

УДК 533.9...1

ПЫЛЕВЫЕ ПОТОКИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ПЫЛЕ-АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В ПЛАЗМЕ

© 2023 г. А. Е. Дубинов^{1, 2, *}, И. Н. Китаев^{1, 2}

¹Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский
научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Россия

²Саровский физико-технический институт – филиал НИЯУ
“Московский инженерно-физический институт”, Саров, Россия

*E-mail: dubinov-ae@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.03.2022 г.

После доработки 04.05.2022 г.

Принята к публикации 07.06.2022 г.

Построена линейная теория гармонических пыле-акустических волн в пылевой плазме. В ее рамках установлен закон дисперсии таких волн и выведена формула для скорости пылевого звука. Развита также нелинейная теория пыле-акустических волн, в рамках которой получена формула для псевдопотенциала Сагдеева. Ее анализ показал существование дозвуковых периодических пыле-акустических волн и сверхзвуковых пыле-акустических солитонов. Вычислены средние потоки пылинок в периодической пыле-акустической волне и в последовательности пыле-акустических солитонов. Показано, что поток пылинок в периодической пыле-акустической волне направлен против фазовой скорости волны и, наоборот, поток пылинок переносится солитонами в направлении своего движения.

DOI: 10.31857/S0040364423010040

ВВЕДЕНИЕ

Пыле-акустические волны (ПАВ) в запыленной плазме были предсказаны в 1990 г. [1]. Первые экспериментальные наблюдения ПАВ осуществлены в [2–4]. В [5] наблюдалась дифракция ПАВ на преграде, а в [6] – отражение от потенциального барьера. Были проведены исследования ПАВ в условиях невесомости на международной космической станции [7, 8].

Дисперсионные соотношения для ПАВ измерялись в [9–12]. Нелинейная теория и результаты экспериментов с ПАВ представлены в многочисленных статьях (например, [13–15]). Теоретически и экспериментально изучены следующие формы ПАВ: периодические ПАВ [16, 17], ударные ПАВ [18–20], пыле-акустические солитоны (ПА-солитоны) [1, 21, 22], ПА-суперсолитоны [23], ПА-волны-убийцы [24–27], обратные ПАВ [28, 29], цилиндрические и сферические ПА-солитоны [13, 30, 31]. Рассматривались также характеристики ПАВ в плазмах с различными энергетическими распределениями легких частиц, отличными от максвелловских [32–35].

В [36] представлен обзор исследований ПАВ за 25-летний период после их открытия, в котором отмечено значение этих волн для фундаментальной физики плазмы, для понимания природных явлений в космосе, таких как планетарные кольца [37], ионосфера Земли и планет [38, 39], хвосты комет [20, 40], и в прикладных исследованиях, на-

пример агломерации твердых микрочастиц в процессах плазменных технологий.

Важным, но пока не выясненным до конца вопросом в понимании особенностей ПАВ в частности и нелинейных электростатических волн в общем остается вопрос о потоках частиц, переносимых этими волнами. В рамках данной проблемы в [41] рассматривались потоки частиц, возбуждаемые последовательностями солитонов: потоки ионов в ионно-акустических солитонах и потоки пылинок в ПА-солитонах. В работах [42, 43] развит новый подход к вычислению потоков частиц в ионно-акустических периодических и уединенных волнах, основанный на прямом решении нелинейных уравнений, описывающих волну. В связи с этим возникает задача вычисления потоков пылинок, возбуждаемых нелинейными периодическими ПАВ и ПА-солитонами.

В данной работе вычисляются пылевые потоки в периодических и уединенных ПАВ в рамках наиболее простой модели плазмы с пылинками, несущими фиксированный заряд, и в отсутствие трения пылинок о газ по методу, развитому в работах [42, 43].

ВЫВОД И АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПАВ

Получим дисперсионное соотношение для ПАВ при одномерной постановке задачи в рамках простой модели запыленной плазмы – модели бес-

столкновительной немагнитиченной квазинейтральной плазмы, в которой все пылинки имеют одинаковые массы и постоянные по времени электрические заряды. Электроны и ионы будем считать безынерционными и распределенными по закону Больцмана:

$$n_{e,i} = n_{0e,i} \exp\left(\pm \frac{e\phi}{k_B T_{e,i}}\right),$$

где $n_{e,i}$ – концентрации электронов и ионов, $n_{0e,i}$ – концентрации электронов и ионов в точках квазинейтральности плазмы, $T_{e,i}$ – их температуры, ϕ – электростатический потенциал, e – элементарный заряд, k_B – постоянная Больцмана, знак “плюс” используется для электронов.

