

УДК 537.2, 536.2

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ДВУХПЛЕНОЧНЫХ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СРЕД

© 2024 г. А. Б. Петрин*

*Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия***E-mail: a_petrin@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.10.2023 г.

После доработки 12.12.2023 г.

Принята к публикации 04.12.2023 г.

Предлагается метод отражений электростатики для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостойкой средой, состоящей из двух пленок на диэлектрическом полупространстве. Метод обобщается на случай произвольной системы зарядов и применяется к решению математически аналогичных задач электростатики и стационарной теплопроводности плоскостойких сред. В предложенном варианте метода отражений используется распределенное представление виртуальных зарядов и связанное с ним двойное интегрирование. В качестве примера применения метода решаются задачи нахождения распределений электростатического потенциала вокруг проводящей сферы и тела вращения каплевидной формы, расположенных вблизи плоскостойкой структуры из двух диэлектрических пленок на диэлектрическом полупространстве. Решаются аналогичные задачи нахождения распределения температур равномерно нагретых тел, находящихся вблизи теплопроводящей плоскостойкой структуры, состоящих из двух теплопроводящих пленок, расположенных на теплопроводящем полупространстве.

DOI: 10.31857/S0040364424010129

ВВЕДЕНИЕ

Очень часто в технических приложениях возникает необходимость анализа электромагнитных полей и теплообмена в плоскостойких структурах. В задачах теплопроводности в плоскостойких средах используется матричный метод [1–4], который, как правило, применяется для решения двумерных задач. Аналогичные матричные методы успешно применяются для задач излучения и распространения электромагнитных волн в плоскостойких средах [5]. В работах [6–8] предложен оригинальный вариант строгой электромагнитной теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостойкой структуры, который является развитием работ [9, 10]. В частности, в [6–8] предложен метод аналитического упрощения решения, имеющий потенциально важное общетеоретическое значение. Обобщение данного метода на случай произвольного количества пленок в плоскостойкой структуре [11] позволило привести формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задачи и ускорило численные расчеты.

В [12] математические подходы работ [6–8, 11] применены к нахождению трехмерного фундаментального решения электростатики

(квазиэлектростатики) в плоскостойких средах, т.е. к нахождению поля точечного заряда в плоскостойких средах. На основе полученных результатов предложена формулировка обобщенного метода зеркальных отражений для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостойкой структурой, состоящей из одной пленки на полупространстве. Этот результат обобщен в [12] на случай произвольного распределения зарядов вблизи плоскостойкой структуры и произвольного количества пленок. На основе развитого обобщенного метода зеркальных отражений предложен метод решения задачи нахождения электрического поля в окрестности нановершины микроострия, расположенного вблизи плоскостойкой структуры, а также аналогичных задач теплопроводности [13].

В данной работе обобщенный метод отражений модифицирован применительно к важной частной задаче о точечном заряде, расположенном рядом с плоскостойкой средой, которая состоит из двух пленок на диэлектрическом полупространстве. В отличие от работы [13], в данной работе функция, описывающая реакцию плоскостойкой структуры, состоящей из двух пленок, на поле сторонних источников, получена в аналитическом виде. В [13] эта задача была решена численно.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ

Рассмотрим задачу нахождения электростатического поля от точечного заряда q , расположенного внутри плоскостойкой структуры. Пусть (для общности) этот заряд расположен внутри одной из пленок плоскостойкой структуры, состоящей из нескольких пленок и из двух окружающих полупространств. Далее задача обобщается на случай, когда заряд расположен на границе пленок или в одном из полупространств.

Пусть общее число пленок равно N_f , толщина m -й пленки d_m и полная толщина слоистой структуры $d_{\text{tot}} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$. Общее число границ пленок $N = N_f + 1$. Пронумеруем области пространства $j = 1, \dots, (N + 1)$ (на рис. 1 показана для примера задача с $N = 4$ и $N_f = 3$). Предположим, что пленки имеют абсолютные диэлектрические проницаемости ε_j , а перед и за слоистой структурой находятся однородные полупространства с проницаемостями ε_1 и ε_{N+1} . Обозначим z_j координаты N границ пленок по оси Z следующим образом: $z_1 = 0$, $z_j = \sum_{m=1}^{j-1} d_m$ при $j = 2, \dots, N$.

Уравнения электростатики (или квазиэлектростатики) в области с номером j можно записать через электрический потенциал ϕ_j в виде:

$$\Delta \phi_j = -\rho/\varepsilon_j, \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, ρ — объемная плотность заряда, ε_j — абсолютная диэлектрическая проницаемость j -й области.

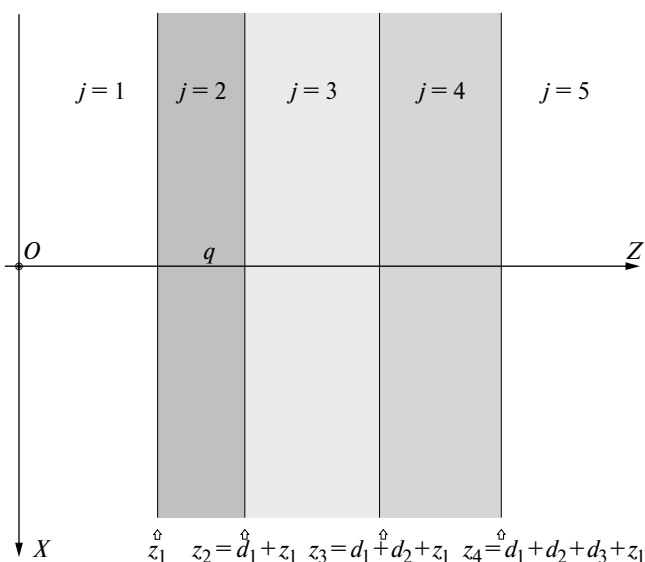


Рис. 1. Геометрия плоскостойкой структуры, состоящей из трех пленок.

Решая уравнения Лапласа в каждой области с учетом граничных условий, найдем электрическое поле во всех областях. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СЛОЕ, СВОБОДНОМ ОТ ЗАРЯДОВ

Пусть в области с номером j нет сторонних зарядов между границами z_{j-1} и z_j , диэлектрическая проницаемость среды в этой пленке равна ε_j . Представим электрический потенциал в области в виде фурье-разложения:

$$\phi_j(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x + i\eta y} \tilde{\phi}_j(\xi, \eta, z) d\xi d\eta.$$

Подставим в уравнение потенциал в виде фурье-разложения, тогда в рассматриваемой области можно записать

$$d^2 \tilde{\phi}_j / dz^2 - \gamma^2 \tilde{\phi}_j = 0, \quad (2)$$

где $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Уравнение при фиксированных значениях ξ и η есть обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной z . Общее решение уравнений (2) в области $[z_{j-1}, z_j]$ запишем в виде [12]

$$\begin{aligned} \phi_j(x, y, z) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_j^+ e^{-\gamma(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} \times \\ & \times d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_j^- e^{\gamma(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\hat{\phi}_j^+$ и $\hat{\phi}_j^-$ являются функциями только ξ и η . Справа в формуле первое слагаемое представляет поле от источников, находящихся слева от левой границы слоя. При этом поле уменьшается при удалении вправо (при удалении от источников слева от слоя). Второе слагаемое представляет поле от источников, находящихся справа от правой границы слоя (внутри слоя источников нет по условию). Это поле уменьшается при удалении влево (при удалении от источников справа от слоя).

Из (3) находим фурье-образ электрического потенциала и нормальную компоненту индукции электрического поля в границах области j :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \tilde{\phi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_{j-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \varepsilon_j \gamma & -\varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \hat{\phi}_j^+ \\ \hat{\phi}_j^- \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{c} \tilde{\phi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_j} &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{j-1}} & 1 \\ \varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} & -\varepsilon_j \gamma \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \hat{\phi}_j^+ \\ \hat{\phi}_j^- \end{array} \right), \end{aligned}$$

где $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$.

