

УДК 536.712

## ДАВЛЕНИЕ И ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ СЖИМАЕМОСТЬ АСИММЕТРИЧНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛАЗМЫ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ В МОДЕЛИ СРЕДНЕЙ ЯЧЕЙКИ ВИГНЕРА–ЗЕЙТЦА

© 2023 г. И. А. Мартынова<sup>1, 2, \*</sup>, И. Л. Иосилевский<sup>1, 2</sup><sup>1</sup>Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

\*E-mail: martina1204@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.08.2023 г.

После доработки 09.10.2023 г.

Принята к публикации 09.10.2023 г.

В данной работе рассмотрена двухкомпонентная электронейтральная равновесная комплексная плазма макроионов конечных размеров с зарядом  $Z$  ( $Z \gg 1$ ) и точечных противоположно заряженных микроионов с единичным зарядом. С учетом эффекта нелинейного экранирования макроионов микроионами в рамках приближения Пуассона–Больцмана рассчитано давление в модели средней ячейки Вигнера–Зейтца. Один из способов расчета основан на вычислении поправки на неидеальность для свободной энергии Гельмгольца, второй является специфическим для модели средней ячейки Вигнера–Зейтца. Показано, что давление и изотермическая сжимаемость плазмы являются положительными во всем диапазоне концентраций макроионов.

DOI: 10.31857/S0040364423060091

### ВВЕДЕНИЕ

При описании термодинамики комплексной плазмы важно учитывать эффект нелинейного экранирования. Пренебрежение этим эффектом сказывается на точности результатов вычисления многих термодинамических параметров. В данной работе рассматривается двухкомпонентная трехмерная равновесная система отрицательно заряженных макроионов с зарядовыми числами  $-Z$  ( $Z > 0$ ) и радиусами  $R_Z$  и точечных противоположно заряженных микроионов с единичными зарядами. Рассматриваемая плазма является асимметричной ( $Z \gg 1$ ). Под комплексной плазмой обычно понимают коллоидную плазму, плазму с конденсированной дисперсной фазой, пылевую плазму серебристых облаков, газоразрядную пылевую плазму, пылевую плазму белых карликов и др. Рассматриваемая в данной работе система наиболее близка к первой из перечисленных — к коллоидной плазме. Ее характерная температура  $T$  является комнатной, зарядовое число макроионов (далее называется “зарядом”) составляет  $Z \sim 1000–10000$ , радиус макроиона  $R_Z \sim 0.1–10$  мкм, а характерная концентрация макроионов  $n_Z$  находится в диапазоне  $10^5–10^9$  см<sup>-3</sup> [1, 2].

Эффект нелинейного экранирования следует учитывать, если нарушается условие допустимости линеаризации  $|e\phi_{\text{int}}(r)/(kT)| > 1$ , где  $\phi_{\text{int}}(r)$  — средний электростатический потенциал вокруг макро-

иона, создаваемый всеми макро- и микроионами. Простейшим (“бескорреляционным” с точки зрения отсутствия корреляций между микроионами) способом учета нелинейности экранирования макроионов микроионами является описание в рамках приближения Пуассона–Больцмана (ПБ). С применением различных численных методов уравнение ПБ решалось во многих работах (см., например, [3–6]). Аналитическое решение предложено в статье [7]. Ряд частных случаев рассмотрен в обзоре [8].

В случае, когда условие линеаризации выполняется, экранирование макроионов описывается в рамках линеаризованного (дебаевского) приближения. Например, указанное приближение для учета корреляций между макро- и микроионами использовалось в работах [9–11].

Важным результатом, отмеченным в [12, 13], было то, что уравнения состояния, полученные в [9, 10], предсказывают существование зон с отрицательной сжимаемостью в значительной части характерных параметров комплексной плазмы, что, как известно, означает, существование фазовых расслоений, отсутствующих на фазовой диаграмме комплексной плазмы [11].

Ранее в работах [14–17] было показано, что учет нелинейного экранирования в рамках приближения ПБ существенно изменяет величину кулоновской энергии взаимодействия в комплексной

плазме по сравнению с результатами, полученными в статьях [9, 10] с использованием линеаризованного приближения. Вторым важным отличием данных работ было то, что в [14–17] учитывались конечные размеры макроионов, в то время как в [9, 10] макроионы считались точечными. Следует отметить, что до сих пор оставался открытым вопрос о возможности существенно изменения УРС [9, 10] вследствие учета эффекта нелинейного экранирования и, соответственно, о возможном изменении области параметров, где получившееся УРС предсказывает существование зоны отрицательной сжимаемости. Этому вопросу в значительной мере посвящена настоящая работа.

