

УДК 66.011

## ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС ПРИ НАГРЕВЕ И СУШКЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА В НЕПРЕРЫВНО ДЕЙСТВУЮЩЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВЫСОКОЙ И СВЕРХВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

©2024 г. С. П. Рудобашта<sup>a,\*</sup>, Э. М. Карташов<sup>b</sup>, Г. А. Зуева<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, Москва, Россия

<sup>b</sup>Российский технологический университет – МИРЭА (Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова), Москва, Россия

<sup>c</sup>Ивановский государственный химико-технологический университет, Иваново, Россия

\*e-mail: srudobashta@rgau-msha.ru

Поступила в редакцию 29.05.2024 г.

После доработки 28.06.2024 г.

Принята к публикации 06.07.2024 г.

Рассмотрен тепломассоперенос в теле сферической формы при его сушке в непрерывно действующем электромагнитном поле высокой и сверхвысокой частоты. Сформулирована и аналитически решена линейная (постоянство параметров процесса) задача нагрева сферического тела при этих видах энергоподвода в условиях его конвективной сушки и с учетом его конвективного тепло- и массообмена с внешней газовой средой как в общем случае, так и при сушке в первом периоде. В первом случае интенсивность сушки задана в виде некоторой функции времени, она выражена из аналитического решения задачи массопроводности (диффузии влаги) при условии, что испарение влаги происходит у поверхности тела. Во втором случае принято, что вся подводимая к телу теплота расходуется на испарение влаги и поэтому нагрев тела отсутствует и что парциальное давление пара у поверхности сферы равно давлению насыщенного пара при температуре поверхности сферы. При этом зависимость давления насыщенного пара от температуры описана уравнением Антуана. Решения задач нагрева получены применительно к локальной и средней по объему сферы температуре. На основе полученных решений проведено численное моделирование процессов тепло- и массообмена в условиях комбинированного конвективно-электромагнитного подвода энергии. Применительно к процессу с постоянной интенсивностью сушки выполнен численный анализ процесса испарения пленочной влаги с поверхности сферической частицы. Полученные решения позволяют рассчитывать процесс нагрева сферических тел при электромагнитном или комбинированном конвективно-электромагнитном подводе энергии.

**Ключевые слова:** сушка, сфера, электромагнитный нагрев, токи высокой и сверхвысокой частоты, конвективный тепломассообмен, аналитическое решение

**DOI:** 10.31857/S0040357124040124 **EDN:** AVFLJT

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наряду с традиционной конвективной сушкой значительное внимание уделяется электромагнитной сушке (сушке токами высокой и сверхвысокой частоты – ТВЧ- и СВЧ-сушке). Ее достоинством является выделение энергии во всем объеме высушиваемого дисперсного материала, находящегося в аппарате, что обеспечивает равномерность его сушки и при определенных условиях вызывает дополнительный (к диффузионному) перенос влаги из внутренних слоев частиц к их поверхности. Для анализа этого процесса успешно

применяется математическое моделирование [1–6].

Для математического моделирования электромагнитной сушки используются как численные [1–3], так и аналитические [4–6] модели. Достоинством первых является возможность использования для расчета решений нелинейных задач массо- и теплопроводности, для которых аналитические решения часто отсутствуют, достоинством вторых – прозрачность решения для анализа и возможность расчета конечных величин без прогона расчета через весь временной интервал. Отметим, что применение зонального метода расчета [7] позволяет рассчитывать кине-

тику и динамику сушки тела с учетом изменения теплофизических характеристик и других параметров в ходе процесса.

В [4–6] приведены аналитические математические модели теплопереноса при электромагнитной сушке тел разной формы при осциллирующем (прерывистом) электромагнитном энергоподводе. В [8, 9] показано, что при надлежащей интенсивности электромагнитного энергоподвода высушивать термолабильные материалы можно и при непрерывном электромагнитном подводе энергии без их перегрева. В [8, 9] представлены соответствующие решения для электромагнитного нагрева высушиваемых тел в форме неограниченной пластины и бесконечного цилиндра, иллюстрирующие эту возможность, в отличие от них в данной работе приведено решение для электромагнитного нагрева высушиваемого сферического тела. В [10] приведены математические модели для “чистого” (без массообмена) электромагнитного нагрева тела в форме пластины – при постоянном внутреннем источнике теплоты, а также при непрерывном источнике, зависящем от координаты по закону экспоненты.

Целью данной работы является разработка аналитической математической модели, описывающей процесс непрерывного электромагнитного нагрева влажного тела в форме сферы, учитывающей сток теплоты на испарение влаги и конвективный теплообмен поверхности тела с внешней газовой средой, в процессе которого может происходить либо дополнительный нагрев тела (при температуре внешней среды выше температуры поверхности тела), либо его охлаждение, когда температура поверхности тела выше температуры внешней среды. Отметим, что на практике в электромагнитном поле часто обрабатывается слой дисперсных частиц либо имеющих сферическую форму, либо их форма может быть уподоблена сферической через эквивалентный диаметр.