Вводя вектор-столбец $\hat{F}_j = \hat{F}_j(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_j^+; \\ \hat{\phi}_j^- \end{pmatrix}^T$, запишем полученные выражения в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_{j-1}} = \mathbf{L}_j \times \hat{F}_j, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_j} = \mathbf{R}_j \times \hat{F}_j, \quad (4)$$

где матрицы $\mathbf{L}_j$ и $\mathbf{R}_j$ имеют вид

$$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \varepsilon_j \gamma & -\varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{j-1}} & 1 \\ \varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} & -\varepsilon_j \gamma \end{pmatrix}. \quad (5)$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ БЕЗ СТОРОННИХ ЗАРЯДОВ

Исследуем теперь многослойную структуру, внутри которой нет сторонних зарядов. Рассмотрим границу $z = z_j$ между областями с номерами j и $j+1$. Тангенциальные компоненты напряженностей электрического поля $E_{j,x}$, $E_{j+1,x}$, $E_{j,y}$, $E_{j+1,y}$ и нормальные компоненты электрической индукции $D_{j,z} = -\varepsilon_j (\partial \phi_j / \partial z)$ и $D_{j+1,z} = -\varepsilon_{j+1} (\partial \phi_{j+1} / \partial z)$ непрерывны. Граничные условия для тангенциальных компонент электрического поля можно записать через соответствующие электрические потенциалы ϕ_j и ϕ_{j+1} , в результате получаем

$$\begin{aligned} \phi_j \Big|_{(x,y,z_j)} &= \phi_{j+1} \Big|_{(x,y,z_j)}, \\ -\varepsilon_j (\partial \phi_j / \partial z) \Big|_{(x,y,z_j)} &= -\varepsilon_{j+1} (\partial \phi_{j+1} / \partial z) \Big|_{(x,y,z_j)}, \end{aligned}$$

где электрический потенциал ϕ_{j+1} в области $j+1$ выражается формулой (3), в которой произведена замена индексов $j \rightarrow j+1$. Так как уравнения электростатики (квазистатики) – линейные уравнения, то граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, т.е. граничные условия выполняются для фурье-образов соответствующих величин:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{\phi}_{j+1} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} &= 0, \\ \tilde{D}_{j,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{D}_{j+1,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Записывая (6) с помощью (4), получаем матричное уравнение на границе $z = z_j$

$$\mathbf{R}_j \times \hat{F}_j = \mathbf{L}_{j+1} \times \hat{F}_{j+1}, \quad (7)$$

где матрицы $\mathbf{R}_j$ и $\mathbf{L}_{j+1}$ выражаются формулами (5).

Уравнение (7) можно записать для $j = 2, \dots, (N-1)$, т.е. для всех границ, исключая первую ($j = 1$) и последнюю ($j = N$) границы: z_1 , $z_N = d_{\text{tot}} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m$.

Общее решение для электрического потенциала в области $j = 1$, т.е. в интервале $(-\infty, z_1]$, записывается в виде:

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{\phi}_1^+ e^{-\gamma(z-z_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{\phi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Тогда на границе $z = z_1$ можно записать

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{D}_{1,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1^+ \\ \hat{\phi}_1^- \end{pmatrix}.$$

С обозначением $\hat{F}_1 = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1^+; \\ \hat{\phi}_1^- \end{pmatrix}^T$ граничные условия на границе $z = z_1$ принимают вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix} \times \hat{F}_1 = \mathbf{L}_2 \times \hat{F}_2. \quad (8)$$

Аналогично общее решение для потенциала в области $j = N+1$ (в интервале $[z_N, +\infty)$) записывается в виде

$$\begin{aligned} \phi_{N+1}(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{\phi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{\phi}_{N+1}^- e^{\gamma(z-z_N)} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \end{aligned}$$

и на границе $z = z_N$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{N+1} \\ \tilde{D}_{N+1,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{N+1}^+ \\ \hat{\phi}_{N+1}^- \end{pmatrix},$$

а граничные условия (6) на этой границе $z = z_N$ можно записать в виде

$$\mathbf{R}_N \times \hat{F}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix} \times \hat{F}_{N+1}. \quad (9)$$

Уравнения (7)–(9) позволяют связать вектор-столбцы $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_{N+1}$ в первой и последней областях задачи (т.е. в полупространствах вне плоскостной структуры) следующим матричным уравнением:

$$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= \left(\mathbf{T}_1 \times \prod_{m=2}^N \mathbf{T}_m \times \mathbf{T}_{N+1} \right) \times \hat{F}_{N+1}, \\ \mathbf{T}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{T}_m &= \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1}, \\ \mathbf{T}_{N+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (10)$$

Легко показать, что вектор-столбцы в областях с произвольными номерами S и P , где $1 \leq S < P \leq (N+1)$, связаны формулой

$$\hat{F}_S = \left(\prod_{m=S}^P \mathbf{T}_m \right) \times \hat{F}_P. \quad (11)$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ ОТ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО В ОДНОЙ ИЗ ПЛЕНОК

Исследуем точечный заряд q , расположенный в области с номером s , в точке $(0, 0, z_q)$. Пусть этот заряд определяется распределением плотности $\rho(x, y, z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Тогда фурье-образ этого распределения определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\xi, \eta, z) &= q \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y) \times \\ &\times \delta(z - z_q) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy = q\delta(z - z_q) e^{-i(\xi x + \eta y)}.\end{aligned}$$

Пусть этот точечный заряд находится в бесконечно тонком слое $(z_q - \Delta z/2, z_q + \Delta z/2)$. Тогда из уравнений электростатики $\text{rot} \mathbf{E} = 0$, $\text{div} \mathbf{D} = \rho$ для фурье-образов полей в пределе при $\Delta z \rightarrow 0$ можно записать

$$\begin{aligned}i\eta \tilde{E}_{s,z} - \frac{\Delta \tilde{E}_{s,y}}{\Delta z} &= 0, \quad \frac{\Delta \tilde{E}_{s,x}}{\Delta z} - i\xi \tilde{E}_{s,z} = 0, \\ i\xi \tilde{E}_{s,y} - i\eta \tilde{E}_{s,x} &= 0; \\ i\xi \tilde{D}_{s,x} + i\eta \tilde{D}_{s,y} + \frac{\Delta \tilde{D}_{s,z}}{\Delta z} &= q\delta(z - z_q).\end{aligned}$$

Из полученных уравнений находим приращение полей в слое:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{E}_{s,y} &= i\eta \tilde{E}_{s,z} \Delta z; \quad \Delta \tilde{E}_{s,x} = i\xi \tilde{E}_{s,z} \Delta z; \\ \Delta \tilde{D}_{s,z} &= -(i\xi \tilde{D}_{s,x} + i\eta \tilde{D}_{s,y}) \Delta z + q\delta(z - z_q) \Delta z.\end{aligned}$$

Откуда следует, что в пределе при $\Delta z \rightarrow 0$ скачки тангенциальных компонент напряженностей электрического поля и нормальной компоненты индукции электрического поля при переходе через бесконечно тонкий слой с зарядом равны $\Delta \tilde{E}_{s,y} \rightarrow 0$, $\Delta \tilde{E}_{s,x} \rightarrow 0$, $\Delta \tilde{D}_{s,z} \rightarrow q$. В матричном виде эти уравнения можно записать через электрический потенциал в эквивалентном виде следующим образом

$$\left(\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \right)_{z=z_q+0} - \left(\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \right)_{z=z_q-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Выразим теперь левую часть граничного условия (12) через вектор-столбцы $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_{N+1}$ полу-пространств снаружи плоскостойкой структуры. Для этого разобьем область с номером s на две области и обозначим их индексами l и r (левая и правая). Введем вектор-столбцы $\hat{F}_l$ и $\hat{F}_r$ в этих областях. Тогда члены слева от знака равенства в (12) можно выразить как

$$\left(\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \right)_{z=z_d-0} = \mathbf{R}_l \times \hat{F}_l \quad \text{и} \quad \left(\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \right)_{z=z_d+0} = \mathbf{L}_r \times \hat{F}_r. \quad (13)$$

Из (7), (11) следует, что

$$\hat{F}_1 = \left(\prod_{m=1}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{L}_l \times \hat{F}_l, \quad (14)$$

$$\hat{F}_r = (\mathbf{R}_r)^{-1} \times \left(\prod_{m=s+1}^{N+1} \mathbf{T}_m \right) \times \hat{F}_{N+1}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{L}_l = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \\ \varepsilon_s \gamma & -\varepsilon_s \gamma e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_r = \begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_s - z_q)} & 1 \\ \varepsilon_s \gamma e^{-\gamma(z_s - z_q)} & -\varepsilon_s \gamma \end{pmatrix}.$$

Подставляя (14), (15) в (13) и затем полученные выражения в (12), получаем

$$\mathbf{H}_R \times \hat{F}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{F}_1 + \mathbf{V}, \quad (16)$$

где $\mathbf{V} = (0, q)^T$ — вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие на плоскостойкую систему точечного заряда; матрицы $\mathbf{H}_R$, $\mathbf{H}_L$ характеризуют отклик на внешнее возбуждение слоистой структуры справа и слева от заряда и выражаются следующим образом:

$$\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_R \times \left(\prod_{m=s+1}^{N+1} \mathbf{T}_m \right),$$

$$\mathbf{H}_L = \left(\left(\prod_{m=1}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_L \right)^{-1},$$

$$\mathbf{T}_L = \mathbf{L}_l \times (\mathbf{R}_l)^{-1}, \quad \mathbf{T}_R = \mathbf{L}_r \times (\mathbf{R}_r)^{-1},$$

матрицы $\mathbf{T}_m$ определены (10).