Давление в системе рассчитывается двумя способами. Первый из них является общим. Согласно ему, давление рассчитывается посредством вычисления неидеальной части свободной энергии Гельмгольца (см. подробнее раздел 2). Второй способ более специальный и может быть применен для систем, рассматриваемых в приближении средней сферической ячейки Вигнера–Зейтца (ВЗ) (см. раздел 3). В обоих случаях система находится в состоянии полного термодинамического равновесия, и вопросы кинетики, связанные с его установлением, не рассматриваются.

### 1. УЧЕТ ЭФФЕКТА НЕЛИНЕЙНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ В СРЕДНЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ ВИГНЕРА–ЗЕЙТЦА. МОДЕЛЬ

В данной работе все вещество плазмы разбивается на электронейтральные невзаимодействующие ячейки Вигнера–Зейтца (ВЗ) [8, 18, 19], в центре каждой из которых находится отрицательно заряженный макроион с зарядом  $-Ze$  и радиусом  $R_z$ , а в остальной части ячейки расположены точечные положительно заряженные микроионы, каждый с зарядом  $e$  (далее зарядом называется только абсолютное значение зарядового числа). Система находится в полном термодинамическом равновесии (температура макро- и микроионов системы одинакова и равна  $T$ ). Применимость ячеечного приближения определяется наличием ближнего порядка, т.е. либо условием достаточно плотного вещества, когда при разбиении вещества на ячейки ВЗ в каждой из них находится один макроион (например, для рассматриваемого случая сферически-симметричных ячеек

$$4\pi R^3 n_z / 3 = 1, \tag{1}$$

где  $R$  – радиус ячейки), либо условием того, что дебаевская сфера много больше радиуса ячейки ВЗ:  $[(Ze)^2 / kT] (4\pi n_z / 3)^{1/3} \gg 1$  (более подробно применимость последнего условия рассмотрена в [16]).

Напряженность внутри ячейки имеет вид

$$E(r) = \frac{e}{r^2} \left( -Z + \int_{R_z}^r n_i(r) 4\pi r^2 dr \right), \tag{2}$$

где  $n_i(r)$  – концентрация микроионов, имеющая вид бoльцмановского распределения

$$n_i(r) = n_{i0} \exp\left(-\frac{e\phi(r)}{kT}\right), \tag{3}$$

где  $n_{i0}$  – концентрация микроионов на границе ячейки,  $\phi(r)$  – средний электростатический потенциал, создаваемый всеми частицами в ячейке ВЗ. Связь среднего электростатического потенциала и напряженности описывается как

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -E(r). \tag{4}$$

Ячейка ВЗ является электронейтральной, поэтому

$$\int_{R_z}^R n_i(r) 4\pi r^2 dr = Z. \tag{5}$$

Система уравнений (1)–(5) решается итерационно с применением граничного условия  $\phi(R) = 0$  (см. подробнее [5, 6]). Также подобная система решалась в работе [3], но результаты использовались для других параметров системы.

Кулоновская энергия взаимодействия и ее поправка на неидеальность  $u_{ex}$  обезразмерены на  $N_{macro} kT$ , где в ячейке ВЗ  $N_{macro} = 1$  (например,  $u_{ex} = U_{ex} / (kT)$ , где  $U_{ex}$  – размерная кулоновская поправка на неидеальность для энергии взаимодействия). Безразмерная (удельная) кулоновская поправка на неидеальность  $u_{ex}$  к энергии взаимодействия в ячейке ВЗ состоит из двух слагаемых

$$u_{ex} = u_{ii} + u_{zi}, \tag{6}$$

где  $u_{ii}$  – безразмерная энергия взаимодействия микроионов ячейки друг с другом,  $u_{zi}$  – безразмерная энергия взаимодействия центрального макроиона с микроионами ячейки:

$$u_{ii} = \frac{1}{2kT} \int_{R_z}^R \left( \frac{Ze}{r} + \phi(r) \right) n_i(r) 4\pi r^2 dr, \tag{7}$$

$$u_{zi} = -\frac{Ze}{kT} \left( \frac{Ze}{R_z} + \phi(R_z) \right). \tag{8}$$

Существенное отличие в величине энергии взаимодействия в случаях учета и не учета эффекта нелинейного экранирования продемонстрировано в различных приближениях в работах [14–17]. В частности, сравнивались результаты, полученные в приближении Пуассона–Больцмана и линеаризованном (дебаевском) приближении.