Будем исходить из следующих газодинамических уравнений динамики пылевой фракции плазмы:

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial(n_d v_d)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_d}{\partial t} + v_d \frac{\partial v_d}{\partial z} = \frac{q_d}{m_d} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{m_d n_d} \frac{\partial p_d}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi e(n_e - n_i + q_d n_d), \quad (3)$$

в которых q_d – средний электрический заряд пылинок; m_d – их масса; v_d , n_d , p_d – переменные скорость, концентрация и газодинамическое давление пылевой фракции плазмы.

Предположим, что пылевая фракция плазмы подчиняется уравнению состояния идеального газа $p_d = n_d k_B T_d$, и будем считать, что ее температура $T_d = \text{const}$.

Придадим плазме волновое гармоническое возмущение малой амплитуды:

$$n_d = n_{0d} + \hat{n}_d \exp[i(kz - \omega t)], \quad (4)$$

$$v_d = \hat{v}_d \exp[i(kz - \omega t)], \quad (5)$$

$$\phi = \hat{\phi} \exp[i(kz - \omega t)], \quad (6)$$

в которых малые амплитуды возмущений помечены крышечками.

Подставим (4)–(6) в уравнения (1)–(3). После линеаризации и несложных алгебраических вычислений получим дисперсионное соотношение в канонической форме

$$1 = -\frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} + \frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2 - \omega_{pd}^2 \lambda_{Dd}^2 k^2}, \quad (7)$$

или в форме, разрешенной относительно частоты ω ,

$$\omega = \omega_{pd} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + \lambda_{De}^{-2} + \lambda_{Di}^{-2}} + \lambda_{Dd}^2 k^2}, \quad (8)$$

в которых приняты следующие обозначения:

$$\omega_{pd}^2 = \frac{4\pi q_d^2 n_{0d}}{m_d}, \quad \lambda_{De,i,d}^2 = \frac{k_B T_{e,i,d}}{4\pi e^2 n_{0e,i,d}}.$$

Отметим, что (7) отличается от дисперсионного соотношения ПАВ из [29] последним слагаемым, где был учтен стационарный поток пылинок. Из (8) можно найти линейную скорость ПАВ – скорость пылевого звука:

$$c_s = \lim_{k \rightarrow \pm 0} \frac{\omega}{k} = \pm \omega_{pd} \sqrt{\frac{\lambda_{De}^2 \lambda_{Di}^2}{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2} + \lambda_{Dd}^2}. \quad (9)$$

График дисперсионного соотношения ПАВ (8) представлен на рис. 1. Он целиком содержится в угловом секторе, ограниченном лучами: сверху $\omega = c_s k$ и снизу $\omega = V_T k$ (V_T – тепловая скорость пылинок). Это означает, что фазовая скорость периодической ПАВ лежит в интервале $V_T < \omega/k < c_s$.

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПАВ: ВЫВОД ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА САГДЕЕВА

В нелинейной теории будем исходить из тех же уравнений динамики пылевой фракции плазмы (1)–(3), что и в предыдущем разделе. Перейдем к новой переменной: $\xi = z - Vt$, где V – фазовая скорость ПАВ. Тогда уравнения в частных производных (1)–(3) перейдут в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

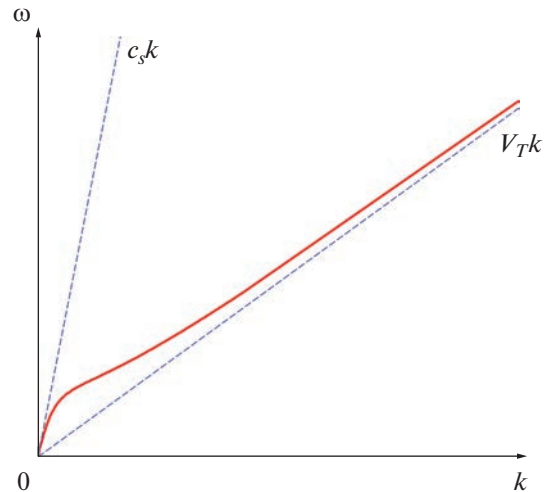


Рис. 1. График дисперсионного соотношения для ПАВ.

$$\begin{aligned} -V \frac{dn_d}{d\xi} + \frac{d(n_d v_d)}{d\xi} &= 0, \\ -V \frac{dv_d}{d\xi} + v_d \frac{dv_d}{d\xi} &= \frac{q_d}{m_d} \frac{d\phi}{d\xi} - \frac{k_B T_d}{m_d n_d} \frac{dn_d}{d\xi}, \\ \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} &= 4\pi(en_e - en_i + q_d n_d). \end{aligned}$$

