. \quad (17)$$

Тогда асимптотика решения при произвольном z определяется каноническим оператором $K_{\Lambda^L}[1]$,

где $\Lambda_z^L = g_x^z(\Lambda^L)$ получено сдвигом вдоль гамильтонова векторного поля с гамильтонианом $\mathcal{L} = -\frac{1}{2k} |\mathbf{p}|^2$ (представление для полученного канонического оператора в виде специальных функций будет приведено ниже). Поскольку носитель полученного асимптотического решения в плоскостях, нормальных к оси z , — ограниченное множество, то никаких срезающих функций в этой конструкции использовать не нужно.

Замечание 6. Отметим, что здесь, как и в предыдущем разделе, вместо параксиального приближения можно использовать представление (11) для уравнения Гельмгольца и сдвигать начальное многообразие Λ^L вдоль траекторий соответствующих гамильтоновых систем. При этом полученное многообразие будет иметь особенности того же типа, что и Λ_z^L , однако вычисления оказываются более сложными, что, видимо, приводит к более громоздким формулам. Мы планируем подробно изучить этот вопрос в дальнейших работах.

4.1. Лагранжево многообразие для двумерного радиально симметричного гармонического осциллятора

Опишем подробно многообразие Λ^L , объекты на нем и построим отвечающий им канонический оператор.

Утверждение 2 состоит из семи тезисов.

1. Множество Λ^L в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^4$, задаваемое равенствами (16), — гладкое двумерное лагранжево многообразие, которое может быть описано равенствами

$$\begin{aligned}\Lambda^L &= \{p = P^L(\alpha, \beta) = -R_0 \sigma_0 \mathbf{n}(\alpha + \beta) \sin \beta, \\ \mathbf{x} &= X^L(\alpha, \beta) = \\ &= R_0 \mathbf{n}(\alpha + \beta) \cos \beta, \alpha \in (-\pi, \pi], \beta \in [0, \pi)\},\end{aligned}\quad (18)$$

где, как и раньше, $\mathbf{n}(\psi) = (\cos \psi, \sin \psi)^T$ — единичный вектор.

2. В качестве инвариантной (относительно потоков $g_{\mathcal{H}}^t$ и g_M^τ) меры можно выбрать $d\alpha \wedge d\beta$. Действительно, при действии фазового потока $g_{\mathcal{H}}^t$ получаем

$$\begin{aligned}g_{\mathcal{H}}^t(\Lambda^L) &= \{p = -R_0 \sigma_0 \mathbf{n}(\alpha + \beta) \sin(\beta + \sigma_0 t), \\ \mathbf{x} &= R_0 \mathbf{n}(\alpha + \beta) \cos(\beta + \sigma_0 t)\},\end{aligned}$$

т.е. координата β сдвигается на $\sigma_0 t$, а координата α сдвигается на $-\sigma_0 t$.

При действии фазового потока g_M^τ имеем

$$\begin{aligned}g_M^\tau(\Lambda^L) &= \{p = -R_0 \sigma_0 \mathbf{n}(\alpha + \beta + \tau) \sin \beta, \\ \mathbf{x} &= R_0 \mathbf{n}(\alpha + \beta + \tau) \cos \beta\},\end{aligned}$$

т.е. координата α сдвигается на τ .

3. Матрицы Якоби $\frac{\partial(X_1^L, X_2^L)}{\partial(\alpha, \beta)}$, $\frac{\partial(P_1^L, P_2^L)}{\partial(\alpha, \beta)}$ проектирования многообразия Λ^L на соответственно плоскости $\mathbb{R}_x^2$ и $\mathbb{R}_p^2$ имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^L}{\partial(\alpha, \beta)} &= (R_0 \sigma_0 \mathbf{n}_\perp(\alpha + \beta) \cos \beta, \\ &-R_0 \sigma_0 (\mathbf{n}(\alpha + \beta) \sin \beta - \mathbf{n}_\perp(\alpha + \beta) \cos \beta)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P^L}{\partial(\alpha, \beta)} &= (-R_0 \sigma_0 \mathbf{n}_\perp(\alpha + \beta) \sin \beta, \\ &-R_0 \sigma_0 (\mathbf{n}(\alpha + \beta) \cos \beta + \mathbf{n}_\perp(\alpha + \beta) \sin \beta)),\end{aligned}\quad (19)$$

$$\mathbf{n}_\perp(\gamma) = \begin{pmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix},\quad (20)$$

и якобиан проектирования на плоскость $\mathbb{R}_x^2$ определяется выражением

$$J^L = \det \frac{\partial X^L}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{R_0^2}{2} \sin(2\beta).$$

Таким образом, фокальные точки на Λ^L определяются уравнениями $\beta = 0$, тогда $\mathbf{x} = R_0 \mathbf{n}(\alpha)$, или $\beta = \pi/2$, тогда $\mathbf{x} = 0$.

Множество $\mathbf{x} = R_0 \mathbf{n}(\alpha)$ образует окружность Γ радиусом R_0 . Ее прообраз на Λ^L — также окружность в фазовом пространстве, лежащая в плоскости $p = 0$. При этом каустика Γ — простая, ранг матрицы Якоби на ней равен 1.

Точка $\mathbf{x} = 0$ — фокальная точка — лагранжева сингулярность не общего положения, ее прообраз на Λ^L — окружность $|p| = R_0 \sigma_0$ в плоскости $\mathbf{x} = 0$ в четырехмерном фазовом пространстве.

4. Проекция Λ^L на конфигурационную плоскость — это круг $|\mathbf{x}| \leq R_0$, а граница этого круга — простая каустика Γ . При этом Λ^L накрывает $0 < |\mathbf{x}| < R_0$ двукратно. Точка $\mathbf{x}^0 = R_0 \mathbf{n}(\alpha^0 + \beta^0) \cos \beta^0$ имеет два прообраза на Λ^L : точку $(\alpha = \alpha^0, \beta = \beta^0)$ и точку $(\alpha = \alpha^0 + 2\beta^0, \beta = \pi - \beta^0)$.

Для определения канонического оператора следует зафиксировать центральную точку. Выберем ее в виде $\alpha = +0, \beta = +0$.

5. Вычислим индексы Маслова путей в неособых точках. Рассмотрим путь $\{\alpha = +0, \beta = t | t \in [0, \pi)\}$. В центральной точке с координатами $\alpha = +0, \beta = +0$ якобиан J^L положителен, и мы выберем индекс в этой точке равным 0. Поскольку якобиан в точках с координатой $\beta \in (+0, \pi/2 - 0)$ также положителен, то индекс в таких точках тоже равен 0. Вычислим индекс в точках с координатами

$\beta \in (\pi/2 + 0, \pi - 0)$. Для этого нужно вычислить приращение аргумента функции

$$J_\varepsilon = \det \frac{\partial (\mathbf{X}^L - i\varepsilon \mathbf{P}^L)}{\partial (\alpha, \beta)} = \\ = \frac{R_0^2}{2} (\sin(2\beta)(1 + \sigma_0^2 \varepsilon^2) - 2i\sigma_0 \varepsilon \cos(2\beta))$$

при изменении β от $\beta = \pi/2 - 0$ до $\beta = \pi/2 + 0$. Это приращение легко определяется и равно π . Таким образом, индекс в точках $\beta \in (\pi/2 + 0, \pi - 0)$ равен 1.

6. Базисные замкнутые пути на Λ^L задаются равенствами

$$\gamma_1 : \alpha = \alpha_0, \quad \gamma_2 : \beta = \beta_0 \neq 0, \frac{\pi}{2}.$$

Индекс пути γ_1 равен 2, что дает условие квантования

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\gamma_1} \langle \mathbf{p}, d\mathbf{x} \rangle = \frac{R_0^2 \sigma_0}{4h} = \frac{1}{2} + m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (21)$$

которое выполняется для $R_0^2 = \frac{h}{\sigma_0} (4m + 2)$.

Индекс пути γ_2 равен 0, что дает условие квантования

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\gamma_2} \langle \mathbf{p}, d\mathbf{x} \rangle = 0,$$

которое выполняется автоматически.

7. В окрестности каустики Γ (что соответствует $\beta = 0$) справедливо разложение

$$\mathbf{P}^L = -R_0 \sigma_0 \mathbf{n}(\alpha) (\beta + O(\beta^3)), \\ \mathbf{X}^L = R_0 \mathbf{n}(\alpha) \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 + O(\beta^4) \right),$$

т.е. по нормали к каустике имеем нормальную форму, соответствующую функции Эйри и ее производной.

В окрестности фокальной точки $\mathbf{x} = 0$ (что соответствует $\beta = \frac{\pi}{2}$) имеем разложение

$$\mathbf{P}^L = -R_0 \sigma_0 \mathbf{n}(\alpha + \pi/2) \left(1 - O\left(\left(\beta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) \right), \\ \mathbf{X}^L = -R_0 \mathbf{n}(\alpha + \pi/2) \left(\left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) + O\left(\left(\beta - \frac{\pi}{2} \right)^3 \right) \right),$$

то есть в окрестности этой точки имеем нормальную форму, соответствующую функции Бесселя J_0 и ее производной.

Используя соображения из разд. 2, приводящие к представлению канонического оператора через функции Бесселя в окрестности фокальной точки, порожденной вырожденной складкой, и аналогичные соображения, позволяющие представить канонический оператор через функции Эйри в окрестности простой невырожденной каустики (складки) [8], приходим к глобальному представлению $K_{\Lambda^L}[1]$ с помощью функций Бесселя и Эйри. Полный вывод этих формул приведен в более общем случае в разд. 4.2.

Утверждение 3. Для старшей части канонического оператора на Λ^L в области

$|x| < \sqrt{\frac{(4m+2)h}{\sigma_0}} - \varepsilon$ с малым $\varepsilon > 0$ имеется следующее глобальное представление в виде функции Бесселя:

$$K_{\Lambda^L}[1] \approx (-1)^m \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_0}{h}} \times \\ \times \frac{\sqrt{\Psi\left(\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|x|, m\right)}}{\sqrt{\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|x|} \sqrt{(4m+2) - \frac{\sigma_0}{h}|x|^2}} J_0\left(\Psi\left(\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|x|, m\right)\right),$$

где

$$\Psi(r, m) = (2m+1) \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{r}{\sqrt{4m+2}} \right) + \\ + \frac{r}{2} \sqrt{(4m+2) - r^2}. \quad (22)$$

В окрестности $|x| > \varepsilon$ для старшей части канонического оператора справедливо следующее представление в виде функции Эйри:

$$K_{\Lambda^L}[1] \approx \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_0}{h}} \times \\ \times \frac{\sqrt{2} \left| \Phi\left(\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|x|, m\right) \right|^{1/4}}{\sqrt{\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|x|} \sqrt{(4m+2) - \frac{\sigma_0}{h}|x|^2}} \text{Ai}\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|x|, m\right)\right),$$

где

$$\Phi(r, m) = \begin{cases} -\left(\frac{3}{2} \left((2m+1) \arccos \frac{r}{\sqrt{4m+2}} - \frac{r}{2} \sqrt{(4m+2) - r^2} \right) \right)^{2/3}, & r \leq \sqrt{4m+2}, \\ \left(\frac{3}{2} \left((2m+1) \text{arch} \frac{r}{\sqrt{4m+2}} - \frac{r}{2} \sqrt{r^2 - (4m+2)} \right) \right)^{2/3}, & r > \sqrt{4m+2}. \end{cases} \quad (23)$$

Замечание 7. Приведенные формулы дают асимптотику пучков Лагерра–Гаусса, определяемых полиномом Лагерра L_m ($m \in \mathbb{Z}$) следующим образом [13], см. также [15]:

$$v_0(x) = CL_m\left(\frac{\sigma_0|x|^2}{h}\right)\exp\left(-\frac{\sigma_0|x|^2}{2h}\right), \quad (24)$$

где

$$C = (-1)^m \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}.$$

Действительно, функция (24) радиально-симметрична и является собственной функцией оператора Шредингера для гармонического осциллятора $-\hbar^2\Delta + \sigma_0^2(x_1^2 + x_2^2)$ с собственным значением $\mathcal{E}_m = \sigma_0 h(4m + 2)$ (ср. с (21) с учетом $\mathcal{E} = R_0^2 \sigma_0^2$). Сравнение графиков функции, определяемой формулой (24), и полученной асимптотики приведено на рис. 4.

Замечание 8. С учетом предыдущего замечания полученные формулы дают асимптотику полиномов Лагерра при больших значениях индекса. Именно, при больших (целых) n и $r^2 < b(4n + 2)$, $b < 1$, получаем

$$L_n(r^2) \exp(-r^2/2) \approx \frac{\sqrt{\Psi(r, n)}}{\sqrt[4]{r^2(4n + 2 - r^2)}} J_0(\Psi(r, n)),$$

а в окрестности $r^2 > a$, $a > 0$ –

$$\begin{aligned} L_n(r^2) \exp(-r^2/2) &\approx \\ &\approx (-1)^n \sqrt{2} \frac{|\Phi(r, n)|^{1/4}}{\sqrt[4]{r^2|4n + 2 - r^2|}} \text{Ai}(\Phi(r, n)). \end{aligned}$$

Приведенная асимптотика согласуется с известными результатами для полиномов Лагерра, в частности, с асимптотикой в работах [16, 17].

4.2. Динамика лагранжева многообразия и асимптотика пучков Лагерра–Гаусса

Как упоминалось выше, асимптотика решения задачи (17) определяется каноническим оператором $K_{\Lambda_z^L} 1$ на лагранжевом многообразии $\Lambda_z^L = g_{\mathcal{L}}^z(\Lambda^L)$, полученном сдвигом Λ^L вдоль гамильтонова векторного поля с гамильтонианом $\mathcal{L} = -\frac{1}{2k}(p_1^2 + p_2^2)$ на время z . Это многообразие имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_z^L &= \{\mathbf{p} = \mathbf{P}_z^L(\alpha, \beta, t) \equiv \mathbf{P}^L(\alpha, \beta), \\ \mathbf{x} &= \mathbf{X}_z^L(\alpha, \beta, t) \equiv \mathbf{X}^L(\alpha, \beta) - \frac{z}{k} \mathbf{P}^L(\alpha, \beta), \\ \alpha &\in (-\pi, \pi], \beta \in [0, \pi)\}. \end{aligned} \quad (25)$$

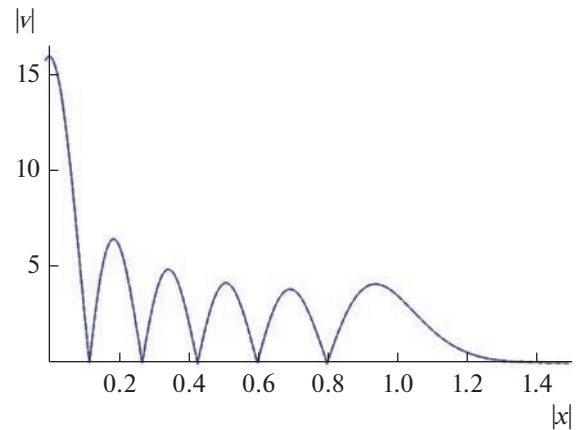


Рис. 4. График модуля (24) при $z = 0$ (сплошная кривая) и асимптотики из утверждения 3 (штриховая) для $h = 0.1$, $m = 5$, $k = 3$, $\sigma_0 = 2$.

Несложно убедиться, что вектор-функции $\mathbf{P}_z^L$ и $\mathbf{X}_z^L$ определяются выражениями

$$\mathbf{X}_z^L(\alpha, \beta) = R_0 \frac{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}}{k} \mathbf{n}(\alpha + \beta) \cos(\beta - \delta_*), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_z^L(\alpha, \beta) &= -R_0 \sigma_0 \mathbf{n}(\alpha + \beta) \sin \beta = \\ &= -\frac{R_0 k \sigma_0}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} \mathbf{n}(\alpha + \beta) \sin(\beta - \delta_*) - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_z^L}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \delta_* &= \arccos \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}}, \\ F &= \frac{z k \sigma_0^2}{(k^2 + \sigma_0^2 z^2)} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Замечание 9. Параметризация Λ_z^L имеет вид, схожий с параметризацией Λ^L . Действительно,

$$\mathbf{P}_z^L = -R_z \sigma_z \mathbf{n}(\alpha' + \beta') \sin \beta' - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_z^L},$$

$$\mathbf{X}_z^L = R_z \mathbf{n}(\alpha' + \beta') \cos(\beta'),$$

где

$$\alpha' = \alpha + \delta_*, \quad \beta' = \beta - \delta_*,$$

$$R_z^2 = \frac{R_0^2}{k^2} (k^2 + \sigma_0^2 z^2), \quad \sigma_z = \frac{\sigma_0 k^2}{k^2 + \sigma_0^2 z^2}.$$

В силу последнего замечания свойства лагранжева многообразия Λ_z^L схожи со свойствами Λ^L . Перечислим основные из них.

1. Якобиан проектирования на $\mathbb{R}_x^2$ имеет вид

$$J_z^L = \frac{R_z^2}{2} \sin(2\beta') = \frac{R_0^2 (k^2 + \sigma_0^2 z^2)}{2k^2} \sin(2(\beta - \delta_*)).$$

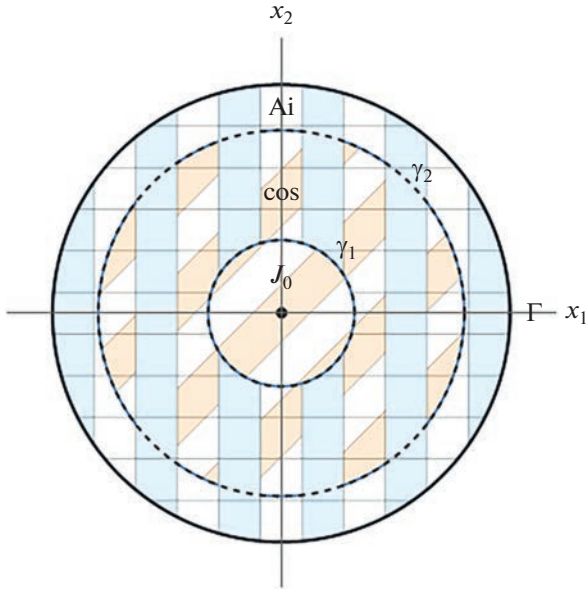


Рис. 5. Проекция лагранжева многообразия на плоскость $\mathbb{R}_x^2$ — круг. Внешняя окружность Γ — простая каустика. В достаточно большой ее окрестности — кольцо, ограниченное окружностями Γ и γ_1 , асимптотика представляется в виде функции Ai . В достаточно широкой окрестности особой точки $|\mathbf{x}| = 0$ — круг, ограниченном окружностью γ_2 , асимптотика представляется в виде функции Бесселя J_0 . В пересечении этих областей (кольце, ограниченном окружностями γ_1 и γ_2) имеет место ВКБ-асимптотика, которую можно представить в виде тригонометрических функций. Поскольку в этой области работает также асимптотика и через функцию Эйри, и через функцию Бесселя, то сравнивая асимптотики этих функций с ВКБ-асимптотикой, можно получить выражения для их аргументов.

2. Фокальная точка $\beta = \delta_*$ ($\beta' = 0$) соответствует простой каустике Γ , которая является окружностью

$$|\mathbf{x}| = \frac{R_0}{k} \sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2} \equiv R_z.$$

В достаточно широкой окрестности этой каустики ($|\mathbf{x}| > \varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$) асимптотика определяется линейной комбинацией функции Эйри Ai и ее производной ([8] и рис. 5), т.е.

$$\begin{aligned} [K_{\Lambda_z^L} 1] &\approx \exp\left(\frac{i}{h} \Sigma_A(\mathbf{x}, z)\right) \times \\ &\times \left(A_1(\mathbf{x}, z) Ai\left(\frac{\Phi_z(\mathbf{x})}{h^{2/3}}\right) + A_2(\mathbf{x}, z) Ai'\left(\frac{\Phi_z(\mathbf{x})}{h^{2/3}}\right) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Фокальные точки $\beta = \frac{\pi}{2} + \delta_*$ ($\beta' = \frac{\pi}{2}$) соответствуют особой точке $|\mathbf{x}| = 0$, в достаточно широкой окрестности которой ($|\mathbf{x}| < R_z - \varepsilon$) асимптотика

определяется линейной комбинацией функций Бесселя J_0 и J_1 [11], а именно

$$\begin{aligned} [K_{\Lambda_z^L} 1] &\approx \exp\left(\frac{i}{h} \Sigma_J(\mathbf{x}, z)\right) \times \\ &\times \left(B_1(\mathbf{x}, z) J_0\left(\frac{\Psi_z(\mathbf{x})}{h}\right) + B_2(\mathbf{x}, z) J_1\left(\frac{\Psi_z(\mathbf{x})}{h}\right) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

3. Лагранжево многообразие проектируется в круг $|\mathbf{x}| \leq R_z$, при этом каждая неособая точка $\mathbf{x}^0 = R_z \mathbf{n}(\alpha^0 + \beta^0) \cos(\beta^0 - \delta_*)$ имеет два прообраза

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \beta^0, \quad \alpha^1 = \alpha^0 \quad \text{и} \quad \beta^2 = \pi + \delta_* - \beta^0, \\ \alpha^2 &= \alpha^0 + 2\beta^0 - \delta_*. \end{aligned}$$

Определим фазы. За счет сдвига по времени появляется фазовый множитель, определяемый гамильтонианом $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$ следующим образом:

$$\int_0^t (\langle \mathbf{p}, \mathcal{L}_p \rangle - \mathcal{L})|_{\alpha=+0, \beta=+0} dt = 0,$$

так как в отмеченной точке $\beta = +0$ на многообразии Λ_z^L значение $\mathbf{p}^2$ равно нулю. Далее можно рассматривать многообразие Λ_z^L при фиксированном z с отмеченной точкой $\alpha = +0, \beta = +0$, как и на начальном лагранжевом многообразии. Путь интегрирования γ^i в точку (α^i, β^i) определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma^i &= \gamma_1^i \cup \gamma_2^i, \\ \gamma_1^i &= \{\alpha = +0, \beta = s | s \in [0, \beta^i]\}, \\ \gamma_2^i &= \{\alpha = s, \beta = \beta^i | s \in [0, \alpha^i]\}. \end{aligned}$$

Тогда действия имеют вид

$$\begin{aligned} S^1 &= \int_{\gamma^1} \langle \mathbf{p}, d\mathbf{x} \rangle = R_0^2 \sigma_0^2 \int_0^{\beta^1} \sin^2(\beta - \beta_*) d\beta - \\ &- \left(F(x_1, x_2) - \frac{R_0^2 \sigma_0^2 z k}{2(k^2 + \sigma_0^2 z^2)} \right) = \\ &= \frac{R_0^2 \sigma_0^2}{2} \arccos \frac{|\mathbf{x}|}{R_z} - \frac{\sigma_z |\mathbf{x}|}{2} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2} + \\ &+ \frac{R_0^2 \sigma_0^2}{2} \arccos \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} \frac{\sigma_0^2 z k}{(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$S^2 = \int_{\gamma^2} \langle \mathbf{p}, d\mathbf{x} \rangle = \frac{R_0^2 \sigma_0}{2} \left(\pi - \arccos \frac{|\mathbf{x}|}{R_z} \right) + \frac{\sigma_z |\mathbf{x}|}{2} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2} + \frac{R_0^2 \sigma_0}{2} \arccos \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} \frac{\sigma_0^2 z k}{(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}. \quad (32)$$

Таким образом, вне окрестности каустик ($\varepsilon < |\mathbf{x}| < R_z - \varepsilon$) для канонического оператора работает ВКБ-представление, которое имеет вид

$$K_{\Lambda_z^L}[1] \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\mathbf{x}|} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}} \times \left(\exp\left(\frac{i}{h} S^1\right) + \exp\left(-\frac{i\pi}{2} + \frac{i}{h} S^2\right) \right) = \frac{2\sqrt{2} A_0}{\sqrt{|\mathbf{x}|} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}} \exp\left(\frac{i\pi}{4h} R_0^2 \sigma_0 + \frac{i}{h} \Theta - \frac{i\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\mathcal{G}}{h} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{(-1)^m 2\sqrt{2} \exp\left(\frac{i}{h} \Theta - \frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{|\mathbf{x}|} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}} \cos\left(\frac{\mathcal{G}}{h} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (33)$$

$$\mathcal{G} = \frac{R_0^2 \sigma_0}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\mathbf{x}|}{R_z} \right) + \frac{\sigma_z |\mathbf{x}|}{2} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}, \quad (34)$$

$$\Theta = \frac{R_0^2 \sigma_0}{2} \arccos \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} \frac{\sigma_0^2 z k}{(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}. \quad (35)$$

Сравнивая представление (30) с ВКБ-асимптотикой (33), при этом учитывая асимптотику функций Бесселя при больших аргументах

$$J_0(y) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi y}} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right), \quad J_1(y) \approx -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi y}} \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right), \quad y \rightarrow +\infty, \quad (36)$$

определяем функции

$$\Sigma_j = \Theta + \pi h m, \quad \Psi_z = \mathcal{G}, \quad B_1 = \frac{2\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) |\Psi|^{1/2}}{\sqrt{h|\mathbf{x}|} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}}, \quad B_2 = 0. \quad (37)$$

Отметим, что с учетом

$$\frac{R_z^2 \sigma_z}{h} = \frac{R_0^2 \sigma_0}{h} = (4m + 2)$$

(см. (21)) выражение (33) преобразуется к виду

$$\frac{2\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i}{h} \Theta\right)}{\sqrt{|\mathbf{x}|} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}} \cos\left(\frac{\mathcal{F}}{h} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \mathcal{F} = \frac{R_0^2 \sigma_0}{2} \arccos \frac{|\mathbf{x}|}{R_z} - \frac{\sigma_z |\mathbf{x}|}{2} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}. \quad (38)$$

Сравнивая представление (29) с (38) вне окрестности каустики и используя асимптотики функции Эйри и ее производной при больших аргументах ($y \rightarrow +\infty$)

$$\text{Ai}(-y) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi y^{1/4}}} \sin\left(\frac{2}{3} y^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{Ai}'(-y) \approx -\frac{y^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2}{3} y^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

можно определить функции

$$\Sigma_A = \Theta, \quad \Phi = -\left(\frac{3}{2} \mathcal{F}\right)^{2/3}, \quad A_1 = \frac{2\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) |\Phi|^{1/4}}{h^{1/6} \sqrt{|\mathbf{x}|} \sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}}, \quad A_2 = 0.$$

Окончательно приходим к утверждению.

Утверждение 4. В окрестности

$$|\mathbf{x}| < \sqrt{(4m + 2) h \frac{k^2 + \sigma_0^2 z^2}{k^2 \sigma_0}} - \varepsilon$$

(с малым $\varepsilon > 0$) старший член канонического оператора, определяющего асимптотику пучка Лагерра–Гаусса, представляется в виде

$$K_{\Lambda_z^L}[1] \approx (-1)^m \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_0}{h}} \exp\left(i(2m + 1) \arccos \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} - \frac{ik\sigma_0^2 z |\mathbf{x}|^2}{2h(z^2 \sigma_0^2 + k^2)}\right) \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} \times \frac{\sqrt{\Psi\left(\sqrt{\frac{k^2 \sigma_0}{h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}} |\mathbf{x}|, m\right)}}{\sqrt{\sqrt{\frac{k^2 \sigma_0}{h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}} |\mathbf{x}| \sqrt{(4m + 2) - \frac{k^2 \sigma_0}{h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}} |\mathbf{x}|^2}} J_0\left(\Psi\left(\sqrt{\frac{k^2 \sigma_0}{h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}} |\mathbf{x}|, m\right)\right),$$

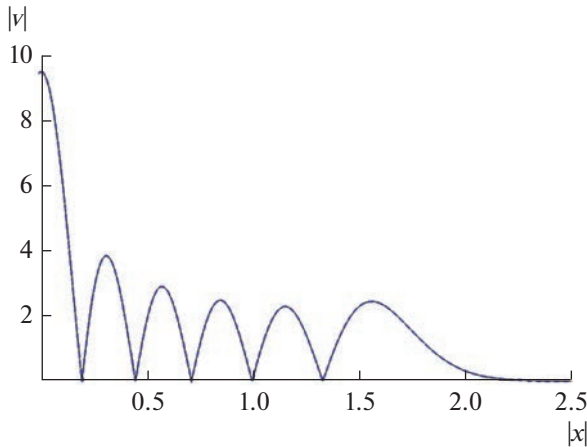


Рис. 6. График модуля (39) при $z = 2$ (сплошная линия) и модуля асимптотики из утверждения 4 (штриховая линия) для $h = 0.1$, $m = 5$, $k = 3$, $\sigma_0 = 2$.

где $\Psi(r, m)$ определяется выражением (22).

В окрестности $|x| > \varepsilon$ старший член такого канонического оператора представляется в виде

$$K_{\Lambda_z^L}[1] \approx \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_0}{h}} \times \\ \times \exp\left(i(2m+1) \arccos \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} - \frac{ik\sigma_0^2 |x|^2}{2h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}\right) \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} \times \\ \times \sqrt{2} \left| \Phi\left(\sqrt{\frac{k^2 \sigma_0}{h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}} |x|, m\right) \right|^{1/4} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{k^2 \sigma_0}{h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}} |x| \sqrt{(4m+2) - \frac{k^2 \sigma_0}{h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)} |x|^2}}} \times \\ \times \text{Ai}\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{k^2 \sigma_0}{h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}} |x|, m\right)\right),$$

где Φ определяется выражением (23).

Замечание 10. При произвольном z пучки Лагерра–Гаусса определяются через полиномом Лагерра L_m следующим образом [13]:

$$v(z, \mathbf{x}) = C \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} L_m\left(\frac{k^2 \sigma_0 |\mathbf{x}|^2}{h(k^2 + \sigma_0^2 z^2)}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{ik|\mathbf{x}|^2}{2h} \left(\frac{(\sigma_0 z - ik)\sigma_0}{\sigma_0^2 z^2 + k^2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{ikz}{h} + i(2m+1) \arctg \frac{\sigma_0 z}{k}\right), \quad (39)$$

где $C = (-1)^m \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}$.

Сравнение полученных асимптотик с графиком (39) проиллюстрировано на рис. 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен геометрический подход к построению асимптотик гауссовых пучков, основанный на ларанжевых многообразиях и теории канонического оператора Маслова. Тип особенностей на соответствующем многообразии задает специальную функцию, определяющую асимптотику в окрестности (достаточно широкой) этой особенности. При этом аргументы этих функций могут быть легко определены из соображения сравнения анзаца специального вида с ВКБ-асимптотикой в регулярной области.

Мы проиллюстрировали этот подход на примере пучков Бесселя и Лагерра–Гаусса. При этом асимптотики обоих пучков в центре пучка определяются функциями Бесселя. Принципиальное отличие этих пучков связано с локализацией. Вопрос локализации связан с проекцией лагранжева многообразия на физическую плоскость. Если проекция является ограниченной областью, то пучок локализован, в противном случае — нет. Такая ситуация имеет место для пучка Бесселя. Однако использование срезающей функции позволяет его локализовать. При этом при движении вдоль оси z носитель срезающей функции также движется, поэтому для локализованного пучка Бесселя имеет место фокусировка (см. рис. 2а). Пучок фокусируется при $z = 0$, а далее, при движении вдоль оси z , его носитель на плоскости (x_1, x_2) начинается расплзаться.

В случае пучка Лагерра–Гаусса такой проблемы не возникает, поскольку при любом z его носитель на плоскости (x_1, x_2) является кругом с центром в нуле (см. рис. 2б). При этом асимптотика в окрестности границы носителя определяется функцией Эйри, и пучок экспоненциально затухает вне этого круга.

Отметим также, что полученные формулы для асимптотик в виде специальных функций носят глобальный характер и легко визуализируются на компьютере.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00341).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. // Труды МФТИ. 2009. Т. 1. № 2. С. 54.
3. Крюковский А.С. Равномерномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013.
4. Bova J.I., Lukin D.S., Kryukovskii A.S. // Russ. J. Math. Phys. 2020. V. 27. № 4. P. 446.
5. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Из-во МГУ, 1965.
6. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1967.
7. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И. // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 2. С. 53.
8. Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Цветкова А.В. // Теорет. и матем. физика. 2019. Т. 201. № 3. P. 382.
9. Доброхотов С.Ю., Миненков Д.С., Назайкинский В.Е. // Теорет. и матем. физика. 2021. Т. 208. № 2. С. 196.
10. Доброхотов С.Ю., Макракис Г., Назайкинский В.Е. // Теорет. и матем. физика. 2014. Т. 180. № 2. С. 162.
11. Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. // Матем. заметки. 2018. Т. 104. № 4. С. 483.
12. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
13. Салех Б., Теїх М. Оптика и фотоника. Принципы и применения. Долгопрудный: ИД Интеллект, 2012. Т. 1.
14. Киселев А.П. // Оптика и спектроскопия. 2004. Т. 96. № 4. С. 533.
15. Plachenov A.B., Chamorro-Posada P., Kiselev P. // Phys. Rev. A. 2020. V. 102. № 2. P. 023533.
16. Frenzen C.I., Wong R. // Siam J. Math. Anal. 1988. V. 19. № 5. P. 1232.
17. Dobrokhotoy S.Yu., Tsvetkova A.V. // Rus. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 2. P. 198.

К 85-ЛЕТИЮ ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

УДК 537.874.6

ФРЕНЕЛЕВСКИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ЗОНЫ

© 2023 г. Е. А. Злобина^{a, *}, А. П. Киселев^{a, b, c}^a Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7-9, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация^b Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191023 Российская Федерация^c Институт проблем машиноведения РАН,
Большой проспект В.О., 61, Санкт-Петербург, 199178 Российская Федерация

*E-mail: ezlobina2@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.03.2023 г.

После доработки 02.03.2023 г.

Принята к публикации 27.03.2023 г.

Построено семейство точных решений двумерного уравнения Гельмгольца, удобных для описания поля в переходных зонах, возникающих при дифракции Френеля. В качестве примеров рассмотрены, помимо дифракции на клине, высокочастотные асимптотики поля в задачах дифракции на контурах с негладкой кривизной.

DOI: 10.31857/S0033849423060190, EDN: XOKFIU

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Понятие о дифракции Френеля, восходящее к началу XIX в., возникло при рассмотрении волнового поля в задаче о падении плоской волны на плоский экран в высокочастотном приближении, т.е. на больших по сравнению с длиной волны расстояниях r от кромки:

$$kr \gg 1, \quad (1)$$

где k — волновое число. В классических работах (см., например, [1, 2]) речь шла об описании слияния плоской волны с дифрагированной кромкой цилиндрической волной в окрестности предельного луча (рис. 1а) — там, где они имеют близкие фазы и физически неразличимы. Математическое описание этого волнового процесса двумерным уравнением Гельмгольца¹ с волновым числом k

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (2)$$

приводит к выражению [2–4]

$$u = \exp(ikx) \Phi(Z) \quad (3)$$

со знаменитым интегралом Френеля

$$\Phi(A) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^A \exp(ip^2) dp. \quad (4)$$

Выражение (3) является точным решением уравнения (2) и, соответственно, дает равномерное по углу φ описание поля (мы пользуемся полярными координатами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$). Аргумент интеграла Френеля в (3) равен корню из разности фаз дифрагированной цилиндрической волны kr , расходящейся из начала координат, и падающей волны kx :

$$Z = \sqrt{kr - kx} = \sqrt{2kr} \sin(\varphi/2). \quad (5)$$

В переходной зоне вокруг предельного луча, которая описывается неравенством

$$kr\varphi^4 \ll 1, \quad (6)$$

эти волны сливаются. В переходной зоне разность их фаз имеет вид $k(r - x) = kr\varphi^2/2 + O(kr\varphi^4)$, и поэтому допустимо часто используемое приближение

$$Z \approx z = \sqrt{kr/2} \varphi, \quad (7)$$

дающее удобную неравномерную асимптотику поля вблизи предельного луча. При удалении от предельного луча, в области, где $|z| \gg 1$, т.е.

$$kr\varphi^2 \gg 1, \quad (8)$$

интеграл Френеля допускает асимптотическое представление (см., например, [3]). Ниже пре-

¹ При интерпретации математических выражений для волновых полей предполагается их гармоническая зависимость от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, где t — время, ω — круговая частота.

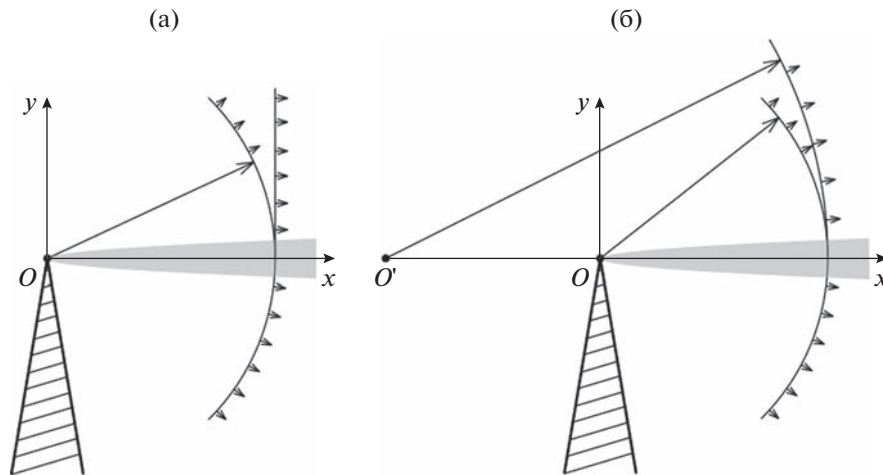


Рис. 1. Дифракция на клине плоской волны (а) и цилиндрической волны (б).

дельного луча, при больших отрицательных значениях z , асимптотика выражения (3) описывает дифрагированную цилиндрическую волну, расходящуюся из начала координат,

$$u \approx A(\varphi, k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}. \quad (9)$$

Здесь A — диаграмма направленности (а по терминологии геометрической теории дифракции [3] — дифракционный коэффициент), имеющая при малых φ вид

$$A(\varphi, k) \approx -\frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}\varphi}. \quad (10)$$

Выше предельного луча, при больших положительных z , формула (3) описывает сложение ди-

фрагированной волны с падающей плоской волной (см. рис. 1):

$$u \approx \exp(ikx) - \frac{\exp(ikr + i\pi/4)}{2\sqrt{\pi kr}\varphi}. \quad (11)$$

Диаграмма волны (9) имеет особенность при $\varphi \rightarrow 0$, из чего следует ее непригодность вблизи предельного луча и необходимость описания волнового поля специальной функцией.

Дифракционный процесс слияния плоской волны с цилиндрической волной, имеющей диаграмму со степенной особенностью вида $A \sim \varphi^\nu$ вблизи предельного луча, мы называем френелевским. Общее описание такого процесса дано Цепелевым [5], который путем разделения переменных в параболических координатах² построил семейство точных решений уравнения Гельмгольца (2):

$$u = CD_{-\nu-1} \left(2\sqrt{kr} \cos \frac{\varphi}{2} \exp \left(-i\frac{\pi}{4} \right) \right) D_\nu \left(2\sqrt{kr} \sin \frac{\varphi}{2} \exp \left(-i\frac{\pi}{4} \right) \right), \quad (12)$$

где D_ν — функция параболического цилиндра [6], C — произвольная постоянная.

Поскольку имеют место соотношения

$$D_0(\sqrt{2Z} \exp(-i\pi/4)) = \exp(iZ^2/2) \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} D_{-1}(\sqrt{2Z} \exp(-i\pi/4)) &= \\ &= \sqrt{2\pi} \exp(-i\pi/4) \exp(-iZ^2/2) \Phi(-Z) \end{aligned} \quad (14)$$

(см. [6]), выражение (3) является частным случаем (12). Решение из семейства (12) со значком ν описывает слияние распространяющейся в области $y > 0$ волны с фазой kx и амплитудой, про-

порциональной $\varphi^{-\nu-1}$, и цилиндрической волны с диаграммой, имеющей на предельном луче особенность φ^ν . Конкретные задачи, в которых такие дифракционные коэффициенты возникают, — это задача о боковой (головной) волне ($\nu = -3/2$, [5]), дифракция на конусе ($\nu = -3/2$, [7]), а также дифракция на клине ($\nu = -1$, [3, 8, 9]) и на границе с различными особенностями кривизны ($\nu \leq -1$, [10–17]).

² Параболические координаты полезны в этих вопросах, поскольку в области (1), (6) разность фаз $kr - kx$ можно считать постоянной на параболах $x = Cy^2$.

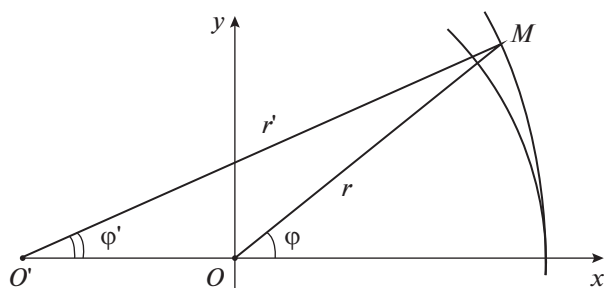


Рис. 2. Слияние двух цилиндрических волн.

Однако в ряде задач, в частности в задачах последнего типа, ни одна из сливающихся вблизи предельного луча волн — ни геометрически отраженная, ни дифрагированная — не может с достаточной точностью рассматриваться как плоская, поэтому необходимо более детальное описание и учет кривизны их фронтов. При этом естественным образом возникает вопрос об асимптотическом описании процесса слияния двух цилиндрических волн, причем одна из них (дифрагированная) присутствует по обе стороны от предельного луча, а другая (отраженная от гладкого участка границы) — только с одной стороны.

Для рассмотренной в ряде учебников [3, 8, 9] задачи дифракции цилиндрической волны на кромке клина, обобщающей упомянутую выше классическую задачу Френеля, простого равномерного по углу описания дифракционного поля нет. При естественном для дифракции Френеля предположении, что расстояние r_0 от источника до вершины клина O велико —

$$kr_0 \gg 1, \quad (15)$$

равно как и расстояние r от кромки до точки наблюдения (1), слияние падающей цилиндрической волны от точечного источника с единичной амплитудой и дифрагированной цилиндрической волны, расходящейся из O , описывается выражением

$$u \approx \frac{\exp(ikr_0 + i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi\sqrt{kr_0}}} \exp(ikr - i\zeta^2) \Phi(\zeta), \quad (16)$$

где

$$\zeta = \sqrt{kr/2} \varphi, \quad \rho = r_0 r / (r_0 + r), \quad (17)$$

см., например, в [8], в менее удобном виде — в [9]. Формула (16) получена в предположении, что выполнено неравенство (6). Похожее выражение встречалось и в других дифракционных задачах [12, 16–18]. Отметим, что при удалении источника на бесконечность вдоль оси x , т.е. при $r_0 \rightarrow \infty$, выражение для ζ (17) переходит в z (7), а формула (16) — в (3).

Следует отметить, что термин дифракция Френеля распространился и на задачи с другой структу-

рой дифракционного поля, в частности, на случай гладкого выпуклого препятствия [19], где не возникает дифрагированной цилиндрической волны, однако выражения, аналогичные (3), в описании поля присутствуют. Выражения с интегралом Френеля (4) присутствуют и в задачах об угловых и краевых катастрофах, где изучаются падающие поля, более сложные, чем плоские и цилиндрические волны (например, [20, 21]). Мы придерживаемся в данной работе более классического понимания термина “дифракция Френеля”, имея в виду слияние цилиндрических волн, одна из которых имеет гладкую диаграмму направленности, а другая — диаграмму со степенной особенностью на предельном луче.

Цель данной работы — дать общее простое выражение для поля в переходных зонах френелевского типа. Для этого мы представим семейство точных решений уравнения Гельмгольца (2), удобных для описания слияния двух расходящихся цилиндрических волн, одна из которых присутствует лишь с одной стороны от предельного луча, а другая — с обеих. Наши построения основаны на разделении переменных в эллиптической системе координат, которая вводится так, чтобы цилиндрические волны расходились из ее фокусов.

В данной работе показано, что функции построенного семейства описывают френелевские волновые поля в ряде двумерных задачах дифракции на негладких контурах. Помимо классической дифракции цилиндрической волны на клине, к ним относятся задачи дифракции на контурах с негладкой кривизной. Условия, позволяющие приблизить в окрестности предельного луча отраженную волну цилиндрической волной (9), приводят к ограничениям на ширину переходной зоны. В частности, для контура со скачком кривизны переходная зона характеризуется неравенством [16]

$$kr\varphi^3 \ll 1. \quad (18)$$

2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ФРЕНЕЛЕВСКОГО ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА

Поместим источники цилиндрических волн в точки $O = (0, 0)$ и $O' = (-2a, 0)$ (рис. 2), причем волна из точки O' распространяется только в области $y > 0$, а значения фаз волн в точке O равны. Предельный луч, вблизи которого волны сливаются, в таком случае совпадает с положительной полуосью x .

Расстояние $2a$ между источниками считается большим по сравнению с длиной волны:

$$ka \gg 1. \quad (19)$$

Условие (19) (ср. (15)) отвечает типичному для классической теории дифракции предположению,

что расстояние от препятствия до источника падающей волны много больше длины волны.

Нас интересует поле во *френелевской переходной зоне*, окружающей предельный луч, где угол φ мал, а расстояние r от точки наблюдения M до O велико (1) (см. рис. 2). Отметим, что отсюда немедленно следует малость φ' , а также неравенство $kr' \gg 1$, см. (1), (19).

2.1. Эллиптические координаты

Для описания поля будем использовать эллиптическую систему координат (ξ, η) :

$$\begin{aligned} x + a &= a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \\ 0 &\leq \xi, \quad -\pi < \eta \leq \pi, \end{aligned} \quad (20)$$

с фокусами в точках O и O' (см. рис. 2). Координатные линии $\eta = \text{const}$ — гиперболы с фокусами в O и O' , и вблизи оси x примерно параллельны ей³. Значение $\eta = 0$ соответствует оси x . Линии $\xi = \text{const}$ образуют семейство эллипсов с теми же фокусами, и вблизи оси x идут поперек нее.

В дальнейшем будем помещать фокусы эллиптической системы координат в источники двух цилиндрических волн, которые будут сливаться вблизи положительной полуоси x , т.е. в области, где η мало, а ξ положительно.

Из (20) немедленно следует, что расстояния r и r' от точки M до фокусов O и O' (см. рис. 2) равны соответственно

$$r = a(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta), \quad r' = a(\operatorname{ch} \xi + \cos \eta). \quad (21)$$

Из (21) для малых значений η получаем

$$\eta = \sqrt{\frac{2a + r - r'}{a}} \left(1 + O\left(\frac{2a + r - r'}{a}\right) \right). \quad (22)$$

Из рассмотрения треугольника OMO' , следует, что

$$\begin{aligned} r' &= 2a + r - \frac{ar}{2a + r} \varphi^2 (1 + O(\varphi^2)), \\ r &= r' - 2a + \frac{ar'}{r' - 2a} (\varphi')^2 (1 + O((\varphi')^2)), \end{aligned} \quad (23)$$

и (22) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{r}{r + 2a}} \varphi (1 + O(\varphi^2)) = \\ &= \sqrt{\frac{r'}{r' - 2a}} \varphi' (1 + O((\varphi')^2)). \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим, что $r + 2a$ и $r' - 2a$ можно заменить на r' и r соответственно с точностью до $O(2ar\varphi^2/r')$.

³ Вдоль этих линий разность фаз двух волн постоянна, $r' - r = \text{const}$.

Кроме того, есть более симметричное выражение $\eta \approx \sqrt{rr'}(\varphi - \varphi')/2a$.

2.2. Семейство точных решений

Записав уравнение Гельмгольца (2) в эллиптических координатах (20) (см., например, [4]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2 a^2 (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta) u = 0, \quad (25)$$

будем решать его методом разделения переменных. Положим $u(\xi, \eta) = P(\xi)Q(\eta)$, тогда функции P и Q удовлетворяют уравнениям

$$P''(\xi) + (k^2 a^2 \operatorname{sh}^2 \xi - \lambda) P(\xi) = 0, \quad (26)$$

$$Q''(\eta) + (k^2 a^2 \sin^2 \eta + \lambda) Q(\eta) = 0, \quad (27)$$

с комплексным параметром разделения λ , которые элементарными преобразованиями могут быть сведены к уравнению Матье (см., например, [6]), теория которого нам не потребуется.