В рассматриваемой задаче точечный заряд (источник полей) находится исключительно внутри плоскостной структуры. Поэтому в столбцах $\hat{\mathbf{F}}_1$ и $\hat{\mathbf{F}}_{N+1}$ есть только компоненты, определяющие поля, которые убывают при удалении от плоскостной структуры.

Чтобы получить оставшиеся, отличные от нуля, компоненты $\hat{\mathbf{F}}_1$ и $\hat{\mathbf{F}}_{N+1}$ разобьем матрицы $\mathbf{H}_R$ и $\mathbf{H}_L$ на элементы H_{RA} , H_{RB} , H_{RC} , H_{RD} и H_{LA} , H_{LB} , H_{LC} , H_{LD} , тогда уравнение (16) принимает вид

$$\begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\Phi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Данное уравнение можно представить следующей системой из двух матричных уравнений: $H_{RA} \hat{\Phi}_{N+1}^+ = H_{LB} \hat{\Phi}_1^-$, $H_{RC} \hat{\Phi}_{N+1}^+ = H_{LD} \hat{\Phi}_1^- + q$. Полученные уравнения можно снова объединить в одно матричное 2×2 уравнение:

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где введен вектор-столбец $\hat{\mathbf{F}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_1^- \\ \hat{\Phi}_{N+1}^+ \end{pmatrix}^T$.

Решая это уравнение, найдем $\hat{\Phi}_1^-$ и $\hat{\Phi}_{N+1}^+$, а значит, убывающие при удалении от плоскостной структуры поля:

$$\hat{\Phi}_1^- = q H_{RA} / (H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}),$$

$$\hat{\Phi}_{N+1}^+ = H_{LB} q / (H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}).$$

Убывающее влево поле в полупространстве $j = 1$ находим по формуле

$$\Phi_1(x, y, z) =$$

$$= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (18)$$

а убывающее вправо поле в полупространстве $j = N + 1$ — по формуле

$$\Phi_{N+1}(x, y, z) =$$

$$= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (19)$$

Наконец, при необходимости, зная $\hat{\mathbf{F}}_1$ и $\hat{\mathbf{F}}_{N+1}$, можно найти вектор-столбцы потенциалов $\hat{\mathbf{F}}_j$ в любой внутренней области с номером j , так как они однозначно последовательно связаны граничными условиями. После этого электрический потенциал в любой из этих областей может быть найден по формуле (13). Таким образом, поля будут определены во всем пространстве.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ОТ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА НЕКОТОРОМ РАССТОЯНИИ ОТ ГРАНИЦЫ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ПЛЕНОК

Рассмотрим задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда q , расположенного в полупространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ_f (рис. 2). Заряд находится на некотором расстоянии от двух пленок с диэлектрическими проницаемостями ϵ_{p1} и ϵ_{p2} и толщинами h_1 и h_2 . Пленки нанесены на полупространство с диэлектрической проницаемостью ϵ_d (рис. 2).

В системе координат (рис. 2) заряд находится в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$ на расстоянии $d = (z_b - z_q)$ вдоль оси Z от первой пленки. Эту задачу можно рассмотреть как задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда, расположенного на поверхности вспомогательной пленки толщиной $d = (z_b - z_q)$, причем диэлектрические постоянные этой вспомогательной пленки и полупространства слева равны ϵ_f .

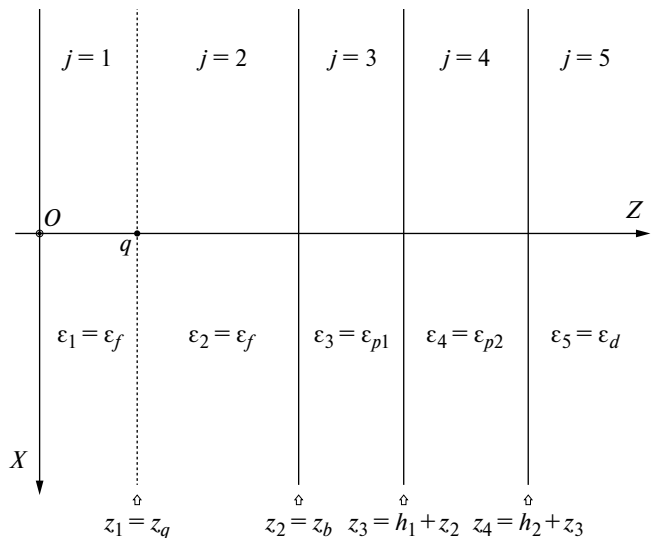


Рис. 2. Точечный заряд q , расположенный в свободном пространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ_f в точке с координатой z_q на расстоянии $(z_b - z_q)$ от пленки толщиной h и диэлектрической проницаемостью ϵ_p , расположенной на границе полупространства с диэлектрической проницаемостью ϵ_d .

В такой постановке имеется пять областей. Введем следующую нумерацию областей: индекс $j = 1$ соответствует полупространству с ε_f , $j = 2$ – вспомогательной пленке с $\varepsilon_2 = \varepsilon_f$ и толщиной d , $j = 3$ – реальной пленке с $\varepsilon_3 = \varepsilon_{p1}$ толщиной h_1 , $j = 4$ – реальной пленке с $\varepsilon_4 = \varepsilon_{p2}$ толщиной h_2 , $j = 5$ соответствует полупространству с $\varepsilon_5 = \varepsilon_d$ (рис. 2).

Тогда

$$N = 4, \quad z_1 = z_q, \quad z_2 = z_b, \quad z_3 = h_1 + z_2,$$

$$z_4 = h_2 + z_3, \quad \mathbf{H}_R = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4 \times \mathbf{T}_5, \quad \mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1}$$

и уравнение (16) принимает вид

$$(\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4 \times \mathbf{T}_5) \times \hat{\mathbf{F}}_5 = (\mathbf{T}_1)^{-1} \times \hat{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{V},$$

где матрицы выражаются следующими формулами:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \quad \mathbf{T}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= \mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d} \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma e^{-\gamma d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \varepsilon_f \gamma e^{-\gamma d} & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3 &= \mathbf{L}_3 \times (\mathbf{R}_3)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_1} \\ \varepsilon_{p1} \gamma & -\varepsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_1} & 1 \\ \varepsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} & -\varepsilon_{p1} \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_4 &= \mathbf{L}_4 \times (\mathbf{R}_4)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_2} \\ \varepsilon_{p2} \gamma & -\varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_2} & 1 \\ \varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} & -\varepsilon_{p2} \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \end{aligned}$$

а вектор-столбец точечного заряда равен $\mathbf{V} = (0, q)^T$.

В таком случае

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_L &= (\mathbf{T}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}_R &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d} \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma e^{-\gamma d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \varepsilon_f \gamma e^{-\gamma d} & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_1} \\ \varepsilon_{p1} \gamma & -\varepsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_1} & 1 \\ \varepsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} & -\varepsilon_{p1} \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_2} \\ \varepsilon_{p2} \gamma & -\varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_2} & 1 \\ \varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} & -\varepsilon_{p2} \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если вектор-столбец $\hat{\mathbf{F}}_{\text{out}} = (\hat{\phi}_1^-; \hat{\phi}_5^+)^T$, уравнение (17) для данной задачи имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & H_{RA} \\ \varepsilon_f \gamma & H_{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1^- \\ \hat{\phi}_5^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^- &= q H_{RA} / (H_{RC} + \varepsilon_f \gamma H_{RA}), \\ \hat{\phi}_5^+ &= q / (H_{RC} + \varepsilon_f \gamma H_{RA}). \end{aligned} \quad (20)$$