**Постановка и решение задачи непрерывного электромагнитного нагрева сферического тела при испарении из него влаги**

При сушке дисперсных материалов в аппарате, в котором происходит облучение материала по всей поверхности частиц, можно принять, что при ТВЧ- и СВЧ-сушке в силу большой глубины проникновения электромагнитного поля (ЭМП) во все частицы (тела) внутренний объемный источник теплоты  $q_v$  (Вт/м<sup>3</sup>) в каждой частице (теле) постоянен. Величину внутреннего объемного источника теплоты  $q_v$  можно определить из

теплового баланса аппарата, содержащего электромагнитный источник,

$$N_{em}\eta_t = q_v V = q_v V_{rab} (1 - \varepsilon), \quad (1)$$

откуда получаем

$$q_v = N_{em}\eta_t / (V_{rab} (1 - \varepsilon)), \quad (2)$$

где  $N_{em}$  – действующий внутри аппарата источник электромагнитной энергии, Вт;  $\eta_t$  – термический КПД источника;  $V$ ,  $V_{rab}$  – внутренний и рабочий объем аппарата соответственно, м<sup>3</sup>;  $(1 - \varepsilon)$  – доля рабочего объема, занятого материалом, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>. При известных размерах сферического тела количество сферических тел одинакового размера, загруженных в аппарат, составляет:

$$n = V_{rab}(1 - \varepsilon) / V_t,$$

где  $V_t = \pi d_t^3 / 6$  – объем одного тела, м<sup>3</sup>;  $d_t = 2R$ .

Примем, что все сферические тела, загруженные в аппарат, имеют одинаковый диаметр. С учетом вышеизложенного сформулируем задачу непрерывного электромагнитного нагрева влажного сферического тела в поле токов высокой или сверхвысокой частоты с учетом испарения из него влаги, приняв следующие условия и допущения:

- объемный источник теплоты в теле постоянен:  $q_v = \text{const}$ ;
- у поверхности тела имеет место его конвективный тепло- и массообмен с внешней газовой средой в соответствии с граничными условиями теплообмена [10] и массообмена [7] 3-го рода;
- температура внешней среды постоянна;
- в момент начала процесса температура в сфере распределена равномерно;
- все теплофизические характеристики процесса постоянны;
- сферическое тело равномерно облучается по поверхности;
- испарение влаги происходит у поверхности тела (внутренние фазовые стоки теплоты отсутствуют);
- усадка тела отсутствует.

С учетом изложенного сформулируем линейную одномерную (температура изменится только по радиальной координате) задачу непрерывного электромагнитного нагрева сферического тела, поместив начало координат в его центре, в виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) + q_v^*, \quad 0 < r < R, \tau > 0, \quad (3)$$

$$t(r, \tau) \Big|_{\tau=0} = t_n, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (4)$$

$$-\lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha \left[ t(r, \tau) \Big|_{r=R} - t_s \right] + r^* \cdot i, \quad \tau > 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (6)$$

где  $a, q_v^*, i, \lambda, r^*, \alpha, t_n, t_s = \text{const}$ .

Когда температура тела больше температуры внешней среды (за счет электромагнитного энергоподвода), то левая часть уравнения (5) положительна, и поскольку  $t(x, \tau) \Big|_{r=R} - t_s > 0$ , то имеет место теплоотдача с поверхности тела во внешнюю более холодную среду, кроме того, отводимая от тела теплота расходуется на испарение влаги:  $r^* i(\tau)$ . При  $t(r, \tau) \Big|_{r=R} - t_s < 0$  (температура внешней среды больше температуры тела) теплота из этой среды подводится к поверхности тела, часть ее расходуется на испарение влаги у его поверхности, а оставшаяся часть идет на нагрев тела. Таким образом, уравнение (5) учитывает как теплотери в окружающую холодную среду (при  $t(r, \tau) \Big|_{r=R} > t_s$ ), так и комбинированный нагрев тела за счет электромагнитного энергоподвода и подвода теплоты конвекцией от внешней горячей среды (при  $t(r, \tau) \Big|_{r=R} < t_s$ ).

В обоих случаях учитывается сток теплоты на испарение влаги.

Интенсивность сушки  $i$ , входящая в уравнение (5), зависит от условий внутреннего переноса влаги. Если в объеме материала в результате поглощения электромагнитной энергии происходит такое большое выделение тепла, что возникает избыточное давление, которое выдавливает жидкофазную влагу на поверхность тела, то с поверхности тела происходит ее испарение, и интенсивность сушки будет определяться закономерностями массоотдачи. Если же фильтрационный перенос влаги и термовлагопроводность малы, что имеет место при температуре материала ниже  $\approx 100^\circ\text{C}$  [7, 11], то перенос влаги происходит путем массопроводности (диффузии). В этом случае интенсивность сушки  $i$  может быть выражена из решения задачи массопроводности, она является функцией времени:  $i = i(\tau)$ .

Для этого случая воспользуемся аналитическим решением линейной задачи массопроводности для среднеобъемного влагосодержания в сферическом теле при граничном условии массообмена 3-го рода и при линейной равновесной зависимости [7]:

$$\bar{E} = \frac{\bar{u} - u_r}{u_n - u_r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6\text{Bi}_m^2}{\mu_k^2 (\text{Bi}_m^2 + \mu_k^2 - \text{Bi}_m)} \exp(-\mu_k^2 \text{Fo}_m), \quad (7)$$

из которого найдем скорость сушки  $\left| \frac{d\bar{u}}{d\tau} \right|$  и далее

запишем  $i(\tau)$  в виде:

$$i(\tau) = \left[ \frac{\rho_0}{3R} k \sum_{k=1}^{\infty} B_k \mu_k^2 \exp\left(-\mu_k^2 \frac{k \tau}{R^2}\right) \right] (\bar{u}_n - u_r), \quad (8)$$

где

$$B_k = \frac{6\text{Bi}_m^2}{\mu_k^2 (\text{Bi}_m^2 + \mu_k^2 - \text{Bi}_m)}, \quad (9)$$