Наша цель — описать высокочастотное поле в окрестности предельного луча не слишком близко к O , а именно в области, где выполнены условия (19) и $\varphi \ll 1$, т.е.

$$\eta \ll 1, \quad \xi \gg 1/\sqrt{ka}, \quad (28)$$

см. (21). Для этого построим асимптотики решений уравнения (26) при положительных не слишком малых ξ и уравнения (27) при малых η любого знака. Нас интересуют только параметры разделения вида

$$\lambda = -ika(2v + 1), \quad v < 0. \quad (29)$$

Именно отрицательные v , как мы увидим ниже, возникают при описании френелевских переходных зон. Соответствующее решение уравнения (25) обозначим

$$u_v(\xi, \eta) = P_v(\xi)Q_v(\eta). \quad (30)$$

2.3. Асимптотика решения уравнения (26)

Найдем асимптотику решения (26), отвечающего уходящей волне, в приближении (19). С помощью стандартного метода Вентцеля—Крамерса—Бриллюэнна (см., например, [4]), с точностью до произвольного постоянного множителя получим

$$\begin{aligned} P_v(\xi) &= \frac{\exp\left(ika \int_{\xi}^{\infty} \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + i(2v + 1)/ka} dt\right)}{\sqrt[4]{\operatorname{sh}^2 \xi + i(2v + 1)/ka}} \times \\ &\times \left(1 + O\left(\frac{1}{ka}\right)\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь учтено выражение для параметра разделения (29). В области (28), очевидно, выполнено неравенство $kash^2\xi \gg 1$. Используя его, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\xi \sqrt{\text{sh}^2 t + i \frac{2v+1}{ka}} dt = \\ & = \int_0^\xi \left(\text{sh} t + i \frac{2v+1}{2kash t} + O\left(\frac{1}{(ka)^2 \text{sh}^3 t}\right) \right) dt = \\ & = \text{ch} \xi + i \frac{2v+1}{4ka} \ln \frac{\text{ch} \xi - 1}{\text{ch} \xi + 1} + O\left(\frac{1}{(ka)^2 (\text{ch} \xi - 1)}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31), находим

$$\begin{aligned} P_v(\xi) &= \frac{\exp\left(ikach\xi - \frac{2v+1}{4} \ln \frac{\text{ch} \xi - 1}{\text{ch} \xi + 1}\right)}{\sqrt[4]{\text{ch}^2 \xi - 1}} \times \\ & \times \left(1 + O\left(\frac{1}{ka(\text{ch} \xi - 1)}\right)\right) = \\ & = \frac{(\text{ch} \xi + 1)^{\frac{v}{v+1}}}{(\text{ch} \xi - 1)^{\frac{v}{2}}} \exp(ikach\xi) \times \\ & \times \left(1 + O\left(\frac{1}{ka(\text{ch} \xi - 1)}\right)\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Поправочные члены малы в области, где выполнено неравенство (1), см. (19) и (21).

2.4. Асимптотика решения уравнения (27)

Преобразуем уравнение (27) при малых η , разложив $\sin \eta$ по степеням η :

$$\begin{aligned} Q_v''(\eta) + (k^2 a^2 \eta^2 - ika(2v+1))Q_v(\eta) &= \\ &= O(k^2 a^2 \eta^4 Q_v(\eta)). \end{aligned} \quad (34)$$

Сделав замену переменной

$$H = \sqrt{2ka} \eta \exp(-i\pi/4), \quad (35)$$

придем к уравнению

$$Q_v''(H) + \left(v + \frac{1}{2} - \frac{H^2}{4}\right)Q_v(H) = O\left(\frac{H^4}{ka}\right)Q_v(H). \quad (36)$$

Таким образом, в области, где H (и, соответственно, η) достаточно мало, одно из решений уравнения (36) асимптотически совпадает с функцией параболического цилиндра D_v [6]:

$$Q_v(H) \approx D_v(-H). \quad (37)$$

Можно показать [22], что соответствующая область характеризуется неравенством $ka|\eta|^\mu \ll 1$, $\mu = 2 + 4/(1 - 3v)$ (для отрицательных значений v , рассматриваемых нами, $\mu > 2$).

2.5. Геометрооптическая интерпретация асимптотики функции (30)

Для отвечающего уходящей волне решения (30) уравнения (25) с $v < 0$ из формул (33) и (37) вытекает следующее асимптотическое выражение вблизи предельного луча:

$$u_v(\xi, \eta) \approx C \frac{(\text{ch} \xi + 1)^{\frac{v}{v+1}}}{(\text{ch} \xi - 1)^{\frac{v}{2}}} \exp(ikach\xi) D_v(-H). \quad (38)$$

Здесь H определено в (35), C — произвольная постоянная. Представление (38) пригодно в области, где выполнены неравенства (1) и

$$kr|\phi|^\mu \ll 1, \quad \text{где } \mu = 2 + \frac{4}{1 - 3v}. \quad (39)$$

Отметим, что чем больше модуль v , тем уже область, описываемая (39). Тем не менее, при каждом $v < 0$ аргумент функции параболического цилиндра H может принимать там большие значения.

Обсудим геометрический смысл величин, входящих в (38). С помощью соотношений (21) и (24) множитель перед экспонентой выражается через расстояния r и r' до фокусов O и O' — источников цилиндрических волн:

$$\begin{aligned} \frac{(\text{ch} \xi + 1)^{\frac{v}{v+1}}}{(\text{ch} \xi - 1)^{\frac{v}{2}}} &= \sqrt{\frac{a}{r}} \left(\frac{r+2a}{r}\right)^{\frac{v}{2}} \left(1 + O\left(\frac{r\phi^2}{r+2a}\right)\right) = \\ &= \sqrt{\frac{a}{r'}} \left(\frac{r'}{r'-2a}\right)^{\frac{v+1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{r'(\phi')^2}{r'-2a}\right)\right). \end{aligned} \quad (40)$$

Показатель экспоненты в (38) с помощью соотношений (21) и (35) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} ikach\xi &= ika + ikr + \frac{H^2}{4} + O\left(\frac{H^4}{ka}\right) = \\ &= -ika + ikr' - \frac{H^2}{4} + O\left(\frac{H^4}{ka}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Теперь рассмотрим аргумент функции параболического цилиндра. Из соотношений (35) и (22) вытекает, что

$$H \approx \sqrt{2k(2a + r - r')} \exp(-i\pi/4), \quad (42)$$

т.е. H выражается через разность значений фаз цилиндрических волн, расходящихся из O и O' . С

помощью соотношения (24) получим еще два представления:

$$H = \sqrt{\frac{2kar}{r+2a}} \varphi \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left(1 + O\left(\frac{r\varphi^2}{r+2a}\right)\right) = \sqrt{\frac{2kar'}{r'-2a}} \varphi' \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left(1 + O\left(\frac{r'(\varphi')^2}{r'-2a}\right)\right). \quad (43)$$

В результате можно записать (38) в геометрических терминах:

$$u_v \approx C \sqrt{\frac{a}{r}} \left(\frac{r+2a}{r}\right)^{\frac{v}{2}} \exp\left(ik\left(r+a - \frac{ar\varphi^2}{2(r+2a)}\right)\right) \times D_v\left(-\sqrt{\frac{2kar}{r+2a}} \varphi \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx C \sqrt{\frac{a}{r'}} \left(\frac{r'}{r'-2a}\right)^{\frac{v+1}{2}} \exp\left(ik\left(r'-a + \frac{ar'(\varphi')^2}{2(r'-2a)}\right)\right) \times D_v\left(-\sqrt{\frac{2kar'}{r'-2a}} \varphi' \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (44)$$

В той части переходной зоны (1), (39), где аргумент функции D_v велик, заменим ее в (38) асимптотикой [6]. Ниже предельного луча, при $\varphi < 0$, имеем одну цилиндрическую волну:

$$u_v \approx A_v(\varphi; k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}, \quad (45)$$

а выше, при $\varphi > 0$ — две:

$$u_v \approx A_v(\varphi; k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} + A'_v(\varphi'; k) \frac{\exp(ikr')}{\sqrt{kr'}}, \quad (46)$$

где

$$A_v(\varphi; k) = 2^{\frac{v}{2}} C (ka)^{\frac{v+1}{2}} \varphi^v \exp\left(ika - i\frac{\pi v}{4}\right), \\ A'_v(\varphi'; k) = -C \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-v)} \frac{(\varphi')^{-v-1}}{(2ka)^{\frac{v}{2}}} \times \exp\left(-ika + i\frac{\pi(5v+1)}{4}\right). \quad (47)$$

Выражение (45) и совпадающее с ним первое слагаемое в (46) описывают цилиндрическую волну, расходящуюся из точки O . Второе слагаемое в (46) отвечает цилиндрической волне, расходящейся из точки O' . Отметим, что чем сингулярнее диаграмма цилиндрической волны на предельном луче, тем уже область (39) пригодности выражения (38).

Рассмотрим приложение полученных результатов в конкретных дифракционных задачах.

3. ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНЕ

Убедимся, что выражение (38) с $v = -1$ описывает процесс слияния падающей цилиндрической и дифрагированной цилиндрической волн в классической двумерной задаче дифракции на клине. Действительно, вследствие формулы (14) выражение (38) совпадает с известным (16) (например, [3, 8, 9]) при надлежащем выборе постоянного множителя. А именно, следует принять

$$C = \exp(ikr_0/2 + i\pi/4)/2\pi\sqrt{2kr_0}. \quad (48)$$

Асимптотика выбранной функции (38) при условии (8) ниже предельного луча имеет вид (45), а выше предельного луча — (46), где расходящаяся из точки O' волна отвечает падающей волне, а расходящаяся из O — дифрагированной волне. Их диаграммы при малых φ имеют следующие выражения:

$$A_{\text{пад}} = \frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi}}, \quad A_{\text{диф}} = \frac{i}{4\pi\varphi} \frac{\exp(ikr_0)}{\sqrt{kr_0}}. \quad (49)$$

Заметим, что неравенство (39) при $v = -1$ сводится к (18) и описывает более узкую область, чем (6). Это связано с тем, что простые оценки [22], приводящие к условию (39), не являются предельно точными.

4. ДИФРАКЦИЯ НА КОНТУРАХ С НЕГЛАДКОЙ КРИВИЗНОЙ

4.1. Предварительные замечания

В этом разделе мы убедимся в том, что построенные выше решения встречаются в ряде двумерных задач дифракции коротких волн на контурах, кривизна которых гладкая всюду, за исключением одной точки O , где имеет скачок или более слабую особенность.

Пусть падающая волна $u^{\text{пад}}$ — цилиндрическая, расходящаяся из точки M_0 , расположенной на расстоянии r_0 от точки O , приходит в O некасательно — под углом скольжения $\varphi_0 > 0$ (рис. 3). Начало координат поместим в точку O , а ось x направим вдоль предельного (геометрически отраженного в O) луча. Положение точки наблюдения M будем характеризовать расстоянием r до точки O и углом φ между осью x и направлением на точку M .

Начнем с качественного обсуждения волнового процесса. Уходящее волновое поле u^{yx} вдали от предельного луча складывается из волны, дифрагированной точкой негладкости $u^{\text{диф}}$, и волн $u_{\pm}^{\text{отр}}$, геометрически отраженных от гладких частей контура слева и справа от O :

$$u^{\text{yx}}(M) = u^{\text{диф}}(M) + u_{\pm}^{\text{отр}}(M). \quad (50)$$

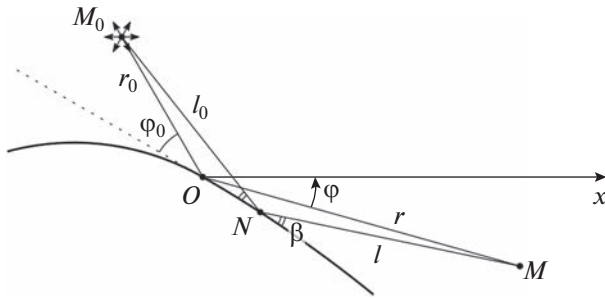


Рис. 3. Дифракция на контуре с негладкой кривизной.

Знак “–” отвечает точкам наблюдения M , лежащим выше, а “+” – ниже предельного луча.

В области, где выполнено неравенство (8), дифрагированная волна представляет собой цилиндрическую волну (9), расходящуюся из точки O . Ее диаграмма, как известно [11–17], имеет на предельном луче степенную сингулярность по углу.

Выражения для геометрически отраженных от гладких частей контура волн $u_{\pm}^{\text{отр}}$ в случае некасательного падения можно найти лучевым методом (например, [23]). Они имеют вид

$$u_{\pm}^{\text{отр}}(M) = \mathcal{C} \frac{\exp(ik\tau + i\pi/4)}{\sqrt{k\mathcal{F}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k\mathcal{F}}\right)\right), \quad (51)$$

$$\mathcal{F} = l_0 + l + \frac{2\mathfrak{a}l_0l}{\sin\beta}.$$

Здесь l_0 и l – расстояния от точки источника M_0 и от точки наблюдения M до точки геометрического отражения N соответственно; $\tau = l_0 + l$ – значение эйконала (геометрического времени пробега) в точке M ; $\mathcal{F}$ – геометрическое расхождение лучей, β – угол скольжения, $\mathfrak{a}$ – значение кривизны в точке N (см. рис. 3). Наконец, $\mathcal{C}$ зависит от интенсивности и диаграммы направленности источника падающей на контур цилиндрической волны, а также от граничного условия на контуре. Для ненаправленного источника единичной амплитуды и условия Дирихле $\mathcal{C} = -1/2\sqrt{2\pi}$ [23].

На предельном луче фазы геометрически отраженных волн и дифрагированной волны совпадают, что позволяет говорить о слиянии этих волн и возникновении френелевской переходной зоны. Если кривизна контура терпит в O скачок, то выражение (51), очевидно, терпит разрыв на предельном луче и пригодно лишь на некотором удалении от него. Вблизи предельного луча, в переходной зоне, поле должно описываться соответствующей специальной функцией, сглаживающей и эту особенность, и сингулярность дифрагированной волны. Поскольку, как и в случае дифракции на клине, геометрооптическое поле терпит на предельном луче разрыв, естественно, что здесь возникает ин-

теграл Френеля. Однако, в отличие от классической задачи, геометрооптическое поле ненулевое с обеих сторон от предельного луча, и описание его слияния с дифрагированной волной требует двух интегралов Френеля от разных аргументов [10, 12, 16].

В случае же более гладкой кривизны контура выражение (51) непрерывно и описывает геометрически отраженное поле в главном порядке, а френелевское поле представляет собой поправку к нему и описывается функцией параболического цилиндра со значком $\nu < -1$ [14, 15, 17].

4.2. Дифракция на контуре со скачком кривизны

Рассмотрим контур, у которого кривизна $\mathfrak{a}$ в точке O имеет скачок:

$$\mathfrak{a} = \begin{cases} \mathfrak{a}_- & \text{слева от } O, \\ \mathfrak{a}_+ & \text{справа от } O, \end{cases} \quad (52)$$

причем $[\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}_+ - \mathfrak{a}_- \neq 0$ может быть любого знака. Здесь и далее падающая волна приходит в точку O некасательно.

В [16] в рамках метода Кирхгофа получено следующее выражение для поля в переходной зоне на умеренных расстояниях $\mathfrak{a}_{\pm}r \lesssim 1$ от O :

$$u^{\text{yx}} = \mathcal{C} \frac{\exp(ik(r_0 + r) + i\pi/4)}{\sqrt{k(r_0 + r)}} \times$$

$$\times \left(\frac{\exp(-i\zeta^2/J_+)}{\sqrt{J_+}} \Phi\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{J_+}}\right) + \right. \quad (53)$$

$$\left. + \frac{\exp(-i\zeta^2/J_-)}{\sqrt{J_-}} \Phi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{J_-}}\right) \right),$$

где Φ – интеграл Френеля (4), величина ζ определена в (17),

$$J_{\pm} = 1 + \frac{2\mathfrak{a}_{\pm}r_0}{\sin\phi_0}, \quad (54)$$

а $\mathcal{C}$ – та же постоянная, что и в (51). Область пригодности формулы (53) описывается неравенствами (1) и (18) – они обеспечивают сшивание асимптотики (53) с лучевыми формулами (51) для волн, геометрически отраженных от гладких частей контура.

Покажем, что выражение (53) переписывается через функции построенного нами семейства (38). Введем величину

$$2a_{\pm} = \frac{r_0}{1 + 2\mathfrak{a}_{\pm}r_0/\sin\phi_0}, \quad (55)$$

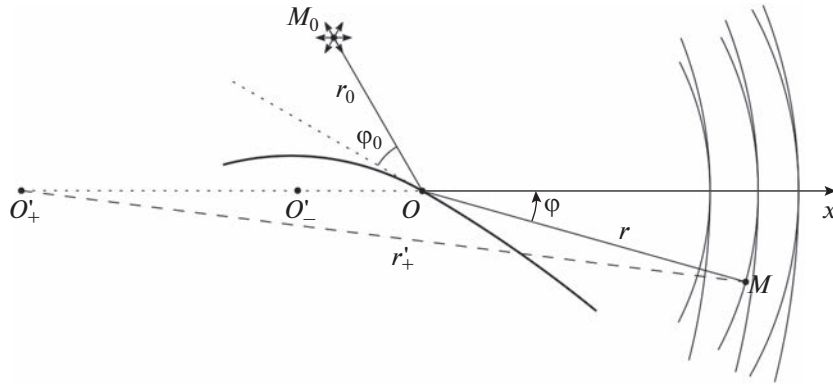


Рис. 4. Дифракция на скачке кривизны.

геометрическую интерпретацию которой дадим ниже. Тогда

$$\frac{\zeta^2}{J_{\pm}} = \frac{krr_0\varphi^2}{2(r_0 + r(1 + 2\alpha_{\pm}r_0/\sin\varphi_0))} = \frac{ka_{\pm}r\varphi^2}{r + 2a_{\pm}}, \quad (56)$$

и с учетом формулы (14) выражение (53) принимает вид суммы двух функций семейства (38) с $\nu = -1$:

$$u^{yx} = U_+ + U_-, \quad (57)$$

где

$$U_{\pm} = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{kr_0}} \sqrt{\frac{a_{\pm}}{r + 2a_{\pm}}} \times \exp\left(ik\left(r + r_0 - \frac{a_{\pm}r\varphi^2}{2(r + 2a_{\pm})}\right) + i\frac{\pi}{4}\right) \times D_{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{2ka_{\pm}r}{r + 2a_{\pm}}} \varphi \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (58)$$

Таким образом, найденная в рамках метода Кирхгофа [16] формула укладывается в построенную теорию. Заметим, что неравенство (39) при $\nu = -1$ совпадает с неравенством (18).

Поясним геометрический смысл величин (55). В переходной области, где выполнено неравенство (18), выражения для отраженных волн (51) аппроксимируются цилиндрическими волнами (9), исходящими из точек $O'_{\pm}$, лежащих на продолжении предельного луча на расстояниях $2a_{\pm}$ от точки O (рис. 4). Действительно, в [16] показано, что лучевые выражения (51) для геометрически отраженных волн $u_{\pm}^{\text{отр}}$ при условии (18) преобразуются к виду

$$u_{\pm}^{\text{отр}} \approx \mathcal{C} \frac{\exp\left(ik\left(r + r_0 - \rho^2\varphi^2/2J_{\pm}\right) + i\pi/4\right)}{\sqrt{kJ_{\pm}(r + r_0)}}, \quad (59)$$

$$J_{\pm} = 1 + \frac{2\alpha_{\pm}\rho}{\sin\varphi_0},$$

где величина ρ определена в (17). Расстояния $r'_{\pm}$ от $O'_{\pm}$ до точки наблюдения M равны соответственно

$$r'_{\pm} = \sqrt{r^2 + 4a_{\pm}^2 + 2a_{\pm}r\cos\varphi} = 2a_{\pm} + r - \frac{\rho}{2J_{\pm}}\varphi^2 + O\left(\frac{\rho}{J_{\pm}}\varphi^4\right). \quad (60)$$

Легко видеть, что, с точностью до малых членов, величины $kr'_{\pm}$ отличаются от фаз соответствующих экспонент в (59) лишь на постоянное слагаемое $r_0 - 2\alpha_{\pm}$, а выражение в знаменателе (59) переписывается в виде $J_{\pm}(r_0 + r) \approx r_0 r'_{\pm}/2a_{\pm}$. Таким образом, в переходной зоне (18) формулы (59) для геометрически отраженных волн $u_{\pm}^{\text{отр}}$ преобразуются к виду (9):

$$u_{\pm}^{\text{отр}} \approx A_{\pm}^{\text{отр}} \frac{\exp(ikr'_{\pm})}{\sqrt{kr'_{\pm}}}, \quad (61)$$

$$A_{\pm}^{\text{отр}} = \mathcal{C} \sqrt{\frac{2a_{\pm}}{r_0}} \exp\left(ik(r_0 - 2a_{\pm}) + i\frac{\pi}{4}\right).$$

В [16] показано, что на малых расстояниях $\alpha_{\pm}r \ll 1$ аргументы интегралов Френеля в формуле (53) становятся близки и в результате поле аппроксимируется выражением, содержащим одну функцию параболического цилиндра $D_{-3}(\sqrt{2}\zeta \exp(i\pi/4))$. Отметим, что это выражение также является частным случаем формулы (38).

4.3. Дифракция на контуре с "гельдеровской" сингулярностью кривизны

Теперь рассмотрим контур, кривизна которого в точке O имеет особенность вида

$$\alpha(s) = \begin{cases} \alpha_0 & \text{при } s \leq 0, \\ \alpha_0 + hs^{\lambda} & \text{при } s > 0, \end{cases} \quad 0 < \lambda < 1. \quad (62)$$

экспоненты в (68) лишь на постоянное слагаемое $r_0 - 2a$, откуда нетрудно получить, что

$$u_h^{\text{отр}} = A^{\text{отр}} \frac{\exp(ikr')}{\sqrt{kr'}}, \quad A^{\text{отр}} = -\sqrt{\frac{2a}{r_0}} \times \frac{2kh(-2a\varphi')^{2+\lambda} \exp(ik(r_0 - 2a) - i\pi/4)}{(2+\lambda)(1+\lambda)(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}}. \quad (69)$$

В случае “гельдеровской” сингулярности кривизны на ширину переходной зоны накладываются ограничения (18) и (65), более жесткие, чем неравенство (39) с $\nu = -3 - \lambda$, и даже чем соответствующие ограничения в случае скачка кривизны, что объясняется более сложной геометрией фронта отраженной от контура волны.

4.4. Дифракция на контуре с особенностью производной кривизны

Допустим теперь, что производная кривизны контура $\mathfrak{x}^{(j)}(s) = d^j \mathfrak{x} / ds^j$ порядка $j \geq 1$ в точке O имеет скачок с амплитудой h . Как и в случае “гельдеровской” сингулярности кривизны, рассмотренной в разд. 4.3, здесь уходящее поле в главном порядке характеризуется лучевой формулой (51), а эффект негладкости кривизны имеет характер малой поправки. Сравнение выражения для поля в окрестности предельного луча [15, 17] с формулами (45)–(47) показывает, что влияние негладкости производной кривизны порядка j на уходящее поле в переходной зоне описывается функцией семейства (38), причем $\nu = -3 - j$. В полярных координатах она имеет вид (64), где λ следует заменить на j . Ширина переходной зоны характеризуется неравенством (39) с $\nu = -3 - j$ (отметим, что при $\nu < -3$ это ограничение жестче, чем условие (18)).

Случай, когда производная $\mathfrak{x}^{(j)}(s)$, $j \geq 1$, имеет в точке O “гельдеровскую” сингулярность (62), рассматривается аналогично. Влияние негладкости кривизны на уходящее поле описывается функцией семейства (38) со значком $\nu = -3 - j - \lambda$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным результатом работы является получение простых удобных выражений для общего описания френелевских переходных зон.

Построено семейство точных решений уравнения Гельмгольца для описания слияния двух волн с неплоскими фронтами. Продемонстрировано, что функции этого семейства описывают поля в задачах дифракции на контурах с неглад-

кой кривизной в переходной зоне на умеренном расстоянии от точки негладкости. Область пригодности построенных выражений зависит, с одной стороны, от сингулярностей диаграмм волн на предельном луче и, с другой — от геометрии фронтов волн. С увеличением гладкости кривизны контура переходная зона сужается.

Интересным представляется вопрос о численном моделировании волнового поля на основе полученных формул, которое позволило бы выявить их области пригодности в реальных ситуациях.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны участникам Всероссийского семинара “Математическое моделирование волновых процессов” (Российский новый университет) и лично Д.С. Лукину, А.С. Крюковскому, Е.А. Палкину, В.Т. Полякову и А.В. Попову за полезное обсуждение результатов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00557).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малюжинец Г.Д. // Успехи физ. наук. 1959. Т. 69. № 2. С. 321.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
3. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
4. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы математической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2.
5. Целев Н.В. // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 51. С. 197.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 2.
7. Popov A., Ladyzhensky (Brodskaia) A., Khozioski S. // Russ. J. Math. Phys. 2009. Т. 16. № 2. С. 296.
8. Уфимцев П.Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. М.: Бином, 2012.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматгиз, 1963.
10. James G.L. Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves. L.: Peter Peregrinus Ltd, 1986.
11. Kaminetzky L., Keller J.B. // SIAM J. Appl. Math. 1972. V. 22. № 1. P. 109.
12. Rogoff Z.M., Kiselev A.P. // Wave Motion. 2001. V. 33. № 2. P. 183.
13. Zlobina E.A., Kiselev A.P. // Wave Motion. 2020. V. 96. Article No. 102571.

14. Злобина Е.А., Киселев А.П. // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33. № 2. С. 35.
15. Злобина Е.А. // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Т. 493. С. 169.
16. Злобина Е.А., Киселев А.П. // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 130.
17. Злобина Е.А. // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2021. Т. 506. С. 43.
18. Попов А.В. // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 4. С. 594.
19. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения волн. М.: Наука, 1975.
20. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. // РЭ. 2006. Т. 51. № 10. С. 1155.
21. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013.
22. Злобина Е.А. // Мат. заметки. 2023. Т. 114. № 4. С. 666.
23. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972.

К 85-ЛЕТИЮ ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

УДК 537.87

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АМПЛИТУДНЫХ, УГЛОВЫХ И ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОРОТКИХ РАДИОВОЛН ПРИ СЛАБОНАКЛОННОМ ЗОНДИРОВАНИИ ИОНОСФЕРЫ¹

© 2023 г. А. С. Крюковский^a, *, Д. С. Лукин^a, Е. В. Михалёва^a, Д. В. Растягаев^a^a Российский новый университет,
ул. Радио, 22, Москва, 105005 Российская Федерация

*E-mail: kryukovsky56@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.

После доработки 16.02.2023 г.

Принята к публикации 23.03.2023 г.

Методом бихарактеристик изучены особенности распространения декаметровых радиоволн в ионосфере, содержащей слои E, F1 и F2, а также перемещающееся ионосферное возмущение (ПИНВ) при слабонаклонном зондировании частотно модулированными сигналами. Рассмотрено распространение как обыкновенной, так и необыкновенной волны, выполнено сопоставление ионограмм и исследован их сдвиг относительно друг друга. Исследована структура ионограмм в окрестности каустик, возникающих в точке приема на частотах, отражающихся в окрестности слоя E и ПИНВ. Рассчитана расходимость лучевого потока в точке приема излучения, определяющая ослабление амплитуды.

DOI: 10.31857/S0033849423060098, EDN: XMVDRI

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена численному моделированию амплитудных и временных характеристик отраженных от ионосферы декаметровых радиосигналов. Актуальность исследования определяется необходимостью изучения строения ионосферы Земли для решения задач радионавигации, позиционирования, радиосвязи и радиолокации. Рассмотрено слабонаклонное зондирование ионосферы Земли непрерывными частотно-модулированными сигналами, т.е. случай, когда расстояние от передатчика излучения до приемника меньше высоты главного максимума ионосферы. Учтено влияние магнитного поля Земли, и исследовано распространение необыкновенной и обыкновенной компонент радиоволны на примере двух моделей ионосферы: модели, не содержащей перемещающегося ионосферного возмущения (ПИНВ) и модели, содержащей ПИНВ. Помимо ПИНВ обе модели содержат ионосферные слои F2, F1 и E. Как отмечено в работе [1], ПИНВ часто наблюдаются в азиатском регионе Российской Федерации. Важным дистанционным методом изучения строения

ионосферы является метод зондирования частотно-модулированным (ЧМ) излучением [2, 3]. Результаты математического моделирования вертикального зондирования ионосферы, учитывающие влияние магнитного поля Земли, приведены в [4, 5]. В работах [6, 7] рассмотрено наклонное зондирование ионосферы без учета магнитного поля Земли.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МОДЕЛЬ ИОНОСФЕРЫ

При математическом моделировании считалось, что источник излучения точечный и находится в начале координат на поверхности Земли, а приемник отстоит от источника на расстоянии 100 км в направлении горизонтальной оси x . Поскольку зондирование слабонаклонное и расстояние от передатчика до приемника небольшое, кривизна поверхности Земли не учитывалась, а величина магнитного поля Земли предполагалась постоянной:

$$\begin{aligned} H_x &= H_0 \cos \gamma \cos \varphi, \quad H_y = H_0 \cos \gamma \sin \varphi, \\ H_z &= H_0 \sin \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

напряженность $H_0 = 0.465$ Э; угол склонения ($-\gamma$) равен 57° ; а угол наклонения ($-\varphi$) равен -90° .

¹ Некоторые результаты работы доложены на 8-й Микроволновой конференции (23 ноября–25 ноября 2022 г., Москва, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН).

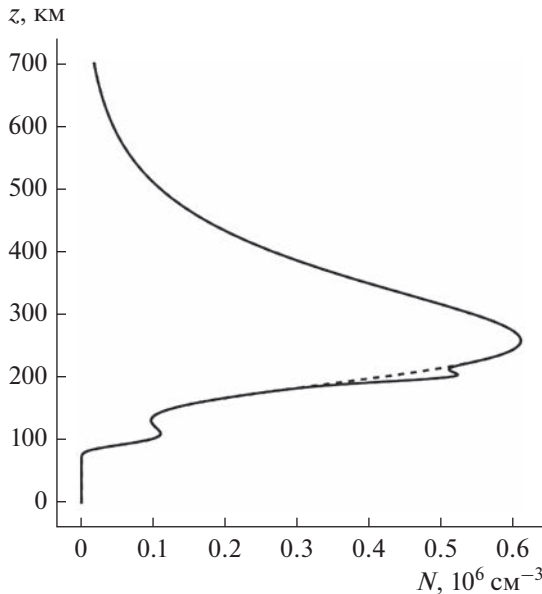


Рис. 1. Зависимости электронной концентрации N от высоты z для невозмущенной модели (штриховая кривая) и возмущенной (сплошная).

Невозмущенная модель электронной концентрации ионосферы задавалась выражениями:

$$N = N_{F2} \exp \left[\frac{1}{2} (1 - \exp[\theta_{F2}] + \theta_{F2}) \right] + N_{F1} \exp \left[\frac{1}{2} (1 - \exp[\theta_{F1}] + \theta_{F1}) \right] + N_E \exp \left[\frac{1}{2} (1 - \exp[\theta_E] + \theta_E) \right] + N_d, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} N_{F1} &\approx 70254.3 \text{ см}^{-3}, \quad N_{F2} \approx 561828.0 \text{ см}^{-3}, \\ N_E &\approx 104611.7 \text{ см}^{-3}, \\ \theta_{F1} &= \frac{1}{40}(196 - z), \quad \theta_{F2} = \frac{1}{55}(263 - z), \\ \theta_E &= \frac{2}{25}(108 - z), \end{aligned} \quad (3)$$

а ПИВ задавалось формулой

$$N_d = \beta_0 N_0 \exp \left[- \left(\frac{z_d - z}{z_{md}} \right)^2 - \left(\frac{x_d - x}{x_{md}} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

В (4) $\beta_0 = 0.1$; $N_0 = 1.9 \times 10^6 \text{ см}^{-3}$; $z_d = 200 \text{ км}$; $z_{md} = 10 \text{ км}$; $x_d = 50 \text{ км}$; $x_{md} = 40 \text{ км}$. В формулах (2)–(4) z и x выражены в километрах.

Зависимости электронной концентрации N от высоты z для невозмущенной и возмущенной моделей приведены на рис. 1.

Зависимости электронной концентрации ионосферы от высоты, показанные на рис. 1, выбраны

для точки посередине между передатчиком и приемником излучения, т.е. находятся на расстоянии $x = 50 \text{ км}$. Отличие между двумя моделями относится к области, в которой присутствует ПИВ.

2. БИХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для вычисления лучевых характеристик радиосигналов в точке приема использовалась бихарактеристическая система дифференциальных уравнений первого порядка [8]

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \vec{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega}, \quad (5)$$

где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота излучателя, $\vec{k}$ – волновой вектор, $\vec{r} = (x, y, z)$ – декартовы координаты луча, c – скорость света, t – групповое время. Эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения ϵ была задана формулой Эпплтона–Хартри (Лассена) [9–11]

$$\epsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}}, \quad (6)$$

в которой знак “+” соответствует обыкновенной волне, знак “–” – необыкновенной волне,

$$\nu = \left(\frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}, \quad u = \left(\frac{\omega_H}{\omega} \right)^2 = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}, \quad (7)$$

$\omega_{\text{пл}}$ – плазменная частота, ω_H – гирочастота, m_e – масса электрона, e – заряд электрона. Угол α – это угол между вектором напряженности магнитного поля Земли и волновым вектором. Косинус угла определяется формулой

$$\cos \alpha = \frac{H_x k_x + H_y k_y + H_z k_z}{H_0 |\vec{k}|}. \quad (8)$$

Для решения системы (5) необходимы начальные условия, выбраны в виде:

$$\begin{aligned} k_x(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \alpha_0 \cos \beta_0, \\ k_y(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \alpha_0 \sin \beta_0, \\ k_z(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \sin \alpha_0, \\ \vec{r}|_{\tau=0} &= (0, 0, 0), \end{aligned} \quad (9)$$

где α_0 и β_0 – начальные углы выхода луча. При расчетах предполагалось, что $\beta_0 = 0$, т.е. первоначально лучи выходят в плоскости (x, z) . Начальное значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в точке выхода луча $\epsilon_0 \approx 1$. Решение системы бихарактеристических уравнений (5)–(9) позволяет определить время прихода сигнала,

а также углы и прихода выхода сигнала на каждой частоте.

Важной характеристикой радиосигнала является его амплитуда, определяемая как поглощением, так и расходимостью [12–14]. Основным инструментом для вычисления расходимости является расширенная бихарактеристическая система Лукина [15, 16]

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}_{\alpha_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left(\frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \vec{r}} / \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\vec{r}_{\alpha_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left(\left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \vec{k}} \right) / \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\vec{k}_{\beta_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left(\frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \vec{r}} / \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\vec{r}_{\beta_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left(\left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \vec{k}} \right) / \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

дополненная начальными данными

$$\begin{aligned} k'_{x\alpha_0}(\eta) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \sin \alpha_0 \cos \beta_0, \\ k'_{x\beta_0}(\eta) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \alpha_0 \sin \beta_0, \\ k'_{y\alpha_0}(\eta) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \sin \alpha_0 \sin \beta_0, \\ k'_{y\beta_0}(\eta) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \alpha_0 \cos \beta_0, \\ k'_{z\alpha_0}(\eta) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \alpha_0, \\ k'_{z\beta_0}(\eta) &= 0, \quad \vec{r}'_{\alpha_0}(\eta) = 0, \quad \vec{r}'_{\beta_0}(\eta) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решив бихарактеристическую систему (10), (11) и найдя производные волнового вектора и координат по начальным параметрам выхода луча, нетрудно вычислить якобиан J расходимости лучевого потока

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial x}{\partial \beta_0} & T_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial y}{\partial \beta_0} & T_2 \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial z}{\partial \beta_0} & T_3 \end{vmatrix}, \quad \vec{T} = \left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \vec{k}} \right) / \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega} \quad (12)$$

и найти расходимость волнового поля:

$$R_s = 10 \lg \left| \frac{J_0}{J(\vec{r})} \right|, \quad (13)$$

где J_0 — якобиан расходимости на условном расстоянии от источника.

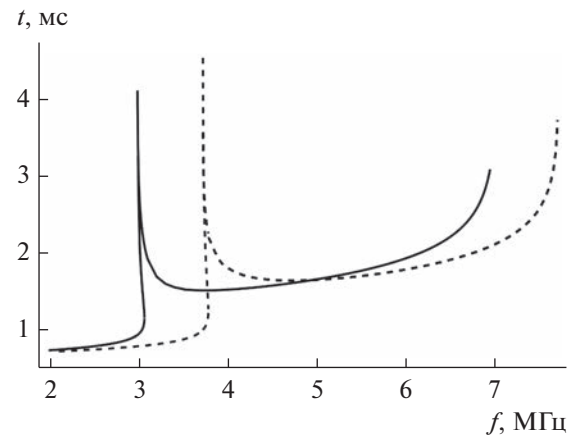


Рис. 2. Зависимость группового времени прихода сигнала t от частоты f : невозмущенный случай для обыкновенной (сплошная кривая) и необыкновенной волн (штриховая).

3. НЕВОЗМУЩЕННАЯ МОДЕЛЬ. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сначала рассмотрим зависимость группового t времени прихода сигнала от частоты f . Результаты моделирования для обыкновенной и необыкновенной волн показаны на рис. 2 и 3 (увеличенный масштаб).

На рис. 2 рассмотрен диапазон частот от 2 до ≈ 7 МГц для обыкновенной волны и до ≈ 7.7 МГц для необыкновенной волны, выше которых волна уже не приходит в точку наблюдения, а просачивается вверх сквозь ионосферные слои.

На рис. 4 показана лучевая структура необыкновенной волны на частоте ≈ 7.7 МГц. Аналогичная картина имеет место и для обыкновенной волны, но на частоте ≈ 7 МГц. В целом видно, что с ростом частоты групповое время увеличивается, поскольку волна все глубже проникает в ионосферные слои, где групповая скорость волны меньше скорости света, да и общий путь волны возрастает. Фон на рис. 4 и следующих рисунках отображает распределение электронной концентрации.

На рис. 3а и 3б более подробно показаны области вблизи критической частоты слоя Е (разные для обыкновенной и необыкновенной волны). Каустика — точка поворота линии — для обыкновенной волны образуется на частотах около 3 МГц, для необыкновенной волны — на частоте ≈ 3.78 МГц. На рис. 5 она отмечена точкой. Видно, что она расположена на нижней ветви каустического остроя, образованного слоем Е. На рис. 3 хорошо видна область трехлучевости.

Резкое нарастание группового времени t на частоте f чуть ниже 3.75 МГц соответствует ситуации, когда точка наблюдения находится вблизи зоны обрыва верхних лучей (см. рис. 6). В этой об-

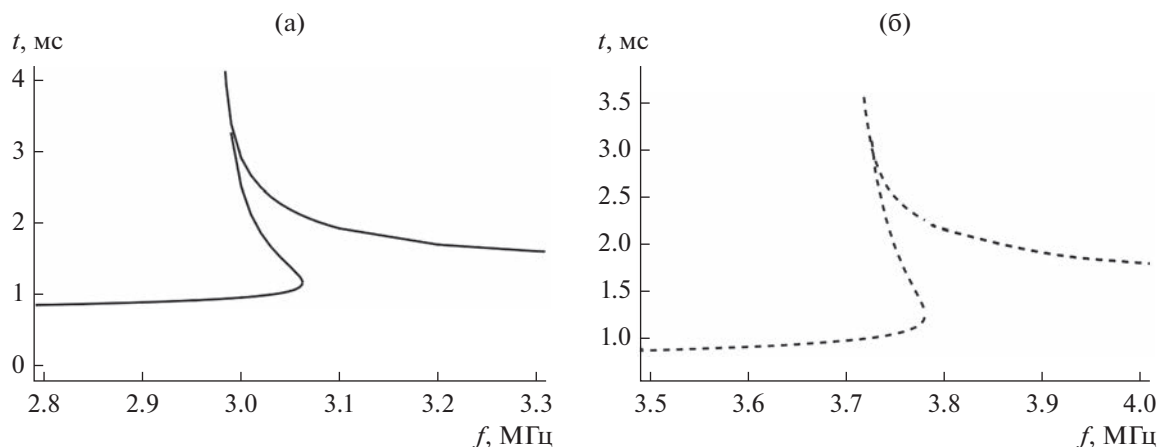


Рис. 3. Зависимость группового времени прихода сигнала t от частоты f : невозмущенный случай для обыкновенной (а) и необыкновенной волн (б) в увеличенном масштабе (см. рис. 2).

ласти формируются лучи, которые попадают в долину и отражаются от нижней границы верхнего слоя, а не от слоя Е.

Теперь рассмотрим зависимости угла выхода сигнала α_0 от частоты f . Зависимости угла α_0 выхода сигнала от частоты f для невозмущенной модели показаны на рис. 7 и 8 (в увеличенном масштабе).

Из расчетов следует, что при слабо наклонном распространении в приемник приходят лучи с углами, близкими к вертикальному. Кривые, приведенные на рис. 7 и 8, аналогичны кривым, показанным на рис. 2 и 3. Характерными особенностями являет-

ся точка возврата (уход лучей в долину) и точка каустики, в которой сливаются два луча. Ясно видна область трехлучевости.

Рассмотрим теперь зависимость расходимости лучевого потока R_s (13) от частоты f (рис. 9 и 10 (в увеличенном масштабе)).

Из рисунков видно, что за исключением области, соответствующей слою Е, ослабление медленно растет при увеличении частоты и более быстро возрастает в конце частотного диапазона, что приводит к уменьшению амплитуды сигнала в приемнике.

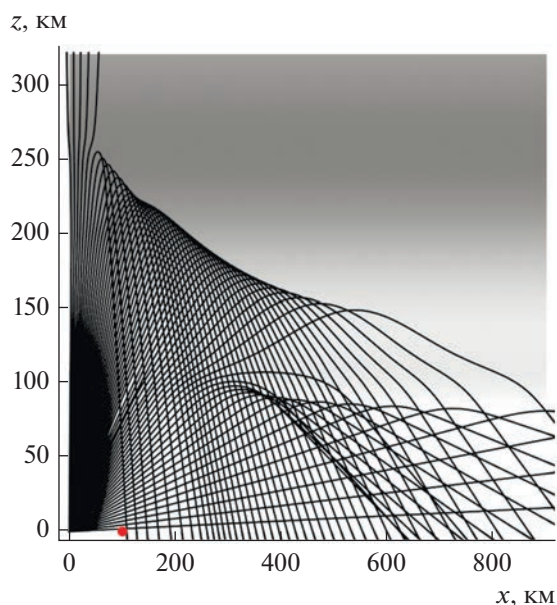


Рис. 4. Лучевая структура необыкновенной волны на частоте $f \approx 7.699$. Точкой на расстоянии 100 км от источника излучения отмечено положение приемника.

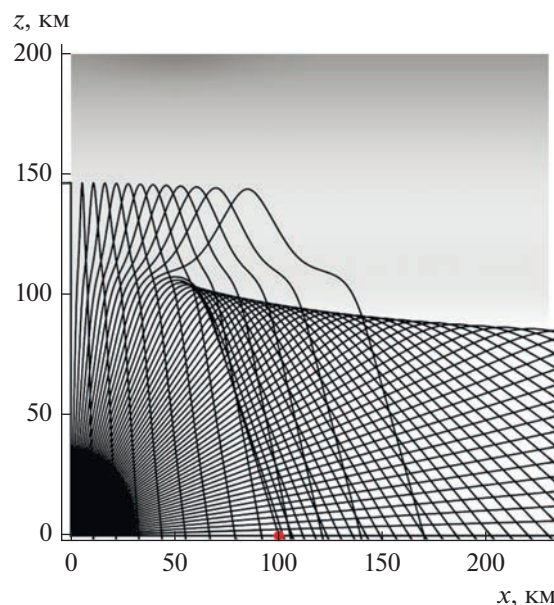


Рис. 5. Лучевая структура необыкновенной волны, $f \approx 3.78$ МГц. Точкой на расстоянии 100 км отмечено положение приемника.

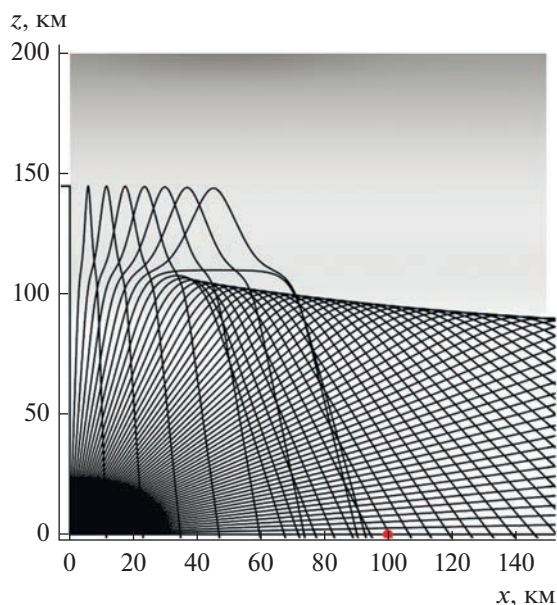


Рис. 6. Лучевая структура необыкновенной волны, $f \approx 3.73$ МГц. Точкой на расстоянии 100 км отмечено положение приемника.

Более подробно области, соответствующие слою E, показаны на рис. 10. С ростом частоты при приближении к каустике расходимость убывает (амплитуда в окрестности каустики возрастает), потом возрастает, а далее, при увеличении частоты — выход на плавную, почти постоянную линию. Сравнивая результаты расчетов для обыкновенной и необыкновенной волн, видим, что кривые как бы просто сдвинуты по частоте относительно друг друга. Конечно, амплитуда необыкновенной волны меньше амплитуды обыкновенной волны, но это объясняется влиянием поглощения, которое здесь не учитывается.

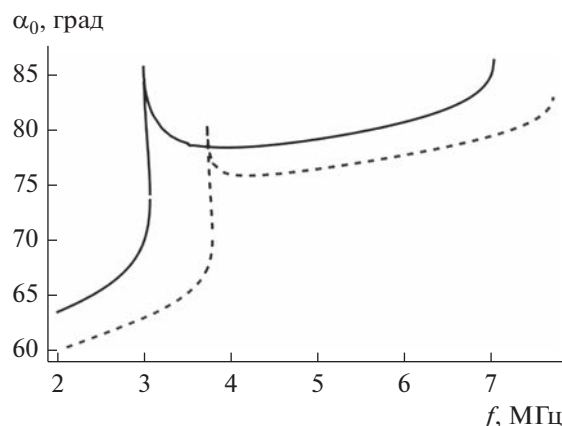


Рис. 7. Зависимость угла выхода сигнала α_0 от частоты f : невозмущенный случай для обыкновенной (сплошная кривая) и необыкновенной волн (штриховая).

5. ВОЗМУЩЕННАЯ МОДЕЛЬ. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим, какие изменения в результаты моделирования вносит ПИВ. Как было показано на рис. 1, ПИВ расположено ниже максимума слоя F2 на высоте ~ 200 км, поэтому на низких частотах ионограмма практически не меняется (рис. 11).

Следует отметить, что для возмущенной модели на частотах от 5 до ~ 6.4 групповое время для возмущенной модели меньше, чем для невозмущенной, причем имеет место даже небольшой локальный максимум в районе 5 МГц.

На рис. 12 для обыкновенной волны показана зависимость угла выхода сигнала α_0 от частоты f .

Видно, что для возмущенной модели значения углов выхода лучей на одной и той же частоте

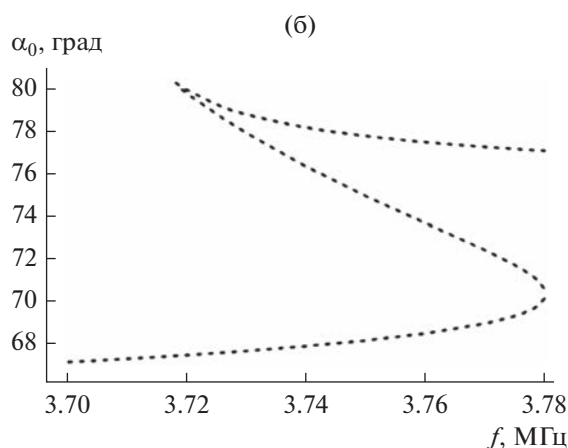
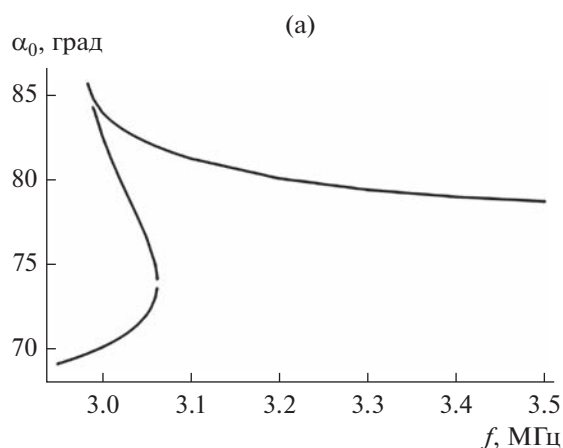


Рис. 8. Зависимость угла выхода сигнала α_0 от частоты f : невозмущенный случай для обыкновенной (а) и необыкновенной волн (б) в увеличенном масштабе (см. рис. 7).

