

УДК 536.25

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ГАЗА В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

© 2024 г. А. О. Городнов

АОГНЦ РФ «Исследовательский центр им. М.В. Келдыша»

(АО ГНЦ «Центр Келдыша»), Москва, Россия

E-mail: an.ol.gorodnov@gmail.com

Поступила в редакцию 27.12.2023 г.

После доработки 25.03.2024 г.

Принята к публикации 09.07.2024 г.

В работе рассмотрена задача тепломассопереноса при естественной конвекции газа в нагреваемом замкнутом объеме с изотермической нижней границей в поле массовой силы. Предложено упрощенное уравнение для описания теплообмена в условиях температурной стратификации. Для задачи о свободно-конвективном пограничном слое сжимаемого газа на пластине в условиях внешней температурной стратификации получены аналитические зависимости для скорости и температуры в пограничном слое. Показано хорошее соответствие между аналитическими решениями для пограничного слоя, результатами расчета по уравнению стратификации и данными моделирования полных уравнений конвекции для задачи о нагреве вертикального цилиндра.

DOI: 10.31857/S0040364424030089

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных практических приложений, связанных со свободно-конвективным тепломассопереносом, является проблема хранения криогенных веществ в емкостях различных конфигураций. Необходимо отметить, что в случае бездренажного хранения как в паре, так и в жидкости зачастую наблюдается температурная стратификация, направление которой совпадает с вектором действия массовой силы [1–3]. В случае конвекции в жидкой среде на основе приближения Буссинеска было выявлено существенно анизотропное влияние конвекции на поле температуры [4–7]. Было установлено, что конвекция приводит к выравниванию температуры в сечениях сосуда, перпендикулярных вектору силы тяжести, и слабо влияет на градиенты температуры вдоль вектора массовой силы [5].

Описание тепломассообменных процессов в паровой подушке может быть осложнено наличием значительных перепадов температуры, не позволяющих использовать хорошо апробированные подходы на основе приближения Буссинеска [8]. При этом скорости течения газа в условиях свободной конвекции остаются существенно дозвуковыми, что дает возможность применять эффективные подходы на

основе приближения малых чисел Маха [9, 10]. Большинство известных работ, посвященных свободно-конвективному тепломассопереносу в газах, направлены либо на решение стационарных задач [11, 12], либо на исследование поршневого эффекта в сверхкритических средах [13, 14]. Интересные результаты были также получены для случая одномерного нестационарного прогрева идеального газа в отсутствие конвекции [15], где получилось в рамках некоторых допущений исключить скорость из уравнений.

Некоторые результаты моделирования конвекции в газе были получены в работах [16, 17]. Аналогично работам [4–6] распределение температуры показывало наличие вертикальной стратификации в ядре потока. Однако подробного исследования характеристик теплообмена при естественной конвекции в газе, характеризующейся наличием температурной стратификации, в отечественной и зарубежной научной литературе выполнено не было. При этом в ряде работ по моделированию процессов в баках и емкостях при бездренажном хранении в паровой подушке наблюдалось существенное расхождение результатов расчета с данными эксперимента по температуре [18–20]. Изложенные выше соображения указывают на необходимость более подробной проработки проблемы тепломассопереноса при тепло-

вой конвекции газа в замкнутых емкостях в условиях наличия существенных перепадов температуры между куполом и поверхностью раздела фаз.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о естественной конвекции газа в замкнутом объеме с изотермической нижней границей при температуре T_S и равномерном подводе тепла к неизолированным стенкам бака (рис. 1). Величина удельного теплового потока — q_w . Поле массовой силы однородно. Вектор ускорения массовой силы $\mathbf{g}$ направлен вертикально вниз параллельно оси OZ . В результате действия архимедовой силы в емкости возникают свободно-конвективные течения и формируется температурное расслоение.