В явном виде, можно выразить H_{RA} и H_{RC} через гиперболические синусы и косинусы

$$\begin{aligned} H_{RA} &= \left[\left(\text{ch}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_f} \text{sh}(\gamma d) \right) \text{ch}(\gamma h_1) + \left(\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f} \text{sh}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_{p1}} \text{ch}(\gamma d) \right) \text{sh}(\gamma h_1) \right] \text{ch}(\gamma h_2) + \\ &+ \left[\left(\frac{\varepsilon_{p2}}{\varepsilon_f} \text{sh}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_{p2}} \text{ch}(\gamma d) \right) \text{ch}(\gamma h_1) + \left(\frac{\varepsilon_{p2}}{\varepsilon_{p1}} \text{ch}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_{p1} \varepsilon_d}{\varepsilon_{p2} \varepsilon_f} \text{sh}(\gamma d) \right) \text{sh}(\gamma h_1) \right] \text{sh}(\gamma h_2), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} H_{RC} &= \gamma \left[(\varepsilon_f \text{sh}(\gamma d) + \varepsilon_d \text{ch}(\gamma d)) \text{ch}(\gamma h_1) + \left(\varepsilon_{p1} \text{ch}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_f \varepsilon_d}{\varepsilon_{p1}} \text{sh}(\gamma d) \right) \text{sh}(\gamma h_1) \right] \text{ch}(\gamma h_2) + \\ &+ \gamma \left[\left(\varepsilon_{p2} \text{ch}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_f \varepsilon_d}{\varepsilon_{p2}} \text{sh}(\gamma d) \right) \text{ch}(\gamma h_1) + \left(\frac{\varepsilon_f \varepsilon_{p2}}{\varepsilon_{p1}} \text{sh}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_{p1} \varepsilon_d}{\varepsilon_{p2}} \text{ch}(\gamma d) \right) \text{sh}(\gamma h_1) \right] \text{sh}(\gamma h_2). \end{aligned} \quad (22)$$

Найдем потенциал ϕ_1 в полупространстве ($j = 1$) при $z \leq z_q$. Подставляя выражения (21), (22) для H_{RA} и H_{RC} в (20), после несложных преобразований получаем

$$\hat{\phi}_1^- = \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} + \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} e^{-2\gamma(z_b - z_q)} \Re(\gamma, h),$$

где

$$\begin{aligned}\Re(\gamma) &= \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p1}} + \chi(\gamma), \\ \chi(\gamma) &= \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} e^{-2\gamma h_1}}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2} \times \\ &\times \frac{(a_1 + a_2 e^{-2\gamma h_2})}{(1 + b_1 e^{-2\gamma h_1} + b_2 e^{-2\gamma h_2} + b_3 e^{-2\gamma(h_1+h_2)})},\end{aligned}\quad (23)$$

$$a_1 = \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})}{(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p1})}, \quad a_2 = \frac{(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)},$$

$$b_1 = \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})},$$

$$b_2 = \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)},$$

$$b_3 = \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}.$$

Аналогично для $\hat{\varphi}_5^+$ получаем

$$\hat{\varphi}_5^+ = \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \vartheta(\gamma), \quad (24)$$

$$\begin{aligned}\text{где } \vartheta(\gamma) &= \frac{8\varepsilon_f \varepsilon_{p1} \varepsilon_{p2}}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)} \times \\ &\times \frac{e^{-\gamma(h_1+h_2)}}{(1 + b_1 e^{-2\gamma h_1} + b_2 e^{-2\gamma h_2} + b_3 e^{-2\gamma(h_1+h_2)})}.\end{aligned}\quad (25)$$

Из выражения для потенциала (18) получаем

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{\gamma(z-z_q)} + \right. \\ &\left. + \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))} \Re(\gamma, h) \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.\end{aligned}\quad (26)$$

Воспользуемся математическим тождеством

$$\begin{aligned}\frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} |z - z_q|}}{2\varepsilon_f \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} e^{i(\xi(x-x_q) + \eta(y-y_q))} d\xi d\eta = \\ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_q)^2}}.\end{aligned}\quad (27)$$

Тогда (26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_q)^2}} + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p1}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-(2z_b-z_q))^2}} + \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\gamma) e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.\end{aligned}\quad (28)$$

Потенциал φ_5 в полупространстве ($j = 5$) при $z \geq h_1 + h_2 + z_b$ получим, подставляя (24) в (19):

$$\begin{aligned}\varphi_5(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \vartheta(\gamma) \times \\ &\times e^{-\gamma(z - (z_b + h_1 + h_2))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) \times \\ &\times e^{-\gamma(z - (z_q + h_1 + h_2))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Найдем потенциал φ_4 при $(h_1 + z_b) \leq z \leq (h_1 + h_2 + z_b)$, т.е. в слое $j = 4$ (в пленке).

Для этого запишем граничные условия (7) на граничной плоскости $z = z_4 = h_1 + h_2 + z_b$:

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma h_2} & 1 \\ \varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} & -\varepsilon_{p2} \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_4^+ \\ \hat{\varphi}_4^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_5^+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая это уравнение с учетом (24), получаем

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_4^+ &= \frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} e^{\gamma h_2} \hat{\varphi}_5^+ = \\ &= \frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_2)} \vartheta(\gamma),\end{aligned}$$

$$\hat{\varphi}_4^- = \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \hat{\varphi}_5^+ = \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \vartheta(\gamma).$$

Полный потенциал поля внутри слоя $j = 4$ выражается из (3) формулой

$$\varphi_4(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{\varphi}_4^+ e^{-\gamma(z-(z_b+h_1))} + \hat{\varphi}_4^- e^{\gamma(z-(z_b+h_1+h_2))} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставляя полученные выражения для $\hat{\varphi}_4^+$ и $\hat{\varphi}_4^-$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} e^{-\gamma(z-(z_q+h_1+h_2))} + \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \times \right. \\ & \left. \times e^{\gamma(z-(2z_b-z_q+h_1+h_2))} \right) \times \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Найдем теперь потенциал при $z_b \leq z \leq z_b + h_1$, т.е. в слое $j = 3$. Граничные условия (7) на плоскости $z = z_3 = z_b + h_1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_1} & 1 \\ \varepsilon_{p1}\gamma e^{-\gamma h_1} & -\varepsilon_{p1}\gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_3^+ \\ \hat{\varphi}_3^- \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_2} \\ \varepsilon_{p2}\gamma & -\varepsilon_{p2}\gamma e^{-\gamma h_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_4^+ \\ \hat{\varphi}_4^- \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда после несложных вычислений получаем

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_3^+ = & \frac{\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2}}{2\varepsilon_{p1}} e^{\gamma h_1} \hat{\varphi}_4^+ + \frac{\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2}}{2\varepsilon_{p1}} e^{\gamma(h_1-h_2)} \hat{\varphi}_4^- = \\ & = \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \times \\ & \times \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q-h_1-h_2)} \vartheta(\gamma) + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q-h_1+h_2)} \vartheta(\gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_3^- = & \frac{\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2}}{2\varepsilon_{p1}} \hat{\varphi}_4^+ + \frac{\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2}}{2\varepsilon_{p1}} e^{-\gamma h_2} \hat{\varphi}_4^- = \\ & = \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q-h_2)} \vartheta(\gamma) + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q+h_2)} \vartheta(\gamma). \end{aligned}$$

Полный потенциал поля внутри слоя $j = 3$ выражается формулой :

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{\varphi}_3^+ e^{-\gamma(z-z_b)} + \right. \\ & \left. + \hat{\varphi}_3^- e^{\gamma(z-(z_b+h_1))} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Подставляя сюда полученные выражения для $\hat{\varphi}_3^+$ и $\hat{\varphi}_3^-$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} e^{-\gamma(z-z_q-h_1-h_2)} + \right. \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} e^{-\gamma(z-z_q-h_1+h_2)} + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} e^{\gamma(z-(2z_b-z_q+h_1-h_2))} + \\ & \left. + \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} e^{\gamma(z-(2z_b-z_q+h_1+h_2))} \right\} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Выражения для $\hat{\varphi}_2^+$ и $\hat{\varphi}_2^-$ можно также получить из $\hat{\varphi}_1^-$ и граничного условия на плоскости $z = z_1 = z_q$ при учете наличия на границе заряда (см. (12)):

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_b-z_q)} \\ \varepsilon_f\gamma & -\varepsilon_f\gamma e^{-\gamma(z_b-z_q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_2^+ \\ \hat{\varphi}_2^- \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_f\gamma & -\varepsilon_f\gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\varphi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\hat{\varphi}_2^+ = \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_2^- &= \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \Re(\gamma) = \\ &= \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} + \chi(\gamma) \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)}.\end{aligned}\quad (30)$$

Полный потенциал поля внутри слоя $j = 2$ выражается формулой (3):

$$\begin{aligned}\varphi_2(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{\varphi}_2^+ e^{-\gamma(z - z_q)} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{\varphi}_2^- e^{\gamma(z - z_b)} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Подставляя в последнее уравнение выражения (29), (30), получаем

$$\begin{aligned}\varphi_2(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q e^{-\gamma(z - z_q)}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma) \frac{q e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение (23) для $\chi(\gamma)$ и используя тождество (27), имеем

$$\begin{aligned}\varphi_2(x, y, z) &= q/4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2} + \\ &+ \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} q/4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - (2z_b - z_q))^2} + \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma) \frac{e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.\end{aligned}\quad (31)$$

Заметим, что правая часть (31) полностью совпадает с (28), поэтому $\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z)$.