$\mu_k$  – положительные корни характеристического уравнения:

$$\text{tg} \mu_k = \frac{\mu_k}{1 - \text{Bi}_m}. \quad (10)$$

Переходим в (3)–(6) к безразмерным переменным:

$$\rho = r / R; \quad \text{Fo} = a\tau / R^2; \quad \text{Bi} = \alpha R / \lambda;$$

$$q_0 = \frac{q_v^* R^2}{a(t_s - t_n)}; \quad A(\text{Fo}) = 1 - \frac{r^* i(\tau)}{\alpha(t_s - t_n)};$$

$$W(\rho, \text{Fo}) = \frac{t(r, \tau) - t_n}{t_s - t_n}.$$

Перепишем задачу (3)–(6) в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + q_0, \quad 0 < \rho < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad (11)$$

$$W(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial W(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = -\text{Bi} \left[ W(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\rho=1} - A(\text{Fo}) \right],$$

$\text{Fo} > 0, \quad (13)$

$$\frac{\partial W(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad \text{Fo} > 0. \quad (14)$$

Решение задачи (11)–(14) находим методом интегральных преобразований по таблицам Карташова [12]. Применяем интегральное преобразование:

$$\bar{W}(\mu_n, \text{Fo}) = \int_0^1 \rho^2 W(\rho, \text{Fo}) \psi_n(\rho) d\rho, \quad (15)$$

где  $\psi_n(\rho) = \frac{1}{\rho} \sin \mu_n \rho$ , изображение оператора:

$$\Delta W(\rho, \text{Fo}) = \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho};$$

$$\int_0^1 \rho^2 \Delta W(\rho, Fo) \psi_n(\rho) d\rho = \sin \mu_n \left( \frac{\partial W(\rho, Fo)}{\partial \rho} + Bi W(\rho, Fo) \right) \Big|_{\rho=1} - \mu_n^2 \bar{W}(\mu_n, Fo); \tag{16}$$

и формулу обращения:

$$W(\rho, Fo) = \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + (Bi-1)^2) \sin(\mu_n \rho) \bar{W}(\mu_n, Fo)}{\mu_n^2 + Bi(Bi-1)}, \tag{17}$$

Здесь  $\mu_n > 0$  – корни уравнения  $\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu}{1 - Bi}$ .

Соотношения (15)–(17) приводят к решению для локальной температуры в безразмерных переменных:

$$W(\rho, Fo) = \frac{2Bi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + (Bi-1)^2) \sin \mu_n \sin(\mu_n \rho)}{\mu_n^2 + Bi(Bi-1)} \int_0^{Fo} A(\tau) \exp(-\mu_n^2 (Fo - \tau)) d\tau + \frac{2q_0 Bi}{(1 - Bi)\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + (Bi-1)^2) \cos \mu_n \sin(\mu_n \rho) (1 - \exp(-\mu_n^2 Fo))}{\mu_n^3 (\mu_n^2 + Bi(Bi-1))}. \tag{18}$$

Здесь был использован интеграл:

$$\int_0^1 \rho \sin(\mu_n \rho) d\rho = \frac{Bi}{(1 - Bi)} \frac{\cos \mu_n}{\mu_n}.$$

Средняя по объему сферического тела температура находится по формуле:

$$\bar{W}(Fo) = \frac{1}{(4/3)\pi} \int_0^1 \rho^2 W(\rho, Fo) d\rho \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \tag{19}$$

Тогда находим:

$$\bar{W}(Fo) = \frac{3Bi^2}{(1 - Bi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + (Bi-1)^2) \sin 2\mu_n}{\mu_n (\mu_n^2 + Bi(Bi-1))} \int_0^{Fo} A(\tau) \exp(-\mu_n^2 (Fo - \tau)) d\tau + \frac{6q_0 Bi^2}{(1 - Bi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + (Bi-1)^2) \cos^2 \mu_n (1 - \exp(-\mu_n^2 Fo))}{\mu_n^4 (\mu_n^2 + Bi(Bi-1))}. \tag{20}$$

В некоторых случаях может иметь место сушка сферического тела в первом периоде (периоде постоянной скорости сушки). Для него можно принять, что вся подводимая к телу теплота расходуется на испарение влаги и температура тела в процессе теплообмена не изменяется. Процессу теплообмена тела при этом соответствует стационарная задача:

$$a \left( \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dt}{dr} \right) + q_v^* = 0, 0 < r < R, \tag{21}$$

$$-\lambda \frac{dt(r)}{dr} \Big|_{r=R} = \alpha \left[ t(r) \Big|_{r=R} - t_s \right] + r^* \cdot i_1, \tag{22}$$

$$\frac{dt}{dr} \Big|_{r=0} = 0, r=0, \tag{23}$$

где  $a, q_v^*, r^*, \lambda, \alpha, i_1, R, t_s = \text{const}$ .

Найдем решение задачи (21)–(23), введем безразмерные переменные:

$$\rho = r / R; Bi = \alpha R / \lambda; q_1 = \frac{q_v^* R^2}{\alpha t_s}; A_1 = 1 - \frac{r^* i_1}{\alpha t_s};$$

$$W(\rho) = \frac{t(r)}{t_s}. \tag{24}$$

Тогда задача (21)–(23) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dW}{d\rho} + q_1 = 0, 0 < \rho < 1; \tag{25}$$

$$\frac{dW(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = -Bi \left[ W(\rho) \Big|_{\rho=1} - A_1 \right]; \tag{26}$$

$$\frac{dW(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = 0. \tag{27}$$

Находим решение, применяя формулы (15)–(17):

$$W(\rho) = \frac{2Bi A_1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + (Bi-1)^2) \sin \mu_n \sin(\mu_n \rho)}{\mu_n^2 (\mu_n^2 + Bi(Bi-1))} + \frac{2q_1 Bi}{(1 - Bi)\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + (Bi-1)^2) \cos \mu_n \sin(\mu_n \rho)}{\mu_n^3 (\mu_n^2 + Bi(Bi-1))}. \tag{28}$$