ПЕРЕНОС ТЕПЛА В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ГАЗОВОМ ОБЪЕМЕ

Для исследования процессов тепломассообмена в данной работе используется модель на основе уравнений Навье—Стокса в приближении малых чисел Маха [9, 10]. В рамках данной модели давление представляется в виде суммы однородной термодинамической части $P(t)$, учитываемой в уравнениях состояния и энергии, и динамической части $p(x, y, z, t)$, учитываемой в уравнении сохранения импульса [11]. В силу малости скоростей движения в уравнении энергии не рассматриваются эффекты, связанные с вязкой диссипацией. Введем также предположение, что рассматриваемый газ подчиняется уравнению состояния идеального газа. Тогда система уравнений для описания тепломассопереноса может быть представлена в следующем виде:

$$c_p \left(\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} T) \right) = \frac{dP(t)}{dt} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -\nabla p(t, x, y, z) + \nabla \tau + \rho \mathbf{g},$$

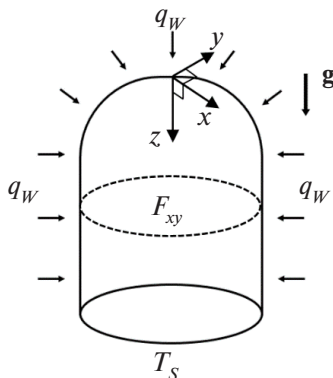


Рис. 1. Схема задачи.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2)$$

$$P = \rho R_V T. \quad (3)$$

Тензор вязких напряжений имеет вид

$$\tau = \mu \left(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} \right),$$

$\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Преобразуем уравнение энергии (1), используя уравнение состояния (3) и учитывая, что $\gamma = c_p/c_v$:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{dP}{dt} + c_p \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} T) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь некоторое сечение F_{xy} емкости, нормаль $\mathbf{n}_{xy}$ к которому параллельна направлению действия массовой силы и оси OZ . Пусть начало координат располагается в самой высшей точке емкости, а ось OZ направлена вниз перпендикулярно изотермической границе и пусть w — z -компонента вектора скорости; $V(z)$ — объем, ограниченный плоскостью F_{xy} и началом координат; F_w — соответствующая площадь боковой поверхности. Проинтегрируем уравнение (4) по объему до указанного сечения, учитывая однородность термодинамического давления по пространству. Применяя теорему Гаусса, с учетом граничных условий на боковой поверхности получим следующее соотношение:

$$\frac{V(z)}{\gamma - 1} \frac{dP}{dt} + c_p \int_{F_{xy}} \rho w T dF = \int_{F_{xy}} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} dF + \int_{F_w} q_w dF. \quad (5)$$

Представим температуру в виде суммы средней по площади сечения F_{xy} компоненты $\bar{T}$ и некоторой добавки θ :

$$T = \frac{1}{F_{xy}} \int_{F_{xy}} T dF + \theta = \bar{T}(z) + \theta(x, y, z).$$

Рассмотрим задачу в предположении о наличии вертикальной температурной стратификации, когда для любого z справедливы следующие допущения:

$$|\theta(x, y, z)| \ll \bar{T}(z), \quad \left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| \ll \left| \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right|. \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) можно существенно упростить, отбросив члены малого порядка, связанные с неоднородностью температуры и нормального теплового потока в сечении F_{xy} , в соответствующих интегралах:

$$\begin{aligned} \frac{V(z)}{\gamma - 1} \frac{dP}{dt} + c_p T(z) \int_{F_{xy}} \rho w dF = \\ = F_{xy}(z) \lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \int_{F_w} q_w dF. \end{aligned} \quad (7)$$

Проинтегрировав уравнение неразрывности (2) по рассматриваемому объему с учетом граничных условий и допущений (6), а также отбросив член, связанный с неоднородностью температуры в сечении F_{xy} в уравнении состояния, можно легко показать, что

$$\int_0^z F_{xy} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \int_{F_{xy}} \rho w dF = 0. \quad (8)$$

Выразив интеграл потока массы из уравнения (8), можно исключить скорость в уравнении (9) и переписать полученное уравнение относительно плотности, используя уравнение состояния:

$$\begin{aligned} \frac{V(z)}{\gamma P} \frac{dP}{dt} \rho - \int_0^z F_{xy} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = \\ = - \frac{\lambda F_{xy}}{c_p \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\gamma - 1}{\gamma P} \rho \int_{F_w} q_w dF. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим интеграл в правой части как Q_w и продифференцируем (9) по z :

$$\begin{aligned} F_{xy} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dt} \frac{\partial \rho V}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda F_{xy}}{c_p \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma P} \frac{\partial \rho Q_w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) описывает изменение плотности по высоте в емкости при выполнении допущения о наличии вертикальной температурной стратификации (6). Необходимо отметить, что соотношение (10) имеет вид, аналогичный полученному в работе [15] уравнению баланса тепла при прогреве одномерного слоя газа.

СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ГАЗЕ

Ключевым допущением, определяющим справедливость уравнения (10), является малость неоднородностей температуры в направлении, перпендикулярном вектору массовой силы. Областью течения, где данное допущение выполняется хуже всего, является пограничный слой вблизи подогреваемых стенок емкости. В случае конвекции Буссинеска в [4–6] показано, что при наличии вертикальной температурной стратификации пограничный слой может переходить в режим локальной автомодельности. В данном режиме течения профили скорости и температуры вдоль пограничного слоя зависят только от температуры и ее градиента в вертикальном направлении в ядре, а также чисел Рэлея и Прандтля.

Исследуем параметры естественной конвекции газа для случая вертикально ориентированной пластины с постоянным теплоподводом (рис. 2). Параметры на внешней границе погран-

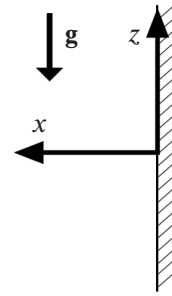


Рис. 2. Координатные оси в задаче о пограничном слое на стенке.

слоя обозначим индексом c . Отметим, что в случае, когда толщина пограничного слоя мала по сравнению с радиусом, результаты, полученные для пластины, применимы и для цилиндрического сосуда [21]. Пусть характерный размер задачи — R . Рассмотрим уравнения стационарного свободно-конвективного пограничного слоя в газе с линейной зависимостью коэффициентов переноса от температуры [22]:

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (11)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} = \text{Pr Ra} \tilde{\rho} \tilde{\theta} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right), \quad (12)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{w} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} \right) - \tilde{\rho} \tilde{w} A_c, \quad (13)$$

$$\tilde{\mu} = \tilde{\lambda} = \frac{1}{\tilde{\rho}}, \quad \tilde{P} = \tilde{\rho} (\tilde{T}_c + \tilde{\theta}) \varepsilon_c, \quad A_c = \frac{\partial \tilde{T}_c}{\partial \tilde{z}}. \quad (14)$$

Здесь уравнения (11)–(14) приведены в безразмерном виде с использованием следующих масштабов длины, скорости, температуры, плотности, термодинамического давления, а также с использованием приведенных ниже определений для чисел Рэлея и Прандтля и характерного температурного перепада:

$$\begin{aligned} (\tilde{x}, \tilde{z}) = \frac{(x, z)}{R}, \quad (\tilde{u}, \tilde{w}) = \frac{(u, w)}{a_c / R}, \\ \tilde{\theta} = \frac{T - T_c}{q_w R / \lambda_c}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{\rho_c R_V T_c}, \\ \text{Ra}_c = \frac{g \beta_c R^4 q_w \rho_c}{a_c \lambda_c \mu_c}, \quad \text{Pr}_c = \frac{\mu_c c_p}{\lambda_c}, \\ \varepsilon_c = \frac{q_w R}{\lambda_c T_c}, \quad \beta_c = 1 / T_c, \quad a_c = \lambda_c / (\rho_c c_p). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя преобразования А.А. Дородницына, введем новую координату и скорость поперек пограничного слоя:

$$\tilde{X} = \int_0^{\tilde{x}} \tilde{\rho} d\tilde{x}, \quad \tilde{Z} = \tilde{z}, \quad \tilde{U} = \tilde{w} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{W} = \tilde{w}. \quad (16)$$

Тогда уравнения (11)–(14) записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{Z}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{X}} = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{W} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{Z}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{X}} = \text{Pr}_c \text{Ra}_c \tilde{\theta} + \text{Pr}_c \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \tilde{X}^2}, \quad (18)$$

$$\tilde{W} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{Z}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{X}} = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{X}^2} - \tilde{W} A_c. \quad (19)$$