Эти уравнения совместно с начальными условиями $n_d(0) = n_{0d}$, $v_d(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ образуют нелинейную задачу Коши. Проведем нормировку задачи следующим образом: ξ нормируем на λ_{Dd} , все скорости – на $\omega_{pd} \lambda_{Dd}$, все концентрации – на n_{0d} , а электростатический потенциал – на $k_B T_d / q_d$. Тогда уравнения задачи Коши примут вид

$$-V \frac{dn_d}{d\xi} + \frac{d(n_d v_d)}{d\xi} = 0, \quad (10)$$

$$-V \frac{dv_d}{d\xi} + v_d \frac{dv_d}{d\xi} = \frac{d\phi}{d\xi} - \frac{1}{n_d} \frac{dn_d}{d\xi}, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = -\mu \eta_i \exp(-\mu \tau_i \phi) + \mu \eta_e \exp(\mu \tau_e \phi) + n_d, \quad (12)$$

$$n_d(0) = 1, \quad v_d(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad (13)$$

где $\mu = e/q_d$, $\eta_{e,i} = n_{0e,i}/n_{0d}$, $\tau_{e,i} = T_d/T_{e,i}$. Проинтегрируем уравнения (10) и (11) с учетом (13) и получим после этого зависимость $n_d(\phi)$:

$$n_d(\phi) = \sqrt{-\frac{V^2}{W_j(\Theta)}}, \quad (14)$$

где

$$\Theta = -V^2 \exp[-2\phi - V^2]$$

и $W_j(\Theta)$ – основная при $j = 0$ и отрицательная при $j = -1$ действительные ветви W -функции Ламберта [44, 45]. Далее подставим (14) в уравнение Пуассона (12), домножим его на $d\phi/d\xi$, а затем проинтегрируем. Тогда получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = C - U_S(\phi),$$

где C – постоянная интегрирования, $U_S(\phi)$ – псевдопотенциал Сагдеева, имеющий следующий вид:

$$\begin{aligned} U_S(\phi) &= \frac{\eta_i}{\tau_i} \exp(-\mu \tau_i \phi) + \frac{\eta_e}{\tau_e} \exp(\mu \tau_e \phi) - \\ &- [W_j(\Theta) - 1] \frac{V}{\sqrt{W_j(\Theta)}}, \end{aligned} \quad (15)$$

в котором постоянную интегрирования удобно выбирать из условия $U_S(0) = 0$, а из двух ветвей W -функции Ламберта следует выбрать ту, для ко-

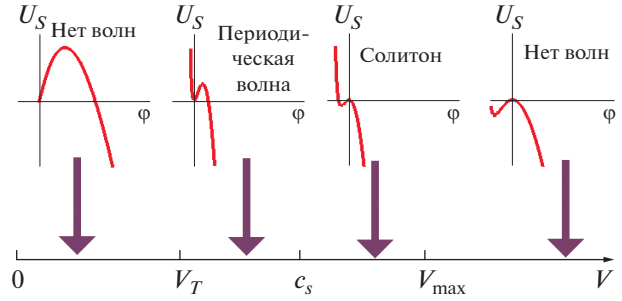


Рис. 2. Зависимости псевдопотенциала (15) от ϕ на разных участках значений фазовой скорости ПАВ.

торой зависимость (14) проходит через точку квазинейтральности плазмы, т.е. через точку $n_d(\phi = 0) = 1$ (подробнее см. [46, 47]). Анализ показал, что для $V > V_T$ следует выбирать отрицательную ветвь $W_{-1}(\Theta)$, а для $V < V_T$ – основную ветвь $W_0(\Theta)$. Отметим, что (15) отличается от псевдопотенциала нелинейных ПАВ из [44] последним слагаемым, где учтен стационарный поток пылинок.

Качественный вид зависимости псевдопотенциала (15) от ϕ при различных значениях скорости волны V показан на рис. 2. Ось скоростей волны разбивается на четыре участка, на каждом из которых поведение $U_S(\phi)$ отличается от поведения на других участках. В интервале $(0, V_T)$ псевдопотенциал имеет максимум, но не имеет минимумов. Следовательно, никакие стационарные волны с фазовыми скоростями из этого интервала невозможны. На участке (V_T, c_s) псевдопотенциал имеет минимум в начале координат, он отвечает дозвуковой периодической ПАВ.

Для сверхзвукового участка $V > c_s$ у псевдопотенциала имеются максимум в начале координат и минимум при отрицательных значениях ϕ . Казалось бы, этому минимуму должны также соответствовать периодические ПАВ. Однако в таких ПАВ потенциал ϕ должен бы быть одного знака. Но это невозможно в силу нарушения условия квазинейтральности невозмущенной плазмы. Для сверхзвукового участка возможен лишь солитон, возникающий в максимуме псевдопотенциала. Аналогичный анализ псевдопотенциала проведен в [49] для ионно-акустических волн в запыленной плазме.