Средняя по объему сферического тела температура:

$$\bar{W} = \frac{3\text{Bi}^2 A_1}{(1 - \text{Bi})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + (\text{Bi}-1)^2) \sin 2\mu_n}{\mu_n^3 (\mu_n^2 + \text{Bi}(\text{Bi}-1))} + \frac{6q_1 \text{Bi}^2}{(1 - \text{Bi})^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + (\text{Bi}-1)^2) \cos^2 \mu_n}{\mu_n^4 (\mu_n^2 + \text{Bi}(\text{Bi}-1))}. \quad (29)$$

Выполним анализ полученных решений.

**Пример 1.** Нагрев и сушка сферических тел, загруженных в аппарат, при комбинированном конвективно-электромагнитном теплоподводе.

Рассмотрим аппарат цилиндрической формы с псевдооживленным слоем диаметром  $D_a = 1$  м, имеющий рабочий объем  $V_{rab} = 0.25$  м<sup>3</sup>. При этих значениях  $D_a$  и  $V_{rab}$  высота неподвижного слоя частиц в аппарате составляет 0.32 м, что приемлемо. Чисто электромагнитный энергоподвод нецелесообразен из-за того, что при продувке слоя не нагретым предварительно атмосферным воздухом происходит сток части теплоты, подведенной с помощью электромагнитного источника, к этому воздуху. Это снижает тепловой КПД аппарата. Поэтому целесообразно осуществлять комбинированный конвективно-электромагнитный подвод энергии.

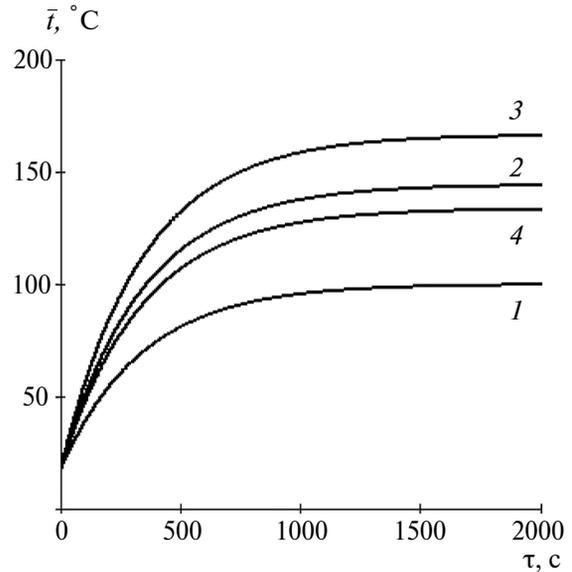
Проанализируем на основе полученного уравнения (20) влияние параметров процесса на кинетику нагрева и сушки сферических тел, находящихся в аппарате. Принятые в расчете данные приведены в табл. 1.

Приведенным выше значениям  $r^*$ ,  $\alpha$ ,  $t_s$  и  $t_n$  соответствует выражение для функции  $\varphi(\text{Fo})$ :  $\varphi(\text{Fo}) = 1 - r^* i(\text{Fo}) / (\alpha(t_s - t_n)) = 1 - 1.2 \cdot 10^5 i(\text{Fo})$ . При  $\text{Bi} = 0.08$  задача теплообмена является внешней (контролируется внешним теплообменом), а задача массообмена при  $R = 0.004$  м и величине коэффициента массопроводности  $k = 0.5 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с – внутренней [8], поэтому в соответствии с последним условием будем использовать решение задачи массопроводности при  $\text{Bi}_m = 100$  [7]. При заданных значениях параметров, приведен-

ных в табл. 1, по уравнению (20) были рассчитаны функции  $\bar{W}(\text{Fo})$ , показанные на рис. 1. Согласно уравнению (8), интенсивность сушки  $i$  зависит от  $k$ , поэтому при анализе влияния интенсивности сушки на кинетику нагрева задавали величину  $k$ .

На рис. 1 приведены кривые нагрева сферического тела, рассчитанные при указанных выше условиях.

Кривая 1 на графике рассчитана для сферического тела при отсутствии испарения из него влаги как по уравнению (20), так и по уравнению для чисто конвективного теплообмена (без электромагнитного энергоподвода) при граничном условии теплообмена 3-рода, приведенном в [10]. Оба расчета полностью идентичны, что подтверждает корректность уравнения (20). Кривые 2 и 3 отображают изменение температуры



**Рис. 1.** Расчетные кривые  $\bar{t} - f(\tau)$ : 1 – при  $N_{em} = 0$  и  $k = 0$ ; 2 – при  $N_{em} = 50$  кВт и  $k = 0$ ; 3 – при  $N_{em} = 75$  кВт и  $k = 0$ ; 4 – при  $N_{em} = 50$  кВт и  $k = 0.5 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с ( $t_s = 100^\circ\text{C}$ ).