Уравнения (16)–(19) имеют вид, аналогичный уравнениям свободно-конвективного пограничного слоя жидкости в рамках приближения Буссинеска. Аналогично [5] предположим, что избыточная температура в пограничном слое меняется существенно медленнее, чем в ядре, а число Прандтля для газов порядка единицы:

$$\left| \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{Z}} \right| \ll A_c, \quad \text{Pr} \approx 1.0. \quad (20)$$

Используя результаты, полученные в [5], можно показать, что конвективные члены в левых частях уравнений (16)–(19) существенно меньше членов в правых частях. Тогда уравнения (16)–(19) можно переписать в следующем виде:

$$\text{Ra} \tilde{\theta} + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \tilde{X}^2} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{X}^2} - \tilde{W} A_c = 0. \quad (22)$$

Граничные условия для вертикальной компоненты скорости и температуры записываются следующим образом:

$$\tilde{W}|_{\tilde{X}=0} = \tilde{W}|_{\tilde{X}=\infty} = \tilde{\theta}|_{\tilde{X}=\infty} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{X}} \Big|_0 = -1. \quad (23)$$

Тогда система (21)–(23) имеет аналитическое решение

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= C e^{-\alpha \tilde{X}} \cos(\alpha \tilde{X}), \\ \tilde{W} &= \frac{1}{2\alpha^2 \text{Ra}_c^{-1} C^{-1}} e^{-\alpha \tilde{X}} \sin(\alpha \tilde{X}), \\ C &= \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = (0.25 \text{Ra}_c A_c)^{0.25}. \end{aligned} \quad (24)$$

Решения (24) аналогичны полученным С.Г. Черкасовым для случая конвекции Буссинеска [5]. Основное отличие заключается во введении координаты Доронницына, зависящей

от плотности. Также в случае конвекции слабо сжимаемой среды число Рэлея слабо меняется вдоль координаты $\tilde{Z}$, а в сжимаемой среде параметры в пограничном слое зависят от температуры ядра. Аналогично [5], решения (24) можно привести к автомодельному виду, используя следующие преобразования:

$$\eta = x \frac{\alpha}{R}, \quad W_a = w \frac{2\alpha^3 R}{a_c \text{Ra}_c}, \quad \theta_a = \theta \frac{\alpha \lambda_c}{q_w R}. \quad (25)$$

Тогда уравнения (26) записываются как

$$\theta_a = e^{-\eta} \cos(\eta), \quad W_a = e^{-\eta} \sin(\eta). \quad (26)$$

Рассмотрим теперь изменение температуры вдоль пограничного слоя. Из соотношений (24) видно, что максимальное значение достигается на стенке, причем

$$\tilde{\theta}_{\max} = \frac{1}{\alpha}. \quad (27)$$

Рассмотрим случай, когда избыточная температура в пограничном слое много меньше температуры ядра

$$\tilde{\theta} \ll \tilde{T}_c. \quad (28)$$

Используя (27) как оценку сверху, можно получить следующее условие, обеспечивающее справедливость соотношения (28):

$$\frac{\varepsilon_c}{\alpha} \ll 1. \quad (29)$$

Для плотности в пограничном слое, отношения координаты Доронницына к исходной координате, коэффициента теплопроводности и вязкости выполняются следующие соотношения:

$$1 \geq \tilde{\rho} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon_c / \alpha}, \quad 1 \geq \frac{\tilde{X}}{\tilde{x}} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon_c / \alpha}, \quad (30)$$

$$\tilde{\lambda} = 1 + \left(\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \tilde{T}_c} \right) \tilde{\theta} + o(\tilde{\theta}), \quad \tilde{\mu} = 1 + \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{T}_c} \right) \tilde{\theta} + o(\tilde{\theta}).$$

Из соотношений (30) следует, что при выполнении условия (29), а также ограниченности и непрерывности производных теплопроводности и вязкости влиянием сжимаемости и нелинейности коэффициентов переноса на параметры пограничного слоя можно пренебречь, и задача сводится к конвекции Буссинеска с определяющими параметрами (15), зависящими от локальных характеристик стратификации в ядре потока. Также необходимо отметить, что течения с пограничным слоем, описываемым соотношениями (24) и условиями (29) и (20), удовлетворяют допущениям (6), поэтому для подобного типа задач справедливо полученное ранее уравнение стратификации (10).