При очень больших V крайняя левая точка псевдопотенциала может находиться ниже горизонтальной оси координат. Здесь невозможны ни периодические ПАВ, ни солитоны. В итоге сверхзвуковой участок разделяется на два значения $V = V_{\max}$, при котором крайняя левая точка псевдопотенциала лежит на горизонтальной оси ко-

ординат. Значение V_{\max} определяет максимально возможную скорость солитона, а решение исходных уравнений – экстремальный солитон (подробнее см. в [49]).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПАВ И СОЛИТОНОВ

Вычисление профилей волн и пылевых потоков в периодических и уединенных ПАВ осуществлялось по методу, описанному в [42, 43]. Сначала численно решалось уравнение Пуассона (12). Использовался метод Рунге–Кутты. Для этого задавались два начальных условия:

$$\varphi(\xi)|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}|_{\xi=0} = E,$$

где E имеет размерность напряженности возмущающего плазму электрического поля и однозначно характеризует энергию начального возмущения. Однако следует отметить, что амплитуда периодической ПАВ зависит от начального возмущения E для каждого конкретного значения скорости волны V , в то время как амплитуда ПА-солитона, наоборот, не зависит от E и определяется только скоростью V . Поэтому при вычислении профилей ПА-солитона рекомендуется задавать начальное возмущение малым, а для периодической ПАВ это ограничение несущественно.

В результате численного решения уравнения Пуассона определялись профили электростатического потенциала $\varphi(\xi)$. После этого вычислялись профили концентрации пылинок $n_d(\xi)$ по

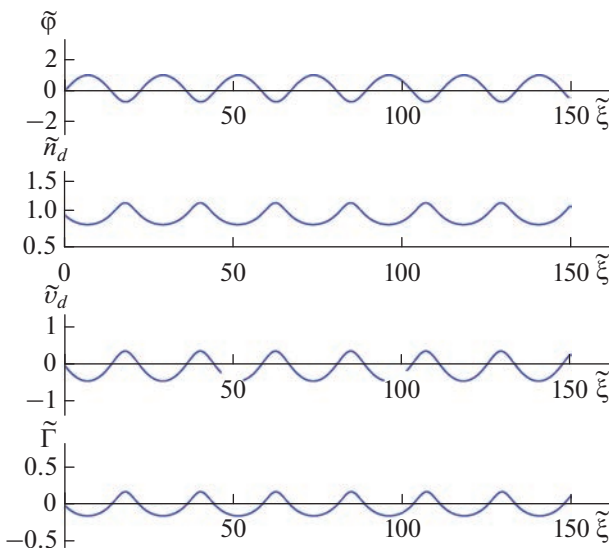


Рис. 3. Профили нормированных физических величин в периодической ПАВ для набора параметров $\mu = 0.5, \tau_i = 0.1, \tau_e = 0.001, \eta_e = 2, \eta_i = 4, V = 2.5$.

(14), затем – профили скорости пылинок в волне по формуле

$$v_d = V \left(\frac{n_{0d}}{n_d} - 1 \right),$$

которая следует из уравнения непрерывности. Следующим шагом находились профили пылевых потоков в волне $\Gamma(\xi) = n_d(\xi)v_d(\xi)$. Полученные партитуры профилей периодической ПАВ и ПА-солитона представлены на рис. 3 и 4 соответственно, на которых показаны сверху вниз зави-

симости $\varphi(\xi), n_d(\xi), v_d(\xi)$ и $\Gamma(\xi)$. Здесь $\tilde{\varphi} = \frac{q_d \varphi}{k_B T_d}, \tilde{n}_d = \frac{n_d}{n_{0d}}, \tilde{v}_d = \frac{v_d}{\omega_{pd} \lambda_{Dd}}, \tilde{\Gamma} = \frac{\Gamma}{n_{0d} \omega_{pd} \lambda_{Dd}}, \tilde{\xi} = \frac{\xi}{\lambda_{Dd}}$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ УСРЕДНЕННЫХ ПЫЛЕВЫХ ПОТОКОВ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПАВ И В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПА-СОЛИТОНОВ

Поток в периодической ПАВ является знакопеременным. Следовательно, для понимания направления переноса пылинок в волне необходимо усреднение потока за период колебаний. На рис. 5 показана зависимость среднего потока пы-