**Таблица 1.** Данные для расчета в примере 1

Принято	$t_s = 100^\circ\text{C}$ ; $t_n = 18^\circ\text{C}$ ; $\lambda = 0.5$ Вт/(м·К); $c = 1250$ Дж/(кг·К); $\rho_t = 2000$ кг/м <sup>3</sup> ; $\eta_t = 0.9$ ; $\varepsilon = 0.45$ ; $r^* = 2400 \cdot 10^3$ Дж/кг; $R = 0.004$ м; $\bar{u}_n = 0.25$ кг/(кг сух. м-ла); $u_r^* = 0$ ; $\alpha = 10$ Вт/(м <sup>2</sup> ·К); $k = 0.5 \cdot 10^{-10}$ м <sup>2</sup> /с. Следовательно: $\text{Bi} = \alpha R / \lambda = 10 \cdot 0.004 / 0.5 = 0.08$ ; $a = \lambda / (c \rho_t) = 0.5 / (1250 \cdot 2000) = 2 \cdot 10^{-7}$ м <sup>2</sup> /с.	
	при $N_{em} = 50 \cdot 10^3$ , Вт	при $N_{em} = 75 \cdot 10^3$ , Вт
Рассчитанные значения		
$q_v$ , Вт/м <sup>3</sup>	$3.273 \cdot 10^5$	$4.91 \cdot 10^5$
$q_v^*$ , °C/с	0.131	0.196
$q_0$ , 1/с	5.240	7.84

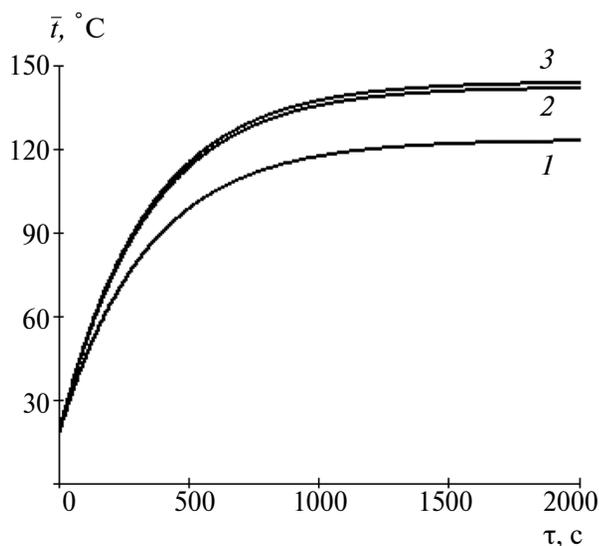
сферического тела при комбинированном электромагнитно-энергоподводе — соответственно при мощности электромагнитного источника 50 и 100 кВт. Как видно из рисунка, добавление к конвективному энергоподводу подвода энергии с помощью электромагнитного источника приводит к более быстрому нагреву сферического тела. Если при чисто конвективном теплообмене температура тела асимптотически стремится к  $100^\circ\text{C}$ , то при дополнительном электромагнитном энергоподводе она уже превышает это значение. Кривая 4 иллюстрирует влияние массообмена на теплообмен. Имеющее место в этом случае испарительное охлаждение тела замедляет процесс нагрева тела, о чем свидетельствует сравнение кривых 2 и 4. Проведенный анализ показывает, что разработанная математическая модель достоверно описывает процессы тепло- и массообмена как при чисто конвективном, так и при комбинированном конвективно-электромагнитном подводе энергии к материалу при его термообработке в аппарате.

Проанализируем далее влияние массообмена на теплообмен. В этих расчетах будем варьировать величину коэффициента массопроводности  $k$ , оставляя остальные параметры процесса неизменными — такими, как они приведены в табл. 1. На рис. 2 показаны графики нагрева сферического тела при различных значениях коэффициента массопроводности.

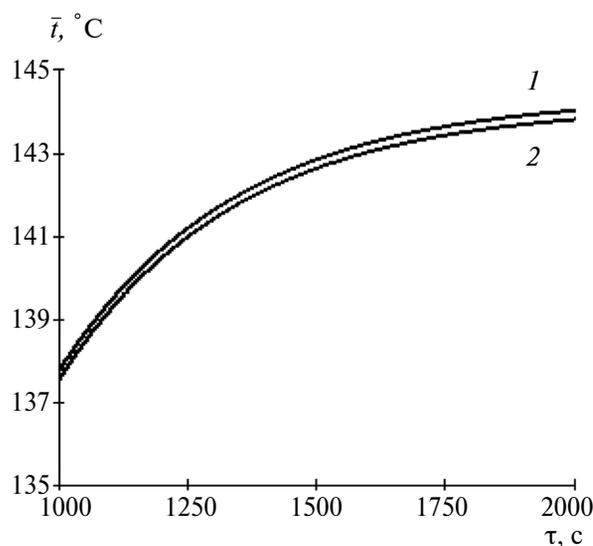
Как видно из рис. 2, при  $k = 1 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ ; и  $k = 1 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$  испарение влаги из материала

оказывает большое влияние на кинетику нагрева тела. При  $k = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$  испарение влаги происходит не интенсивно, и оно уже почти не влияет на кинетику нагрева тела. Это наглядно иллюстрирует рис. 3, на котором сопоставлены кривые нагрева с испарением влаги из материала при  $k = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$  и в отсутствие такового. Как видно, кривые 1 и 2 на рисунке почти совпадают.

**Пример 2.** Проанализируем решение (28), описывающее стационарный теплообмен при  $i = \text{const}$ . Условие  $i = \text{const}$  может иметь место, когда сушка тела происходит в первом периоде (периоде постоянной скорости сушки) или когда на поверхности тела имеется тонкая пленка воды толщиной  $\delta$ , испарение которой предваряет собственно процесс сушки тела. Второй случай может иметь место, например, при сушке гранул полимеров после их промывки. Сушка пленки воды протекает также в первом периоде. Сравним чисто конвективную сушку с комбинированной конвективно-электромагнитной сушкой, при которой теплота подводится как с нагретым сушильным агентом, так и с помощью электромагнитного поля. Интенсивность сушки в первом периоде рассчитывают по уравнению массоотдачи, в котором концентрацию пара у поверхности испарения определяют по температуре поверхности испарения, при конвективной сушке она равна температуре мокрого термометра. При комбинированной конвективно-электромагнитной сушке температура поверхности испарения



**Рис. 2.** Влияние испарения влаги на кинетику нагрева сферического тела — расчет по уравнению (20) при  $N_{em} = 50 \text{ кВт}$  и  $t_s = 100^\circ\text{C}$ : 1 —  $k = 1 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ ; 2 —  $k = 1 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$ ; 3 —  $k = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$ .