ДИНАМИКА ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРНАЯ СТРАТИФИКАЦИЯ- ПРИ КОНВЕКЦИИ В ЦИЛИНДРЕ

Для оценки применимости предложенных в работе подходов к описанию стратификации в газе рассмотрим конвекцию паров водорода в вертикальном цилиндрическом объеме с изотермической нижней границей при равномерном подводе тепла к боковой и верхней поверхностям (рис. 3). Задача рассматривается в осесимметричной постановке [17]:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r} \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{p} \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \tilde{p} \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r} \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{p} \tilde{w} \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \\ & = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{p} \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r} \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{p} \tilde{w} \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = \\ & = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \text{Pr}_S \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\tilde{r} \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{2}{3} \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \right) \right] + \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & + \text{Pr}_S \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) \right], \\ & \frac{\partial \tilde{p} \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r} \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{p} \tilde{w} \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = \\ & = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \text{Pr}_S \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\tilde{r} \tilde{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) \right] + \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & + \text{Pr}_S \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{2}{3} \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} \right) \right] + \\ & + (1 - \tilde{\rho}) \text{Ra}_S \text{Pr}_S, \\ & \tilde{P} = \varepsilon_S \tilde{p} \tilde{T}. \end{aligned} \quad (35)$$

В уравнениях (31)–(35) введены такие же безразмерные масштабы, как и в (15), в качестве характерного размера взят радиус цилиндра. Небольшое отличие заключается в использовании параметров на изотермической поверхности в начальный момент времени вместо параметров в ядре потока при обезразмеривании, а также введении безразмерного времени, динамического давления и высоты цилиндра:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{\lambda_S t}{\rho_S|_{t=0} c_P R^2}, \quad \text{Ra}_S = \frac{g \beta_S R^4 q_w \rho_S|_{t=0}}{a_S \lambda_S \mu_S}, \\ \tilde{p} &= \frac{p R^2}{\rho_S|_{t=0} a_S^2}, \quad \text{Pr}_S = \frac{\mu_S c_P}{\lambda_S}, \quad \varepsilon_S = \frac{q_w R}{\lambda_S T_S}, \quad B = \frac{H}{R}. \end{aligned}$$

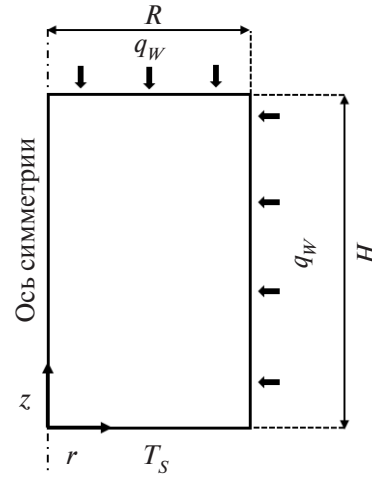


Рис. 3. Схема геометрии задачи о конвекции в вертикальном цилиндре.

Граничные и начальные условия заданы следующими:

$$-\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=0} = 0, \quad \tilde{u} \Big|_{\tilde{r}=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=0} = 0,$$

$$\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1} = -1, \quad \tilde{u} \Big|_{\tilde{r}=1} = 0, \quad \tilde{w} \Big|_{\tilde{r}=1} = 0,$$

$$\tilde{T} \Big|_{\tilde{z}=0} = \frac{1}{\varepsilon_S}, \quad \tilde{u} \Big|_{\tilde{z}=0} = 0, \quad \tilde{w} \Big|_{\tilde{z}=0} = 0,$$

$$\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=B} = -1, \quad \tilde{u} \Big|_{\tilde{z}=B} = 0, \quad \tilde{w} \Big|_{\tilde{z}=B} = 0,$$

$$\tilde{T}(\tilde{r}, \tilde{z}, 0) = \frac{1}{\varepsilon_S}, \quad \tilde{P}(0) = 1.0,$$

$$\tilde{u}(\tilde{r}, \tilde{z}, 0) = \tilde{w}(\tilde{r}, \tilde{z}, 0) = 0.$$

Дискретизация уравнений выполнялась методом контрольного объема. Для решения полученной системы использовался подход, основанный на разделенном на тепловую и динамическую части методе SIMPLE [23], предложенный в [16, 17]. Зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры взяты согласно следующим формулам, линейно аппроксимирующим табличные значения для пароводорода [24] в диапазоне температур 20–300 K:

$$\tilde{\lambda} = 1 + 1.562(\tilde{T} - \tilde{T}_S), \quad \tilde{\mu} = 1 + 1.057(\tilde{T} - \tilde{T}_S). \quad (36)$$