## 2. РАСЧЕТ ДАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛЕНИЯ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

Как известно [20], свободная энергия  $F$  и энергия взаимодействия  $U$  системы с объемом  $V$  и температурой  $T$  связаны как

$$\frac{F(T, V) - U(T, V)}{T} = \left( \frac{\partial F(T, V)}{\partial T} \right)_V.$$

Пусть  $f = F/(kT)$ ,  $u = U/(kT)$  – безразмерные (удельные) свободная энергия и энергия взаимодействия, тогда

$$f(T, V) = - \int_{T_1}^T \frac{u(T', V)}{T'} d(T') + f_1(T_1, V),$$

где  $f_1(T_1, V)$  – свободная энергия при температуре  $T_1$ .

Для кулоновских поправок на неидеальность для свободной энергии  $f_{\text{ex}}$  и энергии взаимодействия  $u_{\text{ex}}$  можно записать аналогичное соотношение. С учетом (1) получаем

$$f_{\text{ex}}(T, n_Z) = \int_{T_1}^T \frac{u_{\text{ex}}(T', n_Z)}{T'} d(T') + f_{\text{ex}1}(T, n_Z).$$

Для достаточно высокой температуры поправку на неидеальность для свободной энергии можно считать равной поправке на неидеальность для энергии взаимодействия [21]. Также в случае достаточно высокой температуры можно считать, что распределение микроионов равномерное

$$n_{i\_UP}(r) = \frac{3Z}{4\pi(R^3 - R_Z^3)}, \quad (9)$$

а средний электростатический потенциал, создаваемый центральным макроионом и микроионами в ячейке ВЗ, имеет вид

$$\Phi_{UP}(r) = -Ze \frac{r^2 + 2R^3/r - 3R^2}{2(R^3 - R_Z^3)}$$

(см. подробнее [6]). С учетом (6)–(8) имеем

$$f_{\text{ex}1}(T_1, n_Z) = - \frac{Ze}{kT_1} \left( \frac{Ze}{R_Z} + \Phi_{UP}(R_Z) \right) + \frac{1}{2kT_1} \int_{R_Z}^R \left( \frac{Ze}{r} + \Phi_{UP}(r) \right) e n_{i\_UP}(r) 4\pi r^2 dr.$$

Давление в системе можно рассчитать следующим образом:

$$P(T, V) = - \left( \frac{\partial F(T, V)}{\partial V} \right)_T. \quad (10)$$

Оно состоит из идеально-газовых вкладов макро- и микроионов и кулоновской поправки на неидеальность  $P_{\text{ex}}$ :

$$P = n_i kT + n_Z kT + P_{\text{ex}},$$

где концентрация идеального газа микроионов  $n_i$  выражается, как в (9). Введем безразмерное давление  $p = P/(n_Z kT)$  и безразмерную поправку на неидеальность для давления  $p_{\text{ex}} = P_{\text{ex}}/(n_Z kT)$ . Тогда

$$p = \frac{Z}{1 - (R_Z/R)^3} + 1 + p_{\text{ex}}.$$

Дифференцирование по объему в (10) можно заменить дифференцированием по концентрации макроионов. С учетом (1) и того, что рассматривается система с постоянным зарядом макроиона  $Z$  и радиусом макроиона  $R_Z$ , получаем

$$p_{\text{ex}}(T, n_Z) = n_Z \left( \frac{\partial f_{\text{ex}}(T, n_Z)}{\partial n_Z} \right)_T.$$

Результат численного расчета безразмерных давления и кулоновской поправки на неидеальность для давления приведены на рис. 1. В качестве достаточно высокой температуры выбрана  $kT_1 = 1$  эВ. Линии 1 и 3 соответствуют температуре 0.06 эВ, линии 2 и 4 – 0.03 эВ. При малых концентрациях  $n_Z$  размер ячейки огромный, а макроионов и микроионов достаточно мало, и в результате их поведение можно описать как идеальное газовое (в этом случае безразмерное давление стремится к  $Z + 1$ ). Распределение микроионов можно считать равномерным. При сжатии ячейки вокруг макроиона начинает наблюдаться некоторое “сгущение” облака микроионов. Можно представить, что макроион вместе с микроионами этого облака образует некоторую квазичастицу. Такие микроио-