**Рис. 3.** Кривые нагрева при  $N_{em} = 50 \text{ кВт}$ ;  $t_s = 100^\circ\text{C}$ : 1 — в отсутствие испарения; 2 — с испарением при  $k = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$ .

выше температуры мокрого термометра. Ее можно рассчитать по уравнению (28).

Запишем для этого уравнение массоотдачи:

$$i_1 = \beta_c(C_{s,p} - C_s) = \beta_p(p_{par,p} - p_{par,s}), \quad (30)$$

где  $\beta_c$ ,  $\beta_p$  – коэффициенты массоотдачи, отнесенные соответственно к разности концентраций пара в сушильном агенте и к разности парциальных давлений пара;  $C_{s,p}$ ,  $C_s$  – концентрация пара соответственно у поверхности тела и в ядре потока внешней фазы (в среде), кг/м<sup>3</sup>;  $p_{par,p}$ ,  $p_{par,s}$  – давление пара соответственно у поверхности испарения и в ядре потока внешней фазы (в среде), Па. Примем, что сушильный агент является абсолютно сухим, тогда  $C_s = p_{par,s} = 0$ . Примем далее  $N_{em} = 25$  кВт,  $t_s = 100^\circ\text{C}$ ;  $t_n = 18^\circ\text{C}$ ;  $\lambda = 0.5$  Вт/(м·К);  $c = 1250$  Дж/(кг·К);  $\rho_w = 2000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\eta_l = 0,9$ ;  $\varepsilon = 0,45$ ;  $R = 0,004$  м; (тогда  $a = 2 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с);  $\bar{u}_n = 0,25$  кг/(кг сух. м-ла);  $u_r^* = 0$ ;  $\alpha = 10$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) (следовательно,  $Bi = \alpha R/\lambda = 10 \cdot 0,004/0,5 = 0,08$ );  $\delta = 0,0002$  м. Параметр  $A_1$  в решении (28) равен (см.

зависимости (24)):  $A_1 = 1 - \frac{r^* i_1}{\alpha t_s}$ , а теплота паро-

образования  $r^*$  определяется температурой поверхности тела  $t_p$ .

Продолжительность испарения пленки воды с поверхности сферического тела  $\tau_1$  найдем из соотношения:  $\tau_1 = M_w/(i_1 F)$ , где  $i_1$  – интенсивность испарения влаги, кг/(м<sup>2</sup>·с);  $F$  – поверхность сферического тела, равная:  $F = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 0,004^2 = 2,01 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>;  $M_w$  – масса воды на поверхности тела, равная:  $M_w = F \delta \cdot \rho_w = 2,01 \cdot 10^{-4} \cdot 0,0002 \cdot 1000 = 0,402 \cdot 10^{-4}$  кг (здесь плотность воды принята равной  $\rho_w \cong 1000$  кг/м<sup>3</sup>).

Коэффициент массоотдачи  $\beta_c$  пересчитаем из коэффициента теплоотдачи, используя соотношение [13]:

$$\frac{\alpha}{\beta_c} = \rho_s c_p \frac{P - p_{par,sr}}{P}, \quad (31)$$

где  $p_{par,sr}$  – среднее парциальное давление пара в пограничном слое, Па, которое принимаем равным:  $p_{par,sr} = (p_{par,p} + p_{par,s})/2 = p_{par,p}/2$ ;  $\rho_s c_p$  – объемная изобарная теплоемкость воздуха (Дж/(м<sup>3</sup>·К), равная  $\rho_s c_p = 1300$  Дж/(м<sup>3</sup>·К) [14].

Коэффициент массоотдачи  $\beta_c$  пересчитываем далее в коэффициент массоотдачи  $\beta_p$  по соотношению [13, 15]:

$$\beta_p = \beta_A / (R_{par}^* T_{sr}), \quad (32)$$

где  $T_{sr} = \frac{T_p + T_s}{2}$  – средняя температура пограничного слоя, К [15].

Парциальное давление пара у поверхности

испарения будем находить по уравнению Антуана [16], считая пар насыщенным ( $p_{par,p} = p_{nas}$ ):

$$p_{nas} = 10^5 \exp(A - B/(T - C))/760, \quad (33)$$

где  $p_{nas}$  – давление насыщенного пара при температуре  $t_p$ , Па;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – константы, для воды равные:  $A = 18,3036$ ;  $B = 3816,44$ ;  $C = 46,13$ ;  $T = t + 273$ , К.

Расчет интенсивности испарения по уравнению (30) будем проводить методом последовательных приближений в следующей последовательности: 1) задаем произвольно температуру поверхности тела  $t_p$ ; 2) по этой температуре по уравнению Антуана рассчитываем давление насыщенного пара  $p_{nas}$ ; 3) по уравнению (31) пересчитываем коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  в коэффициент массоотдачи  $\beta_c$ , который затем пересчитываем в коэффициент  $\beta_p$  по уравнению (32); 4) по уравнению (30) рассчитываем интенсивность испарения  $i_1$ ; 5) по уравнению (28) определяем температуру поверхности тела  $t_p$  и сопоставляем ее с предварительно заданной; 6) при несовпадении рассчитанной температуры  $t_p$  с предварительно принятой по рассчитанной температуре  $t_p$  по уравнению Антуана определяем новое значение  $p_{nas}$  и повторяем расчет (вторая итерация). Итерации повторяем до нужного совпадения предыдущего и последующего значений  $t_p$ ; 7) получив необходимое совпадение значений  $t_p$ , по уравнению (30) находим окончательно интенсивность испарения  $i_1$ .