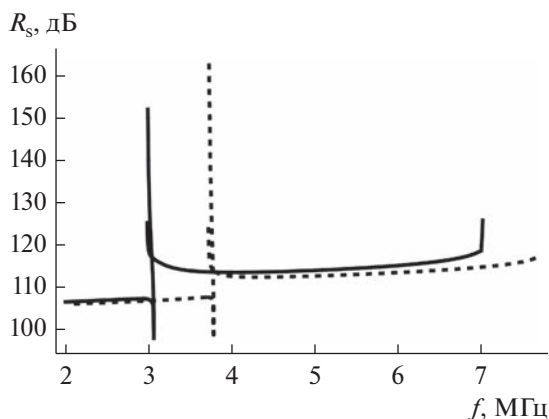


Рис. 9. Зависимость расходимости R_s от частоты f , невозмущенный случай для обыкновенной (сплошная кривая) и необыкновенной волн (штриховая).

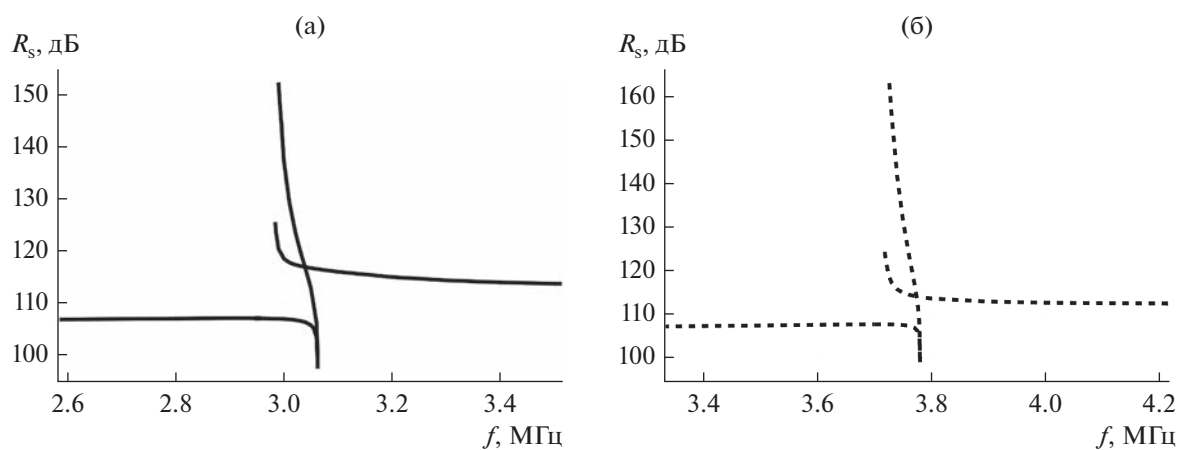


Рис. 10. Зависимость расходимости R_s от частоты f : невозмущенный случай для обыкновенной (а) и необыкновенной волн (б) в увеличенном масштабе (см. рис. 9).

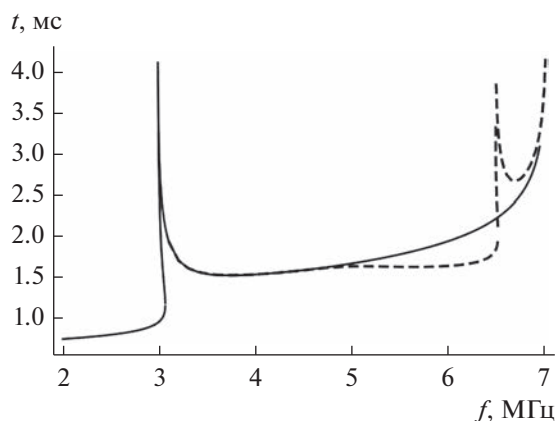


Рис. 11. Зависимость группового времени прихода сигнала t от частоты f : невозмущенный (сплошная кривая) и возмущенный (штриховая) случаи для обыкновенной волны.

меньше, чем для невозмущенной модели. Аналогичная картина наблюдается и для необыкновенной волны.

Рассмотрим подробнее зависимости группового времени прихода сигнала от частоты в модели с ПИВ. На рис. 13 и 14 приведена ионограмма наклонного зондирования (зависимость группового времени t частоты f) в возмущенном случае на частотах выше 5 МГц, когда невозмущенный и возмущенный случаи дают разные результаты (рис. 14 – в увеличенном масштабе).

Обычно главным признаком наличия ПИВ считается U-образное образование [1, 6, 7] на ионограмме. Именно такая структура расположена в правой части рис. 13 (см. рис. 11, ср. с рис. 2).

Более подробный анализ показывает, что к ПИВ относится только левая ветвь U каждой из кривых, а правая ветвь U связана с просачиванием волны сквозь ионосферные слои при высоких частотах.

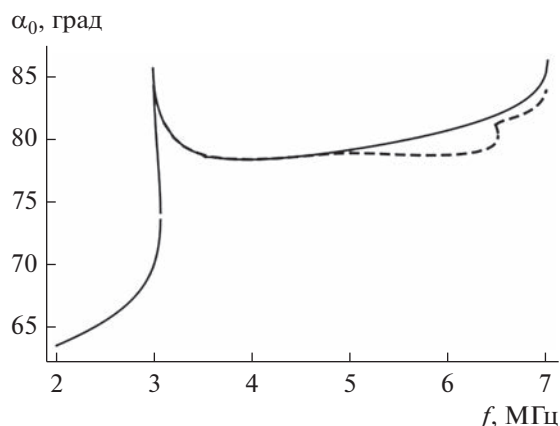


Рис. 12. Зависимость угла выхода сигнала α_0 как функция от частоты f : невозмущенный (сплошная кривая) и возмущенный (штриховая) случаи для обыкновенной волны.

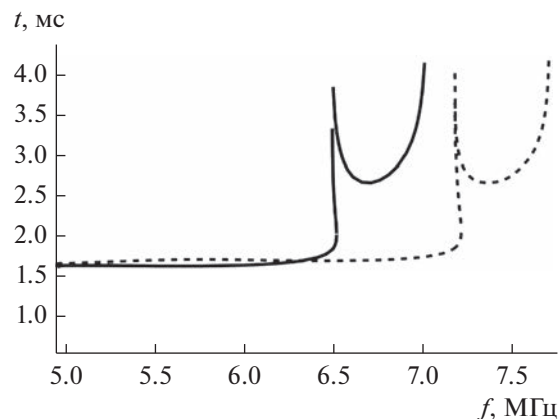


Рис. 13. Зависимость группового времени прихода сигнала t от частоты f : возмущенный случай для обыкновенной (сплошная кривая) и необыкновенной (штриховая) волн.

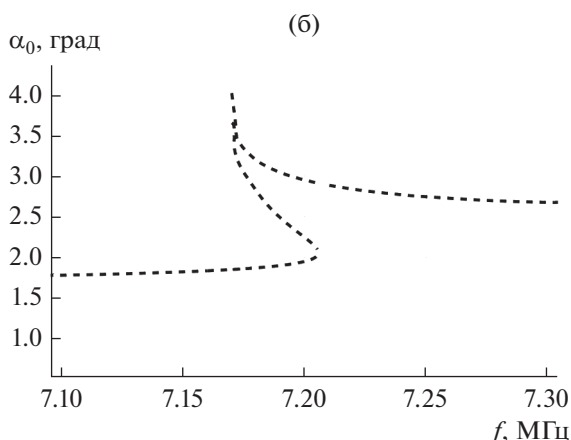
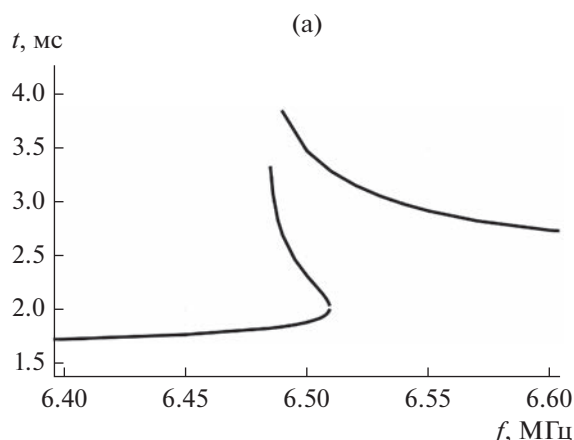


Рис. 14. Зависимость группового времени прихода сигнала t от частоты f : возмущенный случай для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн в увеличенном масштабе (см. рис. 13).

Структура ионограммы в окрестности ПИВ аналогична структуре ионограммы в окрестности Е-слоя (ср. рис. 3 и 14, на которых ионограммы показаны более подробно). Основным признаком ПИВ является наличие точки каустики (см. рис. 3 и 14), а также значительный рост группового запаздывания сигнала t (см. рис. 13). Кроме того, и для обыкновенной (на частоте ~ 5 МГц), и для необыкновенной (на частоте ~ 5.7 МГц) волн на ионограмме возникает локальный минимум, отсутствующий в невозмущенном случае (см. рис. 2 и рис. 11).

На рис. 15 показана лучевая структура в окрестности каустики обыкновенной волны, проходящей через точку наблюдения ($f \approx 6.5$ МГц).

При построении рис. 15 считалось, что лучи покидают излучатель в диапазоне углов $0^\circ \dots 90^\circ$. При этом необходимо отметить, что, как следует из расчетов, наличие ПИВ приводит к возникновению горба на верхней каустике, а также к таким

отражением от неоднородности, что область за излучателем оказывается засвеченной.

Возвращаясь к рис. 2 и 13, видим, что необыкновенная и обыкновенная волны сдвинуты относительно друг друга на определенную частоту, которую нетрудно оценить, исходя из того, что в случае вертикального падения частота отражения обыкновенной волны ($\omega_{\text{пл}} = 2\pi f_{\text{пл}}$) и частота отражения необыкновенной волны ($\omega_- = 2\pi f_-$) связаны следующим соотношением [10, 17]:

$$\omega_- = \frac{1}{2} \left(\omega_H + \sqrt{\omega_H^2 + 4\omega_{\text{пл}}^2} \right), \quad (14)$$

где $\omega_H = 2\pi f_H$ – гирочастота. Если плазменная частота много больше гирочастоты ($\omega_{\text{пл}} \gg \omega_H$), то выражение (14) можно переписать в виде

$$\omega_- - \omega_{\text{пл}} \approx \omega_H/2, \quad (15)$$

т.е. сдвиг частот равен половине гирочастоты.

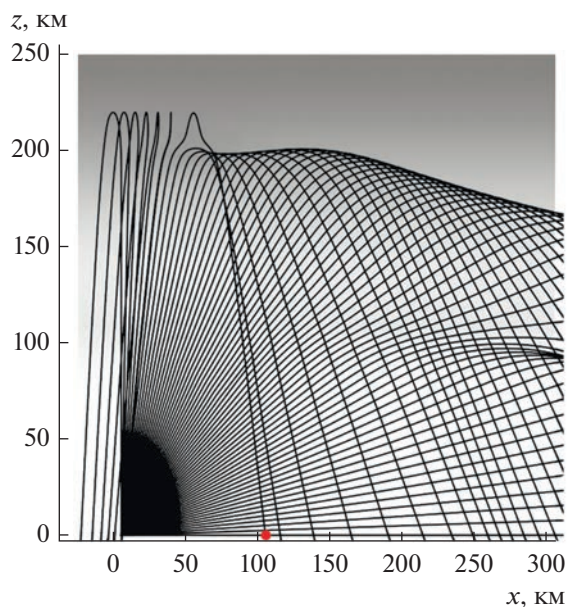


Рис. 15. Структура лучей в окрестности каустики обыкновенной волны; возмущенный случай; положение приемника отмечено точкой.

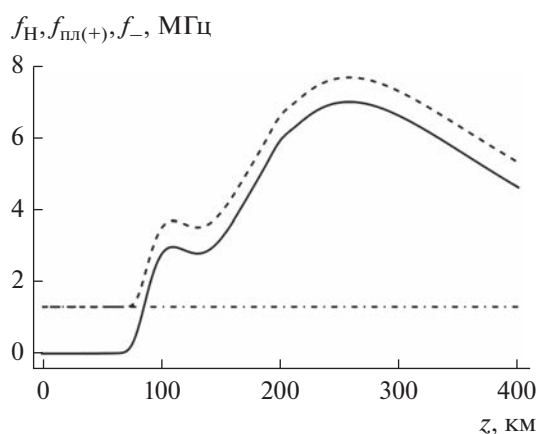


Рис. 16. Зависимости плазменной частоты $f_{\text{пл}}$ (сплошная линия), критической частоты необыкновенной волны f_- (штриховая линия) и гирочастоты f_H (штрихпунктирная) от высоты z .

На рис. 16 и 17 (в увеличенном масштабе) представлены соответствующие расчеты для рассматриваемой модели.

Видно, что начиная с высоты ~ 80 км, критическая частота обыкновенной волны (плазменная частота), отличается от критической частоты обыкновенной волны приблизительно на постоянную величину.

Поскольку рассматриваемое в работе зондирование слабонаклонное, эта величина (~ 0.7 МГц) хорошо согласуется с расчетами, приведенными на рис. 2 и 13. Поэтому одновременное наблюдение

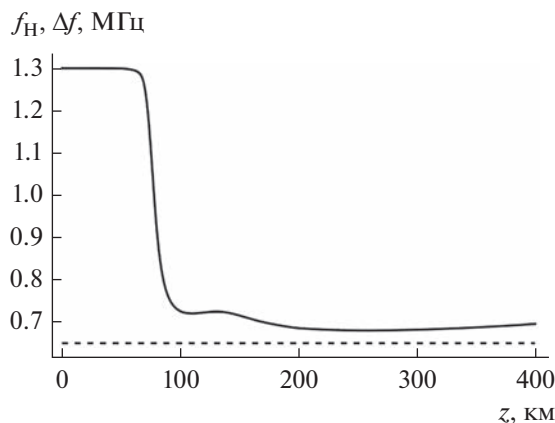


Рис. 17. Зависимости разности частот $\Delta f = f_- - f_{\text{пл}}$ (сплошная линия) и полугирочастоты $f_H/2$ (штриховая) от высоты z .

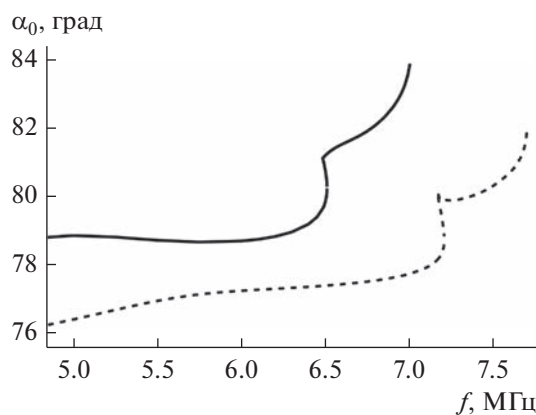


Рис. 18. Зависимость угла выхода сигнала α_0 от частоты f : возмущенный случай для обыкновенной (сплошная линия) и необыкновенной (штриховая) волн.

ние ионограмм обыкновенной и необыкновенной волн позволяет независимо оценить величины напряженности магнитного поля Земли.

Рассмотрим теперь зависимости угла выхода радиосигнала от частоты при наличии ПИВ, т.е. в возмущенном случае (рис. 18 и 19 (в увеличенном масштабе)).

Поскольку до 5 МГц кривые в возмущенном и невозмущенном случаях совпадают, на рис. 18 показаны только частоты выше 5 МГц, когда возникает влияние ПИВ.

Если рис. 18 позволяет сопоставить обыкновенную и необыкновенную волны, то рис. 19 иллюстрирует область каустики [18] (зону трехлучевости — каустического острия [19]). Точка излома графика функции соответствует области разрыва лучевого семейства, обусловленного долиной, как и в случае слоя E (ср. рис. 19 и рис. 8).

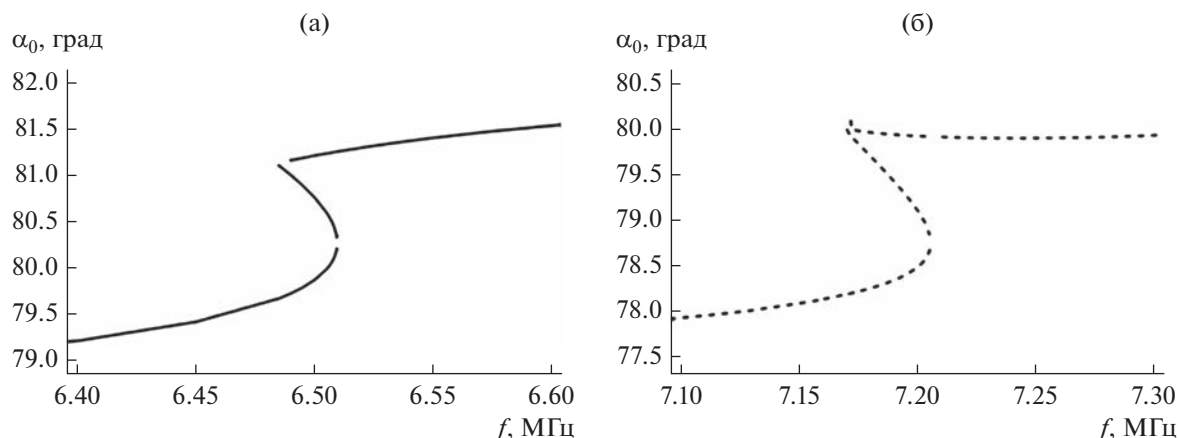


Рис. 19. Зависимость угла выхода сигнала α_0 от частоты f : возмущенный случай для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн в увеличенном масштабе (см. рис. 18).

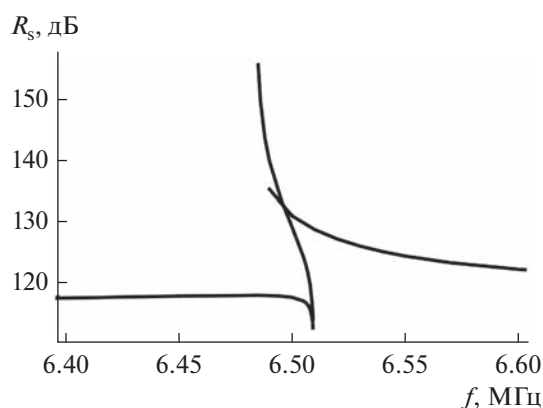


Рис. 20. Расходимость R_s как функция частоты f в окрестности ПИВ: возмущенный случай, обыкновенная волна.

Наконец, на рис. 20 показана расходимость лучевого потока R_s в окрестности ПИВ.

Поведение кривых на рис. 20 полностью совпадает с поведением кривых расходимости, рассчитанных в окрестности слоя Е (см. рис. 10).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, методом бихарактеристик исследованы особенности распространения радиоволн декаметрового диапазона ($\sim 2 \dots 8$ МГц) в ионосфере Земли, содержащей слои Е, F1 и F2. Изучена невозмущенная модель электронной концентрации и возмущенная модель, содержащая ПИВ — гладкую ионосферную неоднородность.

Рассмотрено распространение как обыкновенной, так и необыкновенной волны в магнитоактивной плазме. Выполнено численное моделирование ионограмм слабонаклонного зондирования ЛЧМ

сигналами и показано, что ионограмма необыкновенной волны оказывается сдвинута по частоте относительно ионограммы обыкновенной волны приблизительно на одну и ту же величину как для невозмущенной, так и для возмущенной модели.

Показано, что на частотах радиосигналов, отражающихся в окрестности максимума Е-слоя, а также на частотах, отражающихся в окрестности ПИВ, возникает каустика и область трехлучевости. Установлено, что зависимости группового времени запаздывания сигнала от частоты и угла выхода радиосигнала от частоты в обоих случаях имеют одну и ту же качественную зависимость.

Рассчитана расходимость лучевого потока в точке приема излучения, определяющая ослабление амплитуды. Показано, что расходимости и амплитуды принятых сигналов (без учета поглощения, обусловленного частотой соударений электронов в плазме) для обыкновенной и необыкновенной волн приблизительно одинаковы и отличаются только сдвигом по частоте. Расходимость резко убывает в окрестности каустики и резко нарастает при приближении частоты к частоте просачивания волны. Проблема просачивания радиоволны рассмотрена в работах [20, 21] на основе канонического оператора Маслова [22, 23].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-12-00299).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куркин В.И., Медведева И.В., Подлесный А.В. и др. // Арmandовские чтения. Всерос. открытая науч. конф. "Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн". Муром: Изд-во ВлГУ, 2022. С. 27.

2. Иванов В.А., Иванов Д.В., Рябова Н.В. // Вестн. Мари́йского гос. тех. ун-та. Сер. Радиотех. инфокоммуникац. системы. 2010. № 1. С. 3.
3. Иванов В.А., Иванов Д.В., Рябова Н.В. и др. // Вестн. Мари́йского гос. тех. ун-та. Сер. Радиотех. инфокоммуникац. системы. 2011. № 2. С. 15.
4. Kryukovsky A.S., Rastyagaev D.V., Bova Y.I., Popchenko O.V. // 7th All-Russian Microwave Conf. (RMC). IEEE, Moscow, 25–27 Nov., 2020. P. 220.
<https://doi.org/10.1109/RMC50626.2020.9312340>
5. Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Popchenko O.V., Rastyagaev D.V. // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 1991. Article No. 012002.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1991/1/012002>
6. Софьин А.В. // Междунар. Байкальская молодеж. науч. школа по фундаментальной физике. Тр. XVII Конф. молодых ученых. Иркутск, 2022. С. 406.
7. Софьин А.В., Куркин В.И. // Труды XXVII Всерос. открытой науч. конф. “Распространение радиоволн”, 28 июня–3 июля 2021 г. Калининград, 2021. С. 358.
8. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. // Космич. исслед. 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593.
9. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. 2-е изд. М.: Наука, 1967.
10. Davies K. Ionospheric Radio Propagation., National Bureau of Standards Monograph 80. Washington: US Gov. Printing Office, 1965.
11. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. // РЭ. 2015. Т. 60. № 10. С. 1001.
12. Крюковский А.С., Куркин В.И., Ларюнин О.А. и др. // РЭ. 2016. Т. 61. № 8. С. 794.
13. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 3.
14. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Бова Ю.И. // РЭ. 2020. Т. 65. № 12. С. 1160.
15. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. // РЭ. 1969. Т. 14. № 9. С. 1673.
16. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. // РЭ. 2012. Т. 57. № 9. С. 1028.
17. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Попченко О.В., Растягаев Д.В. // Всероссийские открытые Армандовские чтения. Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн. Матер. Всерос. открытой науч. конф. Муром. 25–27 мая 2021. Муром: Изд-во ВлГУ, 2021. С. 32.
18. Airy G.B. // Trans. Camb. Phil. Soc. 1838. V. 6. Pt. III. P. 379.
19. Pearcey T. // Phil. Mag. 1946. V. 37. № 268. P. 311.
20. Палкин Е.А., Петрович А.А. // РЭ. 2021. Т. 66. № 1. С. 18.
21. Палкин Е.А., Петрович А.А. // Всерос. открытые Армандовские чтения “Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн”. Муром: Изд-во ВлГУ, 2022. С. 81.
22. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965.
23. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. М.: Наука, 1976.

**К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА**

УДК 537.87

**ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН
ВЫСОКИХ ЧАСТОТ В СФЕРИЧЕСКИ-СЛОИСТОМ
ИОНОСФЕРНОМ РАДИОКАНАЛЕ**

© 2023 г. Н. Н. Зернов^а, М. А. Бисярин^{а, *}, В. Э. Герм^а

^а Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7-9, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация

*E-mail: m.bisarin@spbu.ru

Поступила в редакцию 29.01.2023 г.

После доработки 29.01.2023 г.

Принята к публикации 27.03.2023 г.

Разработан специальный аналитический метод описания процессов распространения высокочастотных электромагнитных волн, излучаемых точечным вертикальным диполем с поверхности идеально проводящей Земли, в регулярной сферически-слоистой фоновой ионосфере. В качестве базового получено представление волнового поля в виде интеграла по совокупности волновых компонент, каждая из которых связана с определенной лучевой траекторией. Такой подход позволяет аналитически учесть влияние среднемасштабных трехмерных включений в фоновую ионосферу как дополнительный набег фазы волновой компоненты с учетом искажения ее лучевой траектории и численно рассчитать эффект фокусировки волнового поля.

DOI: 10.31857/S0033849423060189, **EDN:** XOJBPL

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время значительное внимание исследователей привлекают задачи распространения высокочастотных полей в околоземном пространстве при наличии среднемасштабных локальных неоднородностей электронной плотности ионосферы. В таких условиях могут возникать локальные фокусировки высокочастотного (ВЧ) поля, обусловленные присутствием локальных ионосферных неоднородностей. Базовой задачей для описания эффектов фокусировок ВЧ-поля подобными неоднородностями, очевидно, является задача о возбуждении поля в сферически-симметричном приземном волноводе. Она рассматривается в данной работе. Результаты, полученные здесь, в дальнейшем используются при анализе эффектов локальных фокусировок ВЧ-полей среднемасштабными неоднородностями электронной плотности ионосферы.

Следует подчеркнуть, что в отличие от задач о распространении низкочастотных полей в приземном сферическом волноводе Земля–ионосфера [1, 2], где принято рассматривать распространение поля в вакуумном сферическом слое, ограниченном двумя сферическими поверхностями (ионосфера и Земля), характеризующимися своими импедансами, в задачах распространения ВЧ-полей, очевидно, должна учитываться, по меньшей мере, существенная зависимость электрон-

ной плотности фоновой ионосферы от высоты над поверхностью Земли. В таком протяженном слое могут также присутствовать среднемасштабные (10...100 км) локальные неоднородности электронной плотности.

Данная работа посвящена построению строгого асимптотического решения фоновой задачи для произвольно заданного вертикального распределения электронной плотности ионосферы.

Традиционно теоретические исследования процессов распространения электромагнитных волн ВЧ-диапазонов в околоземном пространстве базировались на применении метода геометрической оптики и подразумевали построение полной лучевой картины процесса. Применение этой методики усложнялось наличием специфических свойств ионосферы, таких как немонотонность вертикальных профилей электронной концентрации, порожденная геомагнитным полем анизотропия, и спонтанное возникновение разномасштабных неоднородностей вследствие разнообразных гео- и гелиофизических процессов. Расчеты амплитудных характеристик полей в неоднородной магнитоактивной ионосфере и многочисленные примеры применения метода прямого численного интегрирования уравнений лучей для решения разнообразных прямых и обратных задач акустики, сейсмологии и радиофизики представлены в работах [3, 4]. Последующие исследования

выявили недостаточность стандартного математического аппарата общей теории волновых процессов и инициировали разработку принципиально новой методики.

Важным проявлением неоднородных свойств ионосферы является формирование каустических поверхностей и фокусировка ВЧ-радиоволн. Для описания этих явлений весьма эффективным оказалось применение волновой теории катастроф [5]. Математическое моделирование фокусировки при распространении радиоволн в ионосфере Земли на основе волновой теории катастроф и канонического оператора Маслова осуществлено в работе [6] с помощью расширенной бихарактеристической системы в фазовом пространстве. История развития и применения дифракционно-лучевой теории к задачам распространения электромагнитных волн в ионосферной плазме представлена в обзоре [7]. Здесь проанализировано формирование и изучены свойства поля в областях каустических особенностей в неоднородной ионосфере, рассмотрена пространственно-временная фокусировка при распространении сигналов в диспергирующей ионосфере, отмечены особенности при прохождении и отражении волн от ионосферных слоев. Численная реализация метода Маслова для интегральных представлений, обобщающих представления геометрической оптики при наличии фокусировок, изложена в работе [8].

Явление фокусировки волновых ВЧ-полей в ионосфере на локальных среднескальных неоднородностях в последнее время стало привлекать особое внимание исследователей. Основными способами описания этого явления являются построение лучевой картины [9–12] и численное решение полной волновой задачи с привлечением метода множественных фазовых экранов [13].

Следует отметить, однако, что несколько десятилетий назад уже был разработан альтернативный подход для описания названного явления. Ключевым моментом этого подхода является представление волнового ВЧ-поля в неоднородной среде в виде интеграла по некоторому специальному параметру. Неоднородность характеризуется иерархией масштабов. Наибольший из них описывает зависимость от пространственных координат свойств фоновой ионосферы, меньшие масштабы — порядка десятков и сотен километров — относятся к среднескальным неоднородностям. В экспериментах по созданию в ионосфере искусственных неоднородностей электронной концентрации величина этого масштаба уменьшается до нескольких километров. Анализ рассеяния ВЧ-волн на неоднородностях столь малого масштаба требует учета дифракционных эффектов, если волновой параметр существенно отличается от нуля.

Упомянутое выше интегральное представление волнового поля в приближении рассеяния вперед было впервые построено в работе [14]. Здесь волновое ВЧ-поле в ионосфере со среднескальными неоднородностями представлено в виде разложения по дифракционным компонентам. В последовавшей затем серии работ [15–19] этот подход был усовершенствован и применен к исследованию рассеяния ВЧ-полей на среднескальных (протяженностью от десятков до сотен километров) неоднородностей электронной плотности ионосферы в модели двумерных фоновых ионосферы и локальных неоднородностей.

В отличие от некоторых других известных интегральных представлений ВЧ-полей в неоднородной среде [20–23], построенных из элементарных волн геометрикооптического типа, названное выше интегральное представление состоит из компонента, каждая из которых является дифрагирующей волной. Таким образом, автоматически учитывалась дифракция каждой отдельной компоненты на локальных неоднородностях в случае отличия от нуля волнового (дифракционного) параметра. Это достигалось в результате применения теории возмущений для комплексной фазы компонент интегрального представления поля с допущением многократного рассеяния в направлении распространения и с пренебрежением обратного рассеяния. Следует отметить, что в предельном случае нулевого дифракционного параметра волновой компоненты это интегральное представление автоматически сводится к частным случаям интерференционного [22] или осцилляторного [23] интегралов, в которых не учитываются дифракционные явления на ионосферных локальных среднескальных неоднородностях.

1. ЗАДАЧА О ПОЛЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО ИОНОСФЕРНОГО СЛОЯ

Распространение радиоволн высоких частот в окрестности земной поверхности — это классическая задача, исследовавшаяся в [1, 2, 24–29] и многими другими авторами. Отметим среди них изучение специфики формирования каустик обыкновенной и необыкновенной волн [30] и влияния экваториальной аномалии ионосферы на поляризационные характеристики радиоволн ВЧ-диапазона [31].

Построение поля вертикального диполя в сферически симметричной ионосфере осуществляется в сферической системе координат (r, ϑ, φ) с началом отсчета в центре Земли с радиусом R_0 . Вертикальный диполь с дипольным моментом $\mathcal{P}$, ориентированный вдоль полярной оси, помеща-

ется на полярной оси на поверхности Земли в точке с координатами $(R_e, 0, 0)$. При таком задании излучателя векторный электрический потенциал Герца $\vec{\mathcal{H}}$ имеет единственную r -компоненту, которая при этом зависит от координат (r, ϑ) и не зависит от азимутального угла φ . Эта компонента $\mathcal{H}(r, \vartheta)$ получается как решение известного (см., например, [1, (17.1)–(17.5)] и в ряде других изданий) дифференциального уравнения в частных производных, а затем радиальная компонента электрического поля выражается в соответствии с

$$E_r(r, \vartheta) = -\frac{1}{r^2 \epsilon_0 \epsilon_m(r)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \mathcal{H}(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right), \quad (1)$$

где $\epsilon_m(r)$ – это относительная диэлектрическая проницаемость сферически симметричной ионосферы, а константа ϵ_0 – используемая в системе СИ диэлектрическая проницаемость вакуума.

Радиальная компонента вектора Герца представима в виде ряда

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(r, \vartheta) &= \frac{\mathcal{P}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) u_n(r, \vartheta) = \\ &= \frac{\mathcal{P}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(\cos \vartheta) R_n(r) \end{aligned} \quad (2)$$

с выделением угловой зависимости от $P_n(\cos \vartheta)$ – полинома Лежандра порядка n от аргумента $\cos \vartheta$. Радиальная функция подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 R_n}{dr^2} - \frac{1}{\epsilon_m(r)} \frac{d\epsilon_m}{dr} \frac{dR_n}{dr} + \\ &+ \left[k^2 \epsilon_m(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] R_n = -\frac{\delta(r-b)}{r^2} \end{aligned} \quad (3)$$

с точечным дипольным источником. В дальнейшем ограничимся случаем, когда источник размещен на поверхности Земли: $b = R_e$. Предположим также, что земная поверхность является идеальным проводником, так что граничное условие на ней следует задать в виде

$$R'_n(R_e) = 0. \quad (4)$$

С физической точки зрения это означает, что электрическое поле не проникает сквозь поверхность Земли и коэффициент отражения на границе раздела равен единице по абсолютной величине. Отметим, что такое ограничение вполне оправданно для целей данной работы: оно не искажает структуру лучевых ВЧ-траекторий в фоновой сферически симметричной ионосфере и процесс рассеяния волнового поля на среднемасштабных локальных неоднородностях, однако делает существенно менее громоздкими последующие вычисления.

Уравнение (3) имеет большую общность, так как допускает неоднородность среды. В случае однородной среды в монографии [1] соответствующая задача рассмотрена для открытой сферы, а в [2] – для сферически симметричного волновода с вакуумной полостью между его стенками. Частный случай уравнения (3) с радиальной зависимостью диэлектрической проницаемости $\epsilon_m(r)$ исследовался авторами [1, 2] при рассмотрении эффекта суперрефракции, обусловленной наличием непосредственно над земной поверхностью вертикально неоднородного бездисперсионного слоя нейтральной атмосферы. В этих работах был введен эквивалентный радиус Земли, и реальная задача сводилась к случаю однородной среды над земной поверхностью. Такой подход, однако, представляется неприменимым для целей данной работы.

В настоящей работе рассмотрение формально ограничено сферически-симметричной фоновой средой. При этом структура поля лучей, порожденного точечным источником в сферически-симметричной среде, является базой и в дальнейшем может использоваться для анализа эффектов, обусловленных присутствием в ионосфере локальных среднемасштабных неоднородностей электронной плотности. Последние, в свою очередь, могут являться причиной появления эффектов многолучевости и эффектов локальных фокусировок высокочастотного поля. В плане учета локальных неоднородностей следует указать, что данная методика практически без изменений распространяется на случай, когда локальная неоднородность (неоднородности) электронной плотности ионосферы не “накрывает” особенности поля лучей (каустики, каустические острия и т.п.), сформированные распределением электронной плотности фоновой ионосферы. Это дает возможность ограничиться при рассмотрении эффектов рассеяния поля крупномасштабными локальными неоднородностями лишь интегрированием фаз поля вдоль всех лучей, соединяющих корреспондирующие точки. Альтернативный случай, когда упомянутые траектории “накрывают” особенности поля невозмущенных лучей, выходит за рамки данного рассмотрения и требует дополнительного изучения. Кроме того, диэлектрическая проницаемость ионосферы как на земной поверхности $r = R_e$, так и вблизи нее полагается равной единице ($\epsilon_m(R_e) = 1$), так что неоднородный ионосферный слой начинается с высот порядка 100 км над Землей, что вполне типично описывается широко используемыми моделями ионосферы, например NeQuick или IRI. Совершенствование моделей ионосферы ведется также в плане учета частоты соударений [32] и численного моделирования амплитудных карт ВЧ-полей [33].

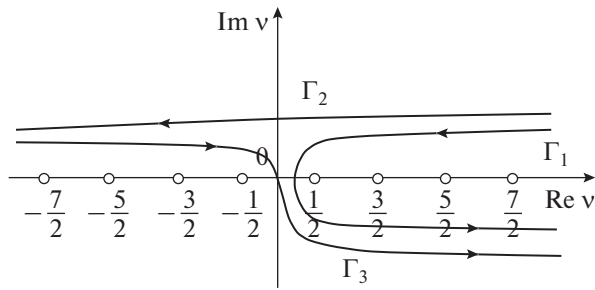


Рис. 1. Элементы контура интегрирования для вычисления $S(r, \vartheta)$ по формуле (7).

Уравнение (3) в действительности представляет собой уравнение для функции Грина. Специфическая трудность рассматриваемой проблемы вызвана тем, что граничное условие (4) задается на поверхности Земли, но там же помещается и сингулярный источник электромагнитной волны. Чтобы разделить эти точки, уравнение (3) следует сначала рассмотреть и решить при произвольном расположении источника $r = b > R_e$ над поверхностью Земли, а затем применить процедуру предельного перехода $b \rightarrow R_e$. В процессе решения обосновывается пренебрежение слагаемыми, содержащими производные от относительной диэлектрической проницаемости (подробнее см. в Приложении). Результатом является следующее выражение для зависимости волнового поля от радиальной координаты:

$$E_r(r, \theta) = -\frac{\mathcal{P}}{\pi \epsilon_0 \epsilon_m^{3/4}(r) R_e r^2} \sqrt{\frac{r}{R_e}} S(r, \theta), \quad (5)$$

здесь

$$S(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(n + \frac{1}{2} \right) (n+1) P_n(\cos \theta) \times \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr\sqrt{\epsilon_m(r)})}{kR_e \left(H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(kR_e) - H_{n+\frac{3}{2}}^{(1)}(kR_e) \right) + H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR_e)}, \quad (6)$$

$H_v^{(1)}(\xi)$ – функции Ганкеля первого рода.

Стоит особо отметить, что решение (5), (6) расширяет круг возможных сферически симметричных задач распространения радиоволн, допускающих строго асимптотическое решение для большого разнообразия ионосферных структур с радиальной зависимостью над сферической поверхностью Земли. К тому же оно автоматически сводится к хорошо известному строгому решению в случае однородной среды ($\epsilon_m = \text{const}$) над сферической Землей [1].

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО ИОНОСФЕРНОГО СЛОЯ

Как показано в [1], ряд (6) сходится медленно и непригоден для практических расчетов. Этот недостаток можно исправить, если заменить дискретную сумму контурным интегралом, такая процедура известна как преобразование Ватсона [25, 26], его результатом является интегральное выражение [1]. Преобразование Ватсона ряда Дебая заключается во введении полуцелой перемен-

ной $n' = n + \frac{1}{2}$, замене дискретной переменной n' ее континуальным аналогом $v = n'$ и выполнении последующих стандартных приемов преобразования Ватсона. В результате вместо дискретного ряда получается интегральное представление

$$S(r, \theta) = \frac{i}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{v \left(v^2 - \frac{1}{4} \right)}{\cos \pi v} P_{v-\frac{1}{2}}(\cos(\pi - \theta)) \times \frac{H_v^{(1)}(kr\sqrt{\epsilon_m(r)})}{kR_e \left(H_{v-1}^{(1)}(kR_e) - H_{v+1}^{(1)}(kR_e) \right) + H_v^{(1)}(kR_e)} dv, \quad (7)$$

более удобное для последующего анализа. Интегрирование по формуле (7) производится вдоль контура Γ_1 , представленного на рис. 1. Тем не менее для дальнейшего рассмотрения этого интеграла контур интегрирования преобразуется в контур вдоль вещественной оси в бесконечных пределах $(-\infty, +\infty)$. Преобразование выполняется последовательно в два шага. Сначала интеграл по контуру Γ_1 преобразуется в сумму двух интегралов по контурам Γ_2 и Γ_3 . Привлекая свойства симметрии функций Лежандра и Ганкеля, можно показать, что подынтегральное выражение приобретает противоположный знак при замене переменной интегрирования v на $(-v)$, следовательно, интеграл вдоль кривой Γ_3 обращается в нуль. Таким образом, окончательно электрическое поле $E_r(r, \vartheta)$ выражается посредством интеграла (7) вдоль кривой Γ_2 которая может быть деформирована и совмещена с вещественной осью. Именно в таком виде это представление и используется далее.

Подставив в формулу (7) асимптотические выражения функций Лежандра и Ганкеля [34], а также введя пропорциональную v новую переменную интегрирования $\alpha = v/kR_e$ получаем общее

представление для радиальной компоненты электрического поля

$$E_r(r, \theta) = \frac{\mathcal{P}k(kR_e)^{5/2} \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)}{\pi\epsilon_0\epsilon_m^{3/4}(r)r^2\sqrt{2\pi\sin\theta}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\left((kR_e\alpha)^2 - \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{kR_e\alpha - \frac{1}{2}}} \frac{\exp[i\psi_0(r, \vartheta, \alpha)]}{\sqrt[4]{\epsilon_m(r) - \frac{R_e^2}{r^2}\alpha^2} \sqrt[4]{1 - \alpha^2}} d\alpha \quad (8)$$

для односкачковой трассы распространения. (Случай многоскачкового распространения также может быть рассмотрен в рамках предложенной процедуры.) Фазовые функции каждой α -компоненты в (8) в случае односкачковой трассы распространения

$$\psi_0(r, \vartheta, \alpha) = k \left(\int_{R_e}^{\tilde{r}} \sqrt{\epsilon_m(r') - \frac{R_e^2}{r'^2} \alpha^2} dr' + \int_{\tilde{r}}^{\tilde{r}} \sqrt{\epsilon_m(r') - \frac{R_e^2}{r'^2} \alpha^2} dr' + S_e \alpha \right) \quad (9)$$

позволяют явно выделить различные составляющие процесса. Первое слагаемое соответствует распространению волновой компоненты вертикально вверх от расположенного на поверхности Земли источника, переменная интегрирования α связана с направлением излучения. Эта волновая компонента достигает точки поворота $\tilde{r}(\alpha)$ и затем распространяется вниз до точки с координатами (r, ϑ) , что характеризуется вторым слагаемым. В частности, лучевая траектория может заканчиваться и на земной поверхности в точке с координатами $(R_e, \vartheta = S_e/R_e)$. Третье слагаемое соответствует набегу фазы вдоль земной поверхности.

Интеграл (8) выражает волновое поле в терминах волновых компонент геометрооптического типа, маркируемых параметром α . Он характеризует случай более низких частот, когда волновые компоненты с параметром α совершают поворот книзу в ионосфере благодаря явлению рефракции. Значение радиальной координаты $\tilde{r}$ определяется точкой поворота асимптотики Дебая функций Ганкеля [34]. При этом каждая α -компонента приобретает дополнительный набег фазы, соответствующий волне, распространяющейся вниз. Строго говоря, асимптотическое решение методом Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна (ВКБ) для E_r неприменимо в окрестности точки поворота $\tilde{r}$, где равномерная асимптотика должна выражаться посредством функций Эйри. Тем не менее сингулярность в выражении (8) при $r \rightarrow \tilde{r}$ является интегрируемой и, как подробно исследовано в [19], а также

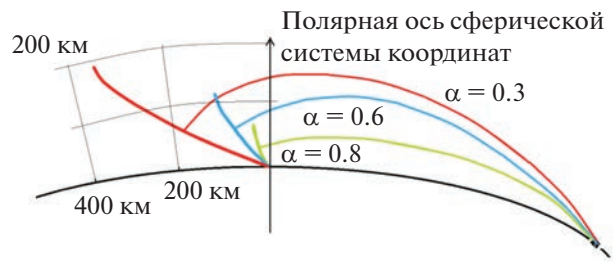


Рис. 2. Волновые фронты α -компонент, проходящие через точку источника, и лучевые траектории, достигающие точку наблюдения.

вкратце обсуждалось в [17] для похожей проблемы, не приводит к существенной погрешности при дальнейшем использовании ВКБ-представления (8).

Выражаемое формулами (8), (9) решение, очевидно, не зависит от угла φ сферической системы координат. Это означает, в частности, что в трехмерном пространстве каждая α -компонента интегрального представления (8), (9) является цилиндрически симметричной волной, поэтому и интегральное представление поля $E_r(r, \vartheta)$ в целом выражено в терминах цилиндрически симметричных волновых компонент. Каждая волновая компонента распространяется до точки наблюдения (r, ϑ, φ) в плоскости $(r, \vartheta, \varphi = \text{const})$ вдоль лучевой траектории, определяемой обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \pm \frac{\alpha R_e}{r^2 \sqrt{\epsilon_m(r) - \frac{R_e^2}{r^2} \alpha^2}}. \quad (10)$$

Здесь знак плюс соответствует распространению волны вверх, знак минус — вниз.

Для дальнейшего уточнения свойств волновых компонент полного поля в интеграле (8) с фазами (9) для каждой α -компоненты строится лучевая траектория, достигающая точки наблюдения (r, ϑ) и исходящая ортогонально из соответствующего значения α воображаемого волнового фронта, как показано на рис. 2. При этом все воображаемые волновые фронты содержат реальное физическое положение точечного источника $(R_e, 0, 0)$. В соответствии с рис. 2 для нахождения точки выхода лучевой траектории каждой α -компоненты из ее начального фронта необходимо решить задачу для уравнения (10) в обратном направлении от заданной точки наблюдения, причем диапазон ϑ должен включать и отрицательные значения. Физическая альтернативная интерпретация заключается в том, что направления лучевых траек-

торий при $\vartheta > 0$ соответствуют фактическому распределению фаз различных α -компонент вдоль полярной оси сферической системы координат. Утверждая это, следует осознавать, что такая интерпретация фаз излучаемых α -компонент основывается на их ВКБ-структуре. Кроме того, следует также учитывать, что формально ВКБ-амплитуды сингулярны при $\vartheta \rightarrow 0$. Параметр α напрямую привязан к углу χ между полярной осью введенной сферической системы координат и нормалью к волновому фронту α -компоненты в месте расположения источника соотношением $\sin \chi = \alpha$. Наконец, интеграл по переменной α в (8) суммирует вклады в полное поле всех волновых компонент.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом разработанного в данной работе аналитического метода решения задачи о поле вертикального электрического диполя, помещенного на поверхности идеально проводящей Земли, является представление поля в точке приемника в виде интеграла по совокупности волновых компонент, каждая из которых связана с определенной лучевой траекторией. Выражения (8), (9) приведены для случая, когда имеет место однократное отражение распространяющегося высокочастотного поля от ионосферы, однако аналогичные выражения легко могут быть выписаны и для трансфоносферного распространения, траектория которого также выводится из уравнения (10) (со знаком “+” в правой части). Таким образом, этим методом могут быть описаны волновые поля как в верхнем, так и в нижнем поддиапазонах высокочастотного радиодиапазона.

Полученное интегральное представление для решения задачи в сферически симметричной фоновой ионосфере допускает аналитическую модификацию выражения для фазы (9), учитывающее как локальные отклонения электронной концентрации от фоновых значений, так и сопутствующие искажения лучевых траекторий всех волновых компонент. Тем самым открывается перспектива аналитического учета влияния среднemasштабных трехмерных ионосферных включений на процесс распространения и численной оценки вызываемых ими эффектов фокусировки ВЧ-полей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПОСТРОЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НАД ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ

Определение радиальных функций $R_n(r)$ для точечного источника, помещенного на поверхности идеально проводящей земной поверхности,

требует привлечения специальных математических методов, которым и посвящено данное Приложение. Как указывалось в разд. 1, особую трудность рассматриваемой задаче придает то обстоятельство, что граничное условие (4) ставится при $r = R_e$, т.е. в точке сингулярности уравнения (3). Чтобы разделить эти две проблемы, следует сначала записать и решить уравнение (9) при расположении источника поля в некоторой произвольной точке $r = b > R_e$ над земной поверхностью:

$$\frac{d^2 R_n}{dx^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) R_n = -\frac{1}{b\xi} \delta(x - \xi), \quad (\text{П.1})$$

где введена вспомогательная независимая переменная $x = kr\sqrt{\epsilon_m(r)}$, а параметр $\xi = kb\sqrt{\epsilon_m(b)}$ соответствует значению этой переменной в точке источника. После нахождения решения уравнения (П.1) следует осуществить предельный переход при $b \rightarrow R_e$.

Легко убедиться, что однородное уравнение (П.1) имеет фундаментальную систему решений

$$R_n^{(0)}(x) = \sqrt{x} Z_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{П.2})$$

где $Z_\nu(x)$ — цилиндрические функции порядка ν . Принимая временную зависимость волнового поля в виде $\exp(-i\omega t)$, в области над источником $x > \xi$ следует выбрать функции Ганкеля первого рода, поскольку именно ими описываются волны, распространяющиеся вверх. Поскольку в слое между поверхностью Земли и источником $R_e < x < \xi$ имеет место распространение как вверх, так и вниз, такая ситуация корректно описывается посредством функций Бесселя. Таким образом, частное решение уравнения (П.1) представляется выражением

$$R_n^{(1)}(x) = \frac{i\pi}{2b\xi} \left[\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) \Theta(x - \xi) + \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \sqrt{x} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \Theta(\xi - x) \right] \quad (\text{П.3})$$

с использованием $\Theta(x)$ — функции Хевисайда.