Для нахождения φ_{ind} — потенциала индуцированных в рассматриваемой плоскостистой структуре зарядов — надо в области $z < z_b$ вычесть из полного потенциала в этой области потенциал исходного заряда. Тогда, обозначая $z_{\text{ref}} = 2z_b - z_q$, получаем из (28), (31) выражение

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{ind}}(x, y, z) &= \\ &= \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} + \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma) \frac{e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.\end{aligned}\quad (32)$$

Отметим, что из (23) сразу следует $\lim_{h_1 \rightarrow \infty} \chi(\gamma) = 0$, поэтому интеграл в (32) исчезает и остается только первый член, который представляет потенциал индуцированных зарядов в методе зеркальных отражений для точечного заряда у границы двух диэлектрических полупространств с проницаемостями ϵ_f и ϵ_{p1} [14].

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ НА СЛУЧАЙ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ПЛЕНОК

Продолжая рассмотрение задачи с двумя пленками, можно найти другую форму записи для потенциала $\varphi_{\text{ind}}(x, y, z)$, индуцированного точечным зарядом q , расположенным в точке $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$. Введем функцию

$$U(x, y, z) = q/4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (33)$$

которая является потенциалом точечного заряда q , расположенного в начале координат в пространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ_f .

Введем функцию $h(u, v)$ обратного преобразования Фурье функции $\chi(\gamma)$ по переменным ξ и η :

$$\begin{aligned}h(u, v) &= \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) e^{i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta.\end{aligned}\quad (34)$$

Применяя теорему о свертке ко второму слагаемому в (32), можно записать

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{ind}}(x, y, z) &= \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \times \\ &\times \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{\text{ref}})^2}} + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v) U(x - u, y - v, z - z_{\text{ref}}) du dv.\end{aligned}\quad (35)$$

При численном нахождении φ_{ind} по формуле (35) можно устранить четырехкратное интегрирование. Это можно сделать, приводя двойное интегрирование в (34) к однократному интегрированию с помощью перехода к полярным координатам в координатных плоскостях (u, v) и (ξ, η) по формулам $u = \sigma \cos \psi$, $v = \sigma \sin \psi$ и $\xi = \lambda \cos \theta$, $\eta = \lambda \sin \theta$ и используя тождество

$$\int_0^{2\pi} e^{i\sigma\lambda \cos(\psi - \theta)} d\theta = 2\pi J_0(\sigma\lambda).$$

Так получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}(\sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \chi(\lambda) e^{i\lambda\sigma \cos(\psi-\theta)} d\theta d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(\sigma\lambda) \chi(\lambda) \lambda d\lambda,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}(u, v) &= \mathfrak{h}(\sqrt{u^2 + v^2}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(\lambda\sqrt{u^2 + v^2}) \chi(\lambda) \lambda d\lambda.\end{aligned}\quad (36)$$

Функция $\mathfrak{h}(\sigma)$ является плавной, ее можно приблизить сплайнами и при численном интегрировании в (35) использовать эту функцию в виде сплайн-аппроксимации. Формула (35) определяет потенциал, индуцированный в слоистой структуре под действием точечного заряда q , расположенного в точке $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$.

Формулу (35) нетрудно обобщить на случай точечного заряда q , расположенного в произвольной точке $\mathbf{r}_q = (x_q; y_q; z_q)$. Так, полный потенциал $\Phi_1 = \Phi_2$ в полупространстве $j = 1$ и области $j = 2$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y, z) = \Phi_2(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_q)^2}} + \\ &+ \frac{(\epsilon_f - \epsilon_{p1})}{(\epsilon_{p1} + \epsilon_f)} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_{\text{ref}})^2}} + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{h}(u, v) U(x-x_q-u, y-y_q-v, z-z_{\text{ref}}) dudv,\end{aligned}\quad (37)$$

причем важно, что универсальная функция $\mathfrak{h}(u, v)$ не зависит от величины и положения заряда, а зависит от диэлектрических проницаемостей всех областей задачи и толщин всех пленок (от параметров плоскостойкой структуры).

Полученная формула дает обобщение метода зеркальных отражений в электростатике на случай, когда точечный заряд q расположен в одном полупространстве рядом с плоскостойкой структурой из двух пленок, расположенных на границе другого полупространства. Выражение (37) имеет простой физический смысл. Первый член в (37) — это потенциал исходного точечного заряда q (источника поля), второй член — это потенциал виртуального заряда величиной $q(\epsilon_f - \epsilon_{p1})/(\epsilon_{p1} + \epsilon_f)$, расположенного зеркально относительно границы ближайшей пленки $z = z_b$, а третий член — это потенциал виртуальных зарядов, распределенных по плоскости $z = z_{\text{ref}}$ с плотностью $q\mathfrak{h}$, распределенных по области размером порядка суммы толщин пленок. Последний член в (37) весьма быстро убывает с ростом толщины плоскостойкой структуры (при $(h_1 + h_2) \rightarrow \infty$).

Из вывода формулы (37) видно, что для случая плоскостойкой структуры, состоящей из произвольного числа пленок, можно получить подобную формулу, но с другим распределением

поверхностного заряда $q\mathfrak{h}$, которое будет зависеть от всех толщин всех пленок и их диэлектрических проницаемостей, а также от параметров полупространств. Следуя предложенным выше рассуждениям, можно численно или аналитически найти

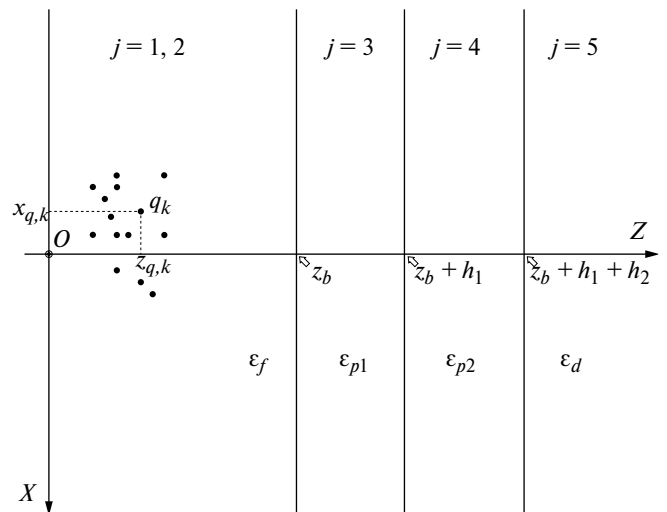


Рис. 3. Система точечных зарядов q_k у пленки, расположенной на границе полупространства.

функцию $h(u, v)$ для многопленочной структуры и использовать ее при интегрировании в (37).

Аналогично введем функцию $t(u, v)$ – функцию обратного преобразования Фурье $\vartheta(\gamma)$ по переменным ξ и η :

$$t(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \times \quad (38)$$

$$\times e^{i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(\lambda \sqrt{u^2 + v^2}) \vartheta(\lambda) \lambda d\lambda.$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) &= \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - (z_q + h_1 + h_2)) dudv + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - (z_q + h_1 - h_2)) dudv + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - (2z_b - z_q + h_1 - h_2)) dudv + \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - (2z_b - z_q + h_1 + h_2)) dudv, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) &= \frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) \times \\ &\times U(x - x_q - u, y - y_q - \\ &- v, z - (z_q + h_1 + h_2)) dudv + \\ &+ \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) \times \\ &\times U(x - x_q - u, y - y_q - \\ &- v, z - (2z_b - z_q + h_1 + h_2)) dudv, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \varphi_5(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) \times \\ &\times U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - \\ &- (z_q + h_1 + h_2)) dudv. \end{aligned} \quad (41)$$

Для дальнейших обобщений нетрудно получить формулы вида (37) для потенциала поля точечного заряда q , расположенного в произвольной точке $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$ в областях первой пленки ($j = 3$), второй пленки ($j = 4$) и в полупространстве за пленкой ($j = 5$). Приведем результат вычислений, используя функции $h(u, v)$, $t(u, v)$ и $U(x, y, z)$, определяющиеся (23), (25), (36), (38) и (33):

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ НА СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ

Обобщим теперь полученный метод зеркальных отражений на потенциал полного поля $\Phi_{\text{tot}}(x, y, z)$ в области $z < z_b$ перед плоскостной структурой, состоящей из двух пленок (рис. 3), произвольной компактной системы N_q зарядов-источников q_k , расположенных в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_{q,k} = (x_{q,k}, y_{q,k}, z_{q,k})$, $k = 1, 2, \dots, N_q$.