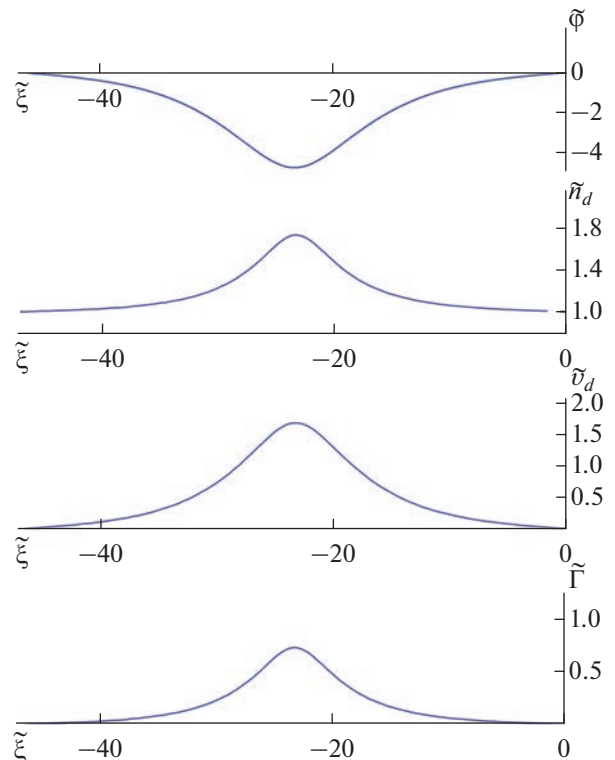


Рис. 4. Профили нормированных физических величин в ПА-солитоне для набора параметров $\mu = 0.5, \tau_i = 0.1, \tau_e = 0.001, \eta_e = 2, \eta_i = 4, V = 4$.

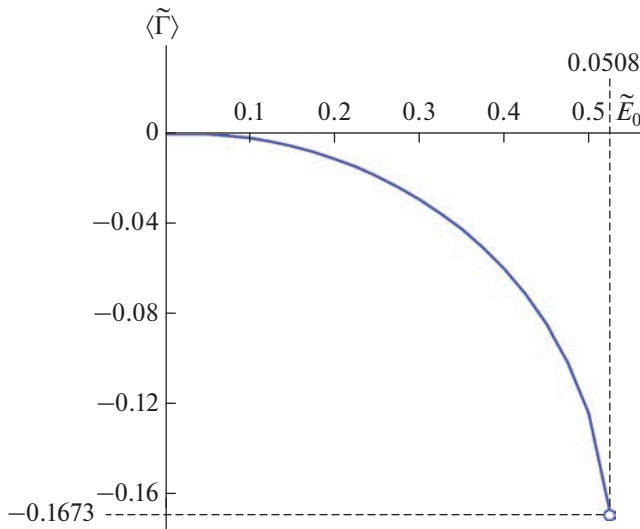


Рис. 5. Нормированная зависимость среднего пылевого потока в периодической ПАВ от напряженности возмущающего поля.

линок в периодической ПАВ от амплитуды электрического поля в волне E . Здесь

$$\langle \tilde{\Gamma} \rangle = \frac{\langle \Gamma \rangle}{n_{0d} \omega_{pd} \lambda_{Dd}}, \quad \tilde{E}_0 = \frac{q_d \lambda_{Dd}}{k_B T_d} \left. \frac{d\phi}{d\xi} \right|_{\xi=0}.$$

Поток отрицателен при всех значениях E . Это означает, что пылинки будут двигаться против направления распространения ПАВ. Отметим, что в полученном результате усматривается некоторая аналогия с обратными ПАВ [29]: в пылевой

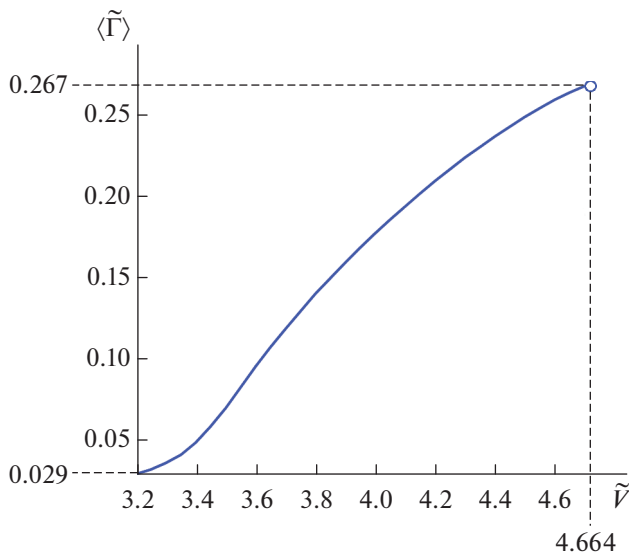


Рис. 6. Нормированная зависимость среднего пылевого потока в ПА-солитоне от фазовой скорости волны.