Граничное условие, сформулированное в виде

$$R_n'(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \xi = kR_e \quad (\text{П.4})$$

может быть удовлетворено путем добавления функции (П.2) с должным образом подобранным коэффициентом. Нетрудно убедиться, что выражение

$$R_n^{\text{total}}(x) = \frac{i\pi}{2b\xi} \times \left[\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) \Theta(x-\xi) + \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \sqrt{x} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \Theta(\xi-x) - \sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \frac{\left(\sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) \right)'}{\left(\sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right)'} \right] \quad (\text{П.5})$$

удовлетворяет как уравнению (П.1), так и граничному условию (П.4). Поскольку предметом данного исследования является пространство над земной

поверхностью, выделим из (П.5) соответствующую часть, обозначаемую как $R_n(x)$. После подстановки $b = R_e$ и $\xi = kR_e$ эта функция приобретает вид

$$R_n(x) = \frac{i\pi}{2R_e\xi} \left[\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) - \sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} \frac{\left(\sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) \right)'}{\left(\sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right)'} \right] =$$

$$= \frac{i\pi}{2R_e\xi} \frac{\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)}{\left(\sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right)'} \mathcal{W} \left[\sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi), \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right] = -\frac{1}{R_e\xi} \frac{\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)}{\left(\sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right)'}, \quad (\text{П.6})$$

где использовано известное значение вронскиана

$$\mathcal{W} \left[\sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi), \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right] = \frac{2i}{\pi}.$$

Выражение для производной в знаменателе (П.6) может быть упрощено, и в результате получается

$$R_n(x) = -\frac{2}{R_e} \sqrt{\frac{x}{\xi}} \times \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)}{\xi \left(H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) - H_{n+\frac{3}{2}}^{(1)}(\xi) \right) + H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi)}. \quad (\text{П.7})$$

В формулу (П.7) подставляется радиальная координата r , и в таком виде она используется в последующих аналитических преобразованиях. Следует отметить, что радиальная функция (П.7) полностью соответствует решению задачи о поле точечного источника над сферической идеально проводящей Землей в случае поверхностного импеданса $\delta = 0$ [1].

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность Д.С. Лукину за постоянное внимание к работе и пло-

дотворные дискуссии по широкому кругу научных проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. М.: Наука, 1991.
2. Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. Распространение радиоволн в волноводе Земля–ионосфера и в ионосфере. М.: Наука, 1993.
3. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. // Космич. исслед. 1967. Т. 5. № 4. С. 593.
4. Спиридонов Ю.Г., Лукин Д.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 12. С. 1769.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С. // РЭ. 2019. Т. 64. № 11. С. 1116.
6. Лукин Д.С., Палкин Е.А., Ипатов Е.Б. и др. // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 12/2. С. 29.
7. Растягаев Д.В., Палкин Е.А., Лукин Д.С. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64. № 8–9. С. 590.
8. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: Изд-во МФТИ, 1982.
9. Koval A., Chen Y., Stanislavsky A., Zhang Q.-H. // J. Geophysical Research – Space Phys. 2017. V. 122. P. 9092.
<https://doi.org/10.1002/2017JA024080>

10. Koval A., Chen Y., Stanislavsky A., Kashcheyev A., Zhang Q.-H. // J. Geophysical Research—Space Phys. 2018. V. 123. P. 8940.
11. Lynn K.J.W., Balan N., Klimenko M.V. et al. // J. Geophysical Research. Space Phys. 2020. V. 125. № 7. P. e2019JA027575.
<https://doi.org/10.1029/2019JA027575>
12. Резниченко А.И., Колосков Ф.В., Сопин Ф.Ф., Ямпольский Ю.М. // Радиофизика и радиоастрономия. 2020. Т. 25. № 2. С. 118.
<https://doi.org/10.15407/rpra.25.02.118>
13. Carrano C.S., Retterer J.M., Groves K.M. et al. // 2020 XXXIIIrd General Assembly and Scientific Symp. of the Int. Union of Radio Science. Rome. 29 Aug.—5 Sept. N.Y.: IEEE, 2020. Paper № 9232348.
<https://doi.org/10.23919/URSIGASS49373.2020.9232348>
14. Зернов Н.Н. // РЭ. 1990. Т. 35. № 8. С. 1590.
15. Zernov N.N., Ghern V.E., Zaalov N.Yu., Nikitin A.V. // Radio Sci. 1992. V. 27. № 2. P. 235.
16. Zernov N.N., Lundborg B. The Statistical Theory of Wave Propagation and HF Propagation in the Ionosphere with Local Inhomogeneities. Uppsala: Swedish Inst. of Space Physics, 1993.
17. Zernov N.N., Lundborg B. // Radio Sci. 1996. V. 31. № 1. P. 67.
18. Воронцов А.В., Герм В.Э., Зернов Н.Н. Проблемы дифракции и распространения волн. Т. 25 / Под ред. Г.И. Макарова. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993. С. 108.
19. Зернов Н.Н. // РЭ. 1994. Т. 39. № 2. С. 241.
20. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
21. Кравцов Ю.А. // Акуст. журн. 1968. Т. 14. № 1. С. 1.
22. Орлов Ю.И. // Труды МЭИ. 1972. Т. 119. С. 82.
23. Arnold J.M. // Radio Sci. 1982. V. 17. P. 1181.
24. Debye P. // Math. Ann. 1909. Bd. 67. № 4. S. 535.
25. Watson G.N. // Proc. Royal Soc. A. 1918. V. 95. № 666. P. 83.
26. Watson G.N. // Proc. Royal Soc. A. 1919. V. 95. № 673. P. 546.
27. Wait J.R. Electromagnetic Waves in Stratified Media. N.Y.: Pergamon Press, 1962.
28. Wait J.R. Lectures on Waves Propagation Theory. N.Y.: Pergamon Press, 1981.
29. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
30. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Бова Ю.И. // РЭ. 2020. Т. 65. № 12. С. 1160.
31. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г. и др. // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. 2021. Вып. 680. С. 77.
32. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Михалёва Е.В., Растягаев Д.В. // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 117.
33. Крюковский А.С., Куркин В.И., Ларюнин О.А. и др. // РЭ. 2016. Т. 61. № 8. С. 794.
34. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

**К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА**

УДК 621.396

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ШИРОКОПОЛОСНОСТИ СИСТЕМ СПУТНИКОВОЙ РАДИОСВЯЗИ В УСЛОВИЯХ ВНУТРИМОДОВОЙ ДИСПЕРСИИ ТРАНСИОНОСФЕРНЫХ РАДИОКАНАЛОВ

© 2023 г. Д. В. Иванов^а, В. А. Иванов^а, Н. В. Рябова^а, А. А. Кислицын^а, *

^а *Поволжский государственный технологический университет,
пл. Ленина, 3, Йошкар-Ола, 424000 Российская Федерация*

*E-mail: KislitsinAA@volgatech.net

Поступила в редакцию 17.03.2023 г.

После доработки 17.03.2023 г.

Принята к публикации 26.03.2023 г.

Решена проблема существенного расширения полосы частот транссионосферного радиоканала до предельно возможных значений для повышения эффективности систем спутниковой связи. Создан комплекс средств и математическое обеспечение для преодоления дисперсии групповой задержки на основе применения методов интеллектуального анализа данных экспериментальной диагностики транссионосферной линии связи. Развита алгоритмы и средства интеллектуальной сенсорной диагностики широкополосных радиоканалов с режимами адаптации к изменчивости дисперсии. Установлено, что без адаптации удастся создать радиоканалы неискаженной передачи с коэффициентом широкополосности не более 4.5%, при этом адаптация к изменчивости дисперсии позволяет увеличить широкополосность до 11.5%. Найдено, что наибольшей широкополосности (20...25%) для неискаженной дисперсией передачи можно добиться, применяя адаптивную инверсную фильтрацию частотной характеристики канала в совокупности с такими интеллектуальными методами как: эквализация с ошибкой, машинное обучения эквалайзера канала и обработка больших данных.

DOI: 10.31857/S0033849423060049, EDN: XLUNDS

ВВЕДЕНИЕ

Спутниковая связь относится к одному из основных видов дальней радиосвязи, способной обеспечить передачу больших объемов информации на дальние расстояния. В настоящее время спутниковая связь продолжает активно развиваться, возникают новые технические решения, направленные на реализацию и использование широкополосных систем WGS и систем с высокой пропускной способностью HTS. Это позволяет обеспечивать территории мультимедийной связью и создавать корпоративные высокоскоростные интернет-сети. Системы спутниковой связи (ССС) работают сквозь ионосферу, используя транссионосферный радиоканал на рабочих частотах из диапазона 0.1...30 ГГц (диапазоны УВЧ и СВЧ) [1].

Одним из направлений модернизации является решение проблемы существенного расширения полосы частот транссионосферного радиоканала до предельно возможных значений. Трудности на этом пути связаны с проявлением внутримодовой дисперсии, когда с превышением полосой некоторого предела, называемого полосой когерент-

ности, возникают дисперсионные искажения переносящих информацию волновых пакетов [2]. Большой вклад в развитие физических моделей распространения в диспергирующих средах широкополосных волновых пакетов внесли ученые научной школы Д.С. Лукина [3–5]. Эти работы особенно актуальны для радиосвязи и радиолокации.

Для преодоления искажений требуется проведение исследований и создание соответствующих средств. Было показано, что используемые методы, по ряду причин, не обеспечивают полного преодоления негативного эффекта. Поэтому в настоящее время стоит задача предельно возможного увеличения широкополосности радиоканалов связи и анализа влияния на нее геофизических факторов. Перспективы ее решения связаны с применением технологий искусственного интеллекта.

Цель данной работы — дальнейшее развитие с применением технологий искусственного интеллекта методов и комплекса средств для обеспечения предельной широкополосности систем спутниковой радиосвязи в условиях внутримодовой дисперсии.

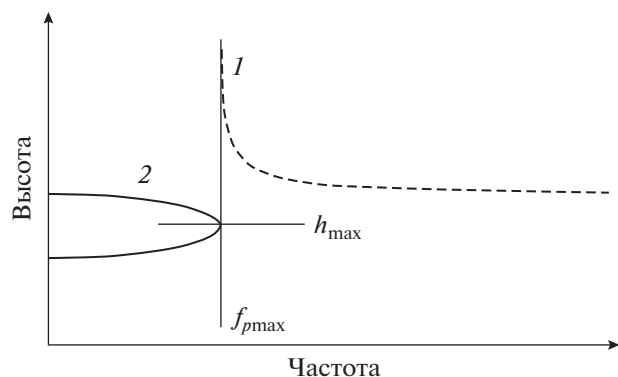


Рис. 1. Аномальная внутримодовая дисперсия в транссионосферном канале.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ШИРОКОПОЛОСНОСТИ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ ТРАНСИОНОСФЕРНЫХ РАДИОКАНАЛОВ

Для решения поставленных задач требуется комплексирование канальной и физической моделей. Такой подход позволяет установить связи параметров системных характеристик радиоканалов с полным электронным содержанием (ПЭС или ТЕС (Total Electron Content)) ионосферы [1]. В рамках канальной модели задача сводится к описанию распространения волновых пакетов (радиоимпульсов) и замене радиоканала эквивалентной линейной системой с частотной (ЧХ) и импульсной (ИХ) характеристиками. При этом ЧХ канала имеет динамический характер, который учитывается с помощью медленного (геофизического) времени. Амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики радиоканала получаются при использовании физической модели, основанной на известном, для данного случая, решении в высокочастотном приближении волнового уравнения.

Для радиоканала учтем внутримодовую частотную дисперсию групповой задержки [6, 7]. Формулу для неё можно получить из выражения для разложения ФЧХ в ряд Тейлора, около его рабочей частоты $\bar{\omega}$ канала, по разностным частотам $\Omega = \omega - \bar{\omega}$ до слагаемого третьего порядка:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\omega} + \Omega) &= \varphi(\bar{\omega}) + \varphi'(\bar{\omega})\Omega + \frac{1}{2}\varphi''(\bar{\omega})\Omega^2 = \\ &= \varphi(\bar{\omega}) + \tau_g(\bar{\omega})\Omega + \frac{1}{2}\text{GDD}\Omega^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Дифференцированием формулы (1) можно получить разложение для групповой задержки волнового пакета [8]:

$$\begin{aligned} \tau_g(\bar{\omega} + \Omega) &= \frac{d\varphi}{d\omega} = \tau_g(\bar{\omega}) + \frac{d\tau_g(\bar{\omega})}{d\omega}\Omega = \\ &= \tau_g(\bar{\omega}) + \text{GDD}\Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Существует несколько критериев оценки широкополосности каналов (сигналов). Считавшийся основным критерий был введен американским Агентством перспективных оборонных исследовательских проектов (DARPA) [9]. Критерий основан на сравнении полосы канала $\Omega_{ch} = \omega_2 - \omega_1$ с его рабочей частотой $\bar{\omega} = (\omega_2 + \omega_1)/2$, где $\bar{\omega}$ — средняя частота отрезка $[\omega_1, \omega_2]$. По определению DARPA коэффициент широкополосности равен

$$\eta_f = \Omega_{ch}/2\bar{\omega}. \quad (3)$$

При значениях коэффициента $\eta_f \leq 0.01$ каналы считаются узкополосными, при $0.01 < \eta_f \leq 0.25$ — широкополосными, а при $\eta_f > 0.25$ — сверхширокополосными.

При исследовании распространения волновых пакетов в диспергирующих средах часто вводится критерий значимости дисперсии, который характеризуется коэффициентом, равным отношению полосы канала Ω_{ch} к его полосе когерентности Ω_c :

$$\eta_d = \Omega_{ch}/\Omega_c, \quad (4)$$

где $\Omega_c = \sqrt{8/\text{GDD}}$.

При $\eta_d \leq 1$ ($\Omega_{ch} < \Omega_c$) дисперсией в канале можно пренебречь и считать, что задержка не зависит от частоты ($\tau_g(\bar{\omega} + \Omega) = \tau_g(\bar{\omega})$), а все составляющие спектра пакета распространяются с одной скоростью. При $\eta_d > 1$ ($\Omega_{ch} > \Omega_c$) канал считается диспергирующим и учёт дисперсии для него имеет принципиальное значение.

Из формулы (4) следует, что при распространении волновых пакетов в диспергирующих каналах групповая задержка линейно зависит от частоты с угловым коэффициентом

$$\text{GDD} = \frac{d\tau_g(\bar{\omega})}{d\omega} = \varphi''(\bar{\omega}).$$

При $\text{GDD} > 0$ частотная зависимость групповой задержки является возрастающей функцией частоты, а при отрицательном ($\text{GDD} < 0$) — убывающей.

Известно [10, 11], что для транссионосферного канала групповая задержка убывает с ростом частоты ($\text{GDD} < 0$). Это значит, что в канале быстрее распространяются высокочастотные составляющие волнового пакета и поэтому дисперсия транссионосферного канала является аномальной (см. рис. 1).

Различия в скорости распространения спектральных частей волнового пакета может приводить к существенным дисперсионным искажениям его огибающей [11].

Для систем спутниковой связи рабочие частоты значительно превышают критическую частоту

глобального максимума ионосферы $\bar{f}/f_0 F2 = \bar{\omega}/\omega_0 F2 > 10$ ($f_0 F2$ – критическая частота $F2$ -слоя). Это позволяет в физической модели трансionoсферного распространения волн использовать высокочастотное приближение [12]. Данное приближение устанавливает связь между полным электронным содержанием ТЕС (в TECU) и коэффициентом дисперсии групповой задержки GDD по формуле [13].

$$\begin{aligned} \text{GDD} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{k\text{TEC}}{c\bar{f}^3} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{k\text{TEC}}{c\bar{f}_r^3} \left(\frac{\bar{f}}{\bar{f}_r}\right)^{-3} = |\text{GDD}_r| \text{RF}^{-3}, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \Omega_c &= \sqrt{8/|\text{GDD}|} = 4\pi \sqrt{\frac{c\bar{f}^3}{k\text{TEC}}} = \\ &= 4\sqrt{\frac{\pi c\bar{f}_r^3}{k\text{TEC}}} \text{RF}^{\frac{3}{2}} = \Omega_{cr} \text{RF}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (5b)$$

Отсюда для полосы когерентности в угловых частотах f будем иметь следующую формулу:

$$B_c = \Omega_c/2\pi = B_{cr} \text{RF}^{\frac{3}{2}}. \quad (6)$$

Отметим, что для достижения общности решения задачи при выводе формул (5a) и (5b) сомножители были разделены нами на геофизический и частотный. Во втором сомножителе вместо рабочей частоты были введены опорная f_r частота и относительная $\text{RF} = \bar{f}/\bar{f}_r$ (RF – Relative Frequency, относительная частота). Первые сомножители в формулах для GDD_r и Ω_{cr} , выражающиеся через параметр ТЕС, характеризуют изменение GDD_r и Ω_{cr} от геофизических факторов, влияющих на ТЕС. Второй сомножитель даёт возможность пересчитать параметры, полученные для канала на опорной частоте, на их значения для каналов на любой другой рабочей частоте $\bar{f}$. В качестве опорной в работе была принята частота $f_r = 1$ ГГц.

Из формул видно, что с ростом рабочей частоты величина коэффициента GDD изменяется как $1/\text{RF}^3$, а полоса когерентности растёт, как функция $\text{RF}^{\frac{3}{2}}$.

Итак, с учетом выполненных преобразований коэффициент широкополосности канала можно записать в виде

$$\begin{aligned} \eta_f &= \frac{\Omega_{ch}}{4\pi\bar{f}} = \frac{\Omega_{ch}}{\Omega_c} \frac{\Omega_c}{4\pi\bar{f}} = \eta_d \frac{\Omega_{cr} \text{RF}^{\frac{3}{2}}}{4\pi\bar{f}_r \text{RF}} = \\ &= \eta_d \eta_{fr} \sqrt{\text{RF}} = \eta_d \eta_{fr} \sqrt{\frac{\bar{f}}{\bar{f}_r}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\eta_d = \Omega_{ch}/\Omega_c$ – коэффициент дисперсии, $\Omega_{cr} = 4\sqrt{\frac{\pi c\bar{f}_r^3}{k\text{TEC}}}$ – полоса когерентности канала на опорной частоте; $\eta_d = B_{cr}/\bar{f} = \Omega_{cr}/\bar{\omega}$.

Видим, что изменение геофизического фактора приводит к вариациям полосы когерентности трансionoсферного канала на опорной частоте, т.е. к вариациям коэффициента дисперсии.

2. ЗАДАЧИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ШИРОКОПОЛОСНОСТИ ТРАНСИОНОСФЕРНЫХ КАНАЛОВ СВЯЗИ

Рассмотрим две задачи о предельной широкополосности трансionoсферных каналов связи. Первая относится к случаю, когда дисперсией в широкополосном канале еще можно пренебречь. Вторая задача возникает в случае применения метода преодоления дисперсии с использованием инверсной фильтрации, однако при оценке коэффициентов инверсного фильтра допускается погрешность и дисперсию не удастся отфильтровать полностью.

Согласно приведенному анализу в первом случае предельная широкополосность трансionoсферного радиоканала достигается при условии, когда полоса канала равна его полосе когерентности $\Omega_{ch} = \Omega_c$. Для практического применения результата требуется учесть изменчивость ионосферы в геофизическом времени. Это можно реализовать, если значения полосы когерентности определять экспериментально, используя для этого пассивный сенсор канала.

Во втором случае положительный эффект предельного расширения полосы канала дает применение метода инверсной фильтрации ЧХ трансionoсферного канала, реализуемого с помощью соответствующего эквалайзера. При этом коэффициенты эквалайзера определяются с помощью пассивного сенсора. Ограничения широкополосности канала возникают из-за погрешностей при экспериментальном определении коэффициентов инверсного фильтра [14]. Рассмотрим задачу ограничения широкополосности более подробно. Учет, что широкополосный эквалайзер представляет собой фильтр с примыкающими парциальными подканалами. Каждому произвольному k -му из них соответствует парциальный узкополосный трансionoсферный радиоканал, ЧХ $H(j\bar{\omega}_k, t)$ которого можно представить в следующем виде [11]:

$$H(j\bar{\omega}_k, t) = \exp[-j\text{GDD}(\bar{\omega}_k)(\bar{\omega}_1 + (k-1)\omega_{ch})^2]. \quad (8)$$

Поэтому отсчеты коэффициента инверсного фильтра можно получить, используя формулу

$$\begin{aligned} G_{ch}(j\bar{\omega}_k, t) &= \\ &= \exp[j\text{GDD}(\bar{\omega}_k)(\bar{\omega}_1 + (k-1)\omega_{ch})^2] = I_k + jQ_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее примем во внимание, что пассивный сенсор позволяет получить экспериментальные данные о ПЭС ионосферы. При этом допускается статистическая погрешность ΔTEC [14], которая трансформируется в значение параметра дисперсии групповой задержки ΔGDD . Эта погрешность будет представлять собой остаточную дисперсию gdd после инверсной фильтрации:

$$\text{gdd} = \Delta\text{GDD} = \rho\Delta\text{TEC}, \quad (10)$$

где

$$\rho = -\frac{1}{2\pi} \frac{k}{cf^3}.$$

Выразим остаточную дисперсию $\text{gdd} = \Delta\text{TEC}$ через относительную погрешность полного электронного содержания $\delta(\text{TEC})[\%]$ в виде

$$\text{gdd} = \Delta\text{GDD} = \text{GDD}\delta(\text{TEC}). \quad (11)$$

Откуда для широкополосного канала на опорной частоте остаточная дисперсия будет равна

$$\begin{aligned} \text{gdd}_r &= \Delta\text{GDD}_r = \text{GDD}_r\delta(\text{TEC}), \\ \delta(\text{GDD}_r) &= \delta(\text{TEC}). \end{aligned} \quad (12)$$

Остаточная дисперсия ограничивает предельную полосу трансionoсферного канала следующей полосой когерентности:

$$\omega_c = \sqrt{8/\text{gdd}}. \quad (13)$$

При малых значениях погрешности использование инверсной фильтрации будет приводить к положительному эффекту роста полосы когерентности канала:

$$\Omega_{ch} = \omega_c, \text{ так как } \omega_c > \Omega_c. \quad (14)$$

Используя результаты, полученные для физической модели, запишем формулу для коэффициента широкополосности при остаточной дисперсии:

$$\eta_f = \eta_d \frac{\omega_{cr} \text{RF}^2}{4\pi f_r \text{RF}} = \eta_d \sqrt{\frac{cf_r}{\pi k \delta(\text{TEC})}} \sqrt{\frac{f}{f_r}}. \quad (15)$$

Согласно выражению (15) для достижения предельного расширения полосы частот трансionoсферных каналов принципиальным является уменьшение погрешности определения ПЭС пассивным сенсором. С этой целью нами в [14] было предложено увеличить выборку ПЭС путем использования данных референционной сети глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС).

3. АЛГОРИТМЫ И СРЕДСТВА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СЕНСОРНОЙ ДИАГНОСТИКИ И ИНВЕРСНОЙ ФИЛЬТРАЦИЯ ДИСПЕРСИИ В ШИРОКОПОЛОСНЫХ ТРАНСИОНОСФЕРНЫХ РАДИОКАНАЛАХ

Для преодоления внутримодовой дисперсии в широкополосных радиоканалах систем спутниковой связи могут быть использованы пассивные радиосенсоры, базирующиеся на сигналах навигационных спутников, работающих в диапазоне частот 1100...1610 МГц. Созданные алгоритмы и программное обеспечение позволяют обрабатывать большой объем данных, трансформируемых в текущие значения ПЭС ионосферы. Эти данные являются результатом фазовых и кодовых измерений сигналов навигационных спутников. Статистическая обработка текущих значений ПЭС позволяет оценивать доверительные интервалы для средних значений (статистическую погрешность измерений). Для увеличения объема выборки (уменьшения статистической погрешности) предложено использовать спутниковые данные, полученные на референционной сети приемников, расположенных в радиусе высокой пространственной корреляции ПЭС (не более 300 км). Для анализа вариаций погрешностей в геофизическом времени (месяц, сезон и т.п.) используются их временные ряды на больших интервалах времени. Получаемые средние значения ПЭС используются для расчета коэффициентов эквалайзера для инверсной фильтрации и машинного обучения модели эквалайзера с подкреплением [15].

Структурная схема работы сети пассивных сенсоров представлена на рис. 2. Блок-схема действующего инверсного фильтра для систем широкополосной спутниковой связи с режимом машинного обучения [15] представлена на рис. 3.

В результате применения представленного здесь подхода может быть достигнута предельно возможная широкополосность для систем спутниковой связи. Исследования предельной широкополосности основаны на оценке по экспериментальным данным величины и закономерностей изменения в геофизическом времени остаточной дисперсии gdd_r (см. формулу (11)) и реализуются с применением метода картографирования [1, 16]. Такой подход позволяет, с одной стороны, оценивать в реальном времени погрешности модели инверсного фильтра, а усредненные по выборке данные использовать для машинного обучения эквалайзера с периодом упреждения, соответствующим методу прогноза параметра gdd_r .

В целом система интеллектуального пассивного сенсора с эквалайзером инверсной фильтрации для функционирования широкополосной

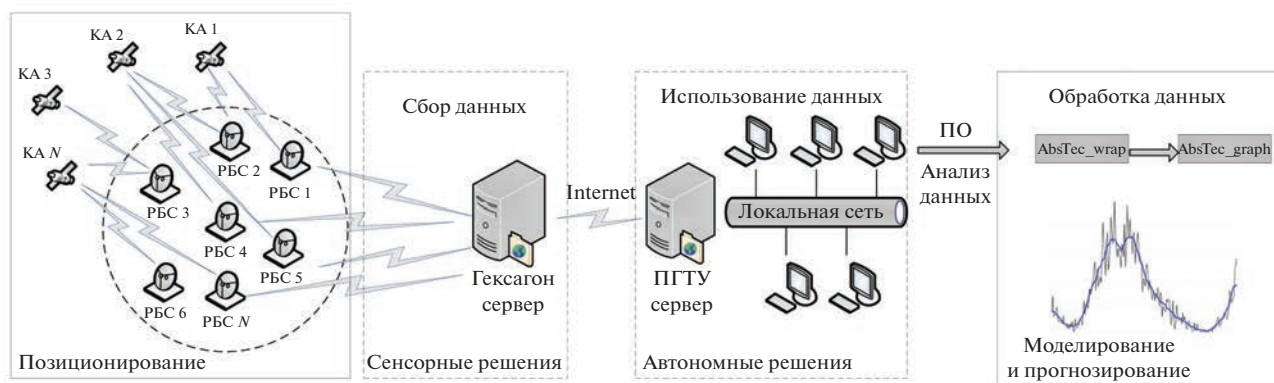


Рис. 2. Структурная схема работы пассивных трансionoсферных радиосенсоров КА – космический аппарат систем ГНСС; РБС – референсная базовая станции сети; ПО – программное обеспечение.

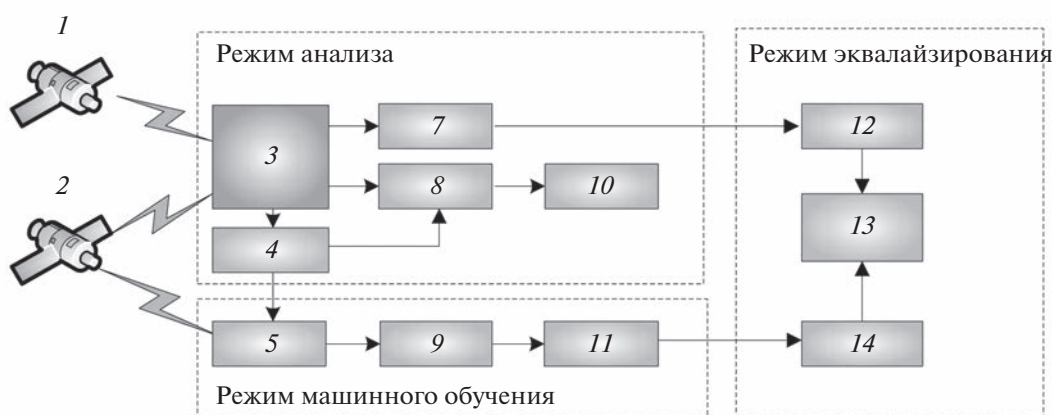


Рис. 3. Блок-схема экспериментальной установки, реализующей принцип инверсной фильтрации для преодоления дисперсионных искажений в широкополосных трансionoсферных радиоканалах: 1 – космический аппарат спутниковой системы связи; 2 – глобальная навигационная спутниковая система; 3 – блок диагностики системных характеристик; 4 – блок определения периода упреждения прогноза; 5 – начало сеанса зондирования; 7 – блок формирования частотной дисперсии; 8 – блок определения предельной полосы частот; 9 – формирование предикторов; 10 – блок определения предельной широкополосности системы; 11 – блок формирования тестовой последовательности; 12 – блок формирования ЧХ; 13 – блок эквалайзирования; 14 – актуализация коэффициента инверсного фильтра.

спутниковой радиосвязи обеспечивает работу в следующих режимах:

– *режим анализа* – осуществляется на основе метода диагностики системных характеристик трансionoсферного канала, позволяющего в результате обработки экспериментальных данных сигналов сети референчных станций ГНСС с периодом упреждения прогноза оценивать текущие параметры частотной и импульсной характеристик. Также в рамках первой задачи осуществлять адаптацию в геофизическом времени предельной полосы частот канала до максимально возможной на случай, когда внутримодовой дисперсией еще можно пренебречь;

– *режим машинного обучения* – актуализация коэффициентов инверсного фильтра с подкреплением модели в рамках второй задачи. Важным

моментом является прогнозирование значений предельной полосы трансionoсферных радиоканалов связи с применением методов машинного обучения. Обязательной процедурой в данном случае является подготовка выборки данных ПЭС, обеспечивающая при машинном обучении систему тренировочной и тестовой выборками полосы когерентности. Для повышения точности прогнозирования используется модель, основанная на алгоритме XGBoost.

– *режим эквалайзирования* – реализует адаптивную компенсацию дисперсионных искажений с учетом временной и пространственной изменчивости модели. Адаптивная компенсация дисперсионных искажений волновых пакетов по результатам диагностики позволяет использовать каналы с максимально возможными полосами

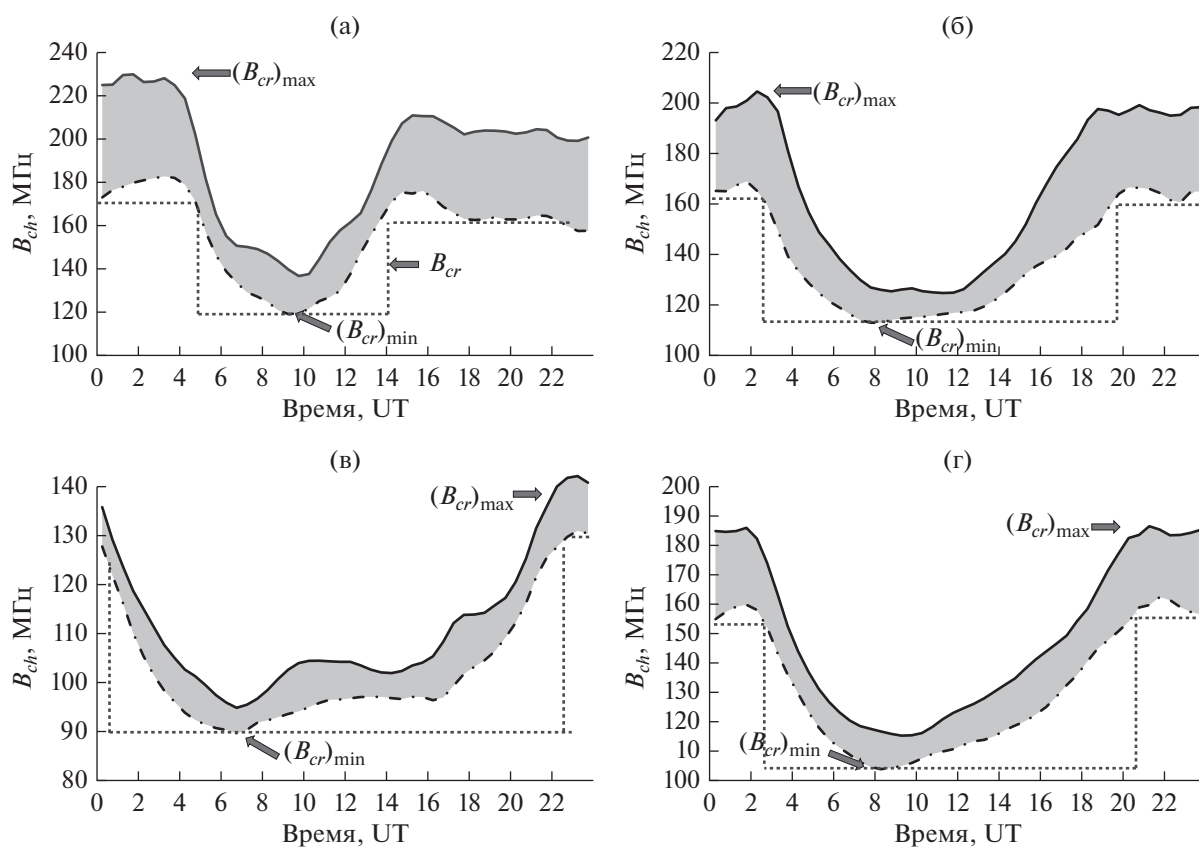


Рис. 4. Модели допустимых значений полос когерентности трансionoсферного канала, полученные в декабре (а), марте (б), июне (в) и сентябре (г).

(большими их полосы когерентности при решении первой задачи), что обеспечивает максимальную пропускную способность трансionoсферного канала спутниковой связи и низкие энергетические потери связного широкополосного сигнала.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОДХОДОВ ПРЕДЕЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ ПОЛОСЫ ЧАСТОТ СИСТЕМ СПУТНИКОВОЙ СВЯЗИ

Для верификации достижения поставленной цели в Поволжском государственном технологическом университете, ПГТУ (г. Йошкар-Ола) в декабре, марте, июне и сентябре 2018–2019 гг. в условиях невозмущенной среднеширотной ионосферы были проведены соответствующие эксперименты. Для обеспечения общности представленные данные относятся к трансionoсферным каналам на опорной частоте (опорным каналам).

На рис. 4 представлен суточный ход диапазонов изменения предельной полосы частот опорного трансionoсферного канала для различных сезонов года. Области серого цвета соответствует диапазону

наблюдавшихся за указанный период значений предельной полосы в течение периода наблюдения. Так, в декабре диапазон вариаций полосы составлял 120...230 МГц; в марте 115...205 МГц; в июне 90...145 МГц и в сентябре 105...185 МГц. Видно, что для всех сезонов значения полосы в дневное время меньше, чем в ночное. Пунктиром показаны значения и интервалы времени для ночных и дневных полос, когда алгоритм их выбора не является адаптивным. Дневные и ночные полосы составляют: в декабре 120 и 170 МГц, в марте 115 и 160 МГц, в июне 90 и 130 МГц, в сентябре 105 и 155 МГц. Отметим, что дневные полосы являются предельными за сутки, если в алгоритме не учитывать переходы от дня к ночи. Поэтому для всех сезонов предельная полоса не должна превышать 90 МГц, т.е. широкополосность опорного канала не должна превышать 4.5%.

Полученные результаты показывают, что в случае адаптации полосы опорного канала к вариациям ПЭС значения широкополосности могут быть увеличены сверх 4.5%. Для реализации метода в работе было предложено автоматическое управление полосой путем создания модели прогнозных значений, полученных с применением метода машинного обучения на выборке месяч-

Таблица 1. Относительные погрешности измерения коэффициента дисперсии $\delta(\text{GDD}_r)$

Период	Относительные ошибки $\delta(\text{GDD}_r)$, %		
	ночное время	переходное время	дневное время
Зима	10...15	6...10	7
Весна	9...10	2...8	3...5
Лето	5...8	3...6	2...4
Осень	5...9	5...8	6...8

Таблица 2. Предельные значения широкополосности опорных трансionoсферных каналов с применением адаптивной инверсной фильтрации

ПЭС, TECU	Предельная широкополосность каналов без инверсной фильтрации, %	Предельная широкополосность каналов с инверсной фильтрацией		
		$\delta(\text{GDD}_r)$ 5%	$\delta(\text{GDD}_r)$ 10%	$\delta(\text{GDD}_r)$ 15%
5	8	25	24	20
10	5.5	24	17	14
15	4.5	20	14	11
20	4	17	12	10
25	3.5	15	11	8.5
30	3	14	10	8

ных данных. Данный подход, позволяет увеличить полосу до значений, показанных на рис. 4 сплошной линией. Таким образом, при адаптации предельная полоса опорного канала может достигать: в декабре 135 и 230 МГц, в марте 125 и 205 МГц, в июне 95 и 145 МГц, в сентябре 115 и 185 МГц. Поэтому адаптация позволяет получить опорные каналы с широкополосностью не хуже 11.5%.

Дальнейшие исследования были посвящены изучению влияния погрешности в экспериментальной оценке GDD на предельную полосу опорного канала. Были получены погрешности измерения GDD в зависимости от геофизических факторов. Результаты полученных измерений приведены в табл. 1.

Из представленных данных видно, что максимальные погрешности $\delta(\text{GDD}_r)$ наблюдаются в зимний период времени, 6...15%, а минимальные — летом, 2...8%. Днем ошибки примерно вдвое меньше, чем ночью. Результаты предельного расширения полосы с применением адаптивной инверсной фильтрации дисперсии представлены в табл. 2.

Видно, что применение адаптивной инверсной фильтрации позволяет получить опорные трансionoсферные каналы с широкополосностью до 20...25%, если относительные ошибки из-

мерения $\delta(\text{GDD}_r)$ не превышают 15 ... 5% соответственно.

Таким образом, каждая последующая итерация рассмотренного подхода позволяет увеличить коэффициент широкополосности опорного трансionoсферного канала почти в два раза по сравнению с предыдущей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развиты методы, модели и комплексы средств с применением технологий искусственного интеллекта, позволяющие увеличить предельную широкополосность систем спутниковой радиосвязи в условиях внутримодовой дисперсии среды. Показано, что применение адаптации и адаптивной инверсной фильтрации требует развития средств сенсорной диагностики опорного трансionoсферного канала. Поэтому для экспериментальных оценок параметров внутримодовой дисперсии групповой задержки модернизированы пассивные радиосенсоры путем реализации в их составе эквалайзера инверсной фильтрации. Для обработки сенсорных данных созданы соответствующие алгоритмы и программное обеспечение, реализующее режимы их анализа, машинного обучения и эквалайзирования.

Выполнена экспериментальная верификация предлагаемого подхода. Установлено, что без адаптации предельной полосы частот канала к из-

менчивости ПЭС удается создать опорные каналы с коэффициентом широкополосности не более 4.5%. Адаптация к изменениям ПЭС позволяет получить каналы с полосой до 11.5%. Самая большая широкополосность может быть достигнута путем адаптивной инверсной фильтрации с применением интеллектуальных методов: модели эквализации с ошибкой, метода машинного обучения и метода обработки больших данных. В этом случае достигается широкополосность до 20...25%.

Применение полученных результатов на практике позволит увеличить эффективность систем спутниковой связи в части обеспечения их дополнительной помехоустойчивости и скрытности.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00622).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Д.В., Иванов В.А., Кислицын А.А., Рябова М.И. // Вестн. Поволж. гос. технол. ун-та. Сер. Радиотех. и инфокоммуникац. системы. 2021. № 3. С. 14. <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2021.3.14>
2. Furman W., Nieto J., Koski E. // The 10th Nordic Conf. on HF Communications. At Fårö, 2013. P. 4.
3. Растягаев Д.В., Палкин Е.А., Лукин Д.С. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64. № 8–9. С. 590.
4. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Лукин Д.С. // РЭ. 2019. Т. 64. № 8. С. 752.
5. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2018. Т. 12. № 12. С. 22.
6. Иванов Д.В., Иванов В.А., Рябова Н.В., Овчинников В.В. // Вестн. Поволж. гос. технол. ун-та. Сер. Радиотех. и инфокоммуникац. системы. 2021. № 1. С. 6. <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2021.1.6>
7. Ivanov V.A., Ivanov D.V., Ryabova N.V. et al. // Radio Sci. V. 54. № 1. P. 34. <https://doi.org/10.1029/2018RS006636>
8. Ovchinnikov V.V., Ivanov D.V. // Proc. 2020 XXXIII General Assembly and Sci. Symp. Int. Union of Radio Sci. 2020. P. 1. <https://doi.org/10.23919/URSIGASS49373.2020.9232379>
9. Federal Communications Commission. Revision of part 15 of the commission's rules regarding ultra wide-band transmission systems. First report and order. FCC 02 48. —, Washington, DC, Feb., 2002. URL: <https://www.fcc.gov/document/revisionpart-15-commissions-rules-regarding-ultra-wideband>.
10. Ivanov D.V., Ivanov V.A., Ryabova N.V., Ovchinnikov V.V. // Proc. 2022 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO). Arkhangelsk. 29 Jun.–01 Jul. N.Y.: IEEE, 2022. Paper № 9840991. <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO55067.2022.9840991>
11. Иванов Д.В., Иванов В.А., Рябова Н.В., Овчинников В.В. // Радиотехника. 2022. Т. 86. № 11. С. 166. <https://doi.org/10.18127/j00338486-202211-23>
12. Ivanov D.V., Ivanov V.A., Ryabova N.V. et al. // Proc. VI Int. Conf. Kaliningrad. 2018. V. 1. P. 81.
13. Ясюкевич Ю.В., Мильникова А.А., Демьянов В.В. и др. // Вестник Поволж. гос. технол. ун-та. Сер. Радиотех. и инфокоммун. системы, 2013. № 3. С. 18.
14. Kisilitsin A.A., Ryabova N.V., Konkin N.A. // Proc. 2020 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO). Svetlogorsk. 01–03 Jul. N.Y.: IEEE, 2020. Paper № 9166091. <https://doi.org/10.1109/SYNCHROINFO49631.2020.9166091>
15. Кислицын А.А. Вестн. Поволж. гос. технол. ун-та. Сер. Радиотех. и инфокоммуникац. системы. 2019. № 3. С. 6.
16. Ivanov D.V., Ivanov V.A., Ryabova N.V. et al. // Proc. 12th European Conf. on Antennas and Propagation (EuCAP 2018). London. 09–13 Apr. N.Y.: IEEE, 2018. Article No. cp.2018.0473. <https://doi.org/10.1049/cp.2018.0474>

К 85-ЛЕТИЮ ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

УДК 621.396.67

МНОГОЛУЧЕВАЯ АНТЕННА С ПОЛНЫМ АЗИМУТАЛЬНЫМ УГЛОМ ОБЗОРА НА ОСНОВЕ СЛОИСТОЙ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ

© 2023 г. А. С. Венецкий^а, *, В. А. Калошин^а, Чан Тиен Тханг^б^а *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125007 Российская Федерация*^б *Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет),
Институтский пер., 9, Долгопрудный Московской обл., 141700 Российская Федерация*

*E-mail: AVenetsky@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.01.2023 г.

После доработки 16.02.2023 г.

Принята к публикации 25.02.2023 г.

Предложена и исследована многолучевая антенна на основе слоистой линзы с осевой симметрией в виде набора диэлектрических дисков с градиентом коэффициента преломления вдоль радиуса, которые расположены между металлическими дисками. Слоистая линза преобразует поля облучателей, расположенных на окружности с центром на оси линзы в плоскости ее основания, в остро-направленные лучи в той же плоскости. Проведен синтез слоистой линзы, слои которой выполнены в виде набора диэлектрических колец переменной толщины. Анализ многолучевой линзовой антенны с металлодиэлектрическими облучателями проведен путем численного моделирования методом конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0033849423060165, EDN: XOFJVL

ВВЕДЕНИЕ

В связи с разработкой систем космической и мобильной связи новых поколений возрос интерес к многолучевым антеннам на базе квазиоптических диаграммообразующих систем [1]. Это обусловлено тем, что антенны космического базирования и базовых станций мобильной связи должны формировать десятки и сотни лучей в широком угловом секторе в широкой полосе частот. Одним из наиболее привлекательных вариантов построения таких антенн являются многолучевые антенны на основе диэлектрических линз с центральной симметрией (линз Люнебурга) [1–4]. В силу симметрии их угол обзора ограничен только затенением апертуры облучающей системой, и именно это обстоятельство не позволяет обеспечить полный (360°) азимутальный угол обзора. Поэтому для реализации многолучевой диаграммы направленности используют систему из трех линз Люнебурга [5, www.matsing.com].

В качестве альтернативы многолучевым антеннам на основе линзы Люнебурга для формирования многолучевой диаграммы направленности в полном азимутальном угле можно рассматривать решетку из геодезических линз с осевой симметрией [6]. Однако такая решетка требует наличия фазирующей системы.

Цель данной работы — разработка и исследование линзовой антенны с осевой симметрией без затенения апертуры облучающей системой, что позволяет реализовать многолучевую диаграмму направленности в полном азимутальном угле.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Рассмотрим многолучевую антенну на основе цилиндрической линзы высотой H , состоящей из набора слоев толщиной d , каждый из которых представляет собой диск с градиентом диэлектрической проницаемости вдоль радиуса, расположенный между металлическими идеально проводящими дисками нулевой толщины (рис. 1). В плоскости $Z = d/2$ на окружности радиуса f с центром на оси z находятся фазовые центры металлодиэлектрических облучателей, оси которых расположены под углом 30° к этой плоскости. Линза преобразует поля облучателей со сферическим фазовым фронтом в поля с плоским фронтом на выходе линзы. Задача синтеза состоит в нахождении закона изменения коэффициента преломления $n(r)$ в каждом слое линзы. Все размеры далее нормируются на радиус металлических и диэлектрических дисков r_0 , в связи с чем при решении

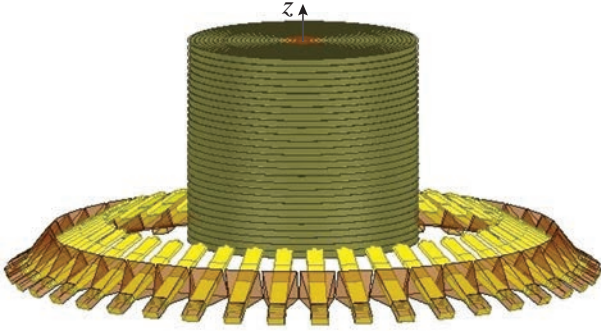


Рис. 1. Многолучевая линзовая антенна.

задачи синтеза без ограничения общности будем полагать $r_0 = 1$.

При падении поля облучателя на поверхность линзы сферическая волна преломляется и возбуждает внутри каждого слоя моды радиальной линии. При толщине слоев менее половины длины волны в диэлектрике в них возбуждаются только TE -моды. Для анализа преломления и распространения волны внутри слоев используем приближение геометрической оптики. Рассмотрим луч, падающий из точки F в точку A на поверхности линзы (рис. 2). Поскольку моды внутри слоя распространяются в горизонтальной плоскости, все преломленные лучи ортогональны оси z . Так как преломление носит гибридный характер (естественное и вынужденное), нельзя использовать классический закон Снеллиуса. Поэтому для нахождения угла преломления луча, падающего на поверхность линзы, воспользуемся граничными условиями, из которых следует, что касательные к поверхности линзы — составляющие волнового вектора падающей k и преломленной волны k_1 — совпадают. Следовательно, для азимутальных компонент волновых векторов в любой точке A на поверхности линзы справедливо соотношение

$$k_\varphi = \frac{f \sin \varphi}{|FA|} = k_{1\varphi} = n \sin \psi_1, \quad (1)$$

где $|FA|^2 = f^2 + 1 - 2f \cos \varphi + H^2$, $n = n(1)$.

Из уравнения (1) следует

$$\sin \psi_1 = \frac{f \sin \varphi}{n|FA|} = \frac{f \sin \varphi}{n\sqrt{f^2 + 1 - 2f \cos \varphi + H^2}}. \quad (2)$$

Найденным лучам преломленной волны в трехмерной задаче соответствует падающее поле в двумерной задаче с углами падения $\psi(\varphi)$ в плос-

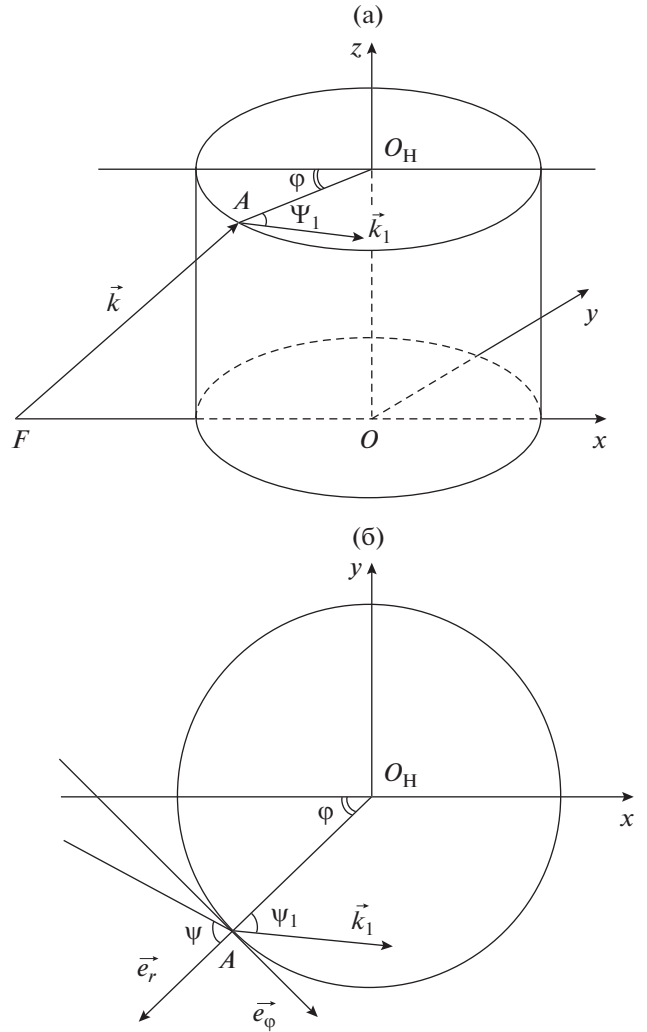


Рис. 2. К определению угла преломления луча на входе слоя: а) общий вид и б) вид сверху.