Если бы не было плоскостной структуры, то потенциал этой системы зарядов-источников представлялся бы формулой

$$\Phi_s(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_q} q_k / \sqrt{4\pi\varepsilon_f \left[(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - z_{q,k})^2 \right]}.$$

Суммируя выражения (37) для каждого заряда q_k по всем N_q зарядам системы и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N_q} q_k / \sqrt{4\pi\varepsilon_f \left[(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - (2z_b - z_{q,k}))^2 \right]} = \\ &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / \sqrt{4\pi\varepsilon_f \left[(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + ((2z_b - z) - z_{q,k})^2 \right]} = \Phi_s(x, y, 2z_b - z), \end{aligned}$$

получаем обобщение метода зеркальных отражений в электростатике для произвольных распределений зарядов для полного потенциала системы зарядов в полупространстве перед плоскостойкой структурой из двух пленок в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(x, y, z) &= \Phi_s(x, y, z) + \\ &+ \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_{p1})}{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, 2z_b - z) dudv. \end{aligned} \quad (42)$$

Из вывода формулы (42) следует, что потенциал индуцированных зарядов Φ_{ind} , который порождается потенциалом Φ_s распределений зарядов-источников поля, представляется формулой

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ind}}(x, y, z) &= \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_{p1})}{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, 2z_b - z) dudv. \end{aligned} \quad (43)$$

Аналогично учитывая, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - (z_{q,k} + h_1 + h_2))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + ((z - h_1 - h_2) - z_{q,k})^2} = \Phi_s(x, y, z - h_1 - h_2), \\ &\sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - (z_{q,k} + h_1 - h_2))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + ((z - h_1 + h_2) - z_{q,k})^2} = \Phi_s(x, y, z - h_1 + h_2), \\ &\sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - (2z_b - z_{q,k} + h_1 - h_2))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - (2z_b + h_1 - h_2) + z_{q,k})^2} = \\ &= \Phi_s(x, y, 2z_b + h_1 - h_2 - z), \\ &\sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - (2z_b - z_{q,k} + h_1 + h_2))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - (2z_b + h_1 + h_2) + z_{q,k})^2} = \\ &= \Phi_s(x, y, 2z_b + h_1 + h_2 - z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z) &= \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, z - h_1 - h_2) dudv + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, z - h_1 + h_2) dudv + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, 2z_b + h_1 - h_2 - z) dudv + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, 2z_b + h_1 + h_2 - z) dudv. \end{aligned} \quad (44)$$

получаем с учетом (39) выражение для потенциала Φ_3 системы зарядов в первой пленке при $z_b \leq z \leq (z_b + h_1)$.

Точно так же с учетом (40) потенциал Φ_4 полного поля системы зарядов во второй пленке при $(z_b + h_1) \leq z \leq (z_b + h_1 + h_2)$ ($j = 4$) равен

$$\begin{aligned} \Phi_4(x, y, z) = & \frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) \times \\ & \Phi_s(x - u, y - v, z - h_1 - h_2) dudv + \\ & + \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(u, v) \times \\ & \Phi_s(x - u, y - v, 2z_b + h_1 + h_2 - z) dudv. \end{aligned} \quad (45)$$

Аналогично, с учетом (41) потенциал Φ_5 полного поля системы зарядов в полупространстве при $z_b \geq (z_b + h_1 + h_2)$ ($j = 5$) равен

$$\begin{aligned} \Phi_5(x, y, z) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(u, v) \times \\ & \times \Phi_s(x - u, y - v, z - h_1 - h_2) dudv. \end{aligned} \quad (46)$$

Отметим, что обобщение метода зеркальных отражений было получено ранее в работе [12] в другой формулировке и успешно применено при решении задачи о нанофокусировке поверхностной плазмонной волны на вершине металлического острия.

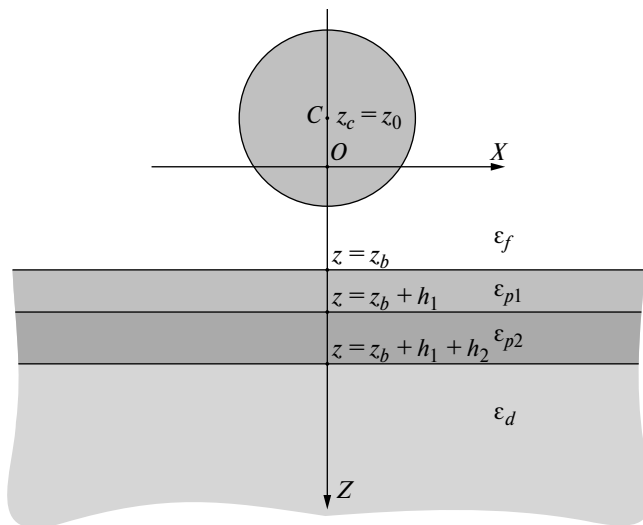


Рис. 4. Металлическая сфера у пленки, расположенной на границе полупространства; геометрия задачи.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ВОКРУГ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТЕЛА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ПЛЕНОК

Рассмотрим металлическое тело, форму которого для определенности примем сферической с радиусом R . Поверхность сферы представляется формулой

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

где координаты центра $x_c = 0$, $y_c = 0$ и $z_c = z_0$ (рис. 4). Пусть вблизи сферы находятся две пленки толщинами h_1 и h_2 , причем их границы выглядят так: $z = z_b$, $z = (z_b + h_1)$ и $z = (z_b + h_1 + h_2)$. Диэлектрические проницаемости внешней однородной среды, первой и второй пленок и полубесконечной среды за пленкой обозначим ε_f , ε_{p1} , ε_{p2} и ε_d соответственно.

Рассмотрим распределение электрического потенциала, которое установится в пространстве вокруг металлического тела. Как известно, потенциал электростатического поля Φ удовлетворяет в однородном веществе без сторонних зарядов уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$. Будем считать, что на границе металлического тела (сферы) потенциал U_s постоянный. Кроме того, на плоских границах пленок непрерывны тангенциальные составляющие электрического поля и нормальные составляющие электрической индукции. Тогда граничные условия можно записать следующим образом:

$$\text{на поверхности тела } \Phi = U_s, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & \text{на границе пленки } z = z_b \\ & \varepsilon_{p1} E_{3,n} = \varepsilon_f E_{f,n} \text{ и } E_{3,\tau} = E_{f,\tau}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & \text{на границе пленки } z = z_b + h_1 \\ & \varepsilon_{p2} E_{4,n} = \varepsilon_{p1} E_{3,n} \text{ и } E_{4,\tau} = E_{3,\tau}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \text{на границе пленки } z = z_b + h_1 + h_2 \\ & \varepsilon_d E_{5,n} = \varepsilon_{p2} E_{4,n} \text{ и } E_{5,\tau} = E_{4,\tau}. \end{aligned} \quad (50)$$

Рассматриваемая задача имеет осевую симметрию относительно оси Z . Поэтому и решение уравнения Лапласа имеет такую же симметрию. Пусть потенциал зарядов, находящихся на эквипотенциальном металлическом теле в пространстве с проницаемостью ε_f , описывается функцией $\Phi_s(x, y, z)$.

Тогда полный потенциал $\Phi_{\text{tot}}(x, y, z)$ в области, заполненной диэлектриком с ε_f , можно выразить через $\Phi_s(x, y, z)$ по формуле (42), а полный потенциал в пленках и в диэлектрическом пространстве за

ней — по формулам (44)–(46). При этом граничные условия (48)–(50) выполняются автоматически.

Таким образом, задача определения потенциала во всем пространстве состоит в том, чтобы найти такой потенциал $\Phi_s(x, y, z)$, при котором полный потенциал $\Phi_{\text{tot}}(x, y, z)$ удовлетворяет на поверхности тела граничному условию (47).