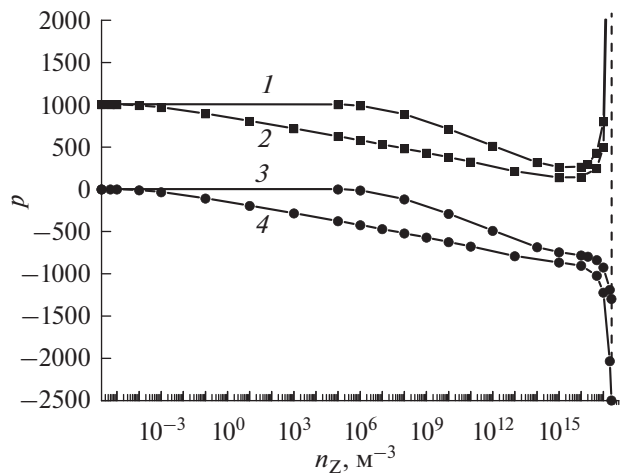


Рис. 1. Безразмерное давление  $p$  (1, 2) и безразмерная кулоновская поправка на неидеальность для давления  $p_{\text{ex}}$  (3, 4) для различных температур при  $Z = 1000$ ,  $R_Z = 1$  мкм: 1, 3 –  $kT = 0.06$  эВ; 2, 4 – 0.03; штриховая линия – максимально возможная концентрация макроионов, когда радиус ячейки равен радиусу макроиона.

ны называются связанными, а остальные микроионы, которые экранируют эту квазичастицу, называются свободными. Так как в данной работе не рассматривается динамика установления равновесия между связанными и свободными микроионами, то в настоящих расчетах полагается, что все связанные микроионы находятся в близкой окрестности макроиона и их число меняется при изменении параметров системы. Существует несколько способов деления микроионов на свободные и связанные [2, 8, 16, 18, 19, 22]. В данной работе свободными микроионами считаются те, которые обладают той же концентрацией  $n_{i0}$ , что и на границе ячейки. Давление в системе определяется свободными микроионами, а при увеличении экранирующего облака число свободных микроионов уменьшается (суммарное число всех микроионов при этом постоянно и равно  $Z$ ), и их концентрация  $n_{i0}$  падает (вследствие этого падает и давление). При дальнейшем сжатии ячейки ее радиус начинает стремиться к радиусу макроиона  $R_Z$ , и давление в ячейке начинает неограниченно возрастать. Вертикальная штриховая линия (рис. 1) соответствует предельной концентрации макроионов, при которой радиус ячейки достигает радиуса макроиона. Как и ожидалось, давление в системе является положительным во всем диапазоне концентраций макроионов. Похожий результат получен в другом подходе [23] к проблеме давления в системе пылевой плазмы во всем исследуемом там диапазоне параметров.

Кулоновская поправка на неидеальность обусловлена в первую очередь притяжением противоположно заряженных центрального макроиона и микроионов в ячейке, поэтому должна иметь отрицательный знак. Как отмечено выше, при малых концентрациях макроионов система имеет идеально-газовое поведение, но при повышении концентрации взаимодействие между частицами увеличивается по абсолютной величине, и, как следствие, поправка на неидеальность ведет себя аналогичным образом. Когда радиус ячейки начинает стремиться к радиусу макроиона, кулоновская поправка начинает резко увеличиваться по абсолютной величине.

### 3. СПОСОБ РАСЧЕТА ДАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ СРЕДНЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКИ ВИГНЕРА–ЗЕЙТЦА

В данной работе рассматривается приближение средней сферической ячейки ВЗ, причем ячейки, на которые поделено все вещество плазмы, являются одинаковыми, электронеutralными, непроницаемыми, не взаимодействующими и не коррелирующими друг с другом. Более того, используемое в работе приближение ПБ не учитывает корреляции между микроионами. В этом случае можно использовать способ вычисления давления, который описан в данном разделе.