кости $z = H$ (см. рис. 2). Используя закон Снеллиуса, находим:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= n \sin \psi_1 = \frac{f \sin \varphi}{|FA|} = \\ &= \frac{f \sin \varphi}{\sqrt{f^2 + 1 - 2f \cos \varphi + H^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда можно выразить φ через ψ :

$$\cos \varphi = \frac{1}{f} \left(h^2 + \sqrt{h^4 - h^2 - h^2 f^2 - h^2 H^2 + f^2} \right),$$

где $h = \sin \psi$.

Если двумерная задача синтеза линзы с центральной симметрией, формирующей плоский, ортогональный оси x фронт, для каждого слоя решена, то для синтеза трехмерной линзы, формирующей плоский фронт, достаточно приравнять эйконалы центральных лучей слоев.

Таким образом, задача синтеза трехмерной линзы сведена к решению набора задач синтеза планарных (двумерных) линз с центральной симметрией, преобразующих заданный волновой фронт в линейный при условии равенства эйконалов центральных лучей в каждом слое.

2. СИНТЕЗ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЗЫ

В работе [7] получено решение задачи синтеза градиентной линзы с центральной симметрией, преобразующей сферический волновой фронт – в произвольный. В силу принципа взаимности это решение остается справедливым и для задачи преобразования произвольного фронта в сферический или, в предельном случае, – в плоский.

Это решение является решением интегрального уравнения

$$\int_{r_{\min}}^a \frac{h}{r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 n^2(r) - h^2}} = F(h), \quad 0 \leq h \leq A, \quad (3)$$

где

$$F(h) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin h + \frac{1}{2} \arcsin \frac{h}{f} - \frac{\varphi(h)}{2} - F_a(h),$$

$$F_a(h) = \int_a^1 \frac{h dr}{r \sqrt{n(r)^2 r^2 - h^2}},$$

$$A = \sin \psi_0 = \frac{f \sin \varphi_0}{\sqrt{f^2 + 1 - 2f \cos \varphi_0 + H^2}},$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{1}{f}\right),$$

a – внутренний радиус оболочки, внутри которой коэффициент преломления предполагается заданным, φ_0 – угловая координата точки касания луча поверхности линзы.

В отличие от работы [7], в уравнении (3) для всех слоев, кроме первого, $A < 1$, что приводит к неполному использованию апертуры линзы. Для получения решения в этом случае введем переменные $\rho = rn(r)$ и $\Omega(\rho) = -\ln r(\rho)$. Тогда интегральное уравнение (3) можно переписать в виде

$$-\int_h^A \frac{h \Omega'(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - h^2}} d\rho = F(h). \quad (4)$$

Полученное уравнение является интегральным уравнением типа Абеля [8] и допускает обращение:

$$\Omega(\rho) - \Omega(A) = \frac{2}{\pi} \int_{\rho}^A \frac{F(h) dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}}. \quad (5)$$

Вводя функцию

$$q(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{\arcsin(h/f)}{\sqrt{h^2 - x^2}} dh$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{\rho}^A \frac{\pi}{2} \frac{dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} &= \ln(h + \sqrt{h^2 - \rho^2}) \Big|_{\rho}^A = \\ &= \ln(A + \sqrt{A^2 - \rho^2}) - \ln(\rho), \end{aligned}$$

уравнение (5) можно представить в виде

$$\ln \frac{\rho}{r} + \ln a = T,$$

откуда получаем

$$n(\rho) = \frac{1}{a} \exp(T), \quad r(\rho) = \frac{\rho}{n(\rho)}, \quad 0 \leq \rho \leq A, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} T &= \ln(A + \sqrt{A^2 - \rho^2}) - q\left(\frac{\rho}{A}, \frac{1}{A}\right) - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\rho}{A}}^1 \frac{F_a(At)}{\sqrt{t^2 - (\rho/A)^2}} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\rho}{A}}^1 \frac{\varphi(At)}{\sqrt{t^2 - (\rho/A)^2}} dt. \end{aligned}$$

Соотношения (6) определяют однозначную зависимость $n(r)$ при условии $r'(\rho) \geq 0$. Равенство нулю допустимо только при $\rho = A$. Запишем это условие в виде

$$\begin{aligned} r'(\rho) &= a \exp(-T) + a \rho (-T') \exp(-T) = \\ &= a \exp(-T) (1 - \rho T') \Big|_{\rho=A} \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим частные случаи, первым из которых является линза с однородной оболочкой, когда $n(r) = n_1$ для $a < r < 1$ и интеграл $F_a(h)$ в (6) может быть вычислен аналитически:

$$\begin{aligned} F_a(h) &= \int_a^1 \frac{h dr}{r \sqrt{n(r)^2 r^2 - h^2}} = \\ &= \arcsin\left(\frac{h}{n_1 a}\right) - \arcsin\left(\frac{h}{n_1}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

а неравенство (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \pi - \arcsin(A) + 2 \arcsin\left(\frac{A}{n_1}\right) - \\ - 2 \arcsin\left(\frac{A}{a n_1}\right) - \varphi(A) \geq 0, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$a \geq \frac{A}{n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin(A) + \arcsin\left(\frac{A}{n_1}\right) - \frac{\varphi(A)}{2}\right)}. \quad (9)$$

При выполнении условия (9) параметрическое представление (6) описывает закон изменения коэффициента преломления при $r \leq a$.

Наличие двух границ раздела диэлектриков в рассмотренном случае может приводить к большим отражениям. Поэтому далее рассмотрим линзу с оболочкой, диэлектрическая проницаемость в которой непрерывно меняется от $\epsilon_1 = n^2(1)$ на границе линзы до $\epsilon_a = n^2(a)$ на внутренней границе оболочки. Для удобства интегрирования ограничимся законом изменения коэффициента преломления в виде

$$n^2(r) = b + \frac{c}{r} + \frac{d}{r^2}. \quad (10)$$

Предположим далее, что диэлектрическая проницаемость внутри оболочки имеет максимальное значение $n^2(r_m) = \epsilon_m$ ($a < r_m < 1$), при этом r_m находим из условия

$$\epsilon(r_m)' = -\frac{1}{r_m^2} \left(c + \frac{2d}{r_m} \right) = 0.$$

Величины параметров b, c, d найдем из условий равенства диэлектрической проницаемости трем указанным выше значениям. В результате получаем систему трех уравнений, из которой находим

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{U} (-V - \sqrt{V^2 - UW}), \\ c &= \frac{a(\epsilon_a - \epsilon_1)}{1-a} - \frac{1}{U} (-V - \sqrt{V^2 - UW}) \frac{(1+a)}{a}, \\ b &= 1 - \frac{1}{U} (-V - \sqrt{V^2 - UW}) - \frac{a(\epsilon_a - \epsilon_1)}{1-a} - \\ &\quad - \frac{1}{U} (-V - \sqrt{V^2 - UW}) \frac{(1+a)}{a}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $U = \frac{(1-a)^2}{a^2}$, $V = 2(\epsilon_m - 1) - \epsilon_a + \epsilon_1$,

$W = \frac{a^2(\epsilon_a - \epsilon_1)^2}{(1-a)^2}$. При этом интеграл $F_a(h)$ может быть вычислен аналитически:

$$\begin{aligned} F_a(h) &= \int_a^1 \frac{h dr}{r \sqrt{n(r)^2 r^2 - h^2}} = \\ &= \frac{h}{\sqrt{-d+h^2}} \arcsin \left(\frac{c + \frac{2(d-h^2)}{r}}{\sqrt{c^2 - 4b(d-h^2)}} \right) \Big|_a^1 = \\ &= \frac{h}{\sqrt{-d+h^2}} \left[\arcsin \left(\frac{c + 2(d-h^2)}{\sqrt{c^2 - 4b(d-h^2)}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \arcsin \left(\frac{c + \frac{2}{a}(d-h^2)}{\sqrt{c^2 - 4b(d-h^2)}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в формулу (6), находим зависимость $n(r)$ при $r \leq a$. При этом условия существования полученного решения определяются формулой (7).

Нетрудно показать, что для обеспечения непрерывности $n(r)$ на границе между внутренней частью линзы и оболочкой необходимо выполнение соотношения $\epsilon_a = (A/a)^2$, где величина A определена в формуле (3). Для этого достаточно подставить в формулу (6) верхний предел значений параметра $\rho = A$. В результате для коэффициента преломления во внутренней части линзы на границе с оболочкой получим $n(a) = A/a$.

3. СИНТЕЗ ТРЕХМЕРНОЙ ЛИНЗЫ

Рассмотрим задачу синтеза трехмерной слоистой линзы. В верхнем слое, который не заполнен диэлектриком, эйконал центрального луча вычисляется по формуле

$$L_0 = \sqrt{(f-1)^2 + H_{\max}^2} + 2 = 4.$$

Для планарной линзы с однородной оболочкой эйконал центрального луча на произвольной высоте H имеет вид

$$L = \sqrt{(f-1)^2 + H^2} + 2(1-a)n_1 + 2 \int_0^a n(r) dr.$$

Интегрируя по частям с использованием формул (6), преобразуем интеграл в последнем выражении следующим образом:

$$\int_0^a n(r) dr = \int_0^A n(\rho) \rho'(\rho) d\rho = A(1 - \ln A) + \int_0^A T(\rho) d\rho.$$

Приравнявая выражения для эйконалов центральных лучей, получаем уравнение относительно коэффициента преломления в оболочке n_1 :

$$\begin{aligned} &\sqrt{(f-1)^2 + H^2} + 2(1-a)n_1 + \\ &+ 2A(1 - \ln A) + 2 \int_0^A T(\rho) d\rho = L_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, начиная с нижнего слоя подставляем в уравнение (12) минимально допустимое a , что соответствует знаку равенства в (9), и находим величину n_1 . Результаты приведенной процедуры при $f=2$ и $H_{\max} = \sqrt{3}$ для всех слоев приведены на рис. 3.

Соответствующие зависимости коэффициента преломления от радиуса для четырех слоев, рассчитанные по формуле (6), приведены на рис. 4.

Рассмотрим случай неоднородной оболочки. Эйконал центрального луча в произвольном слое, как и в предыдущем случае, приравняем эйкона-

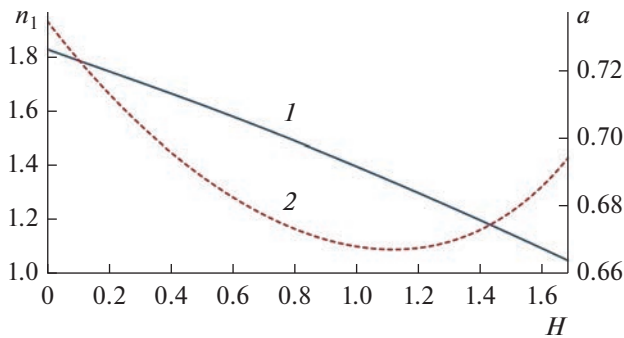


Рис. 3. Зависимости коэффициента преломления в оболочке n_1 (1) и радиуса оболочки a (2) от высоты слоя H .

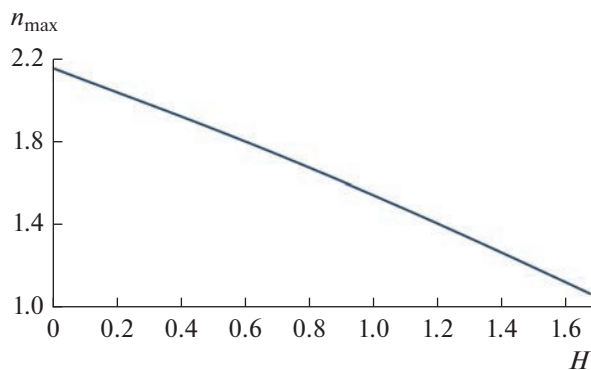


Рис. 5. Зависимость максимальной величины коэффициента преломления в неоднородной оболочке от высоты слоя.

лу центрального луча в верхнем слое. В результате получаем

$$\sqrt{(f-1)^2 + H^2} + 2 \int_a^1 \sqrt{br^2 + cr + d} \frac{dr}{r} + 2A(1 - \ln A) + 2 \int_0^A T(\rho) d\rho = L_0. \quad (13)$$

Чтобы параметрические соотношения (6) определяли однозначную зависимость $n(r)$, должно выполняться условие (7), которое можно привести к виду

$$\pi - \arcsin(A) - 2F_a(A) - \varphi(A) \geq 0. \quad (14)$$

Для обеспечения непрерывности коэффициента преломления на границе внутренней части линзы с оболочкой выберем значения a и A в слоях равными полученным выше соответствующим значениям для линзы с однородными оболочками. Далее, начиная с первого слоя из трансцендентного уравнения (13) находим ϵ_m и проверяем выполнение неравенства (14). Если неравенство не выполняется, уменьшаем A и повторяем процедуру

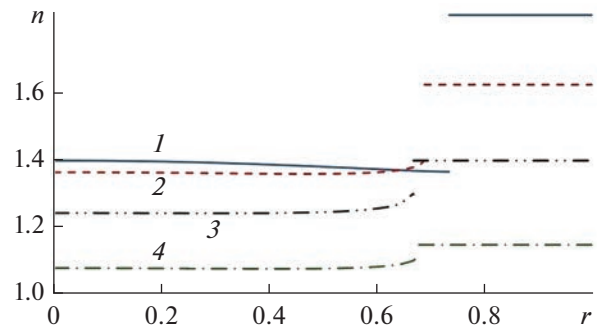


Рис. 4. Зависимости коэффициента преломления n от радиуса в линзе с однородной оболочкой при $H=0$ (1), 0.5 (2), 1 (3) и 1.5 (4).

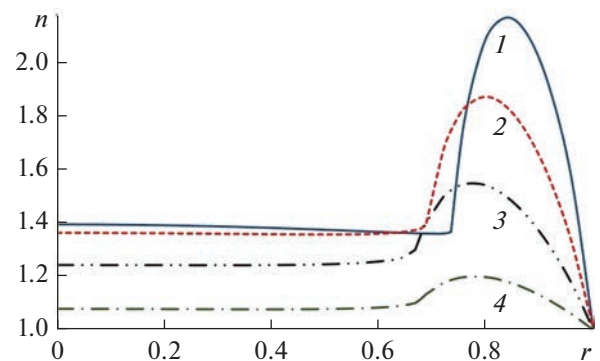


Рис. 6. Зависимость коэффициента преломления от радиуса в линзе с неоднородной оболочкой при $H=0$ (1), 0.5 (2), 1 (3) и 1.5 (4).

нахождения ϵ_m до тех пор, пока не будет выполняться (14). После полагаем $\epsilon_a = (A/a)^2$ и таким образом обеспечиваем непрерывность коэффициента преломления.

Результаты расчета зависимости максимального значения коэффициента преломления в оболочке $n_{\max}(H) = \sqrt{\epsilon_m}$ для всех слоев от $H=0$ до $H_{\max} = \sqrt{3}$ приведены на рис. 5.

Соответствующие зависимости коэффициента преломления от радиуса для четырех слоев, рассчитанные по формуле (4) в линзе с неоднородной оболочкой, приведены на рис. 6.

4. АНАЛИЗ МНОГОЛУЧЕВОЙ ЛИНЗОВОЙ АНТЕННЫ

Проведем анализ характеристик многослойной цилиндрической линзовой антенны, каждый слой которой выполнен в виде набора диэлектрических колец переменной толщины (рис. 7). Такая конструкция планарной линзы Люнебурга предложена в [9] и исследована в [10].

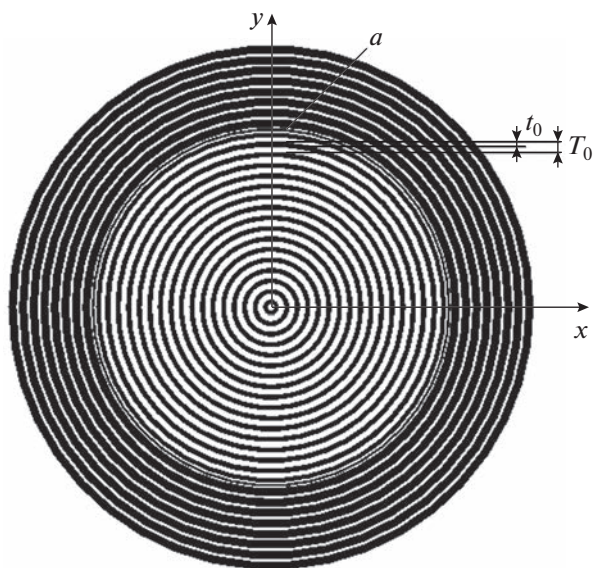


Рис. 7. Градиентная линза из диэлектрических колец.

Для нахождения коэффициента заполнения $c(r)$, равного отношению толщины кольца t к периоду T , используем приближенное выражение [7]:

$$c(r) = c_0(r) + \frac{(kT)^2 c_0^2(r) (1 - c_0(r))^2 (\epsilon_d - \epsilon_0)}{12},$$

где $c_0(r) = \frac{\epsilon(r) - \epsilon_0}{\epsilon_d - \epsilon_0}$, ϵ_d — относительная диэлектрическая проницаемость материала кольца, $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon(r)$ — усредненная диэлектрическая проницаемость.

Зависимости коэффициента заполнения от радиуса для трех слоев в виде набора колец из полистирола ($\epsilon_d = 2.6$) показаны на рис. 8. В оболочке линз, где диэлектрическая проницаемость больше 2.6, вместо полистирола используется материал с $\epsilon_d = 3.35$ (для однородной оболочки) и с $\epsilon_d = 4.65$ (для неоднородной оболочки).

Для численного моделирования были выбраны следующие параметры линзы: радиус $r_0 = 50$ мм, толщина слоев $d = 3$ мм, фокусное расстояние $f = 100$ мм. В качестве облучателей использованы металлодиэлектрические излучатели, подобные предложенным и исследованным в работе [11]. Излучатель содержит пирамидальный металлический рупор с входным сечением 7.2×3.4 мм, выходным сечением 15×15 мм и расположенный внутри рупора ступенчатый диэлектрический стержень прямоугольного сечения (рис. 9).

Диаграммы направленности металлодиэлектрического облучателя в плоскостях E и H на трех частотах, рассчитанные с использованием метода конечных элементов в программной среде Ansys HFSS, представлены на рис. 10. Результаты расчета

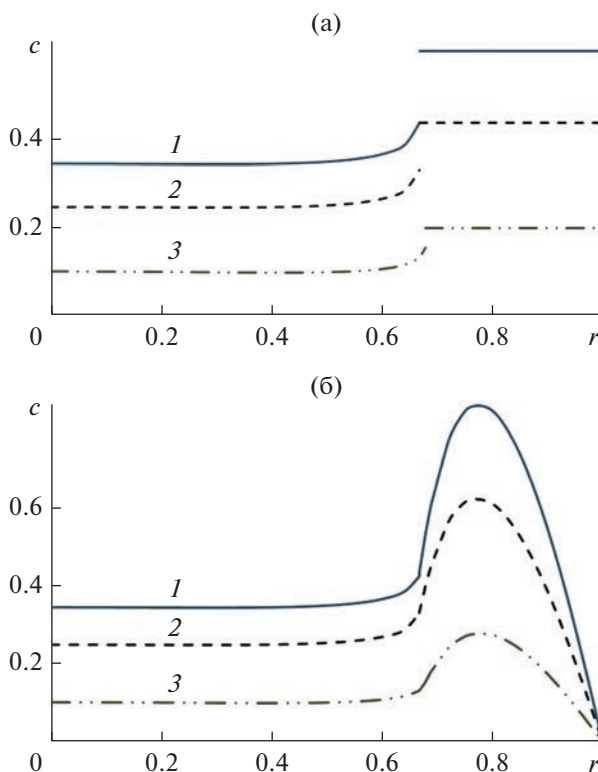


Рис. 8. Зависимости коэффициента заполнения от радиуса при $H = 1$ (1), 1.2 (2) и 1.5 (3) для линз с однородной (а) и неоднородной оболочкой (б).

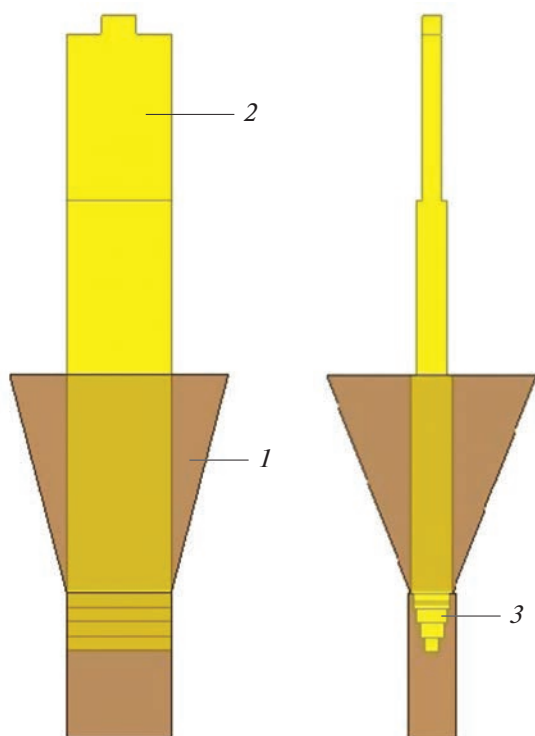


Рис. 9. Металлодиэлектрический облучатель: 1 – пирамидальный рупор, 2 – ступенчатый диэлектрический, 3 – согласующая часть стержня.

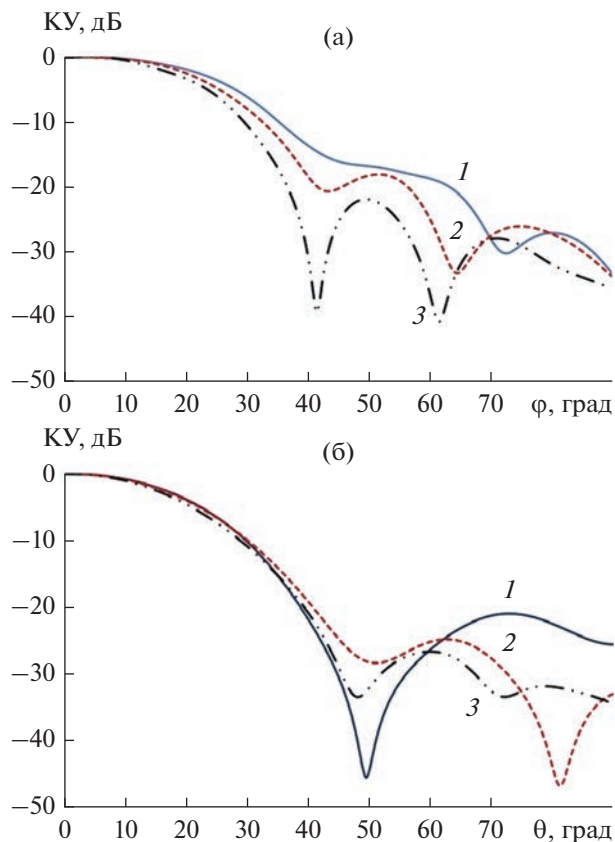


Рис. 10. Диаграммы направленности металлодиэлектрического облучателя на частотах 27 (1), 30 (2) и 33 ГГц (3) в H - (а) и E -плоскости (б).

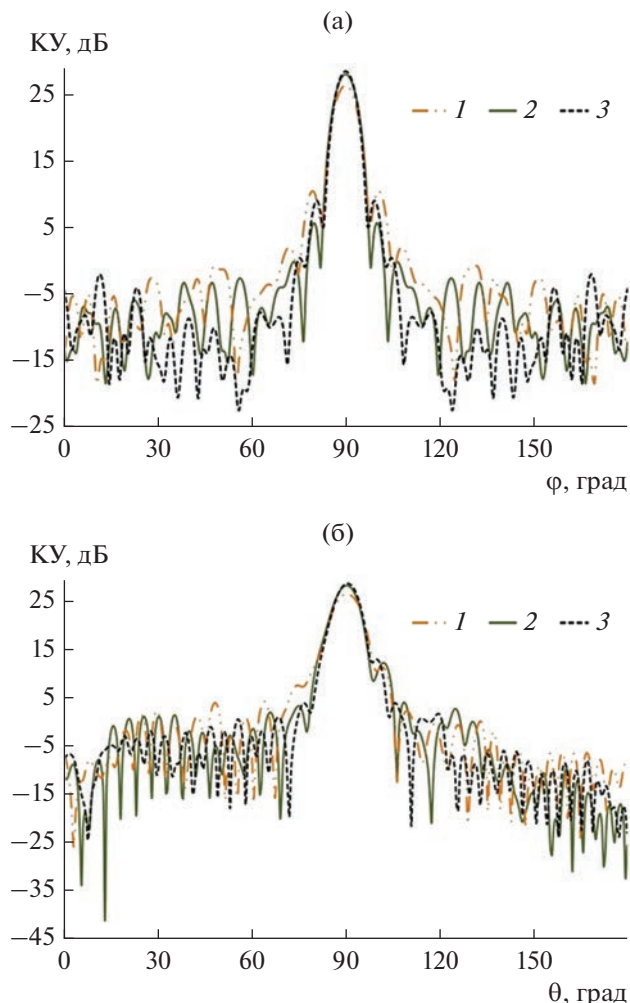


Рис. 11. Диаграммы направленности многолучевой линзовой антенны (однородные оболочки) на частотах 27 (1), 30 (2) и 33 ГГц (3) в H - (а) и E -плоскости (б).

аналогичным методом диаграмм направленности в H - и E -плоскости, коэффициента усиления (КУ) и коэффициента использования поверхности (КИП) линз с однородной и неоднородной оболочкой в диапазоне частот от 27...33 ГГц показаны соответственно на рис. 11–14.

На основании результатов численного моделирования можно сделать следующие выводы:

- предложенная линзовая антенна позволяет реализовать многолучевую диаграмму направленности в полном азимутальном угле без затенения апертуры облучающей системой,

- несмотря на неполное использование апертуры, величина КИП линзовой антенны с неоднородной оболочкой достаточно высокая (около 0.6) в широкой полосе частот,

- падение величины КИП на низких частотах и высокий уровень первого бокового лепестка диаграммы направленности в E -плоскости лин-

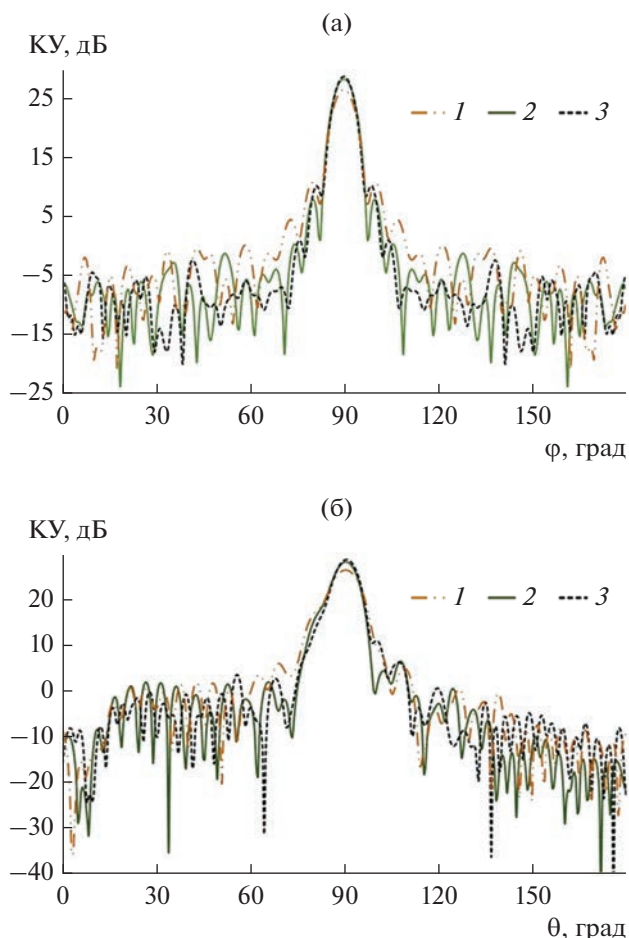


Рис. 12. Диаграммы направленности многолучевой линзовой антенны (неоднородные оболочки) на частотах 27 (1), 30 (2) и 33 ГГц (3).

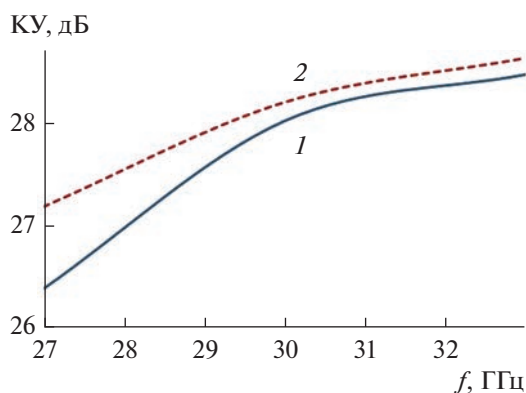


Рис. 13. Зависимость коэффициента усиления от частоты: однородные (1) и неоднородные оболочки (2).

зовой антенны с однородной оболочкой можно объяснить отражениями от границ оболочки.

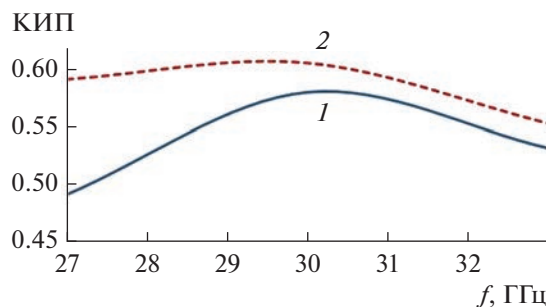


Рис. 14. Зависимость коэффициента использования поверхности от частоты: однородные (1) и неоднородные оболочки (2).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jay Guo Y., Ansari M., Ziolkowski R.W., Fonseca N.J.G. // IEEE Open J. Antennas and Propagation. 2021. V. 2. P. 807.
2. Denisov D.V., Shabunin S.N., Kusaykin D.V., Klevakin M.A. // IEEE 15th Int. Conf. Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE). Novosibirsk. 19–21 Nov. 2021. N.Y.: IEEE, 2021. P. 260.
3. Захаров Е.В., Ильинский А.С., Медведев Ю.В. и др. // Журн. радиоэлектроники 2020. № 2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb20/3/text.pdf>.
4. Ansari M., Jones B., Shariati N., Jay Guo Y. // 15th Europ. Conf. on Antennas and Propagation (EuCAP). Dusseldorf. 22–26 Mar. 2021. N.Y.: IEEE, 2021. Paper № 9411005. <https://doi.org/10.23919/EuCAP51087.2021.9411005>
5. Huang M. // IEEE Int. Symp. on Antennas and Propagation & USNC/URSI Nat. Radio Sci. Meeting. San Diego. 9–14 Jul. 2017. N.Y.: IEEE, 2017. P. 779.
6. Fonseca N.J.G., Liao Q., Quevedo-Teruel O. // IEEE Trans. 2023. V. AP-68. № 5. P. 3410.
7. Венецкий А.С., Калошин В.А., Чан Т.Т. // РЭ. 2022. Т. 67. № 8. С. 754.
8. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
9. Калошин В.А. // Дис...докт. физ.-мат. наук. М.: ИРЭ АН СССР, 1989. 250 с.
10. Ахияров В.В., Калошин В.А., Никитин Е.А. // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/18/text.pdf>.
11. Калошин В.А., Ви Ут Нам // РЭ. 2022. Т. 67. № 3. С. 249.

**К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА**

УДК 537.87

**ПРИЕМНИК СИГНАЛОВ ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ
СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ МОДУЛЯ U-BLOX ZED-F9P
ДЛЯ ИОНОСФЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

© 2023 г. Д. А. Когогин^а, *, А. В. Соколов^а, И. А. Насыров^а,
В. О. Дементьев^а, Р. В. Загретдинов^а

^а Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008 Российская Федерация

*E-mail: denis.kogogin@gmail.com

Поступила в редакцию 28.02.2023 г.

После доработки 08.04.2023 г.

Принята к публикации 10.04.2023 г.

Представлены результаты разработки макета приемника сигналов от глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) на основе модуля u-blox ZED-F9P и выполнен сравнительный анализ его характеристик с профессиональными ГНСС-приемниками Trimble Alloy (станция KZN2 сети IGS) и JAVAD TRE-3L в задаче регистрации полного электронного содержания. Отмечено качественно и количественно сравнимое поведение исследуемых параметров для всех типов ГНСС-приемников.

DOI: 10.31857/S0033849423060074, EDN: XMKMWB

ВВЕДЕНИЕ

Двухчастотные фазовые и групповые запаздывания сигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) с начала 90-х годов используются для определения полного электронного содержания (ПЭС) в ионосфере Земли, чтобы исследовать ее отклик на различные естественные и искусственные воздействия. Так как спутники ГНСС двигаются достаточно медленно по небосводу подыоносферная точка остается в пределах исследуемой области в течение продолжительного интервала времени, что позволяет получить информацию о пространственных и временных характеристиках волновых возмущений.

Метод дистанционного зондирования ионосферы сигналами ГНСС нашел широкое применение для изучения различных явлений, возникающих в ионосфере [1], например, в исследованиях ионосферных эффектов экстремальных гелиогеофизических событий, таких как магнитные бури [2, 3], солнечные вспышки [4, 5], затмения [6], а также регулярных событий, например, прохождения солнечного терминатора (СТ) [7, 8]. С помощью данного метода также изучается отклик ионосферы на землетрясения и поиск их предвестников [9] и ее реакция на действие тропических циклонов и внезапных стратосферных потеплений. С середины 2000 годов началось активное использование сигналов навигационных спутников для определения ПЭС вдоль луча спут-

ник-приемник, пересекающего возмущенную область ионосферы во время экспериментов по воздействию на нее мощным коротковолновым радиоизлучением. Такие исследования проводились на стендах HAARP [10, 11] и СУРА [12–14]. Стоит отметить также исследования, которые проведены методом радиозондирования сигналами ГНСС, связаны с изучением возмущений ионосферной плазмы и обусловлены антропогенными воздействиями на нее [15], например, ракетными запусками и инъекцией активного вещества при работе маневровых двигателей космических аппаратов [16, 17]. Часть работ посвящена решению обратной задачи, а именно исследованию вопроса о влиянии ионосферной и магнитосферной возмущенности на сбои в работе ГНСС в периоды различных гелиогеофизических событий [18–20].

В то же время измерения ПЭС и индексов ионосферной активности, основанных на нем, таких как вариации ПЭС (VarTEC), среднеквадратическое отклонение (СКО) относительного наклонного ПЭС в определенном окне (RMSTEC), производная ПЭС (ROT), СКО производной ПЭС на пятиминутном интервале (ROTI), СКО производной ПЭС, нормированной на квадрат наклонного фактора (AATR) и ряда других, существенно зависят от измеренных ГНСС-приемником фазовых и групповых запаздываний ГНСС-сигналов. А так как аппаратная конфигурация и методы обра-

ботки данных в ГНСС-приемнике в большинстве случаев неизвестны исследователю, необходимо иметь возможность оценить качество регистрации ПЭС. Подобный сравнительный анализ регистрации ПЭС для ГНСС-приемников различных производителей, таких как Trimble, Javad, Leica и Septentrio, был проведен в работе [21].

Отметим, что как в нашей стране, так и за рубежом большая часть данных о пространственно-временной динамике состояния ионосферы, полученных методом многочастотного радиозондирования сигналами ГНСС, охватывает такие регионы, как Япония, США, Западная Европа, где плотная сеть ГНСС-станций сложилась раньше, чем на территории нашей страны. Также имеются системы сбора и обмена ГНСС-данными в свободном доступе (IGS, UNAVCO, CORS, CHAIN и др.). Между тем количество постоянно действующих ГНСС-станций на территории Российской Федерации в последнее десятилетие резко увеличивается. В настоящий момент функционируют многочисленные коммерческие и государственные сети.

Однако даже учитывая увеличение ГНСС-станций в последнее десятилетие, плотность и неравномерность распределения базовых ГНСС-станций на территории Российской Федерации, в полной мере не обеспечивает возможность непрерывного мониторинга ближнего околоземного космического пространства методами дистанционного зондирования сигналами ГНСС в данном регионе. В силу описанного выше, оценки уровня возмущенности ионосферы, получаемые на основе этого метода, в частности региональные карты распределения интенсивности вариаций ПЭС, карты ROTI и др., для большей части территории РФ имеют низкое пространственно-временное разрешение.

Активно развивающаяся в настоящее время отрасль воздушных и наземных беспилотных средств становится определяющим фактором развития высокоточного позиционирования с субсантиметровой и большей точностью. Устройства, обеспечивающие такую точность позиционирования должны отвечать дополнительным требованиям: малогабаритность, энергоэффективность и низкая стоимость в сравнении с ГНСС приемниками геодезического класса. Для обеспечения высокой точности позиционирования описанные выше устройства обладают возможностью параллельного приема сигналов во всем частотном диапазоне 1176–1610 МГц основных ГНСС (GPS, ГЛОНАСС, Galileo, BeiDou, QZSS), что позволяет проводить исследование ионосферы с помощью измерения ПЭС и индексов ионосферной возмущенности, рассчитанных на основе его. На массовом рынке в последнее время стало появляться все больше недорогих ГНСС-модулей и отладочных плат на их основе, поддерживающих параллельный прием навигационных сигналов во

всем частотном диапазоне. К отдельным ГНСС-модулям с возможностью параллельного приема в двух диапазонах (L1+L2 или L1+L5) можно отнести OpenRTK330; ZED-F9P; LC79D и LG69T; BCM47765 и BCM47755; PX1122R и др. К готовым решениям, представленным в виде отладочных плат, позволяющих получать ГНСС-данные с возможностью последующей конвертации в RINEX относятся: simpleRTK2B; PX1122R-EVB; C099-F9P; SparkFun GPS-RTK2 и др. Плюсами таких плат является низкая стоимость, малый вес, низкое энергопотребление, наличие фирменного программного обеспечения для конфигурации и настройки оборудования, относительно большое количество рабочих каналов (от 184 до 230). В то же время необходимо отметить, что в связи с выпуском чипа BCM47755, устанавливаемого в современные смартфоны, количество таких устройств с возможностью регистрации ПЭС по двухчастотной комбинации фазовых измерений на частотах диапазонов L1/L5 будет постоянно увеличиваться.

Таким образом, задача повышения плотности сети ГНСС-станций на территории Российской Федерации за счет разработки мобильного бюджетного ГНСС-приемника, который в первую очередь будет использоваться для ионосферных исследований, является актуальной и востребованной, а технические возможности современных устройств способствуют ее решению.

Цель данной работы – рассмотреть основные характеристики созданного макета ГНСС-приемника и результаты его тестирования в сравнении с профессиональным ГНСС-оборудованием.

1. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К РАЗРАБАТЫВАЕМОМУ УСТРОЙСТВУ И ОПИСАНИЕ АППАРАТНОЙ ЧАСТИ ГНСС-ПРИЕМНИКА

Исходя из поставленной задачи, разрабатываемый макет мобильного ГНСС приемника должен обладать следующими функциями:

- принимать и сохранять ГНСС-данные (фаза, псевдодалность, отношение несущей к шуму, частота Доплера и др.), полученные от GPS, ГЛОНАСС, Galileo, BeiDou;
- конвертировать их в стандартный RINEX-формат;
- формировать автономный файл с расчетами, включающими в себя только необходимые пользователю параметры;
- отправлять данные на удаленный сервер для оперативной публикации в сети Интернет;
- иметь возможность визуализации данных в режиме реального времени.

Разрабатываемый макет устройства (рис. 1) состоит из: отладочной платы simpleRTK2B, оснащенной ГНСС-модулем u-blox ZED-F9P; одно-

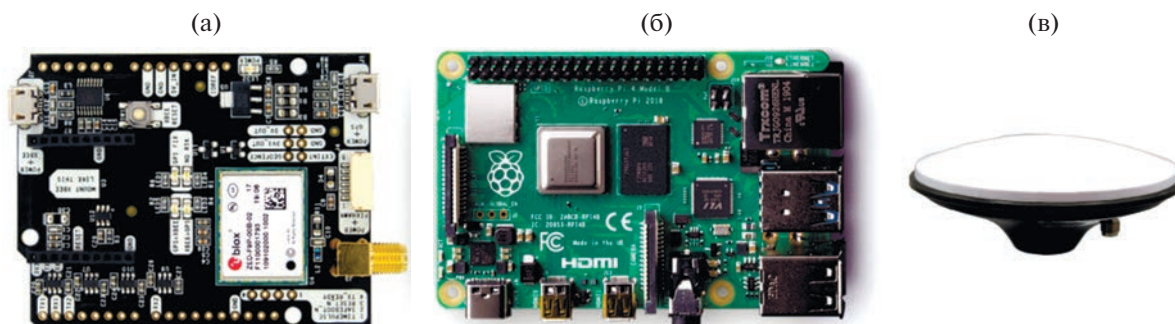


Рис. 1. Основные компоненты устройства: а) отладочная плата simpleRTK2B; б) одноплатный компьютер Raspberry Pi; в) ГНСС-антенна.

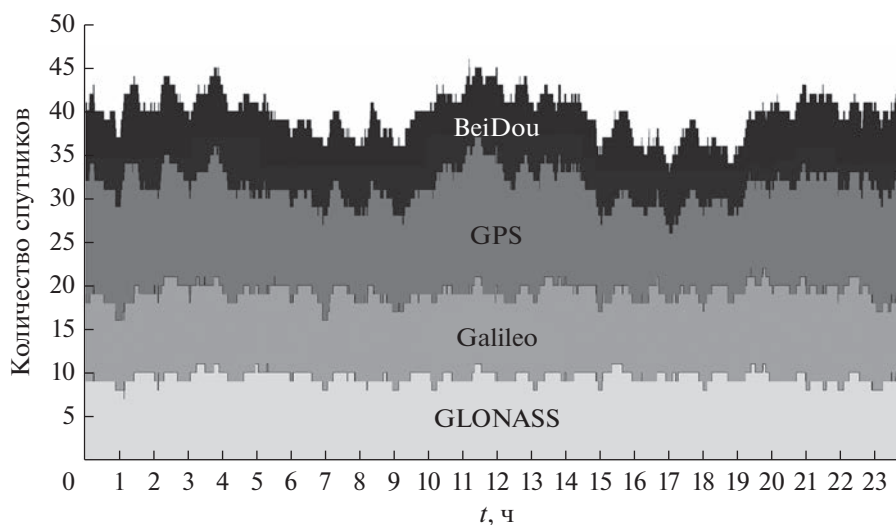


Рис. 2. Суточное изменение количества спутников GPS, ГЛОНАСС, Galileo и BeiDou на макете ГНСС-приемника на базе модуля u-blox ZED-F9P.

платного компьютера Raspberry Pi; многочастотной ГНСС-антенны; 4G-модема и/или роутера.

Основным компонентом разрабатываемого ГНСС приемника является ГНСС модуль u-blox ZED-F9P — многополосный модуль ГНСС со встроенной многополосной технологией “кинематики реального времени” (RTK), позволяющей добиться точности координатной привязки на уровне сантиметров.

Основные характеристики ГНСС-модуля u-blox ZED-F9P:

- параллельный прием сигналов GPS, ГЛОНАСС, Galileo, BeiDou, QZSS)
- общее количество рабочих каналов 184;
- поддержка многочастотной технологии получения поправок в режиме RTK с быстрым временем сходимости и надежной производительностью;
- поддержка обновлений навигационных данных до 20 Гц;

— наличие фирменного программного обеспечения для конфигурации и настройки оборудования;

— низкая стоимость.

Модуль ZED-F9P относится к типу “параллельных” приемников, т.е. приемников, способных принимать и отслеживать несколько типов ГНСС. Высокочастотный тракт модуля поддерживает все четыре основных типа ГНСС (GPS, ГЛОНАСС, Galileo и BeiDou) и региональной системы QZSS. Все данные со спутников могут приниматься одновременно, что обеспечивает возможность регистрации навигационных сигналов всех основных действующих ГНСС. Суточное изменение общего количества регистрируемых спутников на макете ГНСС-приемника на базе модуля u-blox ZED-F9P и их разделение по отдельным типам ГНСС представлено на рис. 2. Из рис. 2 видно, что общее количество навигационных спутников в течение суток варьируется от 33 до 46.

Плата simpleRTK2B представляет собой отдельный отладочный инструмент, основанный на модуле u-blox ZED-F9P. Плата simpleRTK2B совместима с большим числом внешних модулей, таких как Arduino, STM32 Nucleo, Raspberry Pi и Pixhawk, и поддерживает подключение множества радиоустройств, обеспечивающих связь по каналам Wi-fi, Bluetooth, 3G, LoRa.

Основные достоинства simpleRTK2B:

- основана на модуле u-blox ZED F9P;
- работает как в базовой, так и в подвижной – конфигурациях;
- имеет широкий спектр ГНСС-возможностей;
- поддерживает легкую интеграцию в комплексные проекты;
- доступна в нескольких комплектациях;
- для синхронизации внешнего оборудования есть выход timerpulse;
- имеет низкую цену.

Одноплатный компьютер Raspberry Pi используется в данной работе для настройки и отладки платы simpleRTK2B. При этом следует отметить, что для регистрации можно использовать любой современный ПК или ноутбук.

2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОЙ ЧАСТИ ГНСС-ПРИЕМНИКА

Для отладки и управления платой simpleRTK2B возможны различные сценарии, которые зависят от используемой конфигурации оборудования. Можно подключить отладочную плату simpleRTK2B непосредственно к ПК или ноутбуку под управлением операционной системы (ОС) семейства Windows (Vista и старше) по стандартному usb интерфейсу и, использовать разработанную компанией u-blox программу U-center для настройки платы. Для быстрого старта такой подход будет наиболее правильным, так как программа U-center представляет собой мощную платформу для конфигурации, тестирования и визуализации данных для ГНСС-модулей фирмы u-blox и на начальном этапе ее функциональности более чем достаточно. Существенным недостатком программа U-center является то, что она не поддерживается в операционных системах семейства Linux. Поэтому для настройки, отладки и управления ГНСС-приемником с помощью одноплатного компьютера Raspberry Pi4 с установленной на него ОС семейства Linux было написано оригинальное программное обеспечение на языке Python [22]. Использование одноплатного компьютера в качестве управляющего устройства позволяет добиться не только компактных размеров устройства, но и обеспечить его низкое энергопотребление, что в совокупности повышает общую автономность и мобильность разрабатываемого ГНСС-приемника.

Управление ГНСС-приемником в ОС Linux реализовано в двух вариантах. Первый – “классический” – подключение к приемнику с использованием соответствующей периферии: клавиатуры, мыши и монитора. Данный способ хорошо подходит для отладки программного обеспечения, включая визуализацию данных, благодаря использованию всех функций графической оболочки Raspberry Pi OS или любой другой ОС из семейства Linux. Второй – с помощью протокола SSH. Поскольку на Raspberry Pi 4 реализованы несколько сетевых интерфейсов передачи информации, таких как Wi-Fi, Ethernet и USB-модем (по выбору), управлять ГНСС-приемником можно с любого устройства способного воспроизводить и передавать информацию по данному протоколу. При необходимости, присутствует возможность подключения к устройству по протоколу RDP.

В общем случае результатом работы ГНСС-приемника является формирование файла, содержащего ГНСС-данные (фазовые и псевдодалномерные измерения, отношение несущей к шуму и др.). В случае с платой simpleRTK2B формируется файл в двоичном формате UBX. Однако для хранения и обмена ГНСС-данными гораздо удобнее использовать общепринятый формат RINEX. Для конвертации UBX в RINEX была использована библиотека RTKLIB. Общий алгоритм работы ГНСС приемника представлен на рис. 3.

Дополнительно к записи данных в двоичном формате UBX с последующей конвертацией в RINEX реализована возможность записи файла в текстовом формате. Данная опция позволяет записывать в файл только выбранные пользователем параметры.