Это можно сделать, разложив потенциал $\Phi_s(x, y, z)$ по подходящим гармоническим функциям, определяя коэффициенты разложения из условия (47) для $\Phi_{\text{tot}}(x, y, z)$ на эквипотенциальной границе металла.

Имея в виду общность дальнейшего изложения, рассматривая сферическое тело, перейдем к безразмерным координатам $\tilde{x} = x/R$, $\tilde{y} = y/R$, $\tilde{z} = z/R$. Уравнение Лапласа в безразмерных координатах не изменяется. Кроме того, нормируем потенциал на его значение U_s на поверхности сферы, т.е. перейдем от размерного к безразмерному потенциалу $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \Phi/U_s$ в безразмерных координатах. Тогда граничное условие (47) на сфере записывается в виде $\tilde{\Phi}_{\text{tot}} = 1$.

В рассматриваемом осесимметричном случае для выполнения граничного условия на поверхности сферы достаточно удовлетворить его на линии пересечения поверхности сферы с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось Z . В качестве такой плоскости выберем плоскость $(\tilde{x}, \tilde{z})$ при $\tilde{y} = 0$. Более конкретно, достаточно удовлетворить граничному условию $\tilde{\Phi}_{\text{tot}}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = 1$ только на границе пересечения полуплоскости $\tilde{y} = 0$ при $\tilde{x} \geq 0$ и поверхности сферы. В безразмерных координатах это кривая $\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2 = 1$, при $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{x} \geq 0$.

Будем искать решение, предполагая, что потенциал снаружи сферы $\tilde{\Phi}_s$ представляется в виде следующего разложения по гармоническим функциям:

$$\tilde{\Phi}_s = \sum_{j=1}^N A_j P_{j-1}(\cos\theta)/\tilde{r}^j, \quad (51)$$

где A_j — постоянные коэффициенты разложения; $P_j(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра степени j ; угол θ отсчитывается от оси Z из центра сферы; $\tilde{r}$ — безразмерный радиус-вектор точки наблюдения, проведенный из центра сферы. В координатах $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ выражение (51) можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (52)$$

где

$$\mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = P_{j-1}\left((\tilde{z} - \tilde{z}_0)/\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2}\right) / \left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2}\right)^j.$$

Отметим, что выбор функциональных зависимостей (51) из общего решения уравнения Лапласа обусловлен тем, что снаружи сферы потенциал поля должен стремиться к нулю при удалении от ее поверхности, а на поверхности сферы полиномы Лежандра образуют полную систему функций.

Тогда потенциал индуцированных зарядов в плоскостистой структуре $\tilde{\Phi}_{\text{ind}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ можно представить, учитывая (43), в виде

$$\tilde{\Phi}_{\text{ind}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \mathfrak{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$\text{где } \mathfrak{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_{pl})}{(\varepsilon_{pl} + \varepsilon_f)} \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{h}(\tilde{u}, \tilde{v}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - \tilde{u}, \tilde{y} - \tilde{v}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) d\tilde{u} d\tilde{v}.$$

Так, полный потенциал в среде с ε_f (между сферой и первой пленкой) можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}_{\text{tot}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j (\mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \mathfrak{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})). \quad (53)$$

Граничное условие на сфере $\tilde{\Phi}_{\text{tot}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 1$ в данной работе удовлетворялось приближенно, методом коллокаций [15]. Указанные уравнения записывались в равномерно распределенных N точках полукруга $\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2 = 1$ при $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{x} > 0$ на поверхности сферы. При решении N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными находились A_j и по формулам (53) распределения потенциала в области между сферой и передней поверхностью первой пленки.

С учетом (52), (44)–(46) распределения потенциала в пленках и в полупространстве за ними определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j & \left(\frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\tilde{u}, \tilde{v}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - \tilde{u}, \tilde{y} - \tilde{v}, \tilde{z} - \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2) d\tilde{u} d\tilde{v} + \right. \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\tilde{u}, \tilde{v}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - \tilde{u}, \tilde{y} - \tilde{v}, \tilde{z} - \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2) d\tilde{u} d\tilde{v} + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\tilde{u}, \tilde{v}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - \tilde{u}, \tilde{y} - \tilde{v}, 2\tilde{z}_b + \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 - \tilde{z}) d\tilde{u} d\tilde{v} + \\ & \left. + \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\tilde{u}, \tilde{v}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - \tilde{u}, \tilde{y} - \tilde{v}, 2\tilde{z}_b + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 - \tilde{z}) d\tilde{u} d\tilde{v} \right), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_4(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j & \left(\frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\tilde{u}, \tilde{v}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - \tilde{u}, \tilde{y} - \tilde{v}, \tilde{z} - \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2) d\tilde{u} d\tilde{v} + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\tilde{u}, \tilde{v}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - \tilde{u}, \tilde{y} - \tilde{v}, 2\tilde{z}_b + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 - \tilde{z}) d\tilde{u} d\tilde{v} \right), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\tilde{\Phi}_5(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\tilde{u}, \tilde{v}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - \tilde{u}, \tilde{y} - \tilde{v}, \tilde{z} - \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2) d\tilde{u} d\tilde{v}. \quad (56)$$

Формулы (53)–(56) решают задачу нахождения нормированного потенциала в нормированных координатах снаружи сферы, в слоистой структуре и в полупространстве за ней при известных значениях A_j .

Важное свойство полученных решений — они зависят от отношений диэлектрических проницаемостей. Таким образом, если увеличить все диэлектрические проницаемости в k раз, то распределение нормированного потенциала не изменится. Отметим, что для разложения искомого потенциала можно использовать и другие системы гармонических функций. Так, для нахождения решения задачи в случае осесимметричного тела сложной формы от- лично зарекомендовал себя метод работы [16].

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ВОКРУГ ЗАРЯЖЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ, РАСПОЛОЖЕННЫХ РЯДОМ С ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРОЙ ИЗ ДВУХ ПЛЕНОК

В качестве примера применения изложенной выше теории были проведены численные расчеты распределения нормированного потенциала металлической заряженной сферы, находящейся вблизи плоскостойкой структуры, состоящей из двух пленок. Сфера с центром в точке $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (0, 0, -0.5)$ находилась в вакууме с

$\varepsilon_f = 1$, рядом с пленками с толщинами $\tilde{h}_1 = 0.5$ и $\tilde{h}_2 = 0.5$ (в нормированных на радиус кривизны сферы единицах). Диэлектрические проницаемости пленок были выбраны равными $\varepsilon_{p1} = 2$ и $\varepsilon_{p2} = 5$. Полупространство за пленкой имело диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_d = 3$. Границы пленки определялись уравнениями $\tilde{z} = \tilde{z}_b = 1$, $\tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h}_1 = 1.5$ и $\tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 = 2$ (рис. 4). Кратчайшее расстояние от сферы до первой пленки было равно $\Delta\tilde{z} = 0.5$.

На рис. 5а показано распределение нормированного потенциала в плоскости $(\tilde{x}, \tilde{z})$ при выбранных параметрах. Видна естественная экранировка электрического поля в диэлектрике, возникающая за счет индуцированных зарядов. Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем сильнее экранировка. Важное свойство полученного распределения — оно одинаково для всех подобных геометрий и одинаковых соотношений диэлектрических проницаемостей.