Сделано предположение, что давление в системе определяется в первую очередь тем давлением, которое создается свободными микроионами системы (с учетом того определения свободных микроионов, которое приведено в разделе 2). Можно рассматривать свободные микроионы как идеальный газ, т.е. их давление равно  $n_{i0}kT$ . Проблема учета вклада макроионов в давление в рассматриваемой системе схожа с аналогичной проблемой в системе плотного горячего вещества в рамках модели Томаса–Ферми ([24–29], в частности, вклад ядер как идеального газа рассмотрен в [25, 26], как отталкивание в модели однокомпонентной плазмы – в [27], как отталкивание однокомпонентной плазмы заряженных твердых шаров – в [28, 29]). Здесь предполагается, что вклад макроионов много меньше вклада от микроионов, поэтому для безразмерного давления можно записать

$$p = 1 + \frac{n_{i0}}{n_Z}, \tag{11}$$

при этом концентрация  $n_{i0}$  рассчитывается численно, как указано в разделе 1.

На рис. 2 показаны изотермы, рассчитанные по алгоритму, описанному в разделе 2, а также изотермы, рассчитанные по формуле (11) и обозначенные полыми кружками. Видно, что изотермы для одинаковых температур, рассчитанные указанными двумя способами, практически совпадают. Это дает право утверждать, что в модели средней ячейки ВЗ для расчета давления рассматриваемой

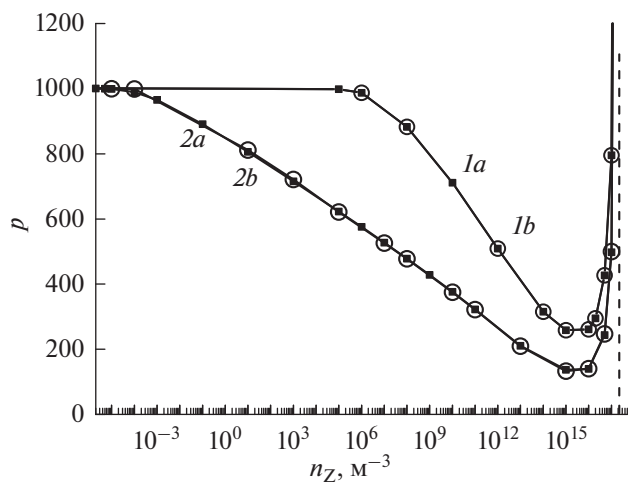


Рис. 2. Безразмерное давление в системе, рассчитанное двумя способами при  $Z = 1000$ ,  $R_Z = 1$  мкм: 1a, 1b –  $kT = 0.06$  эВ; 2a, 2b – 0.03; 1a, 2a – расчет по алгоритму, описанному в разделе 2; 1b, 2b – по алгоритму раздела 3; штриховая линия – максимально возможная концентрация макроионов, когда радиус ячейки равен радиусу макроиона.

системы можно применять не более сложный численный метод, описанный в разделе 2, а более простой алгоритм, описанный в данном разделе.

#### 4. ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ СЖИМАЕМОСТЬ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА НЕЛИНЕЙНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ

Изотермическая сжимаемость системы определяется как

$$\beta(T, V) \equiv -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P(T, V)} \right)_T.$$

Она является положительной, если

$$\left( \frac{\partial P(T, V)}{\partial V} \right)_T < 0,$$

что соответствует одному из дифференциальных условий термодинамической устойчивости [20]. С учетом (1) это условие можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial P(T, n_Z)}{\partial n_Z} \right)_T > 0.$$

Таким образом, можно рассчитать знак указанной производной в приближении средней сферической ячейки ВЗ для рассматриваемой системы. На рис. 3 показано, что изотермическая сжимаемость системы для двух температур, приводимых на предыдущих рисунках, во всем доступном диапазоне концентраций является положительной. Также в другом подходе [23] изотермическая сжимаемость пылевой плазмы получилась положительной для всего рассмотренного там диапазона параметров.