Для удобной транспортировки и оперативного развертывания на месте проведения эксперимента был разработан и смоделирован корпус ГНСС-приемника в программе 3D-моделирования. Общий вид законченного макета устройства представлен на рис. 4. Питание устройства возможно осуществлять как от сетевого зарядного устройства, так и от внешнего аккумулятора, обеспечивающего напряжение 5 В и ток на выходе 3 А.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ И ПРОВЕРКИ ДАННЫХ

Для тестирования макета ГНСС-приемника и проверки данных было проведено два независимых эксперимента.

Первый эксперимент был проведен на кафедре радиоэлектроники Института физики КФУ 22 июля 2021 г. в интервале 16:00–19:00 UTC. Два приемника u-blox находились на расстоянии около 1 м друг от друга и в ~150 м от базовой станции KZN2 [55.79 с.ш., 49.11 в.д.]. В этом эксперименте исследовались как характеристики макета разра-

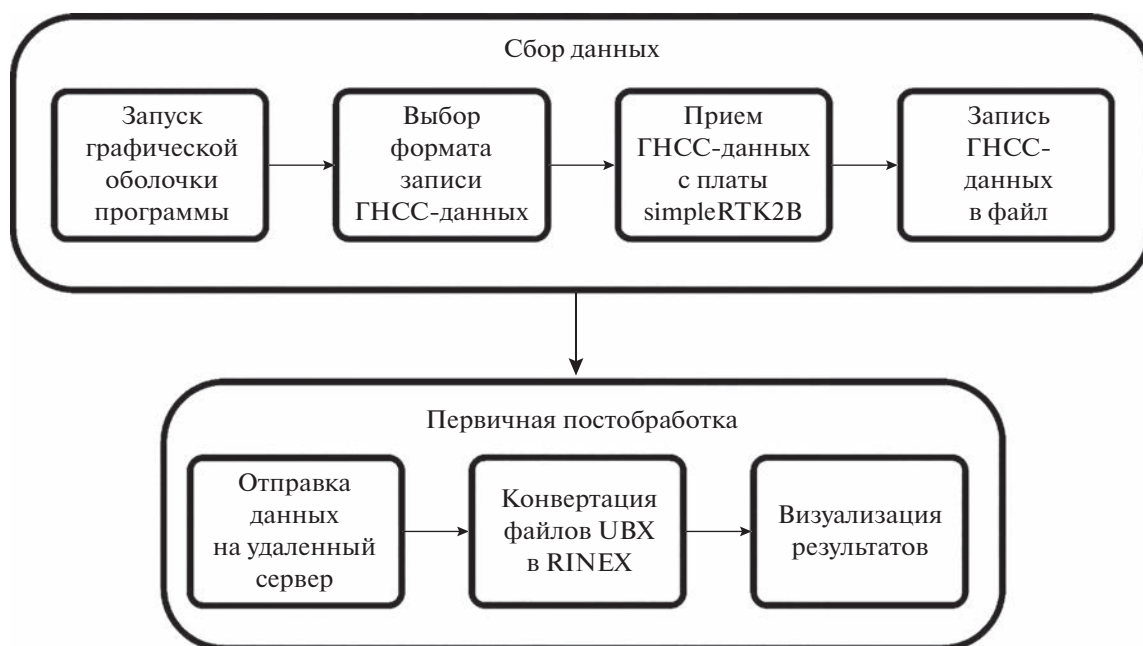


Рис. 3. Общая схема алгоритма работы ГНСС-приемника.

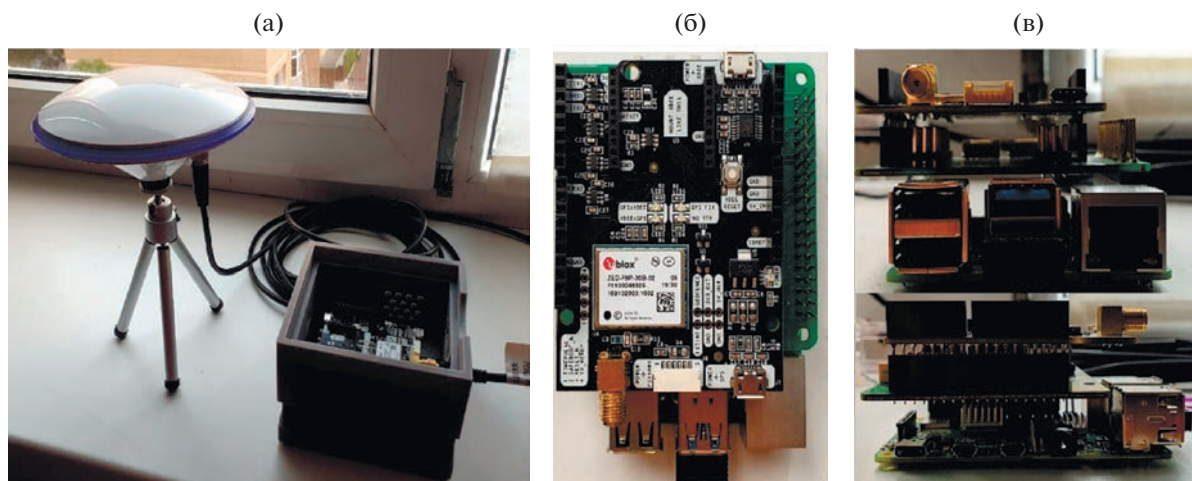


Рис. 4. Фотографии разработанного макета ГНСС-приемника: а) общий вид в корпусе и с ГНСС-антенной; б) вид сверху без корпуса; в) вид сбоку без корпуса.

ботанного ГНСС-приемника, так и влияние используемой ГНСС-антенны на регистрируемые данные от ГНСС GPS, ГЛОНАСС, Galileo, BeiDou. В качестве эталонного и верифицированного источника информации ГНСС-данных выбрана станция KZN2 мировой сети ГНСС-станций IGS, оснащенная профессиональным геодезическим ГНСС-приемником Trimble Alloy с антенной Trimble TRM 59800. Для сравнительного анализа влияния ГНСС-антенн использованы два ГНСС-приемника оригинальной разработки на базе модуля u-blox ZED-F9P, оснащенные

ГНСС-антенной Trimble Zephyr 3 Rover (u-blox 1) и ГНСС-антенной Beitian BT-290 (u-blox 2).

Второй эксперимент был проведен на кафедре физики атмосферы МГУ им. М.В. Ломоносова в период с февраля по март 2022 г. Для иллюстрации полученных результатов были обработаны результаты, полученные 15 февраля 2022 г. В данном эксперименте сравнивали результаты, полученные с помощью макета ГНСС-приемника оригинальной разработки на базе модуля u-blox ZED-F9P и с использованием приемника TRE-3L фирмы JAVAD. Оба приемника были подклю-

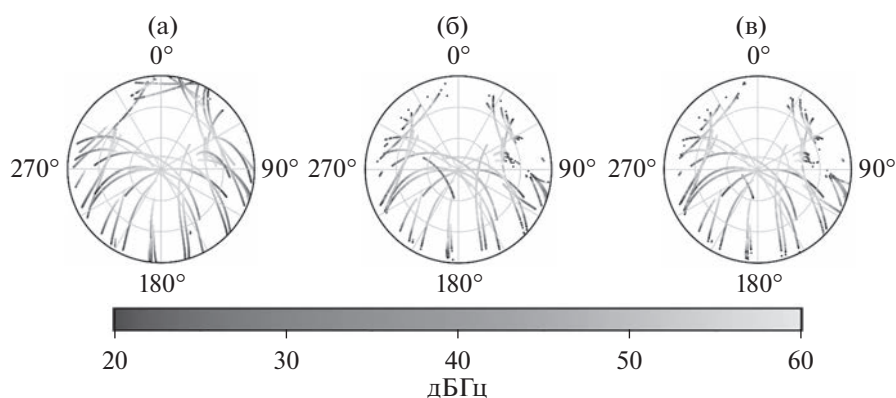


Рис. 5. Траектории движения навигационных спутников в полярной системе координат, используемых для анализа ГНСС-данных в первом эксперименте: а) ГНСС-приемник Trimble Alloy с антенной TRM 59800 (IGS станция KZN2); б) ГНСС-приемник на базе отладочной платы simpleRTK2B с модулем u-blox ZED-F9P с антенной Trimble Zephyr 3 Rover (далее u-blox 1); в) ГНСС-приемник на базе отладочной платы simpleRTK2B с модулем u-blox ZED-F9P с ГНСС антенной BEITIAN BT-290 (u-blox 2). Градацией серого на траектории движения обозначена мощность сигнала на частотах L2 для GPS и ГЛОНАСС, E7 для Galileo и B7 для Beidou.

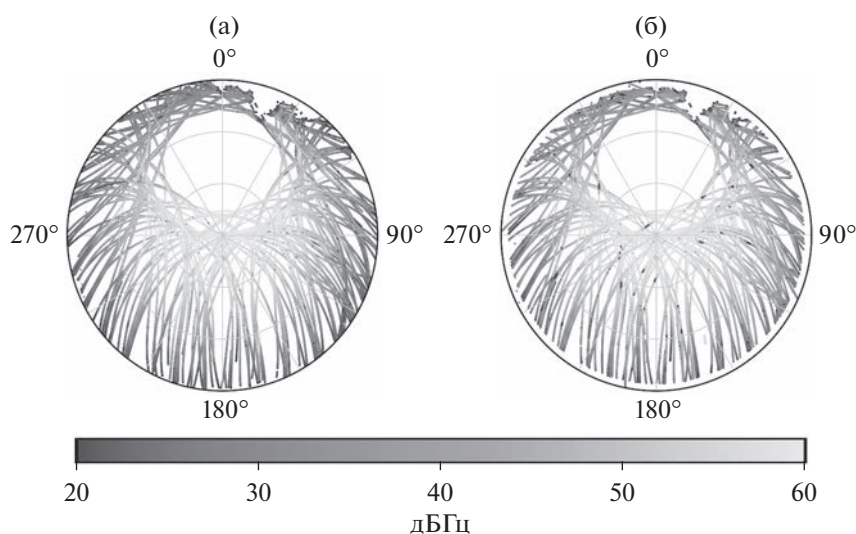


Рис. 6. Траектории движения навигационных спутников в полярной системе для второго эксперимента: а) ГНСС-приемник на базе отладочной платы simpleRTK2B с модулем u-blox ZED-F9P; б) ГНСС-приемник JAVAD TRE-3L. Градацией серого на траектории движения обозначена мощность сигнала на частотах L2 для GPS и ГЛОНАСС, E7 для Galileo и B7 для Beidou.

чены через разветвитель к одной ГНСС-антенне. Траектории движения навигационных спутников в полярной системе координат, используемых для дальнейшего анализа ГНСС данных в первом и втором эксперименте представлены на рис. 5–6 соответственно.

В качестве сравниваемых параметров в обоих экспериментах использованы медианные значения, полученные по всей выборке ГНСС-спутников, а именно данные о мощности сигнала, и полярные индексы оценки ионосферной активности, полученные на основе данных о ПЭС, рассчитанном на основе двухчастотной фазовой комбинации на центральных частотах L1- и L2-диапазонов, такие как вариации относительного наклонного ПЭС

(VarTEC), среднеквадратическое отклонение (СКО) относительного наклонного ПЭС в окне 100 с (RMSTEC), производная ПЭС (ROT), СКО производной ПЭС на пятиминутном интервале (ROTI), СКО производной ПЭС, нормированной на квадрат наклонного фактора (AATR).

В первом эксперименте общая выборка составила 30 спутников для ГНСС-приемника Trimble Alloy, 28 спутников для ГНСС-приемника с модулем u-blox ZED-F9P и антенной Trimble Zephyr3 и 33 спутника для ГНСС-приемника с модулем u-blox ZED-F9P и антенной BEITIAN BT-290. Во втором эксперименте общая выборка составила 76 спутников для ГНСС-приемника JAVAD TRE-3L

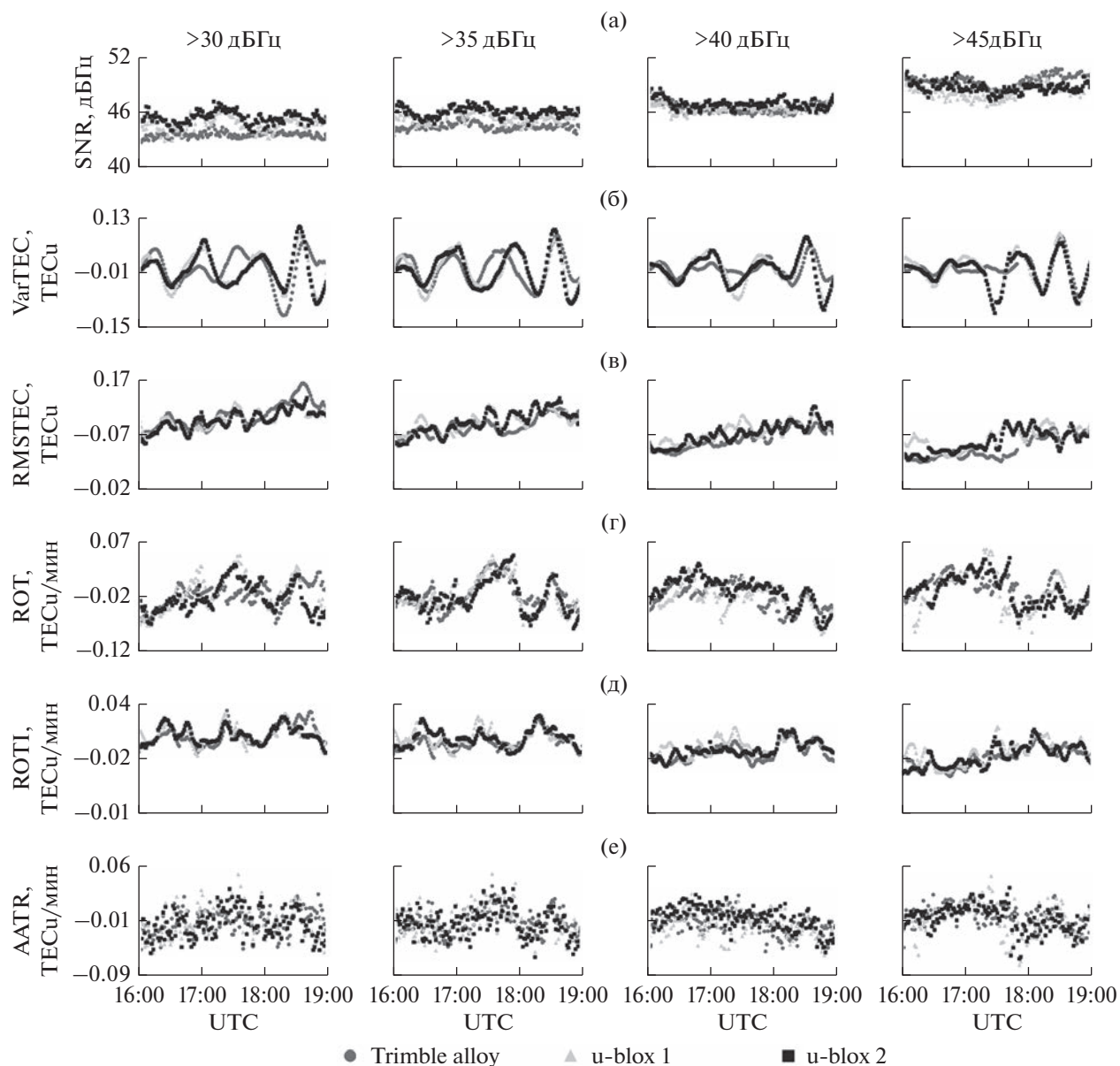


Рис. 7. Медианные значения сравниваемых параметров по всей выборке ГНСС спутников для первого эксперимента при 30, 35, 40 и 45: а) SNR — отношение несущей к шуму; б) VarTEC — вариации относительного наклонного ПЭС; в) RMSTEC — среднеквадратическое отклонение (СКО) относительного наклонного ПЭС в окне 100 с; г) ROT — производная ПЭС; д) ROTI — СКО производной ПЭС на пятиминутном интервале; е) AATR — СКО производной ПЭС, нормированной на квадрат наклонного фактора.

и 71 спутник для ГНСС-приемника с модулем u-blox ZED-F9P.

При обработке данных был использован 30-минутный фильтр срывов фазы сигнала, т.е. если в течение наблюдений не было срывов фазы или временной интервал между срывами равнялся 30 мин и более, то такие промежутки выбирались для дальнейшего анализа. Для фильтрации данных ПЭС использовалось 15-минутное скользящее среднее. Для исследования поведения индексов ROT и AATR использовались вре-

менные промежутки в 5 мин между значениями наклонного ПЭС, для ROTI и RMSTEC этот интервал был равен 15 мин. При обработке данных использовали четыре разных фильтра отношения несущей к шуму, а именно более 30, 35, 40 и 45 дБГц. После фильтрации по данному критерию рассчитывались параметры: мощности сигнала, вариации ПЭС, индексы ROT, ROTI, RMSTEC, AATR (рис. 7 и 8).

Дополнительно был проведен корреляционный анализ медианных значений сравниваемых

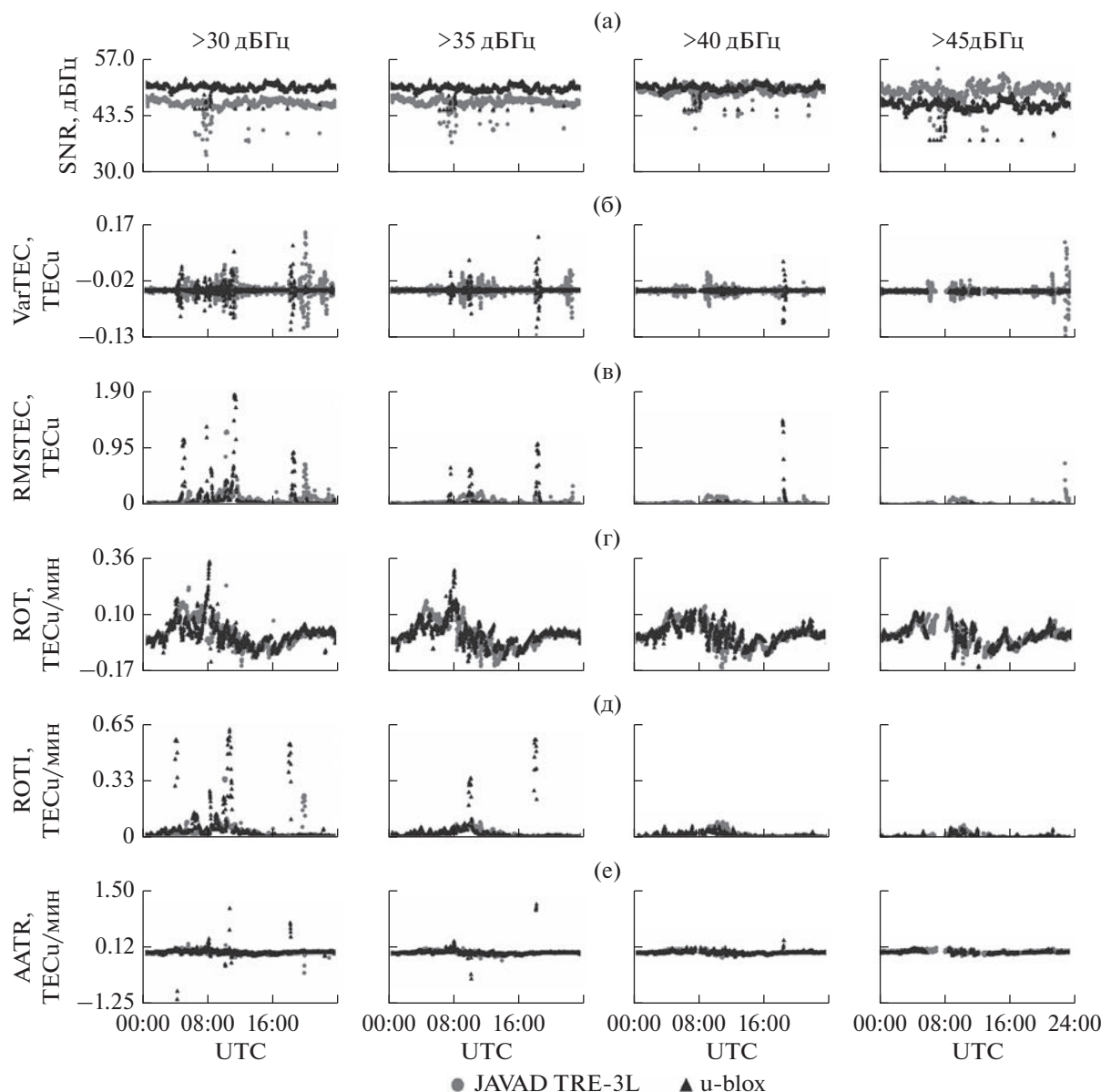


Рис. 8. Медианные значения сравниваемых параметров по всей выборке ГНСС-спутников для второго эксперимента при 30, 35, 40 и 45 дБГц: а) SNR – отношение несущей к шуму; б) VarTEC – вариации относительного наклонного ПЭС; в) RMSTEC – средноквадратическое отклонение (СКО) относительного наклонного ПЭС в окне 100 с; г) ROT – производная ПЭС; д) ROTI – СКО производной ПЭС на пятиминутном интервале; е) AATR – СКО производной ПЭС, нормированной на квадрат наклонного фактора.

параметров, представленных на рис. 7 и 8. Полученные результаты представлены в табл. 1 для первого эксперимента и в табл. 2 – для второго.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из рис. 7 видно, что профессиональный ГНСС-приемник Trimble Alloy с высококачественной ГНСС-антенной показал ожидаемо лучшие результаты по сравнению с макетом ГНСС-приемника. В первую очередь он имеет су-

щественно меньшее число срывов, особенно при выборке данных выше 40 дБГц. Также отметим, что используемые в эксперименте ГНСС-антенны BEITIAN BT-290 и Trimble Zephyr 3 с макетом ГНСС-приемника не оказали существенного влияния на регистрируемые данные (рис. 7б–7е). Можно лишь отметить незначительно выросший уровень отношения несущей к шуму при использовании ГНСС-антенны Trimble Zephyr 3 (см. рис. 7а). В целом все сравниваемые параметры показывают схожую картину поведения.

Таблица 1. Коэффициент корреляции Пирсона для первого эксперимента

Параметр	Trimble Alloy – u-blox 2	Trimble Alloy – u-blox 1	u-blox 2– u-blox 1
Для данных ≤ 30 дБГц			
SNR	0.47	0.40	0.83
VarTEC	0.30	0.45	0.94
RMSTEC	0.83	0.80	0.88
ROT	0.35	0.50	0.85
ROTI	0.67	0.62	0.84
AATR	0.51	0.58	0.87
Для данных ≤ 35 дБГц			
SNR	0.64	0.55	0.86
VarTEC	0.57	0.58	0.92
RMSTEC	0.72	0.68	0.87
ROT	0.66	0.81	0.82
ROTI	0.70	0.77	0.76
AATR	0.66	0.77	0.82
Для данных ≤ 40 дБГц			
SNR	0.70	0.73	0.74
VarTEC	0.56	0.65	0.93
RMSTEC	0.85	0.80	0.82
ROT	0.67	0.46	0.75
ROTI	0.78	0.80	0.55
AATR	0.66	0.59	0.77
Для данных ≤ 45 дБГц			
SNR	0.50	0.58	0.56
VarTEC	0.71	0.65	0.96
RMSTEC	0.62	0.62	0.74
ROT	0.65	0.65	0.70
ROTI	0.73	0.72	0.73
AATR	0.60	0.61	0.73

Таблица 2. Коэффициент корреляции Пирсона для второго эксперимента

Параметр	JAVAD TRE-3L – u-blox			
	≤ 30 дБГц	≤ 35 дБГц	≤ 40 дБГц	≤ 45 дБГц
SNR	0.76	0.69	0.69	0.46
VarTEC	–0.01	–0.01	0.01	0.03
RMSTEC	0.29	0.53	0.67	0.40
ROT	0.49	0.61	0.66	0.70
ROTI	0.49	0.67	0.62	0.67
AATR	0.42	0.51	0.54	0.63

При обработке выборки данных с фильтрами до 40 дБГц (см. рис. 8) видно существенно большее количество срывов на макете ГНСС-приемника по сравнению с профессиональным ГНСС-приемником JAVAD TRE-3L, что в свою очередь приводит к резким выбросам в рядах сравниваемых параметров. При этом при фильтрации данных выше 40 дБГц картина меняется и данные,

полученные с помощью макета ГНСС-приемника, показывают схожие или даже лучшие результаты.

Таким образом, сделаем следующие выводы. Для первого эксперимента отмечается положительная корреляция для всех параметров и по всем трем станциям. По степени корреляции дан-

ные по паре станций (u-blox 2, u-blox 1) коррелируют немного лучше, чем данные по парам (Trimble Alloy, u-blox 2) и (Trimble Alloy, u-blox 1). Данные по парам (Trimble Alloy, u-blox 2) и (Trimble Alloy, u-blox 1) коррелируют примерно одинаково. При проведении качественного анализа второго эксперимента из данных были удалены отсчеты с сильными выбросами как для ГНСС-приемника JAVAD TRE-3L, так и для макета разработанного ГНСС-приемника, при этом для ГНСС-данных приемника JAVAD TRE-3L таких выбросов значительно больше. Отмечена положительная корреляция по парным данным станций JAVAD TRE-3L – макет ГНСС-приемника с модулем u-blox ZED-F9P для параметров AATR, RMSTEC, ROT, ROTI, SNR. По параметру VarTEC корреляция отсутствует. Данные между станциями во втором эксперименте коррелируют слабее. Кроме того, в данных второго эксперимента по VarTEC отсутствует корреляция между станциями.

По всей видимости, отсутствие корреляции для вариаций ПЭС (параметр VarTEC) для второго эксперимента связано с тем, что ГНСС-приемник JAVAD TRE-3L более чувствителен к шумам и помехам, чем разработанный ГНСС-приемник на базе модуля u-blox ZED-F9P. Из таблицы 5 видно, что при использовании фильтров 40 и 45 дБГц значения коэффициентов корреляции для ионосферных параметров (VarTEC, AATR, RMSTEC, ROT, ROTI) несколько возрастают. Таким образом, более высокие значения корреляции можно получить путем соответствующей настройки приемной аппаратуры.

В целом в ходе корреляционного анализа данных двух экспериментов установлено наличие корреляции между данными, полученными с нескольких станций. Поскольку это синхронные данные одних и тех же параметров, но с разных станций, наличие положительной корреляции между данными свидетельствует о наличии статистической взаимосвязи между этими данными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен разработанный макет мобильного бюджетного ГНСС-приемника для исследования ионосферных процессов на базе ГНСС-модуля u-blox ZED-F9P. Выполнено сравнение его характеристик в задаче регистрации ПЭС с профессиональными ГНСС-приемниками Trimble Alloy и JAVAD TRE-3L.

Разработанное устройство способно обеспечить малые научные группы мобильным и доступным по цене оборудованием регистрации ГНСС-данных. Это в свою очередь может способствовать повышению пространственно-временного разрешения карт распределения интен-

сивности вариаций ПЭС за счет увеличения количества станций, созданных на базе данного приемника, и последующему переходу к непрерывному мониторингу процессов, протекающих в околоземном космическом пространстве, ГНСС-методами. На текущем этапе разработки возможности макета ГНСС-приемника позволяют принимать данные с частотой до 1 Гц от всех ГНСС без пропусков данных. Для более высоких частот регистрации (5...20 Гц) предварительно необходимо ввести ограничения по количеству используемых типов ГНСС.

Представленные в работе результаты разработки и тестирования макета ГНСС-приемника на базе модуля u-blox ZED-F9P демонстрируют возможность конкуренции между ГНСС-приемниками из недорогого ценового сегмента с более дорогими по стоимости готовыми решениями геодезического класса, а также целесообразность использования мобильного ГНСС-приемника u-blox ZED-F9P в задаче определения ПЭС и других индексов ионосферной возмущенности на его основе. По результатам анализа полученных экспериментальных данных можно сделать заключение о качественно и количественно сравнимом поведении исследуемых параметров для всех типов исследуемых ГНСС-приемников.

Сеть, состоящая из пяти станций, оснащенных ГНСС-приемниками на базе модуля u-blox ZED-F9P, прошла тестовые испытания в октябре 2021 г. в экспериментах на УНУ стенд СУРА.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность А.М. Падохину за помощь в организации эксперимента в МГУ им. М.В. Ломоносова с ГНСС-приемником JAVAD TRE-3L.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-72-00043).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bust G.S., Mitchell C.N.* // Rev. Geophys. 2008. V. 46. № 1. P. RG1003.
<https://doi.org/10.1029/2006RG000212>
2. *Куницын В.Е., Кожарин М.А., Нестеров И.А., Козлова М.О.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2004. № 6. С. 67.
3. *Jin S., Luo O.F., Park P.* // J. Geod. 2008. V. 82. № 12. P. 883.
<https://doi.org/10.1007/s00190-008-0217-x>

4. *Tsurutani B.T., Judge D.L., Guarnieri F.L. et al.* // *Geophys. Res. Lett.* 2005. V. 32. P. L03S09. <https://doi.org/10.1029/2004GL021475>
5. Куницын В.Е., Падохин А.М. // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия.* 2007. № 5. С. 68.
6. Афраймович Э.Л., Астафьева Э.И., Воейков С.В. и др. // *Солнечно-земная физика.* 2011. № 18. С. 24.
7. Афраймович Э.Л., Перевалова Н.П. *GPS-мониторинг верхней атмосферы Земли.* Иркутск, 2006.
8. *Afraimovich E.L., Edemskiy I.K., Voeykov S.V. et al.* // *Ann. Geophys.* 2009. V. 27. P. 1521. <https://doi.org/10.5194/angeo-27-1521-2009>
9. *Pulinets S.A., Boyarchuk K.* *Ionospheric Precursors of Earthquakes.* Berlin: Springer, 2004.
10. *Milikh G., Gurevich A., Zybin K., Secan J.* // *Geophys. Res. Lett.* 2008. V. 35. № 22. P. L22102. <https://doi.org/10.1029/2008GL035527>
11. *Pradipta R., Lee M.C., Cohen J.A., Watkins B.J.* // *Earth Moon Planets.* 2015. V. 116. № 1. P. 67. <https://doi.org/10.1007/s11038-015-9461-2>
12. *Kunitsyn V.E., Padokhin A.M., Vasiliev A.E. et al.* // *Advances in Space Research.* 2011. V. 47. № 10. P. 1743. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2010.03.031>
13. *Kunitsyn V.E., Vasilieva E.S., Frolov V.L. et al.* // *Radio Sci.* 2012. V. 47. № 4. P. RS0L15. <https://doi.org/10.1029/2011RS004957>
14. Фролов В.Л., Болотин И.А., Комраков Г.П. и др. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2012. Т. 55. № 6. С. 393.
15. *Perevalova N.P., Shestakov N.V., Voeykov S.V. et al.* // *Geophys. Res. Lett.* V. 42. № 16. P. 6535. <https://doi.org/10.1002/2015GL064792>
16. *Ishin A.B., Voeykov S.V., Perevalova N.P., Globa M.V.* // *PIERS 2017, St Petersburg, 22–25 May 2017.* <https://doi.org/10.1109/PIERS.2017.8262147>
17. *Chou M.-Y., Shen M.-H., Lin C.C.H. et al.* // *Space Weather.* 2018. V. 16. № 2. P. 172. <https://doi.org/10.1002/2017SW001738>
18. Захаров В.И., Ясюкевич Ю.В., Тутова М.А. // *Космич. исслед.* 2016. Т. 54. № 1. С. 23. <https://doi.org/10.7868/S0023420616010143>
19. Ясюкевич Ю.В., Живетьев И.В., Ясюкевич А.С. и др. // *Совр. проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса.* 2017. Т. 14. № 1. С. 88. <https://doi.org/10.21046/2070-7401-2017-14-1-88-98>
20. Ясюкевич Ю.В., Сыроватский С.В., Падохин А.М. и др. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2019. Т. 62. № 12. С. 906.
21. *Demyanov V., Sergeeva M., Fedorov M. et al.* // *Remote Sens.* 2020. V. 12. № 19. P. 3268. <https://doi.org/10.3390/rs12193268>
22. Соколов А.В., Козогин Д.А. Программа регистрации ГНСС данных для модуля u-blox ZED-F9P. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022612868. Оpubл. офиц. бюл. “Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем” от 01.03.2022.

**К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА**

УДК 621.317.7+528.8

МИКРОВОЛНОВАЯ РАДИОМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОПАСНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ЯВЛЕНИЙ

© 2023 г. Г. Г. Щукин^{a, b}, Е. В. Федосеева^{a, *}, В. В. Булкин^a, И. Н. Ростокин^a

^a Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Орловская, 23, Муром, 602264 Российская Федерация

^b Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,
ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198 Российская Федерация

*E-mail: elenafedoseeva@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.02.2023 г.

После доработки 06.04.2023 г.

Принята к публикации 10.04.2023 г.

Показаны основные направления совершенствования радиометрических СВЧ-систем для решения задач сверхкраткосрочного прогнозирования развития неблагоприятных и опасных атмосферных метеоявлений, состоящие в решении задач компенсации влияния фоновых шумов, цифровой обработке выходных сигналов, включения в состав системы радиофотонных трактов и нейронной сети. Приведены результаты корреляционной обработки данных дистанционного зондирования приземного слоя неоднородной атмосферы в трех частотных диапазонах.

DOI: 10.31857/S003384942306013X, **EDN:** XNBVMZ

ВВЕДЕНИЕ

Микроволновые радиометрические исследования атмосферы основаны на измерении мощности ее собственного радиотеплового излучения. Уровень мощности зависит от физических параметров атмосферы — температуры, влажности, влагосодержания, однородности, динамической изменчивости. Такая зависимость позволяет дать необходимые оценки метеопараметров исследуемой области атмосферы по результатам микроволновых радиометрических измерений. Возможность выполнения измерений в непрерывном режиме при их дистанционном характере определяет перспективность развития и использования микроволновых радиометрических комплексов для создания систем мониторинга состояния атмосферы, что для современных условий наблюдаемых изменений климата является задачей, непосредственно связанной с обеспечением оперативного информирования и предупреждения последствий опасных погодных явлений [1–5].

Современные исследования лаборатории “Радиофизические исследования природных сред” Муромского института базируются на многолетнем опыте создания радиометеорологической аппаратуры для зондирования атмосферы [6]. За прошедшие десятилетия было создано несколько комплексов измерительной аппаратуры, разработаны и экспериментально отработаны схемотехнические решения, методики измерений.

Радиометеорологический комплекс для влажностного зондирования атмосферы с антенной диаметром 2.5 м был выполнен в транспортируемом и стационарном вариантах. Основу комплекса составляли четырехканальные радиометрические приемники модуляционного типа с длинами волн 0.8, 1.35, 1.6 и 3.2 см [7]. Для длин волн 1.35 и 1.6 см использовался один приемник с общим облучателем (входным рупором). Чувствительность радиометров по радиояркостным температурам обеспечивалась на уровне 0.5...1 К.

Стационарная система измерения ослабления радиоволн в осадках включала двухканальную трассовую установку с длинами волн 1.6 и 0.8 см. Длина трассы составляла 170 м. Оценка изменения величины затухания сигнала осуществлялась на уровне не хуже 0.05 дБ [8].

Были разработаны и прошли испытания стационарная и самолетная пассивно-активные радиолокационные системы (ПАРЛС) для служб штормооповещения и предупреждения о возможном обледенении летательных аппаратов [9]. Пассивный канал строился на основе модуляционного радиометра с флуктуационным порогом чувствительности на уровне 0.3 К при постоянной времени $\tau = 1$ с. Дальность обнаружения активного канала в режиме ПАРЛС — 175 км. Развязка каналов обеспечивалась на уровне не менее 160 дБ. При использовании антенны диаметром 3 м метеорологический потенциал активного канала

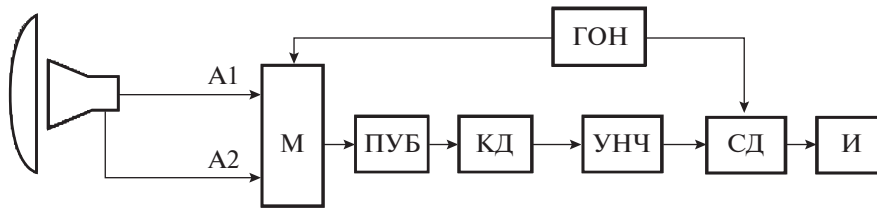


Рис. 1. Схема радиометрической СВЧ-системы с компенсацией фонового излучения: A1 и A2 — основной и дополнительный антенные каналы; М — модулятор; ПУБ — приемно-усилительный блок; КД — квадратичный детектор; СД — синхронный детектор; ГОН — генератор опорного напряжения; И — измеритель-индикатор.

составлял 270 дБ [10], в самолетном варианте при антенне диаметром 0.76 м — 262 дБ [11].

Накопленный практический и методический опыт создания измерительной аппаратуры и проведения мониторинга состояния атмосферы обеспечили переход к новому этапу — созданию современной системы сверхкраткосрочного прогнозирования неблагоприятных и опасных метеоявлений [6, 12–16].

Целью статьи является анализ современного состояния и перспектив построения системы сверхкраткосрочного прогнозирования неблагоприятных и опасных метеоявлений, обсуждение некоторых полученных к настоящему моменту результатов.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ, АППАРАТНЫЕ И ПРОГРАММНЫЕ РЕШЕНИЯ ПО ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОПАСНЫХ МЕТЕОЯВЛЕНИЙ

В процессе реализации программы построения системы прогнозирования опасных атмосферных метеоявлений были наработаны новые методические, программные и аппаратные решения, базирующиеся на имеющихся собственных разработках, обеспечивающие решение задач по совершенствованию радиометрических СВЧ-систем, расширению их функциональных и информативных возможностей [17–20]. Эти решения, часть из которых уже воплощена в виде аппаратно-программных средств, основываются на современных подходах к компенсации помех, применению цифровых методов обработки сигналов, использованию средств и методов радиотехники, программам обработки данных на основе нейронных сетей [21–23].

Имеющийся в лаборатории опыт создания радиометеорологических комплексов и выполнения микроволновых исследований атмосферы показал необходимость решения задачи снижения влияния фоновых излучений неоднородного окружающего пространства на результаты измерений радиотеплового излучения атмосферы. Такое влияние оказывается достаточно значимым при появлении в

угловой области рассеяния диаграммы направленности антенны насыщенных влагой конвективных облаков при наблюдении в зенит безоблачной части атмосферы, а также при выполнении исследований относительно однородной атмосферы методом угловых разрезов [7, 12, 24]

Наиболее распространенным традиционным способом борьбы с влиянием фонового излучения при исследовании атмосферы в ограниченном угловом секторе является разработка антенн с пониженным уровнем бокового излучения.

Способ компенсации, разработанный и реализованный в исследованиях в Муромском институте, предусматривает формирование дополнительного сигнала на выходе антенны радиометрической СВЧ-системы, который в идеале был бы равен составляющей выходного сигнала основного измерительного антенного канала, формируемого приемом фонового излучения окружающего пространства через область рассеяния диаграммы направленности атмосферы, с получением на выходе системы разностного сигнала, пропорционального радиотепловой мощности излучения атмосферы, соответствующей угловой области главного лепестка диаграммы направленности (ДН) антенны [19, 20]. Была разработана схема радиометрической СВЧ-системы, реализующая такой подход к задаче компенсации влияния фонового излучения (рис. 1) [18, 20].

Следующий этап в развитии направления разработки радиометрических СВЧ-систем с компенсацией фоновых излучений связан с переходом к использованию двухмодового режима работы облучателя антенны — мод H_{11} и E_{01} круглого волновода с их разделением в модовом разделителе [25]. Сформированные ДН на этих модах отвечают требованиям к основному и дополнительному антенным каналам радиометрической СВЧ-системы с компенсацией фоновых излучений. На рис. 2а, 2б показаны расчетная и экспериментальная характеристики направленности облучателя зеркальной антенны для диапазона частот 3.2 см (диаметр раскрыва рупора 10.5 см, диаметр питающего волновода 3.2 см). Для получения экспериментальной характеристики антенны в качестве источника сиг-

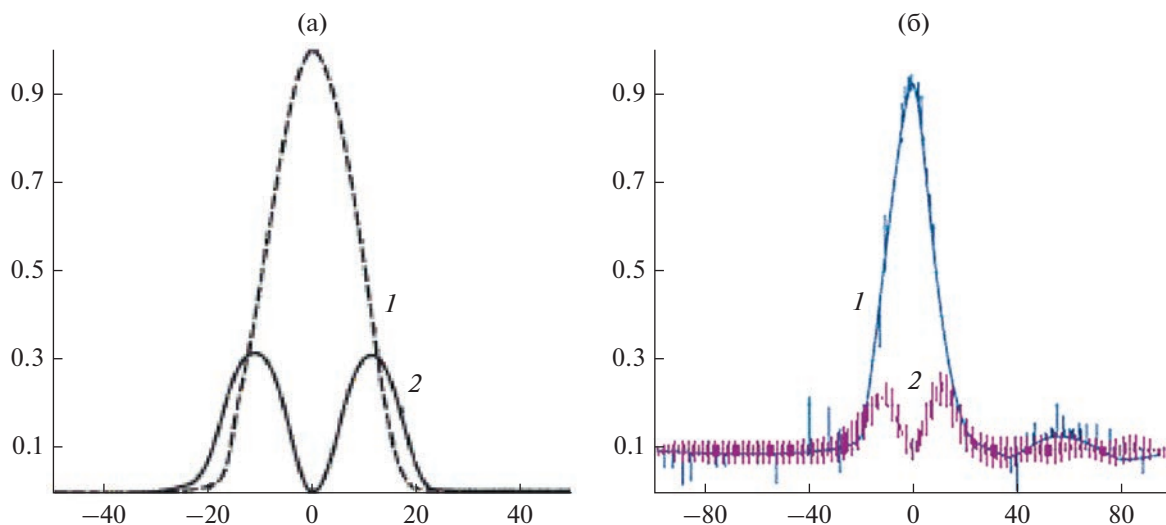


Рис. 2. Расчетная (а) и экспериментальная (б) характеристики направленности облучателя зеркальной антенны на модах H_{11} (1) и E_{01} (2).

нала применен полупроводниковый генератор шума производства НПП “Исток” М31305-1.

На основе разработанного способа снижения уровня шума антенны и двухмодовой апертурной антенны была разработана конструкция модового разделителя, который представляет собой часть общего фидера облучателя антенны, выполненный на круглом волноводе. Он обеспечивает направленное селективное ответвление сигнала основного измерительного и дополнительного антенных каналов путем введения режекторного фильтра для основной моды H_{11} соответствующего подключения волноводных линий [19, 25].

Экспериментальная проверка данного способа подтвердила правильность технических и методических решений и позволила перейти к многочастотным поляризационным измерениям с последовательным частотным разделением сигналов в модовом разделителе. Был разработан трехсекционный модовый разделитель для трехдиапазонной радиометрической СВЧ-системы, с приемом сигнала в диапазонах частот с центральными частотами 3.5, 11 и 22 ГГц. Конструкция модового разделителя позволила обеспечить последовательное выделение сигналов соответствующих частотных диапазонов для двух основных измерительных каналов с вертикальной и горизонтальной поляризациями и дополнительного канала, а также формирования сигнала компенсации, при выполнении измерений по одному осевому направлению [25]. На рис. 3 представлены схема и конструкция трехдиапазонного модового разделителя радиометрической СВЧ-системы с компенсацией фонового излучения.

Переход к многочастотному зондированию атмосферы повышает информативность измерений,

что обусловлено частотной зависимостью как мощности собственного радиотеплового излучения атмосферы, так и ослабления проходящего излучения. Это важно для решения задачи оперативного выявления опасных атмосферных явлений по результатам сравнительного анализа данных измерений в разных частотных диапазонах. Выполнение измерений при разных зенитных углах расширяет возможности их дистанционного структурного анализа.

На рис. 4 приведена схема трехдиапазонной радиометрической СВЧ-системы с формированием в каждом канале дополнительного сигнала компенсации [26].

Трехдиапазонная радиометрическая СВЧ-система с компенсацией фоновых шумов реализована в двух вариантах: мобильном (для полевых исследований) и стационарном (с антенной на здании Муромского института). Внешний вид систем представлен на рис. 5.

Для решения задач регистрации и сбора данных, а также получения разностных сигналов при выполнении компенсации влияния фонового излучения в системе реализовано цифровое преобразование выходных сигналов с формированием массивов данных измерений по всем каналам в отдельности. Для этого в системе предусмотрено использование аналого-цифрового преобразователя (АЦП) с подключением к персональному компьютеру и разработан функционально законченный интерфейс [27].

Пример записи выходных сигналов системы приведен на рис. 6. В данном случае на экран компьютера одновременно выведены временные записи выходных сигналов трех диапазонов радиометрической СВЧ-системы. Такой режим визуализации

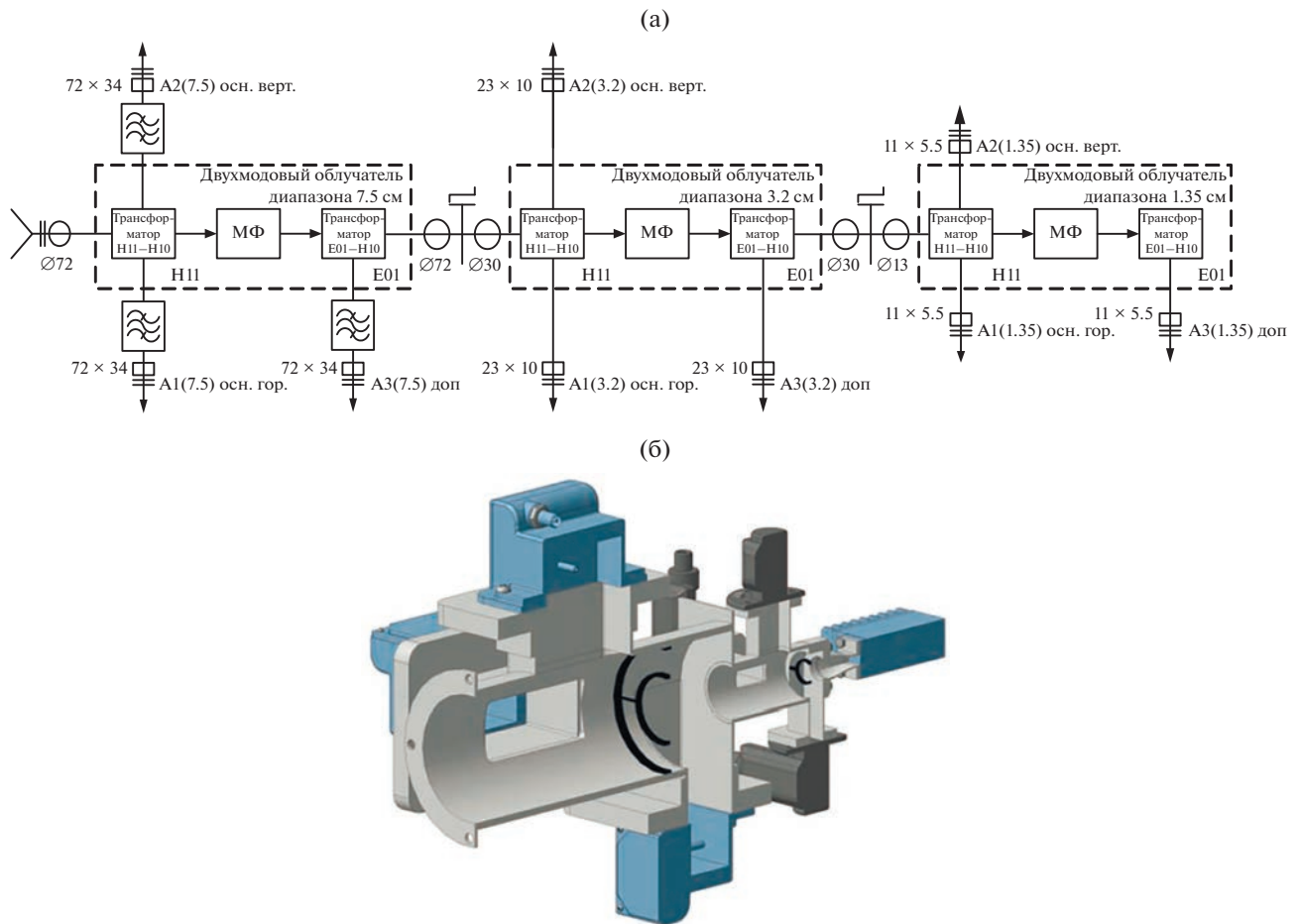


Рис. 3. Модульный разделитель: схема (а) и конструкция (б); А1...А3 — антенные каналы (основной и дополнительный, с вертикальной и горизонтальной поляризацией, при $\lambda = 7.5, 3.2$ и 1.35 см); МФ — модовый фильтр.