Кроме задачи о сфере, аналогично была рассмотрена задача нахождения нормированного потенциала металлического заряженного тела каплевидной формы, которое представляет собой полуэллипс, наложенный на полусферу. Тело располагалось вблизи той же плоской слоистой структуры из двух пленок, что и в предыдущем

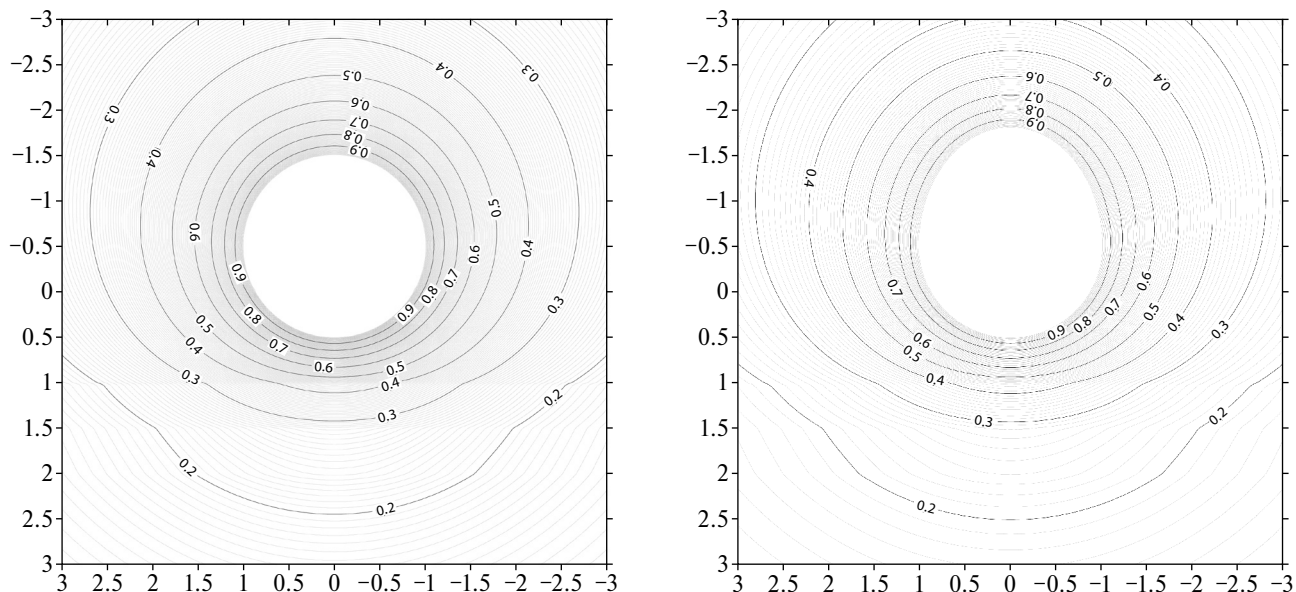


Рис. 5. Распределение в нормированных координатах нормированного потенциала вокруг металлических заряженных тел: сферы (а) и каплеобразного тела вращения (б).

примере. Нормирование координат проводилось по отношению к радиусу полусферы. Нормированная длина большой полуоси полуэллипса была равна 0.3. Центр кривизны полусферы находился в точке $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (0, 0, -0.5)$. Вытянутый полуэллипс был направлен от слоистой структуры. Кратчайшее расстояние от полусферической части тела до первой пленки равно $\Delta\tilde{z} = 0.5$. Нормированное распределение потенциала в плоскости $(\tilde{x}, \tilde{z})$ показано на рис. 5б. Разложение $\tilde{\Phi}_s$ производилось по тем же функциям, что и в предыдущем случае (52).

Следует отметить, что с увеличением эксцентриситета полуэллипса сходимость численного метода падает. Проблема наилучшей аппроксимации $\tilde{\Phi}_s$ для тел сложной формы требует дополнительного исследования.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ К ЗАДАЧАМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СРЕД

Как известно, существует аналогия между задачами электростатики и стационарными задачами теплопроводности [17] (гл. 12). Аналогичны не только соответствующие уравнения, но и граничные условия [13, 18, 19]. Если в задачах, рассмотренных в предыдущих разделах, заменить одновременно: 1) потенциал ϕ на температуру $(T - T_0)$, где T_0 — температура на бесконечности; 2) диэлектрическую проницаемость ϵ на коэффициент теплопроводности K ; 3) вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = -\epsilon\nabla\phi$ на плотность потока

тепла $\mathbf{h} = -K\nabla T$; 4) точечный заряд q — на мощность тепловыделения точечного источника Q_h , то получатся уравнения и граничные условия, возникающие при решении задач стационарной теплопроводности с равномерно нагретым телом, расположенным рядом с аналогичной теплопроводящей плоскостной структурой. Такие задачи, очевидно, можно решить рассмотренным методом.

Например, чтобы решить задачу распределения температуры вокруг тела, нагретого до постоянной температуры T_m , можно сначала решить соответствующую электростатическую задачу распределения потенциала в окрестности тела с постоянным потенциалом поверхности. Нормированное решение электростатической задачи будет также решением аналогичной нормированной задачи теплопроводности в нормированных координатах (при указанной замене величин и обозначений). Результат расчетов распределения температуры (точнее, превышения температуры над внешней температурой T_0 , выраженного в единицах $(T_m - T_0)$) в задачах о нагретых сфере и каплевидном теле будет идентичен распределениям на рис. 5.

Нормированные температурные распределения так же, как и в случае распределений нормированных электростатических потенциалов, обладают следующим свойством: они зависят от отношений коэффициентов теплопроводности областей. Если увеличить все коэффициенты в k раз, то нормированное распределение температуры не изменится в нормированных координатах. Таким образом, на рис. 5 показаны нормированные температурные распределения при значениях

коэффициентов теплопроводности $K_f = k$, $K_{p1} = 2k$, $K_{p2} = 5k$, $K_d = 3k$, где k — произвольное число.

Особо отметим, что аналогия между электростатической и теплопроводной задачами не означает, что распределение электрического потенциала в вакууме аналогично распределению температуры в вакууме. В рассмотренном случае аналог вакуума — среда с некоторым конечным коэффициентом теплопроводности K_f , а коэффициенты K_{p1} , K_{p2} и K_d соотносятся с K_f так же, как диэлектрические проницаемости аналогичной электростатической задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана матричная техника нахождения фундаментального решения оператора Лапласа для плоскостойких сред на примере электростатической задачи. Предложена новая формулировка обобщенного метода зеркальных отражений для двух пленок, расположенных на полупространстве, включающая двойное интегрирование по виртуальным зарядам.

Продemonстрировано применение метода для нахождения электростатических полей от симметричных тел вращения, расположенных рядом с двумя пленками. Показана применимость предложенного теоретического метода к аналогичным задачам стационарной теплопроводности. Рассмотрен пример решения задачи нахождения температурного поля вблизи равномерно нагретого тела, расположенного у плоскостойкой структуры, состоящей из двух теплопроводящих пленок на теплопроводящем полупространстве. Особо отметим, что развитые методы можно с некоторыми изменениями применить и для решения аналогичных задач нестационарной теплопроводности [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pollack H.N. Steady State Heat Conduction in Layered Media: The Half-space and Sphere // J. Geophys. Research. 1965. V. 70. № 22. P. 5645.
2. Negi J.G., Singh R.N. A Matrix Method for Heat Conduction in Multi-layered Media // Pure and Applied Geophysics. 1969. V. 73. № 1. P. 143.
3. Negi J.G., Singh R.N. Heat Transfer in Multi-layered Media with Temperature Dependent Sources // Pure and Applied Geophysics. 1968. V. 69. № 1. P. 110.
4. Matysiak S.J., Perkowski D.M. Temperature Distributions in a Periodically Stratified Layer with Slant Lamination // Heat and Mass Transfer. 2014. V. 50. № 1. P. 75.
5. Chew W.C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. N.Y.: IEEE Press, 1995.
6. Петрин А.Б. Элементарный излучатель, расположенный на границе или внутри слоистой структуры // Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. № 11. С. 1676.
7. Петрин А.Б. Излучение в дальней зоне элементарного излучателя, расположенного на границе плоскостойкой структуры // Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. № 12. С. 1874.
8. Петрин А.Б. Элементарный излучатель на границе плоскостойкой структуры // ЖЭТФ. 2021. Т. 159. № 1. С. 35.
9. Кинг Р., Смит Г. Антенны в материальных средах: в 2-х кн. Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
10. King R.W.P. The Propagation of Signals along a Three-layered Region // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1988. V. 36. № 6. P. 1080.
11. Петрин А.Б. О теории плоской линзы из материала с отрицательным преломлением // Оптика и спектроскопия. 2021. Т. 129. № 1. С. 55.
12. Петрин А.Б. Фокусировка поверхностной плазмонной волны на нановершине сканирующего металлического микроострия у плоскостойкой структуры // Оптика и спектроскопия. 2022. Т. 130. № 9. С. 1436.
13. Петрин А.Б. О фундаментальном решении задач электростатики и теплопроводности для плоскостойких сред // ТВТ. 2022. Т. 60. № 5. С. 740.
14. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. 4-е изд., стереот. М.: Физматлит; Изд-во МФТИ, 2004.
15. Численные методы теории дифракции. Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 29. Сб. статей. Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
16. Петрин А.Б. Развитие методов решения задач электростатики и теплопроводности плоскостойких сред // Успехи прикладной физики. 2023. Т. 11. № 1. С. 3.
17. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1965.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
19. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001.
20. Петрин А.Б. Развитие методов решения задач нестационарной теплопроводности плоскостойких сред // Успехи прикладной физики. 2023. Т. 11. № 2. С. 93.