плазме, имеющей однонаправленный поток пылинок, возникают обратные волны, в которых групповая скорость направлена навстречу фазовой скорости.

Поток пылинок в ПА-солитонах для всех значений переменной ξ направлен в положительную сторону. Следовательно, последовательные солитоны захватывают пылинки в направлении своего движения. На рис. 6 представлена зависимость среднего потока пылинок в периодической последовательности ПА-солитонов от скорости самих солитонов $\tilde{V} = \frac{V}{\omega_{pd} \lambda_{Dd}}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена линейная теория гармонических ПАВ в пылевой плазме. В рамках этой теории установлен закон дисперсии ПАВ (8) и выведена формула для линейной скорости ПАВ – скорости пылевого звука (9).

Была развита нелинейная теория ПАВ, в рамках которой получена формула для псевдопотенциала Сагдеева (15). Ее анализ показал существование дозвуковых периодических ПАВ и сверхзвуковых ПА-солитонов. Построены графики профилей физических величин (партитуры) этих форм волны.

Вычислены средние потоки пылинок в периодической ПАВ и в последовательности ПА-солитонов. Найдено, что поток пылинок в периодической ПАВ направлен против ее фазовой скорости и, наоборот, поток пылинок переносится солитонами в направлении своего движения.

Рассматривалась наиболее простая модель нелинейных ПАВ, в которой пылинки с постоянным зарядом и отсутствует трение их о газ. В дальнейшем модели ПАВ можно совершенствовать, рассматривая различные усложняющие факторы и их влияние на потоки пылинок. Например, в пылевой плазме, возникающей в плотных газах, учет трения может оказаться существенным. Его можно реализовать добавлением соответствующего слагаемого в уравнение движения (2), как это сделано, например, в [50, 51].

Кратко рассмотрим, к каким выводам может привести учет трения пылинок о газ. Согласно [51], трение приводит к возникновению мнимого члена в дисперсионном соотношении ПАВ, что свидетельствует о затухании волн. В целом система уравнений (1)–(3) становится неконсервативной, поэтому псевдопотенциал Сагдеева записать нельзя. Численный расчет профилей ПАВ и потоков пылинок может привести к обнаружению их затухания с декрементом, определяемым мнимым членом дисперсионного соотношения.