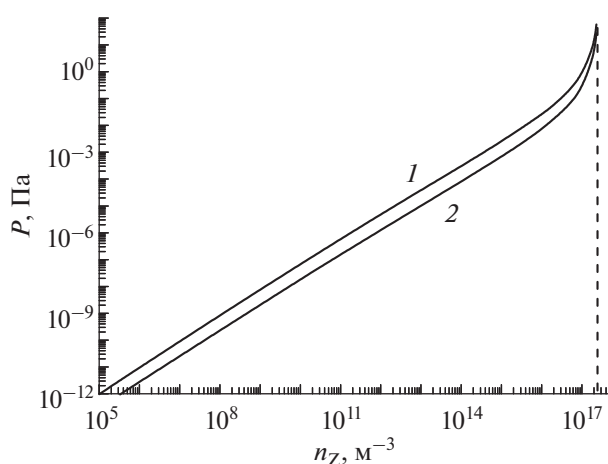


Рис. 3. Давление системы как функция концентрации макроионов при  $Z = 1000$ ,  $R_Z = 1$  мкм: 1 –  $kT = 0.06$  эВ, 2 – 0.03; штриховая линия – максимально возможная концентрация макроионов, когда радиус ячейки равен радиусу макроиона.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучалось влияние учета эффекта нелинейного экранирования макроионов в высоко зарядово-асимметричной комплексной плазме на ее уравнение состояния. Интерес к этой проблеме обусловлен тем, что ранее [12, 13] в уравнениях состояния работ [9, 10] было выявлено существование обширных зон отрицательности давления и сжимаемости плазмы, что рассматривалось в качестве вероятной возможности реализации фазового расслоения в плазме указанных параметров.

Результаты настоящих расчетов не подтверждают выводы работ [12, 13], сделанных на основании использования уравнений состояния [9, 10], о наличии заметных зон отрицательности давления и сжимаемости плазмы в исследованной области параметров. По мнению авторов настоящей работы, главная причина обсуждаемого различия в результатах расчета уравнения состояния в настоящей работе и в статьях [9, 10] заключается в том, что в [9, 10] для описания корреляций макро- и микроионов использовалось линейризованное приближение Дебая–Хюккеля, в то время как в настоящей работе учтен эффект нелинейности указанных корреляций в рамках приближения Пуассона–Больцмана. Кроме того, в настоящей работе также учтено влияние конечного радиуса макроионов (наличие “собственного объема”).

Вместе с тем подход данной работы в решении поставленной задачи учета эффекта нелинейного экранирования в уравнении состояния ограничен использованием приближения средней ячейки Вигнера–Зейтца совместно с бескорреляционным приближением Пуассона–Больцмана. При таком подходе давление системы всегда остается положительным. Известно, что для проявления физического механизма эффективной энергии связи в таких системах необходимо выйти за пределы приближения средней ячейки Вигнера–Зейтца, что рассматривается авторами данной работы как цель продолжения настоящего исследования. Соответственно, в настоящий момент вопрос о наличии или отсутствии фазовых переходов типа газ–жидкость в изучаемой низкотемпературной высоко зарядово-асимметричной комплексной плазме остается открытым.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dijkstra M., van Roij R.* Vapour–Liquid Coexistence for Purely Repulsive Point-Yukawa Fluids // *J. Phys. Condens. Matter.* 1998. V. 10. № 6. P. 1219.
2. *Diehl A., Barbosa M., Levin Y.* Charge Renormalization and Phase Separation in Colloidal Suspensions // *EPL.* 2001. V. 53. № 1. P. 86.
3. *Aleksander S., Chaikin P.M., Grant P., Morales G.J., Pincus P., Hone D.* Charge Renormalization, Osmotic