зации позволяет качественно оценить зависимость уровня мощности собственного излучения атмосферы при различных метеоусловиях в зависимости от частоты.

Введение цифровых методов регистрации и обработки сигналов позволило решить следующие задачи:

- формирование архива результатов радиометрических СВЧ-измерений атмосферы с параллельным формированием массива данных метеопараметров атмосферы приземного слоя;
- получение результатов разностных измерений при выполнении компенсации влияния фоновых излучений;
- выполнение корреляционного анализа результатов многочастотных радиометрических СВЧ-измерений и метеоданных приземного слоя атмосферы в области выполнения измерений;
- решение задач повышения чувствительности системы при реализации адаптивного накопления сигнала.

2. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

В течение 2019–2022 годов проводились измерения микроволнового излучения атмосферы с помощью рассмотренной радиометрической СВЧ-системы при больших зенитных углах визирования. Были получены и сохранены суточные временные записи выходных сигналов системы. Отобраны массивы данных, соответствующие дням с выпадением осадков и выполнен корреляционный анализ результатов измерений и метеопараметров приземного слоя атмосферы [28]. Полученные данные показали достаточно сильную корреляционную зависимость величины выходного сигнала с метеопараметрами приземного слоя атмосферы в пределах 200-километровой зоны вокруг линии визирования. В табл. 1 приведены значения коэффициентов корреляции выходных сигналов системы и значений метеопараметров приземного слоя атмосферы для ближайшего и наиболее удаленного города из рассмотренных от места базирования СВЧ радиометрического из-

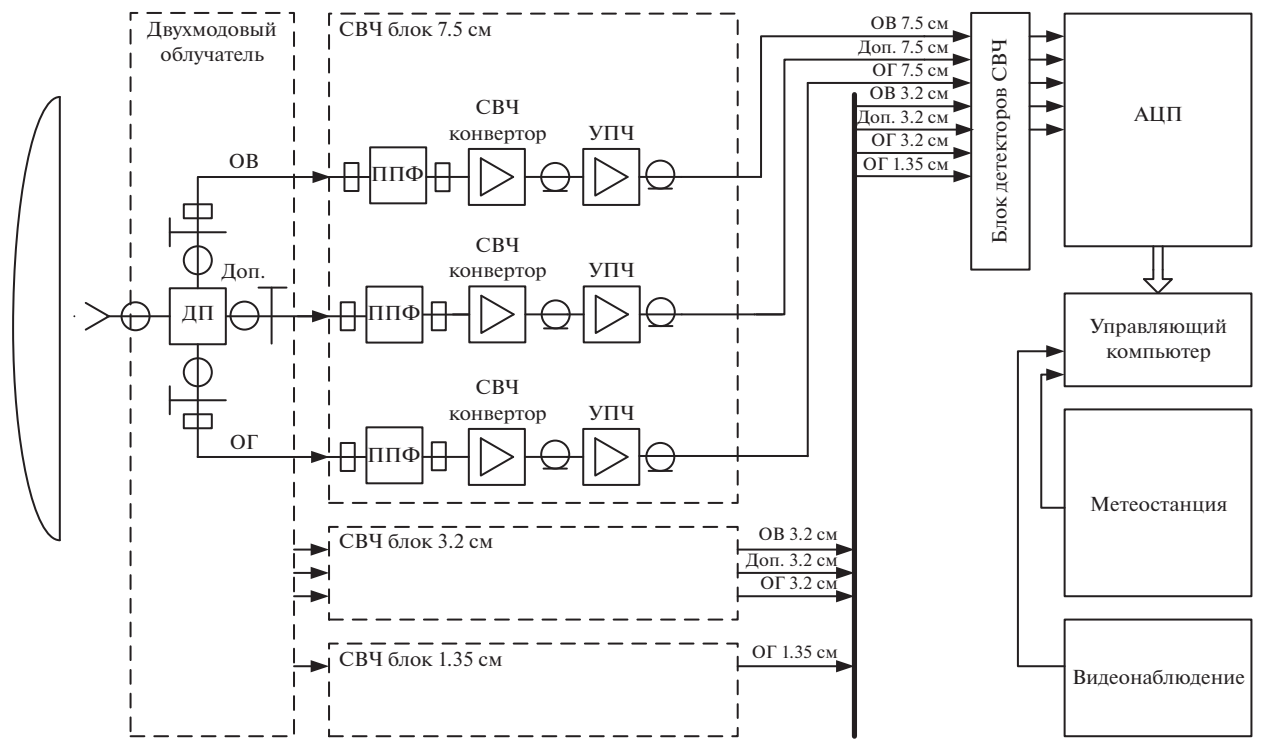


Рис. 4. Структурная схема трехдиапазонной радиометрической СВЧ-системы; ДО – двухмодовый облучатель; ППФ – волноводный полосно-пропускающий фильтр; УПЧ – усилитель промежуточной частоты; КД – многоканальный квадратичный детектор; АЦП – аналогово-цифровой преобразователь; ПК – персональный компьютер для сбора, хранения и обработки данных, ОГ и ОВ – сигнал основного измерительного канала горизонтальной и вертикальной поляризации; доп – сигнал дополнительного измерительного канала.

мерительного комплекса – Муром и Рязани – для двух вариантов формирования выходных сигналов: без компенсации и с компенсацией фоновых шумов. Результаты показали в основном рост величины коэффициента корреляции при выполнении компенсации фоновых шумов.

Цифровой способ формирования выходных сигналов позволил реализовать обработку результатов измерений с различным временем накопления сигнала для решения задачи повышения чувствительности системы. Были выполнены расчеты с изменением времени накопления. На рис. 7

Таблица 1. Коэффициенты корреляции выходных сигналов трехдиапазонной радиометрической СВЧ-системы и значений метеопараметров приземного слоя атмосферы

λ , см / поляризация		Муром			Рязань		
		T , °C	B , %	I , мм/ч	T , °C	B , %	I , мм/ч
Без компенсации фоновых шумов							
7.5	г	0.276	0.579	0.667	0.254	−0.386	0.128
	в	−0.729	−0.094	−0.575	−0.723	0.763	−0.131
3.2	г	−0.789	0.340	−0.346	−0.717	0.631	0.300
	в	−0.803	0.321	−0.370	−0.731	0.650	0.270
1.35	г	0.035	−0.439	−0.211	0.090	0.09	−0.217
С компенсацией фоновых шумов							
7.5	г	0.430	0.316	0.945	0.647	−0.773	0.248
	в	0.525	0.326	0.923	0.679	−0.808	0.313
3.2	г	−0.770	0.33	−0.234	−0.686	0.601	0.259
	в	−0.777	0.299	−0.289	−0.639	0.610	0.196

Примечание: г – горизонтальная поляризация, в – вертикальная; В – влажность, И – интенсивность дождя.

(a)



(б)

(в)



Рис. 5. Трехдиапазонная радиометрическая СВЧ-система; (а) мобильный вариант: 1 – антенная колонка; 2 – антенна; 3 – радиометрическая система; 4 – поворотное устройство; 5 – метеостанция; 6 – элементы блоков управления и обработки информации; 7 – электрогенератор; (б) стационарный вариант: 1 – прямофокусное зеркало диаметром 2400 мм; 2 – многоканальный двухмодовый облучатель со снятой метеозащитой; 3 – многочастотный волноводный микроволновый калибратор; 4 – угломестный привод; 5 – азимутальный привод; (в) антенна в увеличенном масштабе: канал 7.5 см вертикальной (1) и горизонтальной поляризации (1') и дополнительный (1''); канал 3.2 см вертикальной (2) и горизонтальной поляризации (2') и дополнительный (2''); канал 1.35 см горизонтальной поляризации (3).

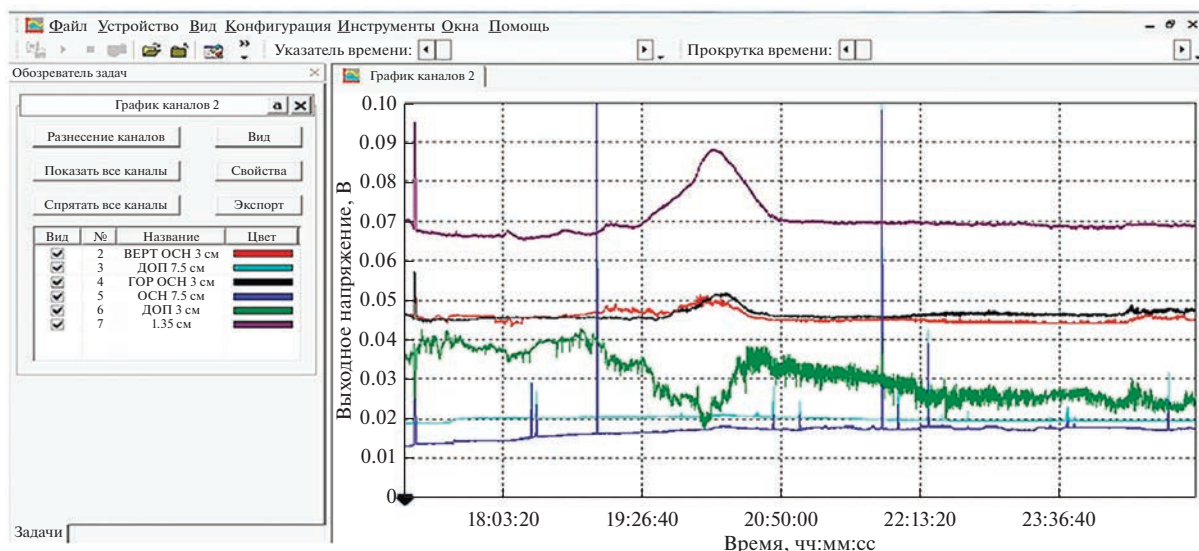


Рис. 6. Интерфейс системы сбора и регистрации данных измерений трехдиапазонной радиометрической СВЧ-системы (скриншот).

показаны временные зависимости выходных сигналов трех диапазонов для времени накопления 0.1 и 20 с [29].

Анализ полученных результатов показал, что для канала с частотой 22 ГГц увеличение времени накопления до 20 с оказалось предельным с позиции отслеживания временных изменений сигнала, так как в определенные моменты небольшие изменения выходного сигнала слабо проявляются, что может привести к занижению отклика системы на изменение состояния атмосферы, фиксируемое в данном диапазоне. При дальнейшем увеличении τ эффекты усреднения приводят к пропуску большего количества таких резких переходов в сигнале, что в конечном итоге может привести к неправильной оценке метеорологической ситуации в условиях быстроразвивающихся атмосферных процессов.

Таким образом, была показана принципиальная возможность повышения чувствительности радиометрических СВЧ-измерений при увеличении времени накопления выходных сигналов при введении ограничений, обусловленных скоростью изменения выходного сигнала при наличии в зондируемой области быстроразвивающихся атмосферных процессов. Выполнение данной процедуры — изменения времени накопления сигнала при выявлении образования опасного атмосферного явления в исследуемой области атмосферы должно быть регулируемым системой при оценке скорости изменения выходных сигналов при введении интеллектуальной системы управления системы, например, включения нейронной сети в состав системы.

3. ЗАДАЧИ И НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ МИКРОВОЛНОВЫХ РАДИОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ АТМОСФЕРЫ В МУРОМСКОМ ИНСТИТУТЕ

Работы в рамках проекта Российского научного фонда позволили провести материально-техническую и методическую модернизацию комплекса, обеспечивающую решение задач повышения точности, чувствительности, информативности измерений, а также реализации непрерывного режима измерений с формированием базы результатов.

Выполненные исследования позволили определить следующие основные направления развития микроволновой радиометрии в научно-исследовательской лаборатории Муромского института:

- непрерывное зондирование атмосферы при больших зенитных углах с формированием архива результатов измерений для решения задачи оперативной оценки пространственно-структурной однородности атмосферы;

- микроволновое исследование фронтальных атмосферных процессов с формированием информационно-базы и развитием системы оценки состояния атмосферы на основе введения нейронной сети.

При решении задачи снижения потерь входных сигналов в радиометрической СВЧ-системе рассмотрено постепенное введение в ее состав устройств радиофотоники [30]. На данном этапе дана оценка снижения потерь сигнала в фидере при замене коаксиальной линии передачи оптическим каналом с оптоэлектронными преобразователями. Были выполнены измерения (рис. 8), кото-

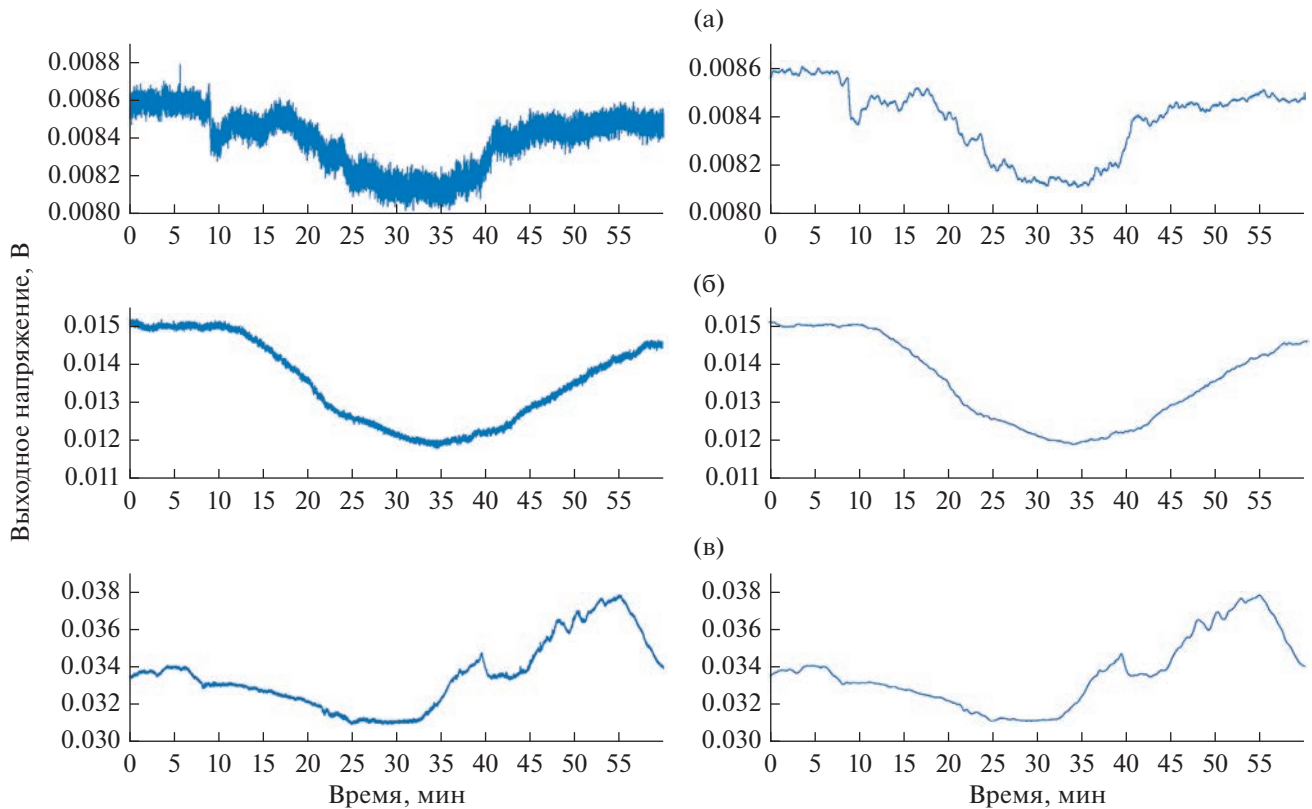


Рис. 7. Временная зависимость выходных сигналов радиометрической СВЧ-системы на частотах 3.5 (а), 10 (б) и 22 ГГц (в) при $\tau = 0.1$ с (слева) и 20 с (справа).

рые показали, что при длине фидера 30 м выигрыш по потерям передачи в оптическом канале по сравнению с радиочастотным трактом равен 10 дБ.

Таким образом, задачи микроволновых радиометрических исследований атмосферы в научно-исследовательской лаборатории Муромского института состоят в следующем:

- включение радиофотоники в состав системы на уровне формирования и обработки выходных сигналов;

- введение в состав системы нейронной сети с решением задач интеллектуального управления временем накопления выходного сигнала, оперативной оценки наличия условий формирования опасных атмосферных явлений в исследуемой области атмосферы, формирования прогнозов развития структурных изменений в атмосфере.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Направление микроволновых радиометрических исследований атмосферы в Муромском институте имеет исторические и методологические основы, базирующиеся на долговременном опыте проектных разработок и натурных измерений.

Современный этап развития направления микроволновых исследований характеризуется реализацией современных принципов приема и обработки сигналов и оригинальных подходов к усовершенствованию радиометрических СВЧ-систем, обусловленных принципом их функционирования – приема широкополосного шумового сигнала с необходимостью реализации его пространственной селекции.

Реализация в многодиапазонной радиометрической СВЧ-системе компенсации влияния фоновых шумов позволила перейти к наклонному зондированию приземного слоя атмосферы при больших углах визирования и решить аппаратные задачи дистанционного зондирования при прогнозировании опасных атмосферных явлений.

Цифровая обработка выходных сигналов радиометрической СВЧ-системы расширила возможности как повышения чувствительности системы, так и расширения вариативности алгоритмов оценки результатов измерений для решения задач прогнозирования при встраивании нейронной сети в состав системы.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

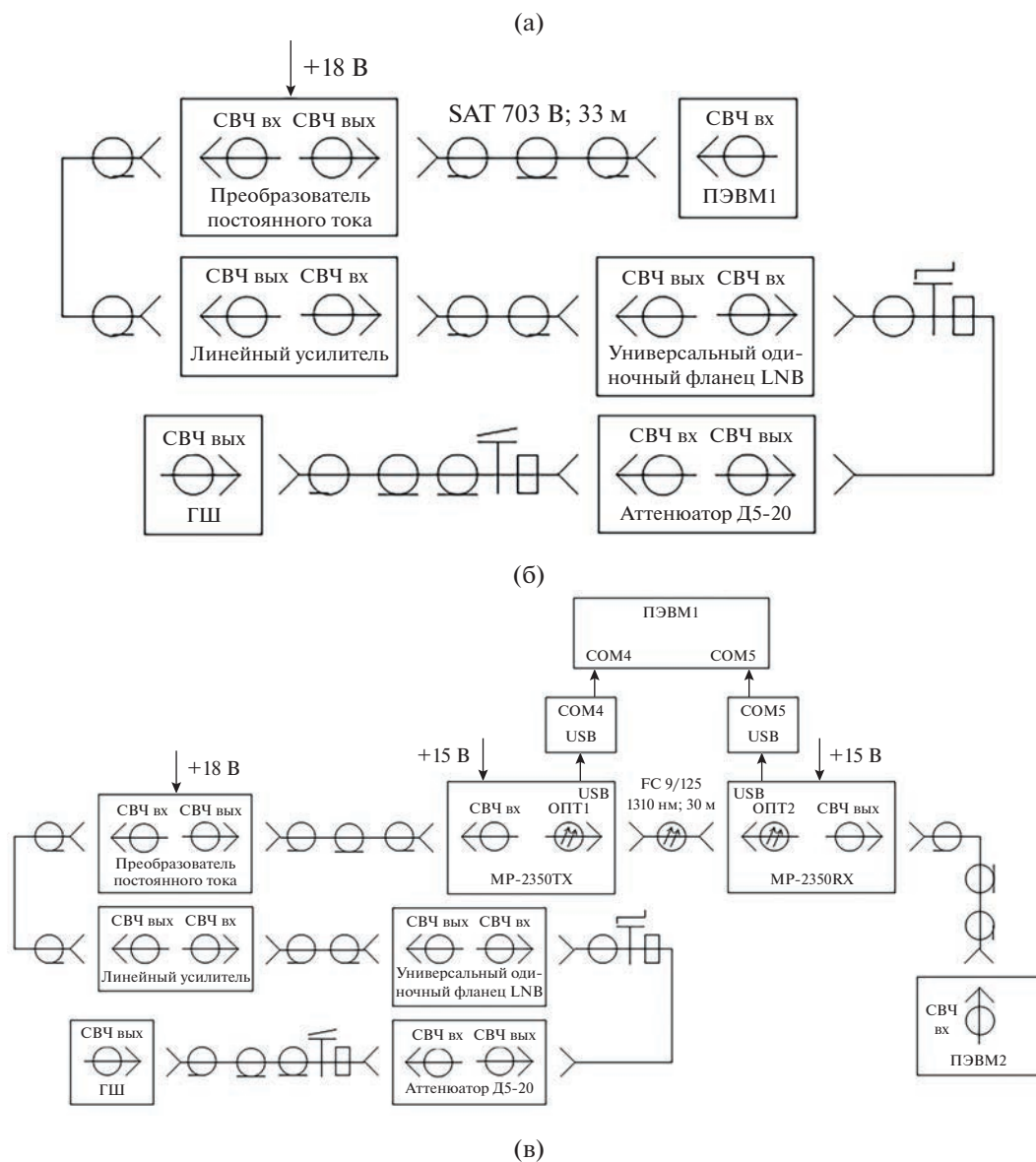


Рис. 8. Структурная схема лабораторного стенда измерения потерь в радиочастотном (а) и радиофотонном тракте (б) промежуточной частоты и внешний вид лабораторного стенда (в).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-19-00378).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степаненко В.Д., Шукин Г.Г., Бобылев Л.П., Матросов С.Ю. Радиотеплокация в метеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1987.
2. Кутуза Б.Г., Яковлев О.И., Данилычев М.В. Спутниковый мониторинг Земли: Микроволновая радиометрия атмосферы и поверхности. Монография. М.: Ленанд, 2016.
3. Кадыров Е.Н. Микроволновая радиометрия термической стратификации атмосферы. М., 2020.
4. Cimini D., Nelson M., Guldner J., Ware R. // Atmos. Meas. Tech. 2015. V. 8. P. 315.
5. Westwater E.R., Crewell S., Matzler C. // IEEE Geos. Rem. Sens. Soc. Newsletter. 2005. P. 16.
6. Шукин Г.Г., Булкин В.В., Федосеева Е.В., Ростокин И.Н. // Радиотехн. и телекоммуникац. системы. 2022. № 4. С. 5.
7. Фалин В.В. Радиометрические системы СВЧ. М.: Луч, 1997.
8. Фалин В.В., Костров В.В., Николаев В.А., Гинеотис С.П. // Тез. докл. XIV Всесоюз. конф. по распространению радиоволн. Ленинград, 1984. М.: Наука, 1984. С. 24.
9. Шукин Г.Г., Булкин В.В. // РЭ. 2011. Т. 56. № 5. С. 549.
10. Гинеотис С.П., Фалин В.В., Костров В.В. и др. // Тр. VII Всесоюз. совещ. Радиометеорология. Л.: Гидрометеиздат, 1989. С. 122.
11. Фалин В.В., Первушин Р.В., Шукин Г.Г. и др. // Труды ГГО. 1991. Вып. 535. С. 61.
12. Федосеева Е.В., Шукин Г.Г. Вопросы метрологического обеспечения радиотеплокационных измерений в условиях действия внешних шумовых помех. Муром: ИИПЦ МИ ВлГУ, 2012.
13. Булкин В.В., Шукин Г.Г., Федосеева Е.В., Ростокин И.Н. // Матер. Всерос. откр. науч. конф. "Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн". Муром: МИ ВлГУ, 2022. С. 7. <https://doi.org/10.24412/2304-0297-2022-1-7-20>
14. Шукин Г.Г., Булкин В.В., Федосеева Е.В., Ростокин И.Н. // Радиотехн. и телекоммуникац. системы. 2022. № 2. С. 5. <https://doi.org/10.24412/2221-2574-2022-2-5-19>
15. Шукин Г.Г., Булкин В.В., Федосеева Е.В., Ростокин И.Н. // Радиотехн. и телекоммуникац. системы. 2022. № 3. С. 5. <https://doi.org/10.24412/2221-2574-2022-2-5-19>
16. Булкин В.В. // Радиотехн. и телекоммуникац. системы. 2014. № 1. С. 73.
17. Ростокин И.Н., Федосеева Е.В., Федосеев А.А. // Радиотехн. и телекоммуникац. системы. 2015. № 1. С. 5.
18. Федосеева Е.В., Ростокин И.Н. // Труды ГГО. 2010. Вып. 562. С. 243.
19. Федосеева Е.В., Ростокина Е.А., Ростокин И.Н. Способ снижения уровня шума антенны и двухмодовая апертурная антенна // Пат. РФ на изобр. № 2300831. Оpubл. офиц. бюл. "Изобретения. Полезные модели" № 16 от 10.06.2007.
20. Федосеева Е.В. Радиометрическая система с компенсацией аддитивных внешних фоновых помех // Патент на полезную модель № 91630. Оpubл. офиц. бюл. "Изобретения. Полезные модели" № 5 от 20.02.2010.
21. Ростокин И.Н., Федосеева Е.В., Шукин Г.Г., Ростокина Е.А. // Радиотехн. и телекоммуникац. системы. 2017. № 1. С. 3.
22. Ростокин И.Н., Федосеева Е.В., Ростокина Е.А., Шукин Г.Г. // Тр. Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. Вып. 680. СПб., 2022. С. 291.
23. Каряев В.В., Ростокин И.Н., Федосеева Е.В., Ростокина Е.А. // Радиотехн. и телекоммуникац. системы. 2020. № 4. С. 5.
24. Федосеева Е.В., Шукин Г.Г. // Научный вестник МГТУ ГА. Вып. 186. С. 58.
25. Ростокин И.Н., Федосеева Е.В., Ростокина Е.А. // Вестн. Концерна ВКО "Алмаз-Антей". 2017. № 1. С. 60.
26. Ростокин И.Н., Федосеева Е.В. // Радиотехн. и телекоммуникац. системы. 2015. № 1. С. 2.
27. Ростокин И.Н., Федосеева Е.В., Шукин Г.Г., Ростокина Е.А. // Радиотехн. и телекоммуникац. системы. 2017. № 1. С. 3.
28. Федосеева Е.В., Ростокин И.Н., Шукин Г.Г. // Метеорология и гидрология. 2022. № 12. С. 78.
29. Rostokin I.N., Fedoseeva E.V., Shchukin G.G., Kholodov I.Y. Physics of the Atmosphere, Climatology and Environmental Monitoring / Eds. by Zakinyan A., Zakinyan R. Cham: Springer, 2023. P. 141.
30. Rostokin I.N., Fedoseeva E.V., Rostokina E.A., Shchukin G.G. // J. Phys.: Conf. Ser. 2022. V. 2388. № 1. P. 012087.

К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

УДК 621.391.01

ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИЕМА
ЧАСТОТНО-ЭФФЕКТИВНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ
ПО РАДИОЛИНИИ С ТУМАНOM

© 2023 г. Л. Е. Назаров^{a, b, *}, Б. Г. Кутуза^c, В. В. Батанов^b

^a Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

^b АО «Информационные спутниковые системы» им. академика М.Ф. Решетнёва,
ул. Ленина, 52, Железнодорожный Московской области, 140410 Российская Федерация

^c Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: levnaz2018@mail.ru

Поступила в редакцию 01.03.2022 г.

После доработки 01.03.2022 г.

Принята к публикации 23.01.2023 г.

Рассмотрена модель радиолинии с туманом, применяемая для представления искажений комплексных огибающих цифровых сигналов за счет поглощающих и дисперсионных свойств среды распространения. Показано, что при увеличении частотной полосы цифровых сигналов и при увеличении их порядка манипуляции (при использовании частотно-эффективных сигналов) влияние данных искажений приводит к энергетическим потерям по отношению к распространению в свободном пространстве. Произведено количественное оценивание энергетических потерь для используемых в приложениях цифровых сигналов с многопозиционной фазовой, квадратурно-амплитудной и амплитудно-фазовой манипуляциями и для радиолинии с туманом с вариацией ее параметров. Показано, что для сигналов с многопозиционной фазовой и с амплитудно-фазовой манипуляциями (коэффициент частотной эффективности сигналов 4 бит/с/Гц) энергетические потери достигают 3.5 и 1.0 дБ соответственно.

DOI: 10.31857/S0033849423060104, EDN: XMXFLH

ВВЕДЕНИЕ

Модели распространения сигналов по радиолиниям с учетом свойств природных сред (ионосфера, тропосфера и др.) используются при оценке энергетических бюджетов для беспроводных наземных и спутниковых информационных систем, для систем дистанционного зондирования Земли, для радиолокационных и навигационных систем [1–6].

Самостоятельное научное направление с использованием этих моделей составляют задачи исследования искажений цифровых частотно-эффективных сигналов при распространении по радиолиниям с метеорологическими образованиями (дождь, облака, снег, иней и т.п.) за счет поглощающих и дисперсионных свойств сред [4, 7–10].

Рассмотрена частная модель дисперсионной и поглощающей радиолинии с туманом [10–12]. Модель данной радиолинии учитывает рассеяние и ослабление сигналов, определяемые рядом параметров, в частности, центральной частотой [9]. При разработке и развитии модели использовано представление среды распространения с туманом

в виде квазиоднородной дисперсионной среды с эффективной комплексной диэлектрической проницаемостью. Этот подход позволяет оценить ослабление узкополосных сигналов при распространении в зависимости от центральной частоты, в этом случае искажения их комплексных огибающих полагаются незначительными [9].

Актуальной является задача количественного оценивания рассматриваемых искажений при увеличении частотной эффективности цифровых сигналов (при увеличении частотной полосы в сочетании с повышением порядка манипуляции [7]) путем вычисления вероятностных характеристик при приеме (вероятности ошибки на бит P_0 , на сигнальный символ $P_{\text{ош}}$) и сравнения с вероятностными характеристиками приема при распространении в свободном пространстве.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Распространение плоской волны с частотой f по оси z для модели радиолинии с туманом в виде квазиоднородной дисперсионной среды задается

решением волнового уравнения для комплексной амплитуды электрического поля $\dot{E}(z, f)$ [8, 13, 14]

$$\frac{d^2 \dot{E}(z, f)}{dz^2} + \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 \dot{\epsilon}(f) \dot{E}(z, f) = 0. \quad (1)$$

Здесь $\dot{\epsilon}(f)$ — эффективная относительная диэлектрическая проницаемость среды; c — скорость света в свободном пространстве.

Решение волнового уравнения (1) имеет вид [13, 14]

$$\dot{E}(z, f) = \dot{E}(0, f) \exp\left(-j \frac{2\pi f}{c} \dot{n}(f) z\right). \quad (2)$$

Здесь $\dot{n}(f) = \sqrt{\dot{\epsilon}(f)}$ — коэффициент преломления среды.

Мнимая часть $\text{Im}(\dot{n}(f))$ определяет ослабление сигналов, реальная часть $\text{Re}(\dot{n}(f))$ определяет дисперсионные свойства среды — зависимость фазовой скорости от частоты f [14, 15].

Для цифровых сигналов $s(t)$ в виде временной последовательности импульсов $s_i(t)$ с манипуляционным сигнальным “созвездием” задача усложняется [16]. В этом случае сигналы $s(t)$ представляются суммой монохроматических составляющих, которые при распространении приобретают парциальные фазовые и амплитудные смещения за счет дисперсионных и поглощающих свойств среды [13, 17]. Результирующее действие радиолонии с туманом обуславливает искажение комплексных огибающих цифровых сигналов, что порождает возникновение интерференционных межсимвольных и межканальных помех в дополнение к канальным тепловым шумам [10].

Интерференционные помехи представляют случайный процесс (в общем случае нестационарный), его статистические характеристики зависят от характеристик среды (водное содержание, температура). Для класса частотно-эффективных сигналов эти помехи могут привести к существенному снижению надежности передачи информации по рассматриваемым радиолониям.

Искаженные сигналы $\hat{s}(t)$ при распространении по радиолонии с туманом представляются как результат линейной фильтрации сигналов $s(t)$ [5, 10]

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) \dot{H}(z, f) \exp(j2\pi f t) df. \quad (3)$$

Здесь $\dot{S}(f)$ — спектр сигнала $s(t)$; $\dot{H}(f, z) = \exp(j2\pi f \tau(z, f))$ — коэффициент передачи радиолонии с туманом как линейного фильтра; $\tau(z, f)$ — время распространения гармонического сигнала с частотой f .

Цель работы — дать описание модели радиолонии с туманом и искажений цифровых сигналов с использованием этой модели, вычислить оценки энергетических потерь приема используемых в приложениях частотно-эффективных сигналов при распространении по рассматриваемым радиолониям по отношению к распространению в свободном пространстве

2. ЧАСТОТНО-ЭФФЕКТИВНЫЕ СИГНАЛЫ

Увеличение информационной скорости R передачи информации при ограниченной частотной полосе ΔF радиолонии обеспечивается использованием частотно-эффективных цифровых сигналов с двумерными “созвездиями” объемом $M = 2^k$, характеризуемые коэффициентом частотной эффективности $\eta = R/\Delta F = \log_2 M$ бит/с/Гц [16, 18]. В этот класс входят цифровые сигналы с многофазовой, квадратурно-амплитудной и с амплитудно-фазовой манипуляциями (ФМ-М-, КАМ-М- и АФМ-М-сигналы), интенсивно используемые в приложениях [7, 18, 19].

Рассматриваемые цифровые сигналы $s(t)$ задаются соотношением [18]

$$s(t) = \sum_i A_i U(t) \cos(2\pi f t + \varphi_i). \quad (4)$$

Здесь f — центральная частота; $U(t) = 1$ при $iT < t \leq (i+1)T$ и $U(t) = 0$ в противном случае; A_i , φ_i — амплитуда и фаза радиоимпульсов, задаваемые последовательностью информационных символов и представляющие “созвездия” цифровых сигналов; T — тактовые временные интервалы радиоимпульсов.

Сигналы ФМ-М, КАМ-М и АФМ-М формируются путем отображения k двоичных информационных символов в соответствующие символы “созвездия” с объемом M на тактовых интервалах. Соответствующие отображения, как правило, выполняются с использованием правила Грея с целью повышения помехоустойчивости приема — соседние символы “созвездия” отличаются лишь в одном из информационных символов [16].

Примеры “созвездий” для сигналов ФМ-16, АФМ-16 и КАМ-16 ($\eta = 4$ бит/с/Гц) представлены на рис. 1 — приведены законы отображения четырех информационных двоичных символов $\alpha_p(b_i)$ ($p = 0, 1, 2, 3$; $0 \leq i \leq 15$) в соответствующие фазы φ_i и амплитуды A_i [7, 19].

В табл. 1 приведен класс анализируемых в работе цифровых сигналов в составе протоколов спутниковых информационных систем DVB-S2, 3GPP [7, 19].

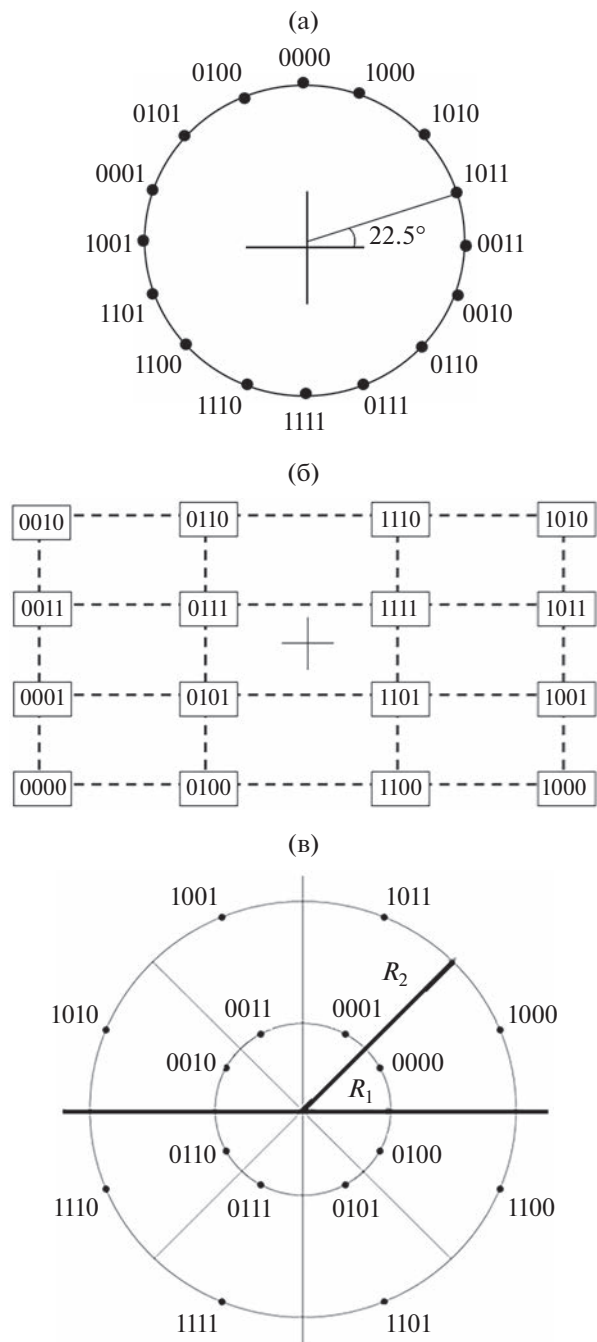


Рис. 1. Сигнальные “созвездия”: ФМ-16 (а), КАМ-16 (б) и АФМ-16 (в).

Для ФМ-М и КАМ-М-сигналов известны аналитические соотношения для вычисления вероятностей ошибки P_6 и $P_{\text{ош}}$, для АФМ-М-сигналов оценивание вероятностных характеристик выполняется моделированием алгоритмов приема.

Вероятность ошибки P_6 при приеме ФМ-М-сигналов для канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) с односторонней спек-

тральной плотностью N_0 определяется соотношением [16, 18]

$$P_6 = \frac{1}{\log_2 M} \left(1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p(\theta) d\theta \right). \quad (5)$$

Здесь $p(\theta)$ – плотность распределения фазы

$$p(\theta) = 1 - \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{kE_6}{N_0} \sin^2(\theta)\right) \times \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{\frac{2kE_6}{N_0} \cos(\theta)}\right)^2\right) dx, \quad (6)$$

E_6 – энергия сигналов на информационный бит.

Вероятность ошибки P_6 при приеме КАМ-М-сигналов с объемом $M = 2^k$ (k – четное) определяется соотношением [18]

$$P_6 = \frac{1 - (1 - P)^2}{\log_2 M}. \quad (7)$$

Здесь

$$P = \frac{2(L-1)}{L} Q\left(\sqrt{\frac{3}{L^2-1} \frac{E_{\text{ср}}}{N_0}}\right);$$

$L = 2^{k/2}$; $E_{\text{ср}} = kE_{6,\text{ср}}$, $E_{6,\text{ср}}$ – средняя энергия сигналов на бит;

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-y^2/2) dy.$$

Нормированные отсчеты $\dot{y}_i$ с выхода демодулятора рассматриваемых сигналов для квадратурных составляющих $\text{Re}(\dot{y}_i)$, $\text{Im}(\dot{y}_i)$ и канала АБГШ представляют случайные величины с средними

$$\sqrt{\frac{2kr_i E_{6,\text{ср}}}{N_0}} \cos(\varphi_i), \quad \sqrt{\frac{2kr_i E_{6,\text{ср}}}{N_0}} \sin(\varphi_i)$$

и с единичной дисперсией. Здесь r_i ($i = 0, 1, \dots, M-1$), $E_{6,\text{ср}}$ – параметры, определяемые видом “созвездия”: для ФМ-М-сигналов выполняются условия $r_i = 1$ и $E_{6,\text{ср}} = E_6$. Для КАМ-М- и АФМ-М-сигналов значения r_i определяются расстояниями Евклида символов “созвездия” до начала координат.

Соответствующие апостериорные вероятности $p(\dot{y}|b_i)$ задаются соотношением [18]

$$p(\dot{y}|b_i) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}((\text{Re}(\dot{y}_i) - A_i \cos(\varphi_i))^2 + (\text{Im}(\dot{y}_i) - A_i \sin(\varphi_i))^2)\right), \quad (8)$$

где

$$A_i = \sqrt{2kr_i E_{6,\text{ср}}/N_0}.$$

Таблица 1. Параметры цифровых частотно-эффективных сигналов

Сигналы	η , бит/с/Гц	ΔE , дБ			
		$\theta = 90^\circ$		$\theta = 30^\circ$	
		$q = 0.2$ г/м ³	$q = 0.05$ г/м ³	$q = 0.2$ г/м ³	$q = 0.05$ г/м ³
ФМ-4	2	<0.2	<0.2	<0.2	<0.2
ФМ-8	3	0.75	0.5	1.75	0.75
АФМ-8	3	0.25	<0.2	0.75	0.50
ФМ-16	4	2.0	0.50	3.50	1.50
КАМ-16	4	0.5	0.25	2.0	0.5
АФМ-16	4	0.25	<0.2	1.0	0.5

Алгоритм приема, реализующий правило максимального правдоподобия и минимизирующий вероятность ошибки P_0 , заключается в вычислении апостериорных вероятностей для сигнальных символов $\Pr(b_i = \beta | y)$ ($\beta = 0, 1, \dots, M - 1$) и в принятии решения относительно переданного символа $\hat{b}_i$ с использованием соотношения $\hat{b}_i = \max_{\beta} \Pr(b_i = \beta | y)$ [18, 20].

3. МОДЕЛЬ РАДИОЛИНИИ С ТУМАНОМ

Модель распространения сигналов по радиолинии с туманом приведена в ряде работ [9, 10, 12, 21]. Ниже дано ее общее описание.

Туман состоит из сферических капель воды, приближением распределения капель по размерам R является гамма-распределение [9, 21]

$$n(R) = \frac{\mu^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1) R_m^{\mu+1}} \exp\left(-\frac{\mu R}{R_m}\right), \quad (9)$$

где μ — параметр; R_m — наиболее вероятный размер (радиус) капель; $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция.

При расчетах были использованы значения $\mu = 4$, $R_m = 4$ мкм [21]. Результаты вычислений для этих параметров показывают, что вероятность капель с размером $R > 20$ мкм в составе среды не превышает 0.00002, т.е. можно принять размер капель не более нескольких десятков микрометров.

Параметром тумана является его водность q (г/м³), связанная с дальностью видимости S [11]. Для среднего тумана $q = 0.05$ г/м³ и $S \approx 300$ м, для сильного тумана $q \geq 0.2$ г/м³ и S не превышает 50...200 м. Высота туманов достигает 50...500 м, по высоте туманы достаточно однородны относительно водности q .

Средний объем капель

$$V = \int_0^\infty \frac{4\pi}{3} R^3 n(R) dR = \frac{4\pi(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{3\mu^3} (R_m)^3,$$

среднее количество капель N в кубическом метре равно $N = q/(\rho V)$ (ρ — плотность воды). Для приведенных выше параметров среды были вычислены значения $N = 0.55 \times 10^8$ м⁻³ и $N = 2.25 \times 10^8$ м⁻³ для $q = 0.05$ и 0.2 г/м³.

Модель рассматриваемой радиолинии представляет туман (смесь водных капель в виде сфер и воздуха) диэлектрической средой. Водная сфера с радиусом R имеет эквивалентный электрический момент $\vec{p}$ в электрическом поле $\vec{E}$ в квазистатическом приближении Рэлея при условии $R \ll \lambda$ (λ — длина волны) для решения Ми в виде бесконечного ряда [15, 22]

$$\vec{p} = 4\pi R^3 \frac{\dot{\epsilon}_w - \epsilon_0}{\dot{\epsilon}_w + 2\epsilon_0} \epsilon_0 \vec{E}. \quad (10)$$

Здесь $\dot{\epsilon}_w, \epsilon_0$ — коэффициенты диэлектрической проницаемости воды и свободного пространства.

Коэффициент относительной эффективной диэлектрической проницаемости среды $\dot{\epsilon}(f)$ с учетом (10) задается соотношением [15, 22]

$$\dot{\epsilon}(f) = 1 + \int_0^\infty 4\pi R^3 \frac{\dot{\epsilon} - 1}{\dot{\epsilon} + 2} n(R) dR, \quad (11)$$

где $\dot{\epsilon}$ — коэффициент относительной диэлектрической проницаемости воды.

Пусть $q(R)$ — парциальная водность среды для капель с радиусом R . Используя соотношение $n(R) = 3q(R)/(4\pi R^3 \rho)$ и соотношение (11), имеем

$$\dot{\epsilon}(f) = \left(1 + 3 \frac{\dot{\epsilon} - 1}{\dot{\epsilon} + 2} q\right). \quad (12)$$

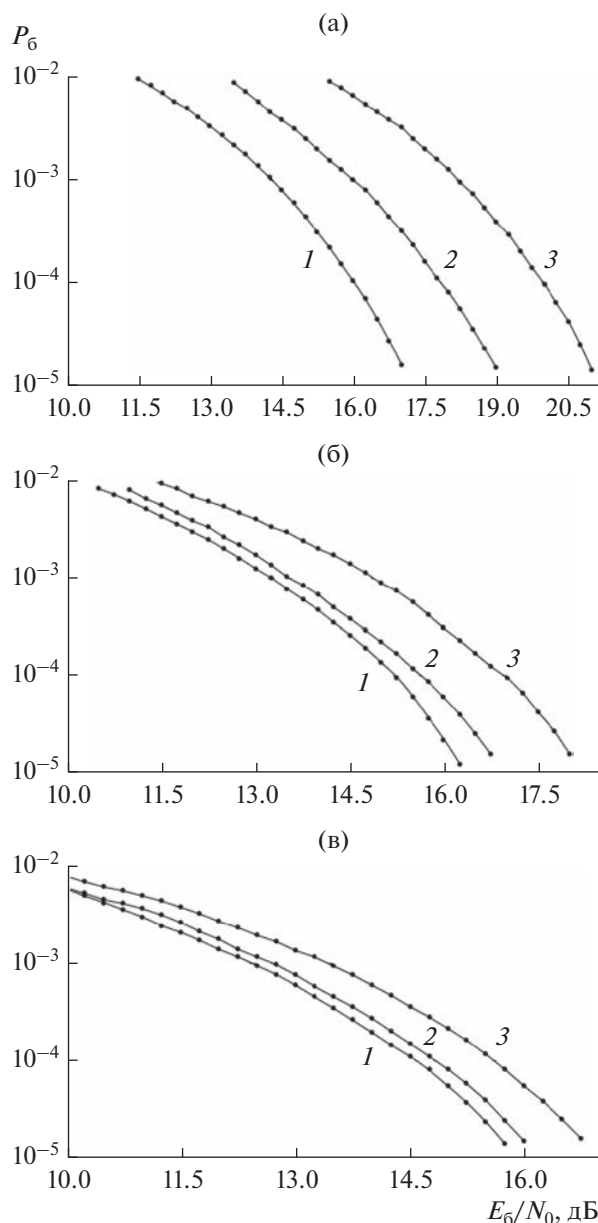


Рис. 2. Вероятности ошибки при приеме сигналов ФМ-16 (а), КАМ-16 (б) и АФМ-16 (в): распространение в свободном пространстве (кривая 1) и распространение по радиолинии с туманом ($q = 0.2 \text{ г/м}^3$) с параметром $\theta = 90^\circ$ (2) и 0° (3).

Выражение для $\dot{\epsilon}$ имеет вид [11]

$$\dot{\epsilon} = \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{1 + (f/f_p)^2} + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 + (f/f_s)^2} + \gamma_2 + j \left(\frac{f(\gamma_0 - \gamma_1)}{f_p + f^2/f_p} + \frac{f(\gamma_1 - \gamma_2)}{f_s + f^2/f_s} \right), \quad (13)$$

при $\gamma_0 = 77.66 + 103.3(\alpha - 1)$, $\gamma_1 = 0.0671\gamma_0$, $\gamma_2 = 3.52$, $\alpha = 300/T_0$,

$$f_p = 20.20 - 146(\alpha - 1) + 316(\alpha - 1)^2, \quad f_s = 39.8f_p.$$

Здесь f — частота (ГГц); T_0 — температура воды (К).

Погонное ослабление сигналов β (дБ/км) при распространении по радиолинии с туманом оценивается с использованием соотношения [11]

$$\beta(f) = \frac{0.819qf \operatorname{Im}(\dot{\epsilon}_f)}{(\operatorname{Im}(\dot{\epsilon}_f))^2 + (2 + \operatorname{Re}(\dot{\epsilon}_f))^2}. \quad (14)$$

Для радиолинии с углом места $5^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ длина трассы распространения вычисляется как $L(\theta) = L(\theta = 90^\circ)/\sin(\theta)$ [11].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведем результаты количественного оценивания энергетических потерь ΔE , обусловленных искажениями цифровых сигналов при распространении по радиолинии с туманом, описываемой моделью (10)–(14), по отношению к распространению в свободном пространстве.

Методика оценки энергетических потерь ΔE основана на сравнительном анализе соответствующих вероятностей ошибки P_6 при посимвольном приеме цифровых сигналов, параметры которых приведены в табл. 1 [23].