Работа Китаева И.Н. была поддержана фондом развития теоретической физики и математики “Базис” (грант “PhD-Student” № 19-1-5-58-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rao N.N., Shukla P.K., Yu M.Y. Dust-Acoustic Waves in Dusty Plasmas // Planet. Space Sci. 1990. V. 38. № 4. P. 543.
2. Barkan A., Merlino R.L., D'Angelo N. Laboratory Observation of the Dust-Acoustic Wave Mode // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. № 10. P. 3563.
3. Prabhakara H.R., Tanna V.L. Trapping of Dust and Dust Acoustic Waves in Laboratory Plasmas // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. № 8. P. 3176.
4. Pramanik J., Veerasha B.M., Prasad G., Sen A., Kaw P.K. Experimental Observation of Dust-Acoustic Wave Turbulence // Phys. Lett. A. 2003. V. 312. № 1–2. P. 84.
5. Kim S.-H., Heinrich J.R., Merlino R.L. Diffraction of Dust Acoustic Waves by a Circular Cylinder // Phys. Plasmas. 2008. V. 15. № 9. P. 090701.
6. Yaroshenko V.V., Annaratone B.M., Khrapak S.A., Thomas H.M., Morfill G.E., Fortov V.E., Lipaev A.M., Molotkov V.I., Petrov O.F., Ivanov A.I., Turin M.V. Electrostatic Modes in Collisional Complex Plasmas under Microgravity Conditions // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. № 6. P. 066401.
7. Kumar K., Bandyopadhyay P., Singh S., Arora G., Sen A. Reflection of a Dust Acoustic Solitary Wave in a Dusty Plasma // Phys. Plasmas. 2021. V. 28. № 10. P. 1030701.
8. Schwabe M., Zhdanov S.K., Thomas H.M., Ivlev A.V., Rubin-Zuzic M., Morfill G.E., Molotkov V.I., Lipaev A.M., Fortov V.E., Reiter T. Nonlinear Waves Externally Excited in a Complex Plasma under Microgravity Conditions // New J. Phys. 2008. V. 10. № 3. P. 033037.
9. Pieper J.B., Goree J. Dispersion of Plasma Dust Acoustic Waves in the Strong-Coupling Regime // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. № 15. P. 3137.
10. Thompson C., Barkan A., D'Angelo N., Merlino R.L. Dust Acoustic Waves in a Direct Current Glow Discharge // Phys. Plasmas. 1997. V. 4. № 7. P. 2331.
11. Williams J.D., Snipes E.K. Measurements of the Dust Temperature in the Dispersion Relation of the Dust Acoustic Wave // IEEE Trans. Plasma Sci. 2010. V. 38. № 4. P. 847.
12. Saitou Y. Fluid Dispersion Relation of Dust Acoustic Wave with Ion Flow // Phys. Plasmas. 2021. V. 28. № 7. P. 073703.
13. Shukla P.K., Mamun A.A. Solitons, Shocks, and Vortices in Dusty Plasmas // New J. Phys. 2003. V. 5. № 1. P. 17.
14. Shukla P.K., Eliasson B. Fundamentals of Dust-Plasma Interactions // Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. № 1. P. 25.
15. Merlino R.L., Heinrich J.R., Kim S.-H., Meyer J.K. Dusty Plasmas: Experiments on Nonlinear Dust Acoustic Waves, Shocks and Structures // Plasma Phys. Control. Fusion. 2012. V. 54. № 12. P. 124014.
16. Thomas Jr.E. Measurements of Spatially Growing Dust Acoustic Waves in a DC Glow Discharge Plasma // Phys. Plasmas. 2006. V. 13. № 4. P. 042107.
17. Yadav L.L., Sayal V.K. Obliquely Propagating Cnoidal Waves in a Magnetized Dusty Plasma with Variable Dust Charge // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. № 11. P. 113703.
18. Heinrich J., Kim S.-H., Merlino R.L. Laboratory Observations of Self-Excited Dust Acoustic Shocks // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. № 11. P. 115002.
19. Sarma S.K., Boruah A., Nakamura Y., Bailung H. Observation of Dust Acoustic Shock Wave in a Strongly Coupled Dusty Plasma // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. № 5. P. 053702.
20. Naeem I., Ehsan Z., Mirza A.M., Murtaza G. Shocklets in the Comet Halley Plasma // Phys. Plasmas. 2020. V. 27. P. 043703.
21. Verheest F. Nonlinear Dust-Acoustic Waves in Multi-species Dusty Plasmas // Planet. Space Sci. 1992. V. 40. № 1. P. 1.
22. Khaled M.A.H., Shukri M.A., Hager Y.A.A. Dust Acoustic Solitons in an Opposite Polarity Dusty Plasma in the Presence of Generalized Polarization Force // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. № 10. P. 103703.
23. Hellberg M.A., Baluku T.K., Verheest F., Kourakis I. Dust-Acoustic Supersolitons in a Three-Species Dusty Plasma with Kappa Distributions // J. Plasma Phys. 2013. V. 79. № 6. P. 1039.
24. Moslem W.M., Sabry R., El-Labany S.K., Shukla P.K. Dust-Acoustic Rogue Waves in a Nonextensive Plasma // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. № 6. P. 066402.
25. Selim M.M., Abdelwahed H.G., El-Attafi M.A. Nonlinear Dust Acoustic Rogue Waves in a Two Temperature Charged Dusty Grains Plasma // Astrophys. Space Sci. 2015. V. 359. № 1. P. 25.
26. Rajib T.I., Tamanna N.K., Chowdhury N.A., Mannan A., Sultana S., Mamun A.A. Dust-Ion-Acoustic Rogue Waves in Presence of Non-Extensive Non-Thermal Electrons // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. № 12. P. 123701.
27. Singh K., Saini N.S. The Evolution of Rogue Wave Triplets and Super Rogue Waves in Superthermal Polarized Space Dusty Plasma // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. № 11. P. 113702.
28. Dubinov A.E., Kitayev I.N. Backwards Dust-Acoustic Waves // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. № 10. P. 104503.
29. Dubinov A.E., Kitayev I.N. Nonlinear Periodic Backward Dust Acoustic Waves // Planet. Space Sci. 2021. V. 195. № 1. P. 105142.
30. Xue J.-K. Cylindrical Dust Acoustic Waves with Transverse Perturbation // Phys. Plasmas. 2003. V. 10. № 8. P. 3430.
31. Annou K. Effects of Spherical Geometry and Two Temperature Electrons on Dust Acoustic Waves // Astrophys. Space Sci. 2014. V. 350. № 1. P. 211.
32. Dev A.N., Sarma J., Deka M.K. Dust Acoustic Shock Waves in Arbitrarily Charged Dusty Plasma with Low and High Temperature Non-Thermal Ions // Canadian J. Phys. 2015. V. 93. № 10. P. 1030.
33. El-Taibany W.F., El-Siragy N.M., Behery E.E., Elbendary A.A., Taha R.M. The Effects of Variable Dust Size and Charge on Dust Acoustic Waves Propagating in a Hybrid Cairns-Tsallis Complex Plasma // Indian J. Phys. 2018. V. 92. № 5. P. 661.
34. Lazar M., Kourakis I., Poedts S., Fichtner H. On the Effects of Suprathermal Populations in Dusty Plasmas: the Case of Dust-Ion-Acoustic Waves // Planet. Space Sci. 2018. V. 156. № 1. P. 130.
35. Ouazene M., Amour R. Dust Acoustic Solitons in a Dusty Plasma with Cairns-Gurevich Distributed Ions // Astrophys. Space Sci. 2019. V. 364. № 1. P. 20.
36. Merlino R.L. 25 Years of Dust Acoustic Waves // J. Plasma Phys. 2014. V. 80. № 6. P. 773.
37. El-Labany S.K., Moslem W.M., Safy F.M. Effects of Two-Temperature Ion, Magnetic Field, and Higher-Order Nonlinearity on the Existence and Stability of