- Pressure, and Bulk Modulus of Colloidal Crystals: Theory // *J. Chem. Phys.* 1984. V. 80. P. 5776.
4. *Bystrenko O., Zagorodny A.* Critical Effects in Screening of High-Z Impurities in Plasmas // *Phys. Lett. A.* 1999. V. 255. № 4–6. P. 325.
  5. *Martynova I.A., Iosilevskiy I.L., Shagayda A.A.* Non-linear screening and phase states of a complex plasma // *Contrib. Plasma Phys.* 2017. V. 58. № 2–3. P. 203.
  6. *Martynova I., Iosilevskiy I., Shagayda A.* Macroions Nonlinear Screening in Complex Plasma // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. V. 946. P. 012147.
  7. *D'yachkov L.G.* Screening of Macroions in Colloidal Plasmas: Accurate Analytical Solution of the Poisson–Boltzmann Equation // *Phys. Lett. A.* 2005. V. 340. P. 440.
  8. *Жуховицкий Д.И., Храпак А.Г., Якубов И.Т.* Ионизационное равновесие в сильно неидеальной плазме с конденсированной дисперсной фазой // *ТВТ.* 1984. Т. 22. № 5. С. 833.
  9. *Khrapak S., Khrapak A., Ivlev A., Morfill G.* Simple Estimation of Thermodynamic Properties of Yukawa Systems // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 89. № 2. P. 023102.
  10. *Farouki R.T., Hamaguchi S.* Thermodynamics of Strongly-coupled Yukawa Systems Near the One-component-Plasma Limit. II. Molecular Dynamics Simulations // *J. Chem. Phys.* 1994. V. 101. № 11. P. 9885.
  11. *Hamaguchi S., Farouki R.T., Dubin D.* Triple Point of Yukawa Systems // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 56. P. 4671.
  12. *Martynova I., Iosilevskiy I.* Features of Phase Transitions in Models of Complex Plasma // *Contrib. Plasma Phys.* 2016. V. 56. № 5. P. 432.
  13. *Мартынова И.А., Иосилевский И.Л.* О сдвиге границ термодинамической неустойчивости асимметричной комплексной плазмы с учетом эффекта нелинейного экранирования // *ТВТ.* 2021. Т. 59. № 6. С. 817.
  14. *Martynova I., Iosilevskiy I., Shagayda A.* Non-linear Charge Screening and Interaction Energy of Macroions in Complex Plasma // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. V. 1094. P. 012032.
  15. *Martynova I.A., Iosilevskiy I.L.* Effect of the Non-linear Screening on a Modification of the Debye–Hückel Plus Hole Approximation in Complex Plasma // *Contributions to Plasma Physics.* 2019. V. 59. № 4–5. e201800154.
  16. *Martynova I.A., Iosilevskiy I.L.* Interaction Energy in the Poisson–Boltzmann Plus Hole Approximation in Asymmetric Complex Plasmas // *Contrib. Plasma Phys.* 2022. V. 62. № 9. e202200110.
  17. *Мартынова И.А., Иосилевский И.Л.* Энергия взаимодействия в приближении Пуассона–Больцмана в корреляционной полости в асимметричной комплексной плазме // *ТВТ.* 2023. Т. 61. № 2. С. 163.
  18. *Martynova I., Iosilevskiy I.* Self-similarity of Nonlinear Screening in Asymmetric Complex Plasmas // *Contrib. Plasma Phys.* 2021. V. 61. № 10. e202100007.
  19. *Martynova I., Iosilevskiy I.* The Macroion Effective Charge in Asymmetric Complex Plasmas // *Contrib. Plasma Phys.* 2022. V. 62. № 3. e 202100151.
  20. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Учеб. пособие. В 10 т. Т. V. Статистическая физика. Ч. I. М.: Физматлит, 2002. 616 с.
  21. *Иосилевский И.Л.* Эффекты неидеальности в низкотемпературной плазме. В кн.: Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Т. приложений III-1 / Под ред. Старостина А.Н., Иосилевского И.Л. М.: Физматлит, 2004. С. 349.
  22. *Szichman H., Eliezer S., Salzmann D.* Calculation of the Moments of the Charge State Distribution in Hot and Dense Plasmas Using the Thomas–Fermi Models // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* 1987. V. 38. № 4. P. 281.
  23. *Филиппов А.В., Решетняк В.В., Старостин А.Н., Ткаченко И.М., Фортвов В.Е.* Исследование пылевой плазмы на основе интегрального уравнения Орнштейна–Цернике для многокомпонентной жидкости // *Письма в ЖЭТФ.* 2020. Т. 110. Вып. 10. С. 658.
  24. *Киржниц Д.А., Лозовик Ю.Е., Шпатаковская Г.В.* Статистическая модель вещества // *УФН.* 1975. Т. 117. № 1. С. 3.
  25. *Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В., Шпатаковская Г.В.* Квазиклассическая модель атома // *ТВТ.* 1977. Т. 15. № 1. С. 186.
  26. *Калиткин Н.Н.* Модели вещества в экстремальном состоянии. Сб. Математическое моделирование / Под ред. Самарского А.А., Калиткина Н.Н. М.: Наука, 1989. С. 114.
  27. *Копышев В.П.* О термодинамике ядер одноатомного вещества. Препринт № 59. М.: ИПМ АН СССР, 1978.
  28. *Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б.* Квантово-статистические модели низкотемпературной плазмы. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
  29. *Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б.* Использование квазиклассического приближения в модифицированной модели Хартри–Фока–Слэттера // *ТВТ.* 1987. Т. 25. № 1. С. 12.