Оценивание ΔE произведено для модели радиолинии с параметрами: $q = 0.2$ и 0.05 г/м^3 [11]; высота тумана 100 м; угол места $\theta = 90^\circ$ и 30° ; температура воды $T_0 = 273 \text{ К}$; центральная частота 30 ГГц; тактовый интервал $T = 2 \text{ нс}$ (частотная полоса 1 ГГц, определяемая по нулевому уровню спектральной плотности мощности сигналов).

На рис. 2а–2в приведены вероятностные характеристики для сигналов ФМ-16, КАМ-16, АФМ-16 (соответствующие “созвездия” см. на рис. 1).

Кривые 1 для ФМ-16 и КАМ-16 сигналов вычислены с использованием соотношений (5) и (7), кривая 1 для АФМ-16 вычислена путем моделирования алгоритма посимвольного приема (8).

Видно, что вероятность ошибки $P_6 = 10^{-5}$ достигается при $E_b/N_0 = 17.5$, 16.25 и 15.75 дБ для ФМ-16, КАМ-16 и АФМ-16 сигналов соответственно.

Кривые 2, 3 вычислены моделированием алгоритма посимвольного приема (7) с учетом искажающего влияния радиолинии с туманом с параметрами $q = 0.2 \text{ г/м}^3$, $\theta = 90^\circ$ (кривая 2) и $\theta = 30^\circ$ (кривая 3). Видно, что вероятность ошибки $P_6 = 10^{-5}$ для первых значений параметров достигается при 19.0 , 16.25 и 16.1 дБ . Для вторых значений

параметров достигается при 21.0, 18.25 и 16.75 дБ для сигналов ФМ-16, КАМ-16 и АФМ-16.

На основе этих данных и сравнительного анализа кривых 1 и кривых 2 и 3 для рассматриваемой вероятности ошибки P_6 получены значения энергетических потерь ΔE для модели радиолинии с параметрами $q = 0.2 \text{ г/м}^3$ и $\theta = 30^\circ$: $\Delta E = 3.5, 2.0$ и 1.0 дБ для сигналов ФМ-16, КАМ-16, АФМ-16 соответственно. Для параметров радиолинии с параметрами $q = 0.2 \text{ г/м}^3$, $\theta = 90^\circ$ энергетические потери достигают $\Delta E = 2.0, 0.5$ и 0.25 дБ для рассматриваемых сигналов.

Ослабление сигналов, вычисленные с использованием соотношения (14), в этих случаях равны 0.032 и 0.017 дБ. Таким образом, приведенные выше энергетические потери ΔE обусловлены в основном дисперсионными свойствами рассматриваемых радиолиний.

Подобные результаты относительно вероятностных характеристик и энергетических потерь ΔE , обусловленные в основном дисперсионными свойствами среды, для модели радиолинии с туманом получены также для других рассматриваемых цифровых сигналов: ФМ-4, ФМ-8, АФМ-8. Вычисленные значения ΔE приведены в табл. 1.

Приведенные значения энергетических потерь ΔE необходимо учитывать при расчете энергетических бюджетов рассматриваемых радиолиний распространения для рассматриваемого класса цифровых частотно-эффективных сигналов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено описание модели радиолинии с туманом, применяемой для представления искажений комплексных огибающих цифровых сигналов за счет поглощающих и дисперсионных свойств среды распространения. Данные искажения приводят к межсимвольным и межканальным интерференционным помехам в дополнение к АБГШ. При увеличении частотной полосы цифровых сигналов и увеличении их порядка манипуляции (при использовании частотно-эффективных сигналов) влияние интерференционных помех приводит к энергетическим потерям по отношению к распространению в свободном пространстве.

Количественное оценивание этих энергетических потерь произведено для класса цифровых сигналов ФМ-4, ФМ-8, АФМ-8, ФМ-16, КАМ-16, АФМ-16 и для радиолинии с туманом с параметрами водности до 0.2 г/м^3 , углов места $\theta = 90^\circ$ и 30° . Показано, что сигналы с фазовой манипуляцией ФМ-16 наиболее подвержены искажающему влиянию среды распространения с туманом — энергетические потери достигают 3.5 дБ для вероятности ошибки $P_6 = 10^{-5}$. Наиболее устойчивые к рассматриваемым искажениям являются АФМ-

сигналы — энергетические потери для сигналов АФМ-16 для анализируемых радиолиний не превышают 1 дБ.

Разработка и развитие методов приема цифровых частотно-эффективных сигналов, снижающих искажающее действие радиолиний с туманом (например, использование методов адаптивного выбора помехоустойчивого кодирования [20] либо применение инверсного фильтра), а также оценивание эффективности искажающего действия рассматриваемых радиолиний с вариацией их параметров (температура, частотный диапазон, водность, др.) представляют направления перспективных исследований.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягев Д.В. и др. // РЭ. 2015. Т. 60. № 10. С. 1001.
3. Richharia M., Westbrook L.D. Satellite Systems for Personal Applications. Concepts and Technology. Chichester: John Wiley and Sons, Ltd., Publ., 2010.
4. ГЛОНАСС: принципы построения и функционирования. / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. М.: Радиотехника, 2010.
5. Спилкер Дж. Цифровая спутниковая связь. М.: Связь, 1979.
6. Вербя В.С., Неронский Л.Б., Осипов И.Г., Турук В.Э. Радиолокационные системы Землеобзора космического базирования. М.: Радиотехника, 2010.
7. Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for Broadcasting, Interactive Services, News Gathering and other broadband satellite applications Pt 2: DVB-S2 Extensions (DVB-S2X) DVB. Doc. A083-2. Eur. Broadcasting Union CH-1218. Geneva, 2020. https://dvb.org/wp-content/uploads/2019/10/A083-2_DVB-S2X_Draft-EN-302-307-2-v121_Feb_2020.pdf.
8. Колосов М.А., Арманд Н.А., Яковлев О.И. Распространение радиоволн при космической связи. М.: Связь, 1969.
9. Recommendation ITU-R P.838-3. Specific attenuation model for rain for use in prediction methods. Geneva, 2005. https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.838-3-200503-I!!PDF-E.pdf.
10. Назаров Л.Е., Кутуза Б.Г. // Сб. трудов XV Всерос. науч.-техн. конф. “Радиолокация и радиосвязь”. Москва. 21–23 нояб., 2022. М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2022. С. 293.

11. Recommendation ITU-R P.840-4. Attenuation due to clouds and fog. P Series "Radiowave propagation". Geneva: Electronic Publ., 2009. https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.840-7-201712-S!!PDF-E.pdf.
12. Кутуза Б.Г. // РЭ. 1974. Т. 19. № 4. С. 665.
13. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1960.
14. Яковлев О.И., Якубов В.П., Урядов В.П. др. Распространение радиоволн. М.: Ленанд, 2009.
15. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973.
16. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: ИД "Вильямс", 2003.
17. Назаров Л.Е., Батанов В.В. // РЭ. 2017. Т. 62. № 9. С. 866.
18. Proakis J.G., Salehi M. Digital Communication. Boston: McGraw-Hill, Higher Education, 2001.
19. ATIS 3GPP Specification, 3GPP TS 38.211 V16.2.0 (2020-06): 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Radio Access Network; NR; Physical channels and modulation (Release 16). Washington: Publ. Alliance for Telecom. Industry Solutions, 2020.
20. Назаров Л.Е., Батанов В.В. // РЭ. 2022. Т. 67 № 8. С. 782. <https://doi.org/10.31857/S0033849422080137>
21. Пожидаев В.Н. // РЭ. 2010. Т. 55. № 11. С. 1311.
22. ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
23. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.

К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

УДК 551.51

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНОГО
РАДИОМЕТРИЧЕСКОГО ВЛАЖНОСТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ
АТМОСФЕРЫ ДЛЯ РАННЕГО ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ
ОПАСНЫХ ЯВЛЕНИЙ ПОГОДЫ

© 2023 г. Д. М. Караваев^{a, *}, Ю. В. Кулешов^a, Г. Г. Щукин^{a, b}

^a Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,

Ждановская ул., 13, Санкт-Петербург, 197198 Российская Федерация

^b Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Орловская, 23, Муром, 602264 Российская Федерация

*E-mail: vka@mil.ru

Поступила в редакцию 11.02.2023 г.

После доработки 31.03.2023 г.

Принята к публикации 05.04.2023 г.

Методом наземной СВЧ-радиометрии исследованы характеристики влагосодержания атмосферы в период развития связанных с облаками опасных явлений погоды, осадков, гроз. На основе комплексных радиофизических исследований атмосферы, проведенных в Ленинградской области, показана возможность совершенствования методов раннего предупреждения опасных явлений погоды и диагностики атмосферных фронтов с привлечением оперативной СВЧ-радиометрической информации.

DOI: 10.31857/S0033849423060050, EDN: XLUSVS

ВВЕДЕНИЕ

Применение методов СВЧ-радиометрии атмосферы имеет актуальное значение в задачах метеорологии для совершенствования раннего предупреждения развития связанных с облаками опасных атмосферных явлений погоды, грозовых процессов, ливней, снегопадов и др. Известно, что наземные СВЧ-радиометры позволяют получать важную для задач прогнозирования информацию о метеорологических параметрах атмосферы (влагозапас атмосферы, водозапас облаков, профили температуры и влажности воздуха) практически в режиме непрерывных измерений с высоким пространственным разрешением [1–10]. Эти преимущества особенно проявляются в условиях наблюдения быстропротекающих процессов в атмосфере, когда СВЧ-радиометрическая информация может существенно дополнять данные стандартных метеорологических наблюдений, аэрологического зондирования атмосферы [11–14].

Ранее в работах [1, 10–16] рассматривались вопросы применения методов и средств наземной СВЧ-радиометрии для влажностного зондирования атмосферы. В данной работе эти исследования обобщены и продолжены с целью применения методов наземной СВЧ-радиометрии в комплексных исследованиях атмосферы для совершенствования методов раннего предупреждения развития

связанных с облаками опасных явлений, уточнения структуры атмосферных фронтов циклонов [17–19].

1. МЕТОД И ЗАДАЧИ СВЧ-РАДИОМЕТРИИ

Известно, что метод СВЧ-радиометрии позволяет определять характеристики влагосодержания атмосферы (влагозапас атмосферы и водозапас облаков) по измерениям характеристик собственного нисходящего радиотеплового излучения атмосферы [1]. На практике применяли несколько различных подходов.

1.1. Определение влагозапаса атмосферы и водозапаса облаков

В случае наблюдения малооблачной атмосферы (не содержащей осадков) влагозапас атмосферы (Q) и водозапас облаков (W) определяют по результатам измерений характеристик радиотеплового излучения с помощью регрессионных уравнений [1, 10, 15]:

$$\begin{aligned} Q &= a_0 + a_1\tau(f_1) + a_2\tau(f_2), \\ W &= b_0 + b_1\tau(f_1) + b_2\tau(f_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где a_j , b_j — коэффициенты регрессии, полученные по данным радиозондирования атмосферы и

эмпирическим моделям облаков; $\tau(f_k)$ — оптическая толщина атмосферы при частоте f_k . Оптическую толщину атмосферы определяют по измеряемой радиояркой температуре атмосферы [1]. При этом измерения радиояркой температуры атмосферы проводят на частотах вблизи центра линии молекулярного поглощения водяного пара 22.235 ГГц и в окне прозрачности атмосферы 30...38 ГГц. По теоретическим оценкам погрешность определения влагозапаса атмосферы зависит от точности измерения радиояркой температуры и определения оптической толщины атмосферы [1]. Погрешность определения водозапаса облаков зависит от неопределенности оценивания температуры облаков и может составлять 20...30%. Кроме того, уравнения (1) некорректно использовать при наличии осадков при нарушении приближения рэлеевского поглощения в облаках.

В экспериментах данной работы применяли двухчастотный вариант СВЧ-радиометра с центральными частотами каналов около 20.7...22.23 и 31...36 ГГц. Полоса усиления радиометрических приемников составляла 200...500 МГц. Были использованы малошумящие антенны с шириной луча 7...9 град по уровню половинной мощности. Дискретность измерений выбирали в интервале 5...1000 с. Погрешность определения влагозапаса атмосферы составляла около 0.5...1 кг/м², водозапаса облаков около 0.03 кг/м².

1.2. СВЧ-радиометрические исследования конвективных облаков

Метод наземной СВЧ-радиометрии эффективен для исследования водозапаса (содержания жидкокапельной влаги) конвективных облаков [1, 13, 15]. При исследовании конвективных облаков на различных стадиях наиболее информативные участки спектра радиотеплового излучения находятся в области малого ослабления излучения 6...14 ГГц и “окнах” прозрачности атмосферы при частотах 30...37 и 75...95 ГГц. Погрешность определения водозапаса конвективных облаков оценивается величиной около 20...40% [1].

При экспериментальных исследованиях водозапаса конвективных облаков использовали СВЧ-радиометры, работающие в диапазонах частот 9.5 и 36.5 ГГц. Полоса усиления радиометрических приемников составляла 250...500 МГц. Использовали полноповоротные антенны с шириной диаграммы направленности по уровню половинной мощности менее 1 град, что позволяло исследовать пространственное распределение собственного излучения конвективных облаков с достаточно высоким пространственным разрешением. Методика исследований конвективных облаков состояла в получении последовательности радио-

тепловых карт переохлажденной части конвективных облаков и определении водозапаса по направлению луча антенны. На рис. 1а–1г приведены результаты СВЧ-радиометрического зондирования мощного конвективного облака и определения водозапаса облака вдоль луча антенны $W(\varphi, \theta)$, где φ — азимут, θ — угол места антенны (пос. Тургош Ленинградской обл.). Представленные четыре карты водозапаса облака, полученные в период времени с 18 ч 42 мин до 19 ч 02 мин, демонстрируют эволюцию пространственного распределения водозапаса конвективного облака на стадии его диссипации.

Метод комплексного СВЧ-радиометрического и радиолокационного зондирования облаков (пассивно-активный метод) применяется для определения профилей водности, средней водности конвективных облаков, водозапаса переохлажденной части конвективных облаков и интенсивности осадков [1, 10, 13, 20]. Реализация метода направлена на повышение точности определения водности облаков и интенсивности осадков (по сравнению с методом классической метеорологической радиолокации). Вариант современной реализации метеорологического радиолокатора со встроенным радиометром на базе современной ДМРЛ-С был рассмотрен в [21].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

2.1. СВЧ-радиометрический критерий опасных явлений

Комплексные экспериментальные исследования мощных конвективных облаков, грозовых процессов были основаны на применении средств радиолокации, атмосферно-электрических измерений и СВЧ-радиометров и направлены на изучение сложных процессов, происходящих при развитии связанных с облаками опасных явлений, взаимосвязи микрофизических, динамических и электрических процессов в облаках [11, 13, 14, 22–26]. Метеорологические радиолокаторы (длина волны 8 мм, 3.2 и 10 см) применялись для обнаружения частиц облаков и осадков. Для детектирования ионизированных каналов молний применялись радиолокаторы с длиной волны 11, 35 и 200 см, а также осуществлялась регистрация электромагнитного излучения в диапазоне частот 0.4...60 и 150 МГц. Влагозапас атмосферы и водозапас облаков определяли с помощью СВЧ-радиометров (22 и 36 ГГц). Сканирующие СВЧ-радиометры, работающие в диапазоне частот 9.5 и 36.5 ГГц, использовались совместно с радиолокатором для детального исследования содержания жидкокапельной влаги в переохлажденной части конвективных облаков.

Одновременное использование перечисленных технических средств позволяет исследовать

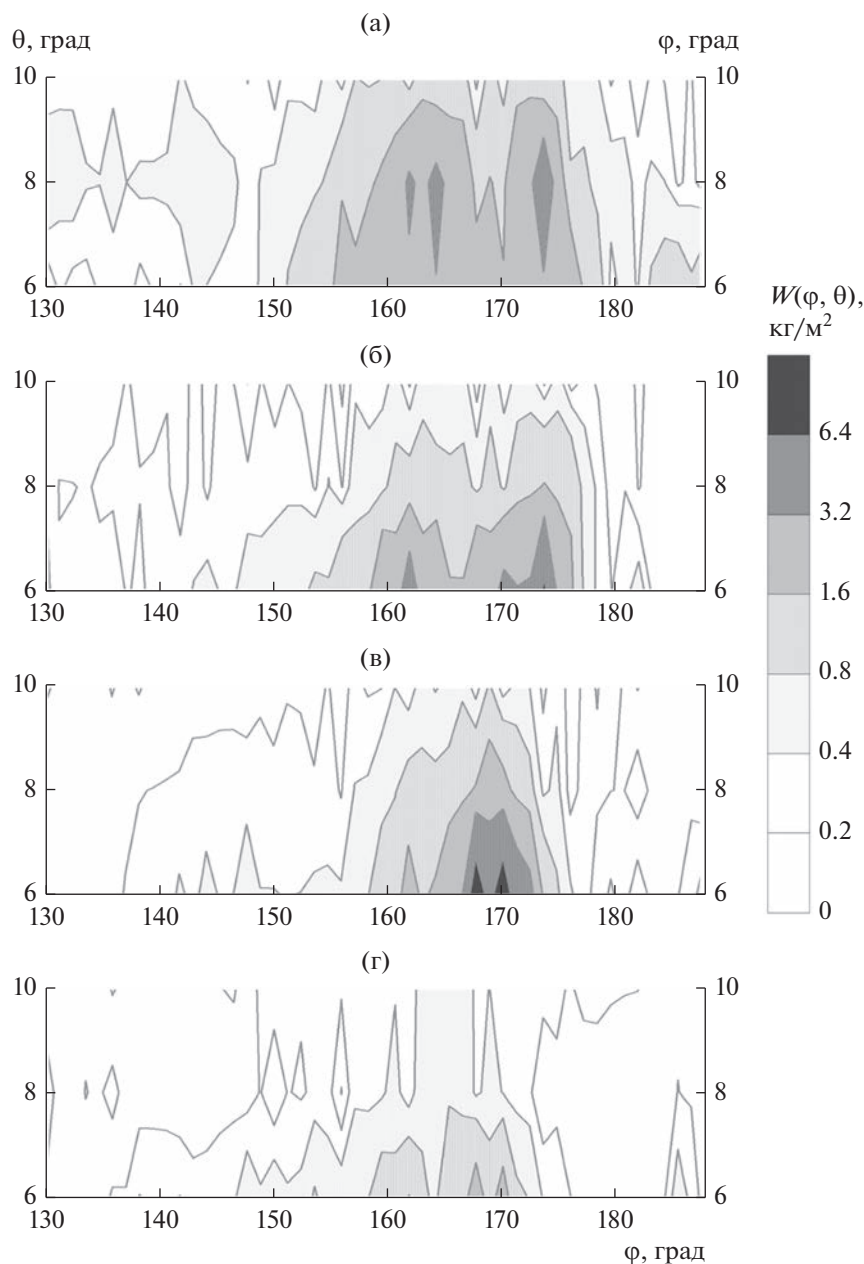


Рис. 1. Карты водозапаса конвективного облака, полученные СВЧ-радиометром в пос. Тургошь Ленинградской обл. в разные периоды времени: 18 ч 42 мин (а), 18 ч 49 мин (б), 18 ч 56 мин (в) и 19 ч 02 мин (г).

микрофизические характеристики областей мощных конвективных облаков, в которых происходят генерация электрических зарядов, их разделение и появление сильнотоковых разрядов молний. Кроме того, такие комплексные наблюдения позволяют рассматривать относительное расположение зон молниевой активности, осадков, турбулентности, повышенного содержания переохлажденной влаги в облаках, особенности фазового состава облаков.

По результатам предыдущих исследований параметров атмосферы, конвективных облаков,

грозовых процессов с применением средств СВЧ-радиометрии и радиолокации и можно сделать следующие выводы:

— полученные с помощью двухчастотного радиометра 22 и 36 ГГц данные о водозапасе атмосферы согласуются с данными аэрологического зондирования атмосферы (СКО при водозапасах атмосферы в интервале $4...45 \text{ кг/м}^2$ составляет около 1 кг/м^2);

— полученные с помощью двухчастотного радиометра 22 и 36 ГГц данные о водозапасах обла-

ков слоистых форм согласуются с соответствующими оценками по эмпирическим моделям водности облаков, а также с данными спутникового зондирования (для экспериментов, выполненных с борта научно-исследовательского судна погоды над океаном);

- пространственно-временное распределение водности мощного конвективного облака по данным СВЧ-радиометрических не соответствует распределению радиолокационной отражаемости;

- полученные при комплексных радиолокационно-радиометрических исследованиях мощных конвективных (грозовых) облаков данные СВЧ-радиометров (центральные частоты 9.5 и 36 ГГц) указывают на возможность существования локальных зон переохлажденной влаги в верхней части мощного конвективного облака на высотах 6...9 км с характерным пространственным размером 1...2 км;

- вариации влагозапаса атмосферы (по данным двухчастотного СВЧ-радиометра 22 и 36 ГГц) в окрестности грозового облака могут значительно превышать значения, характерные для невозмущенной атмосферы.

Эксперименты показали возможность использования оперативных данных о влагозапасе атмосферы для раннего предупреждения развития мощных конвективных облаков и грозовых процессов [25, 26]. На основе анализа данных наземного СВЧ-радиометра о влагозапасе атмосферы и радиолокационной информации предложен СВЧ-радиометрический критерий развития мощных конвективных облаков, гроз. В качестве предикторов использовались значения влагозапаса атмосферы и его изменения во времени, которые определяли по данным двухчастотного микроволнового радиометра (при частотах около 22.2 и 36.5 ГГц). Для оценивания прогностического критерия использовали данные СВЧ-радиометра по влагозапасу атмосферы, а критерий определяли из соотношения:

$$kr = c_0 + c_1 Q + c_2 \Delta Q(t), \quad (2)$$

где c_i – коэффициенты регрессии; $\Delta Q(t)$ – изменение влагозапаса атмосферы за период времени t . Предварительное тестирование критерия было проведено в п. Воейково Ленинградской обл. в теплый период года с применением радиолокатора МРЛ-5 для распознавания мощных конвективных облаков, гроз, ливней. Получено, что заблаговременность прогноза опасных явлений может составлять 1...12 ч, а оправдываемость составляет около 76%.

Дальнейшее совершенствование метода раннего предупреждения развития грозовых процессов определяется применением комплексных методов радиолокации, СВЧ-радиометрии и атмосферно-электрических измерений для определения пара-

метров атмосферы и характеристик облаков, осадков. Метод включает: а) мониторинг состояния атмосферы с применением СВЧ-радиометров влажностного (температурно-влажностного) зондирования атмосферы с целью заблаговременного выявления благоприятных условий для развития мощных конвективных облаков и грозовых процессов; б) выявление зон повышенного содержания жидкокапельной влаги в переохлажденной части облака с помощью СВЧ-радиометров, работающих совместно с радиолокатором.

2.2. СВЧ-радиометрия атмосферных фронтов

Применение наземных двухчастотных СВЧ-радиометров (22 и 36 ГГц) позволяет исследовать синоптические, мезомасштабные а также микро-масштабные вариации влагозапаса атмосферы и водозапаса облаков [12, 16–19, 24]. В комплексных экспериментах проводился анализ данных наземных двухчастотных СВЧ-радиометров (22 и 36 ГГц) и фронтологический анализ обстановки (с привлечением данных спутниковых наблюдений облаков) с целью исследования особенностей мезомасштабной структуры атмосферных фронтов циклонов. Эксперименты показали возможность для оперативного уточнения синоптической обстановки и совершенствования методов раннего предупреждения развития опасных явлений погоды при использовании наземных СВЧ-радиометров влажностного зондирования атмосферы.

Наземные СВЧ-радиометры влажностного зондирования атмосферы позволяют выявить характерные особенности временной изменчивости влагозапаса атмосферы и водозапаса облаков при прохождении атмосферных фронтов:

- в области атмосферных фронтов регистрировались значительные изменения влагозапаса атмосферы и водозапаса облаков, которые уверенно регистрируются СВЧ-радиометрами;

- в области теплых фронтов циклонов рост влагозапаса атмосферы обычно предшествовал росту водозапаса облаков.

В экспериментах, проводимых в обсерватории п. Лехтуси в 2018 г. был использован двухчастотный (20.7 и 31.4 ГГц) СВЧ-радиометр водяного пара, разработанный в Институте прикладной астрономии РАН [12]. Для определения влагозапаса атмосферы и водозапаса облаков измерения радиоярких температур в зенитном направлении проводились с дискретностью 5 с. В качестве примера на рис. 2 показан временной ход водозапаса облаков и влагозапаса атмосферы в зените при прохождении атмосферных фронтов 10–12 июня 2018 г. в п. Лехтуси Ленинградской обл. Как следует из рис. 2, СВЧ-радиометрические данные по влагозапасу атмосферы согласуются с расчетны-

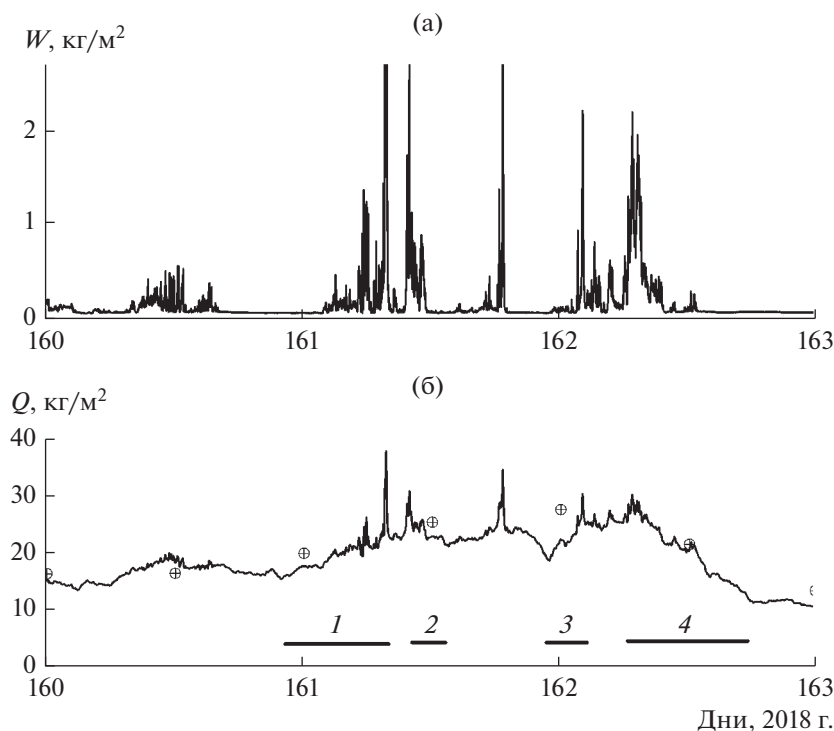


Рис. 2. Временной ход водозапаса облаков (а) и влагозапаса атмосферы (б) при прохождении атмосферных фронтов 10–12 июня 2018 г. в пос. Лехтуси Ленинградской обл. (сплошная линия – данные СВЧ-радиометра со 160 по 163-й день 2018 г.; кружки – данные аэрологического зондирования в пос. Воейково; 1 и 3 – время прохождения теплых фронтов; 2 и 4 – холодных фронтов).

ми данными аэрологического зондирования, полученными в п. Воейково. Из рисунка видно, что влагозапас атмосферы в период с 10 по 12 июня изменялся в интервале от 10 до 30 кг/м². Значения водозапаса облаков (в зените) 11 и 12 июня достигали значений 2 кг/м² и более. Как показал синоптический анализ, такие изменения влагозапаса атмосферы и водозапаса облаков были обусловлены последовательным прохождением 10–12 июня 2018 г. двух циклонов и связанных с ними атмосферных фронтов. Периоды прохождения теплых фронтов на рис. 2 соответствуют областям 1 и 3. Периоды прохождения холодных атмосферных фронтов на рис. 2 соответствуют областям 2 и 4.

3. ПЕРСПЕКТИВЫ

Дальнейшие комплексные эксперименты в Ленинградской области продолжаются с применением радиофизических средств Геофизической обсерватории Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского [27]. В состав технических средств обсерватории включены автоматизированная метеорологическая станция АМРИИК, некогерентный метеорологический радиолокатор МРЛ-5 (длина волны 3.2 и 11 см), доплеровский радиолокатор МРМЛ (длина волны 3.2 см), станция приема спутниковой информации “Сю-

жет-МБ”, приборы напряженности электрического поля “Рябина”, грозопеленгаторы ФАГ, комплекс сбора и тематической обработки и хранения данных. Задачами исследований являются:

- уточнение комплексных радиолокационных критериев опасных явлений погоды, таких как грозы и ливни, на основе одновременных наблюдений средствами радиолокации, СВЧ-радиометрии, грозопеленгации, атмосферно-электрических измерений.

- совершенствование методов и технологий сверхкраткосрочного прогноза погоды и связанных с облаками опасных явлений на основе усвоения разнородной метеорологической информации (в том числе радиолокационной, СВЧ-радиометрической, спутниковой, атмосферно-электрических измерений) в моделях атмосферы и аттестация моделей мощного конвективного грозового облака.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования СВЧ-радиометрического метода для определения влагозапаса атмосферы и водозапаса облаков в период развития связанных с облаками опасных явлений погоды показали возможности усовершенствования сверхкраткосрочного прогнозирования мощных конвективных облаков, гроз. Предложен вариант получения СВЧ-

радиометрического прогностического критерия развития связанных с облаками опасных явлений погоды на основе комплексного применения методов СВЧ-радиометрии и радиолокации. Показано, что применение наземных СВЧ-радиометров влажностного зондирования атмосферы перспективно для исследования мезомасштабной структуры атмосферных фронтов и уточнения синоптического положения. Дальнейшие исследования в области усовершенствованием методов раннего предупреждения связанных с облаками опасных явлений погоды предполагают развитие экспериментов в Ленинградской области с применением радиофизических средств Геофизической обсерватории Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-19-00378).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степаненко В.Д., Шукин Г.Г., Бобылев Л.П., Матросов С.Ю. Радиотеплолокация в метеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1987.
2. Westwater E. Atmospheric Remote Sensing by Microwave Radiometry / Ed. M.A. Janssen. N. Y.: J. Wiley and Sons. 1993. P. 145.
3. Westwater E.R., Crewel S., Mätzler C. // The Radio Sci. Bull. URSI. 2004. № 310. P. 59.
4. Наумов А.П., Плечков В.М. // Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана. 1971. Т. 7. № 3. С. 352.
5. Горелик А.Г., Калашиников В.В., Райкова Л.С. и др. // Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9. № 9. С. 928.
6. Rose T., Crewell S., Löhnert U., Simmer C. // Atmos. Res. 2005. V. 75. № 3. P. 183.
<https://doi.org/10.1016/j.atmosres.2004.12.005>
7. Ware R., Carpenter R., Guldner J., Liljegren J. et al. // Radio Sci. 2003. V. 38. № 4. P. 8079.
<https://doi.org/10.1029/2002RS002856>
8. Illingworth A.J., Cimini D., Gaffard C. // Bull. Amer. Meteor. Soc. 2015. V. 96. № 12. P. 2107.
<https://doi.org/10.1175/BAMS-88-6-883>
9. Кадыгров Е.Н., Горелик А.Г., Точилкина Т.А. // Оптика атмосферы и океана. 2014. Т. 27. № 6. С. 546.
<https://doi.org/10.1134/S1024856014060074>
10. Караваев Д.М., Шукин Г.Г. // Оптика атмосферы и океана. 2015. Т. 28. № 12. С. 1122.
<https://doi.org/10.1134/S1024856016030076>
11. Караваев Д.М., Шукин Г.Г. // Гидрометеорология и экология. 2021. Вып. 62. С. 7.
<https://doi.org/10.33933/2074-2762-2021-62-7-26>
12. Караваев Д.М., Лебедев А.Б., Шукин Г.Г., Ильин Г.Н. // Метеорология и гидрология. 2022. № 12. С. 56.
<https://doi.org/10.52002/0130-2906-2022-12-56-65>
13. Шукин Г.Г. // Тр. XXVII Всерос. симп. “Радиолокационное исследование природных сред”. Санкт-Петербург, 17–19 мая 2012. СПб.: ВКА, 2012. Вып. 6. Т. 2. С. 441.
14. Караваев Д.М., Шукин Г.Г. // Успехи совр. радиоэлектроники. 2008. № 6. С. 29.
15. Караваев Д.М., Шукин Г.Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64. № 12. С. 942.
16. Караваев Д.М., Лебедев А.Б., Моисеева Н.О., Шукин Г.Г. // XII Всерос. Армандовские чтения: “Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн” / Матер. Всерос. науч. конф. Муром: ВлГУ, 2022. С. 336.
<https://doi.org/10.24412/2304-0297-2022-1-336-340>
17. Воробьев В.И. Синоптическая метеорология. Л.: Гидрометеиздат, 1986.
18. Вельтищев Н.Ф. Мезометеорология и краткосрочное прогнозирование: Сб. лекций. Л.: Гидрометеиздат, 1988.
19. Шакина Н.П. Динамика атмосферных фронтов и циклонов. Л.: Гидрометеиздат, 1985.
20. Шукин Г.Г., Булкин В.В. Метеорологические пассивно-активные радиолокационные системы. Муром: ИПЦ МИ ВлГУ, 2009.
21. Вылегжанин И.С., Жуков В.Ю., Караваев Д.М., Шукин Г.Г. // Труды Военно-космич. акад. им. А.Ф. Можайского. 2016. Вып. 653. С. 146.
22. Степаненко В.Д., Гальперин С.М. Радиотехнические методы исследования гроз. Л.: Гидрометеиздат, 1983.
23. Караваев Д.М., Кулешов Ю.В., Шукин Г.Г. // Тр. XXVII Всерос. научн. конф. “Распространение радиоволн”. Калининград, 28 июня–3 июля 2019. Калининград: БФУ им. И. Канта, 2021. С. 682.
24. Караваев Д.М., Шукин Г.Г. // Тр. XXX Всерос. симп. “Радиолокационное исследование природных сред”. Санкт-Петербург, 18–19 апреля 2017. СПб.: ВКА, 2017. Вып. 12. Т. 2. С. 204.
25. Шукин Г.Г., Караваев Д.М. // Тр. ГГО. 2008. Вып. 557. С. 119.
26. Караваев Д.М., Шукин Г.Г. // Докл. Всерос. конф. по физике облаков и активным воздействиям на гидрометеорологические процессы. Нальчик, 08–10 сентября 2021. Нальчик: Принт Центр, 2021. С. 165.
27. Кулешов Ю.В., Шукин Г.Г., Готюр И.А. и др. // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2018. Вып. 662. С. 186.

**К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА**

УДК 551.508.85

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СИГНАЛА
В МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ РАДИОЛОКАЦИИ**

© 2023 г. Д. А. Денисенков^а, *, В. Ю. Жуков^а, Г. Г. Щукин^б

^а Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,

Ждановская ул., 13, Санкт-Петербург, 197198 Российская Федерация

^б Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Орловская, 23, Муром Владимирской обл., 602264 Российская Федерация

*E-mail: vka@mil.ru

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

После доработки 01.02.2023 г.

Принята к публикации 25.03.2023 г.

Рассмотрены особенности применения спектральных параметров принимаемого сигнала для распознавания опасных явлений погоды в метеорологической радиолокации. Описаны достоинства и недостатки существующих методов. Предложен новый метод распознавания на основе оценки базы входного случайного процесса.

DOI: 10.31857/S0033849423060013, EDN: XLMARR

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Среди множества областей, в которых применяется радиолокация, метеорология является одной из самых специфических. Это обусловлено большими размерами наблюдаемых объектов, распределенных в пространстве. В результате обработка получаемых оценок параметров существенно отличается от той, что используется в классической радиолокации точечных целей. Это проявляется уже в оценках мощности — для определения грозо- или градоопасности кучевого облака рассчитывают Y -параметр [1]

$$Y = H_{\text{вг}} \lg Z_{-22}, \quad (1)$$

где $H_{\text{вг}}$ — высота верхней границы облачности; Z_{-22} — отражаемость (характеристика цели, рассчитываемая по мощности принятого отражения) на уровне высоты изотермы -22° .

Очевидно, что простого оценивания мощности недостаточно, требуется также определить ее распределение по объему наблюдаемой цели. В данном случае это максимальная высота, на которой еще можно выделить отраженный сигнал.

В еще большей степени данная специфика проявляется при применении спектральных параметров отражений для решения главной задачи метеорологического радиолокатора — своевременного распознавания опасных явлений погоды. Она состоит уже в том, что этих параметров два — средняя частота энергетического спектра и его ширина [2]. В других радиолокаторах ограничиваются, как правило, оцениванием только пер-

вого из них. Это вызвано тем, что никакие другие цели, кроме метеорологических, не создают отражений со спектром такой ширины и нигде он не несет столько полезной информации.

2. МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ОПАСНЫХ ЯВЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОЦЕНОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА

Необходимость учета распределения параметров по объему цели сохраняется и для спектральных параметров. Так, оценка средней частоты отражений от одного элемента разрешения практически не несет никакой информации. Зато последовательность таких оценок, получаемых в одном слое атмосферы при азимутальном сканировании, позволяет путем их аппроксимации синусоидальной зависимостью определить скорость и направление ветра в этом слое [3]. Подобная обработка сигналов, получаемых на разных высотах, дает возможность восстановить вертикальный профиль ветра, что, в свою очередь, позволяет распознать сдвиг ветра — явление, опасное для воздушных судов, идущих на взлет или посадку.

Анализ пространственного распределения средней частоты спектра принимаемого сигнала применим для распознавания и других опасных явлений, связанных с ветром: смерча, шквала и микрошквала (кратковременного нисходящего потока воздуха, возникающего в кучевой облачности).

При попадании смерча в зону обзора радиолокатора наблюдается резкий скачок рассматриваемого параметра при сканировании антенны по азимуту. Он возникает в результате того, что в луч антенны сначала попадает одна половина зоны смерча, где скорости частиц имеют одно направление, а потом другая — с противоположенным направлением скоростей [4].

Микрошквал — вертикальный поток воздуха, и поэтому не создает сколько-нибудь значительного доплеровского сдвига частоты при наблюдении его на малых углах места, характерных для работы метеорологического радиолокатора. Поэтому он не подлежит непосредственному обнаружению по оценкам средней частоты спектра. Его распознают косвенным методом, основанным на том, что при ударе о землю данный поток растекается в разные стороны. Именно это растекание и может быть зафиксировано по резкому скачку средней частоты в соседних элементах разрешения. В отличие от случая смерча, скачок наблюдается в элементах, смежных не по азимуту, а по дальности [5].

Все рассмотренные методы имеют один и тот же недостаток, а именно существенную зависимость их эффективности от соотношения размеров явления и разрешаемого объема радиолокатора. Так, сдвиг ветра надо восстанавливать с разрешающей способностью не менее 30 м по высоте, так как единицей его измерения является метр в секунду на фут высоты. При обычной для современных метеорологических радиолокаторов ширине антенного луча 1 град максимальная дальность наблюдения ограничивается примерно двумя километрами. Если учесть, что на этом же расстоянии начинается дальняя зона Френеля, где формируется диаграмма направленности антенны, становится понятно, почему в больших аэропортах дополнительно к метеорологическому радиолокатору устанавливают радиопрофилемеры — малогабаритные радары, предназначенные специально для определения вертикального профиля ветра.

Размеры смерча, как правило, не превышают нескольких сот метров. Следовательно, зона его уверенного обнаружения ограничена радиусом около 20 км. Далее условие, состоящее в том, чтобы размер разрешаемого объема не превосходил половины диаметра зоны смерча, не выполняется, и ожидаемый скачок частоты становится плавным и малозаметным.

Применение упомянутого метода распознавания микрошквала также зависит от дальности, ибо в случае, когда размер элемента разрешения превосходит размер потока, образовавшегося при ударе микрошквала о землю, имеет место эффект, аналогичный случаю наблюдения смерча.

Несколько лучше обстоят дела с распознаванием шквала, поскольку он значительно превос-

ходит по размеру остальные рассмотренные явления. Это делает возможным уверенное наблюдение его в виде полосы повышенных относительно общего фона значений средней частоты сигнала. Однако все это происходит только при удачном расположении радара и линии шквала, когда доплеровский сдвиг частоты отражений достаточно велик. Если же они расположены примерно на одной линии, когда скорость ветра тангенциальна к точке наблюдения, распознавание становится невозможным.

Указанные ограничения приводят к тому, что результаты обработки оценок средней частоты спектра принимаемого радиолокатором сигнала оказываются малоинтересными для специалистов. Так, сотрудники метеорологических служб аэропортов ими практически не пользуются, считая неинформативными.

Таким образом, объем информации, получаемой с помощью описанных методов, уменьшается с увеличением размера элемента разрешения относительно размера наблюдаемого объекта, т.е. с увеличением координаты дальности. При этом она не исчезает бесследно, а “переходит” в форму спектра принимаемого сигнала. Однако анализ формы спектра — сложный и плохо формализуемый процесс. Гораздо удобнее было бы найти другой параметр, не зависящий или мало зависящий от расстояния.

Именно таким параметром является ширина энергетического спектра, незаслуженно мало применявшаяся до недавнего времени. Вызвано это было тем, что применять ее пытались “точечно”, т.е. использовали единичные измерения в одной точке. Опыт же применения уже рассмотренных двух параметров показывает резкое увеличение эффективности при анализе их пространственного распределения.

Этот эффект хорошо просматривается на примере метода распознавания сдвига ветра по оценкам ширины спектра отражений [6]. Он основан на представлении данного явления в виде границы между двумя расположенными друг над другом воздушными массами. Каждая из них характеризуется мощностью создаваемых отражений, скоростью и направлением ветра. Поскольку форма спектра сигнала, формируемого метеообразованиями, гауссова, то спектр сигнала, получаемого при попадании в разрешаемый элемент обеих масс, оказывается суммой двух гауссовых спектров с разными параметрами. Ширина такого спектра описывается формулой [7]

$$\sigma_{\omega} = \left(\frac{P_1}{P_1 + P_2} \sigma_{\omega 1}^2 + \frac{P_2}{P_1 + P_2} \sigma_{\omega 2}^2 + \frac{P_1 P_2}{(P_1 + P_2)^2} (\omega_{01} - \omega_{02})^2 \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где P_i — мощность отражений от i -го слоя; σ_{oi} — ширина спектра этих отражений; ω_{oi} — их средняя частота.

Очевидно, что при значительном расхождении средних частот сигнала, формируемого каждым из слоев, ширина спектра суммарного сигнала достигает аномальных, т.е. недостижимых в других условиях, величин. Значения же самих средних частот зависят от угла между направлением ветра в слое и направлением луча радиолокатора. При сканировании антенны этот угол постоянно меняется, приводя к изменениям рассматриваемого параметра в широких пределах. В результате на карте ширины спектра формируются хорошо различимые зоны, по величине параметра в которых и по форме их расположения распознается сдвиг ветра и определяются его характеристики.

Аналогичный метод применим и для обнаружения изменений скорости ветра в зависимости от высоты, которые не столь ярко выражены, как при сдвиге ветра. В этом случае спектров аномальной ширины не наблюдается, но появляются спирали пониженных значений, по поведению которых восстанавливается профиль ветра. Классический случай такого явления — слой Экмана, в котором вектор скорости изменяется по известному закону [8]. Пример его наблюдения приведен на рис. 1. Штриховой линией на рисунке показана область малых значений ширины спектра радиальных скоростей гидрометеоров.

К сожалению, среди явлений, связанных с ветром, только к сдвигу ветра применим учет пространственного распределения параметра, так как он имеет большие размеры одновременно в двух координатах. Остальные радиолокатор воспринимает как одномерные. Именно поэтому смерч и микрошквал остаются наиболее трудно распознаваемыми явлениями природы.

Ввиду этого возникла необходимость найти новый параметр сигнала, способный решить поставленную задачу. По мнению авторов, им может оказаться параметр, названный базой принимаемого сигнала [9]. Название возникло по аналогии с применяемыми в радиотехнике сложными импульсами, показателем сложности которых служит база, понимаемая как произведение длительности импульса на ширину его спектра. Если импульс не имеет каких-либо усложнений внутренней структуры, его база равна единице. Если же эта структура усложнена, например, линейной частотной модуляцией, ее значение увеличивается.

В нашем случае при попадании в луч радиолокатора любого из рассматриваемых опасных явлений, спектр принимаемого сигнала оказывается равным взвешенной по мощности сумме спектров отражений от двух воздушных масс — фона и зоны неоднородности. Происходит усложнение спектра, которое может быть зафиксировано посредством

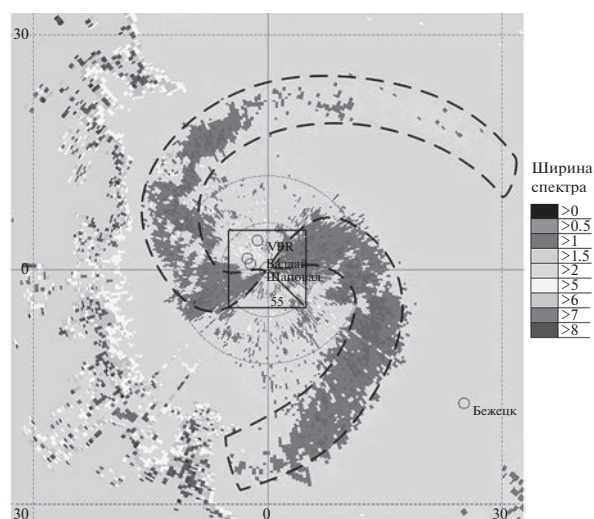


Рис. 1. Пример наблюдения слоя Экмана доплеровским метеорологическим радиолокатором.

оценивания параметра, аналогичного параметру базы импульса. Возникает вопрос, какие величины включать в формулу для расчета такого параметра. Очевидно, что аналогом ширины спектра импульса будет ширина энергетического спектра принимаемого случайного процесса. Аналог же длительности импульса логично искать в виде величины, связанной с шириной энергетического спектра преобразованием Фурье, как связаны между собой параметры, определяющие базу импульса. Очевидно, что это интервал корреляции принимаемых отражений.

Отличительной особенностью нового параметра является то, что, как показывают расчеты, он работает даже в таком сложном для распознавания случае, когда средние значения суммируемых спектров равны и различия состоят только в их ширине. Это имеет место при наблюдении, например, вертикального потока под малым углом места антенны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В метеорологической радиолокации оцениваются два спектральных параметра принимаемого сигнала — средняя частота и ширина его энергетического спектра. Только с их помощью возможно распознавание опасных явлений погоды, связанных с ветром. При этом наибольшее количество информации несет не величина самой оценки, а особенности ее распределения по объему наблюдаемой цели.

Сейчас в программах вторичной обработки информации современных радиолокаторов предпочтение отдается оценкам средней частоты спектра, как наиболее традиционным и хорошо проявившим себя в других областях радиолокации. Однако, как

показывает практика, использование этих оценок эффективно на небольших расстояниях, на которых размер разрешаемого элемента как минимум в два раза меньше размера самого явления.

Альтернативой является использование оценок ширины спектра. Но их применение ограничено лишь теми явлениями, что имеют большие размеры сразу по двум координатам. Остальные до сих пор остаются трудно распознаваемыми. Поскольку к ним относится такое особо опасное явление как смерч, актуален вопрос поиска новых методов их распознавания. По мнению авторов, в их основу могут быть положены оценки параметра базы принимаемого сигнала, определяемого как произведение ширины энергетического спектра сигнала на его интервал корреляции.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-19-00378).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуков В.Ю., Шукин Г.Г. // Матер. VI Всерос. науч. конф. "Проблемы военно-прикладной геофизики и контроля состояния природной среды". СПб., 16–18 сентября 2020. С. 40.
2. Довиак Р., Зрнич Д. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения. Л.: Гидрометеопиздат, 1988.
3. Жуков В.Ю., Кузнецов А.Д., Сероухова О.С. Интерпретация данных доплеровских метеорологических радиолокаторов. СПб.: РГГМУ, 2018.
4. Денисенков Д.А., Жуков В.Ю., Шукин Г.Г. // Гидрометеорология и экология. 2020. № 58. С. 9. <https://doi.org/10.33933/2074-2762-2020-58-9-19>
5. Денисенков Д.А., Жуков В.Ю., Кулешов Ю.В., Шукин Г.Г. // Метеорология и гидрология. 2020. № 12. С. 110.
6. Денисенков Д.А., Жуков В.Ю., Первушин Р.В., Шукин Г.Г. // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2016. № 3. С. 68.
7. Жуков В.Ю., Шукин Г.Г. // III Всерос. Арmandовские чтения: матер. IV Всерос. научн. конф. "Сверхширокополосные сигналы в радиолокации, связи и акустике". Муром. 25–27 июня 2013. Муром: Изд-во ВлГУ, 2013. С. 37.
8. Денисенков Д.А., Жуков В.Ю., Шукин Г.Г. // Тр. Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского. 2018. № 662. С. 124.
9. Денисенков Д.А., Жуков В.Ю., Кулешов Ю.В., Шукин Г.Г. // Метеорология и гидрология. 2021. № 5. С. 113. <https://doi.org/10.52002/0130-2906-2021-5-113-120>