Для подтверждения адекватности результатов моделирования проводились исследования сеточной сходимости решения. Использовалась равномерная сетка в ядре потока с пристеночным слоем, содержащим измельченные в нормальном к стенке направлении ячейки. В качестве приме-

ра приведем результаты расчета термодинамического давления и максимума модуля скорости при $B = 1$, $Pr_S = 0.76$, $\varepsilon_S = 2.0$, $Ra_S = 10^9$, $\gamma = 1.667$ в стационарном режиме с различными сетками. Указанные данные приведены в таблице.

Отличие значений термодинамического давления и максимума модуля скорости на средней и подробной сетках не превысило 1%. Подобная картина наблюдалась и для более низких чисел Рэлея, поэтому дальнейшие расчеты проводились на сетках с параметрами ячеек, аналогичных средней. По аналогии с задачей о конвекции в пограничном слое введем θ как разницу температуры в некоторой точке на радиусе и температуры на оси симметрии

$$\tilde{\theta} = \tilde{T}(\tilde{r}, \tilde{z}) - \tilde{T}(0, \tilde{z}).$$

Для кросс-верификации также проводились расчеты аналогичной задачи в пакете программ ПП «Логос» с использованием разделенного решателя [25]. В ПП «Логос» решалась трехмер-

ная задача. Геометрия представляла собой сектор цилиндра с углом раствора 20° . Для достижения осесимметричности на боковых стенках сектора ставились симметричные граничные условия. Теплофизические свойства газа, величина перегрузки и размеры цилиндра, удельный тепловой поток задавались таким образом, чтобы воспроизводились приведенные на рис. 4 критерии подобия и зависимость (36). Использовалась конечно-объемная неструктурированная сетка размером 104000 узлов с минимальным шагом в пристеночном слое, равным 0.002 в безразмерных масштабах. Максимальный шаг сетки составил 0.01. Данные параметры также оказались достаточными для достижения сеточной независимости. Полученные результаты моделирования сравнивались с результатами расчета методом [16, 17] в установившемся режиме течения. Отличие решения методом [16, 17] от результатов расчета в ПП «Логос» не превысило 1% (рис. 4).