- Dust-Acoustic Solitary Waves in Saturn's F Ring // *Phys. Plasmas*. 2006. V. 13. № 8. P. 082903.
38. *Kopnin S.I., Popel S.I., Yu M.Y.* Phenomena Associated with Complex (Dusty) Plasmas in the Ionosphere During High-Speed Meteor Showers // *Phys. Plasmas*. 2009. V. 16. № 6. P. 063705.
39. *Scales W.A., Mahmoudian A.* Charged Dust Phenomena in the Near-Earth Space Environment // *Rep. Prog. Phys.* 2016. V. 79. № 10. P. 106902.
40. *Tribeche M., Bacha M.* Dust-Acoustic Shock Waves in a Charge Varying Electronegative Magnetized Dusty Plasma with Nonthermal Ions: Application to Halley Comet Plasma // *Phys. Plasmas*. 2013. V. 20. № 10. P. 103704.
41. *Трухачев Ф.М., Васильев М.М., Петров О.Ф.* Солитонные токи // *ТВТ*. 2020. Т. 58. № 4. С. 563.
42. *Dubinov A.E., Kitayev I.N., Kolotkov D.Y.* The Separation of Ions and Fluxes in Nonlinear Ion-Acoustic Waves // *Phys. Plasmas*. 2021. V. 28. № 8. P. 083702.
43. *Dubinov A.E., Lebedeva X.I.* Ambiplasma Separation into Matter and Antimatter by a Train of Baryon-Acoustic Solitons in the Problem of the Baryon Asymmetry of the Universe // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. V. 152. № 1. P. 111391.
44. *Дубинова И.Д.* Применение W -функции Ламберта в математических задачах физики плазмы // *Физика плазмы*. 2004. Т. 30. № 10. С. 937.
45. *Dubinov A.E., Dubinova I.D.* How Can One Solve Exactly Some Problems in Plasma Theory // *J. Plasma Phys.* 2005. V. 71. № 5. P. 715.
46. *Гордиенко В.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е.* Нелинейная теория стационарных уединенных волн большой амплитуды в симметричных немагнитизированных e^-e^+ -плазме и $C_{60}^-C_{60}^+$ -плазме // *Физика плазмы*. 2006. Т. 32. № 11. С. 987.
47. *Dubinov A.E.* Mathematical Tricks for Pseudopotentials in the Theories of Nonlinear Waves in Plasmas // *Phys. Plasmas*. 2022. V. 29. № 2. P. 020901.
48. *Дубинов А.Е., Колотков Д.Ю., Сазонкин М.А.* Нелинейная теория ионно-звуковых волн в запыленной электрон-позитрон-ионной плазме // *ЖТФ*. 2012. Т. 82. № 5. С. 7.
49. *Дубинов А.Е., Суслова О.В.* Возможны ли гиперзвуковые электростатические солитоны? Оценка предельных чисел Маха ионно-звуковых солитонов в теплой плазме // *ЖЭТФ*. 2020. Т. 158. № 5(11). С. 968.
50. *Fortov V.E., Khrapak A.G., Khrapak S.A., Molotkov V.I., Nefedov A.P., Petrov O.F., Torchinsky V.M.* Mechanism of Dust-Acoustic Instability in a Direct Current Glow Discharge Plasma // *Phys. Plasmas*. 2000. V. 7. № 5. P. 1374.
51. *Trukhachev F.M., Vasiliev M.M., Petrov O.F., Vasilieva E.V.* Dust-Acoustic Soliton Breaking and the Associated Acceleration of Charged Particles // *Phys. Rev. E*. 2019. V. 100. P. 063202.