По данной методике была рассчитана интенсивность испарения пленки воды толщиной  $\delta = 0,2$  мм с поверхности сферической гранулы диаметром в  $d = 0,004$  м и продолжительность процесса  $\tau_1$ :

1) при конвективной сушке при температуре  $t_s = 100^\circ\text{C}$ , влагосодержании воздуха  $X_s = 0$  (абсолютно сухой воздух) и  $N_{em} = 0$ ;

2) при конвективно-электромагнитной сушке при  $t_s = 100^\circ\text{C}$ ,  $X_s = 0$  и дополнительном электромагнитном энергоподводе  $N_{em} = 25$  кВт.

Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Приведенные в табл. 2 результаты расчетов показывают, что наложение электромагнитного поля в рассматриваемом примере приводит к интенсификации испарения за счет повышения температуры поверхности материала и, как следствие, увеличения давления пара у его поверхности. Электромагнитная мощность  $N_{em} = 25$  кВт существенно повышает интенсивность испарения и, соответственно, сокращает продолжительность процесса на 21,5%. Это показывает целесообразность применения комбинированного (конвективно-электромаг-

**Таблица 2.** Влияние электромагнитного энергоподвода на интенсивность сушки в первом периоде

$t_s, \text{ }^\circ\text{C}$	$N_{em} = 0 \text{ кВт}$			$N_{em} = 25 \text{ кВт}$		
	$t_p = t_{m,t}, \text{ }^\circ\text{C}$	$i_1, \text{ кг}/(\text{м}^2 \text{ ч})$	$\tau_1, \text{ с}$	$t_p, \text{ }^\circ\text{C}$	$i_{1,em}, \text{ кг}/(\text{м}^2 \text{ ч})$	$\tau_{1,em}, \text{ с}$
100	34.5	0.00027	748	38.9	0.00034	588

нитного) подвода энергии для удаления поверхностной влаги.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

1. Получено аналитическое решение задачи нагрева влажного сферического тела в электромагнитном поле высокой и сверхвысокой частоты, которое учитывает сток теплоты на испарение влаги и конвективный теплообмен тела с окружающей газовой средой.

2. В качестве частного случая получено также аналитическое решение задачи нагрева сферического тела при условии, что сушка тела протекает в периоде ее постоянной скорости.

3. Выполнен анализ полученных решений для различных случаев тепло-и массообмена, иллюстрирующий влияние отдельных параметров на кинетику процесса.

4. Применительно к случаю постоянной скорости сушки изложена методика расчета интенсивности сушки и продолжительности процесса.

**ОБОЗНАЧЕНИЯ**

$A_r = u_r/C_s$	коэффициент распределения функции концентрационного фазового равновесия, $(\text{кг}/(\text{кг сух. м-ла})/(\text{кг}/\text{м}^3))$
$a$	коэффициент температуропроводности сферического тела, $\text{м}^2/\text{с}$
$C_s$	концентрация пара в ядре потока внешней фазы (в среде), $\text{кг}/\text{м}^3$
$c$	массовая теплоемкость сферического тела, $\text{Дж}/(\text{кг К})$
$c_p$	изобарная массовая теплоемкость воздуха, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$
$D_a$	диаметр аппарата, м
$d = 2R$	диаметр сферического тела, м
$F$	поверхность сферического тела, $\text{м}^2$
$i$	интенсивность сушки, $\text{кг}/(\text{м}^2 \text{ с})$
$k$	коэффициент массопроводности, $\text{м}^2/\text{с}$
$M$	масса, кг
$N_{em}$	мощность электромагнитного источника в аппарате, Вт
$q_v = \frac{N_{em}}{V(1-\varepsilon)}$	мощность электромагнитного источника в аппарате, отнесенная

$q_v^* = \frac{q_v}{c_p}$	к единице объема твердой фазы, $\text{Вт}/(\text{м}^3 \text{ тв. фазы})$
$q_0 = \frac{q_v^* R^2}{a(t_s - t_n)}$	мощность электромагнитного источника в аппарате, отнесенная к единице объема твердой фазы и к ее объемной теплоемкости, $^\circ\text{C}/\text{с}$
$P = 0.98 \cdot 10^5$	общее давление сушильного агента, Па
$r$	радиальная координата, м
$R$	радиус сферического тела, м
$R_{par}^* = 462$	газовая постоянная водяного пара, $\text{Дж}/(\text{кг К})$
$V$	внутренний объем аппарата, $\text{м}^3$
$r^*$	теплота парообразования, включая теплоту десорбции влаги, $\text{Дж}/\text{кг}$
$t$	локальная температура в сферическом теле, $^\circ\text{C}$
$\bar{t}$	среднеобъемная температура сферического тела, $^\circ\text{C}$
$T$	температура, К
$u, \bar{u}$	локальное и среднее по объему сферического тела влагосодержание соответственно, $\text{кг}/(\text{кг сух. м-ла})$
$u_r$	равновесное влагосодержание, $\text{кг}/(\text{кг сух. м-ла})$
$r$	радиальная координата, м
$\alpha$	коэффициент теплоотдачи, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$
$\beta_c$	коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентраций пара в сушильном агенте, $\text{м}/\text{с}$
$\beta_p$	коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности парциальных давлений пара $(\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с Па}))$
$\varepsilon$	доля свободного объема аппарата, $\text{м}^3/\text{м}^3$
$\delta$	толщина пленки воды на поверхности сферического тела, м
$\lambda$	коэффициент теплопроводности сферического тела, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$
$\rho = r/R$	относительная координата
$\rho_s$	плотность сушильного агента (воздуха), $\text{кг}/\text{м}^3$
$\rho_t$	плотность сферического тела, $\text{кг}/\text{м}^3$
$\rho_0$	плотность абсолютно сухого сферического тела, $\text{кг}/\text{м}^3$
$\rho_w$	плотность воды, $\text{кг}/\text{м}^3$

$\tau$	время, с
$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$	число Био тепловое, безразмерное
$Bi_m = \frac{\beta_c R}{k \rho_0 A_r}$	число Био массообменное, модифицированное, безразмерное
$\bar{E} = \frac{\bar{u}(\tau) - u_r}{u_n - u_r}$	среднеобъемное относительное влагосодержание сферического тела, безразмерное
$Fo = a \tau / R^2$	число Фурье тепловое, безразмерное
$Fo_m = k \tau / R^2$	число Фурье массообменное, безразмерное

## ИНДЕКСЫ

<i>a</i>	аппарат
<i>em</i>	электромагнитный
<i>k</i>	конечный
<i>m</i>	массообменный
<i>m.t</i>	мокрый термометр
<i>n</i>	начальный
<i>nas</i>	состояние насыщения
<i>p</i>	поверхность сферического тела
<i>par</i>	пар
<i>r</i>	равновесный
<i>rab</i>	рабочий
<i>s</i>	сушильный агент
<i>sr</i>	среднее значение
<i>t</i>	тело
<i>w</i>	вода
<i>1</i>	первый период сушки

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bon J., Kudra T.* Enthalpy-Driven Optimization of Intermittent Drying // *Drying Technology*. 2007. V. 25. Issue 4. P. 523.
2. *Vaquirol H.A., Clemente G., Garcia-Perez J.V., Mulet A., Bon J.* Enthalpy-driven optimization of intermittent drying of *Mangifera indica* L // *Chem. Eng. Res. Design*. 2009. V. 87. P. 885.
3. *Акулич П.В., Темрук А.В., Акулич А.В.* Моделирование и экспериментальное исследование тепло- и влагопереноса при СВЧ-конвективной сушке растительных материалов // *Инж.- физ. журнал*. 2012. Т. 85. № 5. С. 951.
4. *Rudobashta S.P., Zuev N.A., Kartashov E.M.* Heat and mass transfer in drying in an oscillating electromagnetic field // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2011. V. 45. № 6. P. 830. [Рудобашта С.П., Карташов Э.М., Зуев Н.А. Теплоперенос при сушке в осциллирующем электромагнитном поле // *Теорет. основы хим. технологии*. 2011. Т. 45. № 6. С. 641.]
5. *Rudobashta S.P., Zuev N.A., Kartashov E.M.* Heat and mass transfer when drying a spherical particle in an oscillating electromagnetic field // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2016. V. 50. № 5. P. 718. [Рудобашта С.П., Зуева Г.А., Карташов Э.М. Теплоперенос при сушке сферической частицы в осциллирующем электромагнитном поле // *Теорет. основы хим. технологии*. 2016. Т. 50. № 5. С. 539.]
6. *Rudobashta S.P., Zueva G.A., Kartashov E.M.* Heat and mass transfer in the drying of a cylindrical body in an oscillating electromagnetic field // *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2018. V. 91. № 1. P. 227.
7. *Рудобашта С.П.* Массоперенос в системах с твердой фазой, Москва: Химия. 1980.
8. *Rudobashta S.P., Kartashov E.M., Zueva G.A.* Heat and mass transfer in drying of a plate in a continuous high- and superhigh-frequency electromagnetic field // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2021. V. 55. № 2. P. 261. [Рудобашта С. П., Карташов Э.М., Зуева Г.А. Теплоперенос при сушке пластины в непрерывно действующем электромагнитном поле высокой и сверхвысокой частоты // *Теорет. основы хим. технологии*. 2021. Т. 55. № 2. С. 195.]
9. *Rudobashta S.P., Kartashov E.M., Zueva G.A.* Heat and mass transfer in the drying of a cylindrical body in a continuous electromagnetic field of high and superhigh frequency // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2022. V. 56. № 5. P. 810. [Рудобашта С.П., Карташов Э.М., Зуева Г.А. Теплоперенос при сушке цилиндрического тела в непрерывно действующем электромагнитном поле высокой и сверхвысокой частоты // *Теорет. основы хим. технологии*. 2022. Т. 56. № 5. С. 648.]
10. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1968.
11. *Лыков А.В.* Теория сушки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Энергия. 1968.
12. *Рудобашта С.П., Карташов Э.М.* Химическая технология: диффузионные процессы. Ч. 2. М.: Юрайт. 2018.
13. *Krischer O.* Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik. Heidelberg: Springer-Verlag, 1957.
14. *Рабинович О.М.* Сборник задач по технической термодинамике. М.: Машиностроение, 1969.
15. *Лыков А.В.* Теория сушки. М.-Л.: Госэнергоиздат. 1950.
16. *Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1982.
17. *Александров А.А., Григорьев Б.А.* Таблицы теплофизических свойств воды и водяного пара. М.: Изд. МЭИ. 2006.