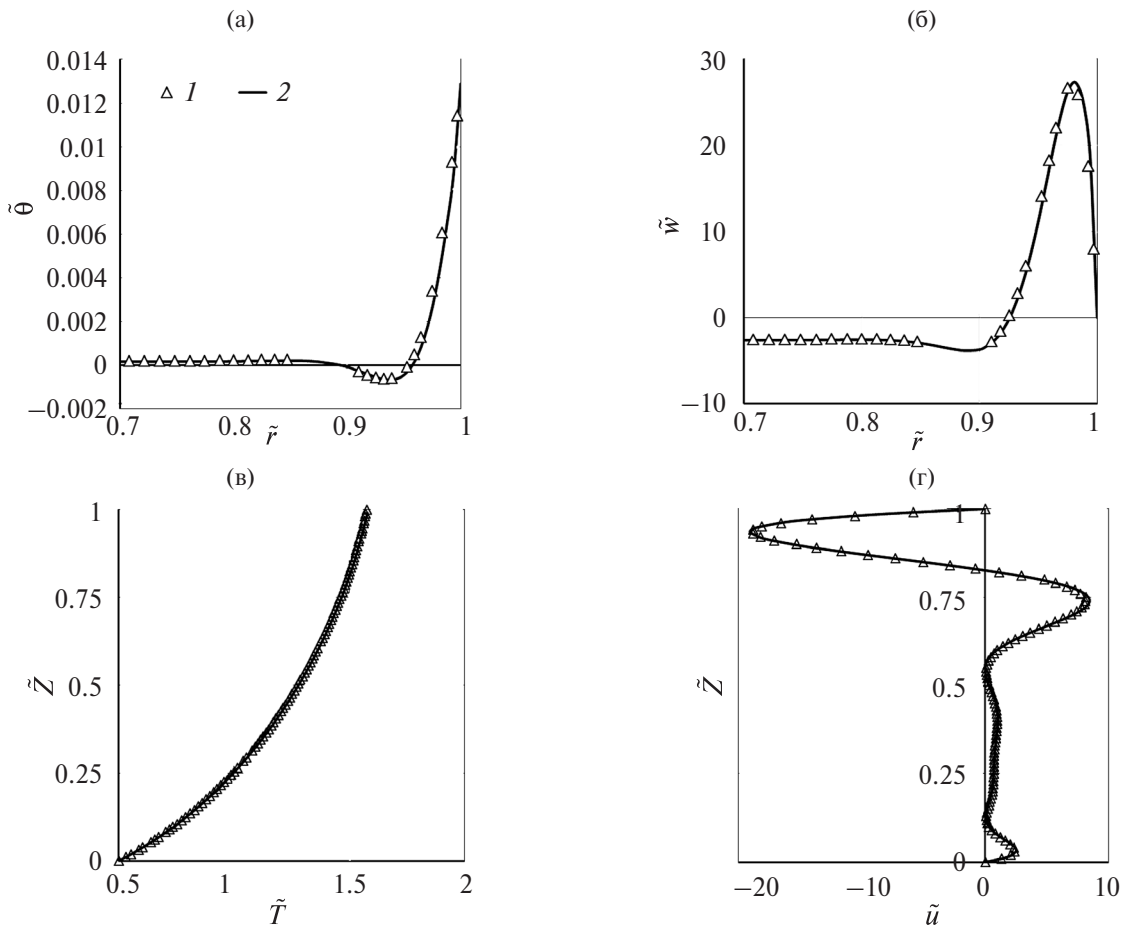


Рис. 4. Результаты кросс-верификации при $Ra_S = 10^8$, $Pr_S = 0.76$, $\varepsilon_S = 2$, $B = 1$: сравнение избыточной температуры (а) и вертикальной компоненты скорости (б) в среднем горизонтальном сечении цилиндра, сравнение вертикальных профилей температуры (в) и радиальной компоненты скорости (г) на оси симметрии: 1 – расчет в ПП «Логос», 2 – расчет методом [16, 17].

Сходимость термодинамического давления и максимума модуля скорости

Сетка	Число ячеек	Минимальный размер ячейки	Максимальный размер ячейки	Давление в стационарном режиме	Максимум модуля скорости
Грубая	1600	0.025	0.025	2.238	92.80
Средняя	4032	0.00625	0.025	2.232	86.65
Подробная	9984	0.003125	0.0125	2.232	86.12

Была выполнена серия расчетов, моделирующих установление стационарного режима в цилиндре при однородных начальных условиях. Расчеты проводились для различных значений определяющих параметров: $Ra_S = 10^4 - 10^9$, $Pr_S = 0.76$, $\varepsilon_S = 2.0$, $B = 0.5 - 3.0$. Во всех расчетах показатель адиабаты $\gamma = 1.667$.

На рис. 5 приведены результаты моделирования динамики давления и теплообмена на изотермической границе, рассчитанные с помощью уравнения стратификации (10) и с помощью метода [16, 17] при различных значениях числа Рэлея и параметра B . Тепловой поток на нижней границе задавался числом Нуссельта, определяемым следующим образом:

$$Nu_S = 2 \int_0^1 \tilde{r} \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \bigg|_{\tilde{z}=0} d\tilde{r}.$$

Относительное отклонение решений для давления, полученных в рамках полной модели, от результатов по уравнению стратификации (10) не превысило 5%. Теплообмен в случае конвекции слабой интенсивности может несколько отличаться от описываемой уравнением (10) картины при малых числах Фурье. Максимальное отклонение среднего числа Нуссельта на изотермической поверхности от решения уравнения (10) достигало 32% при $\tilde{t}/B^2 \leq 0.05$ во всем рассматриваемом диапазоне чисел Рэлея. Малое отличие динамики давления при заметной разнице в тепло-

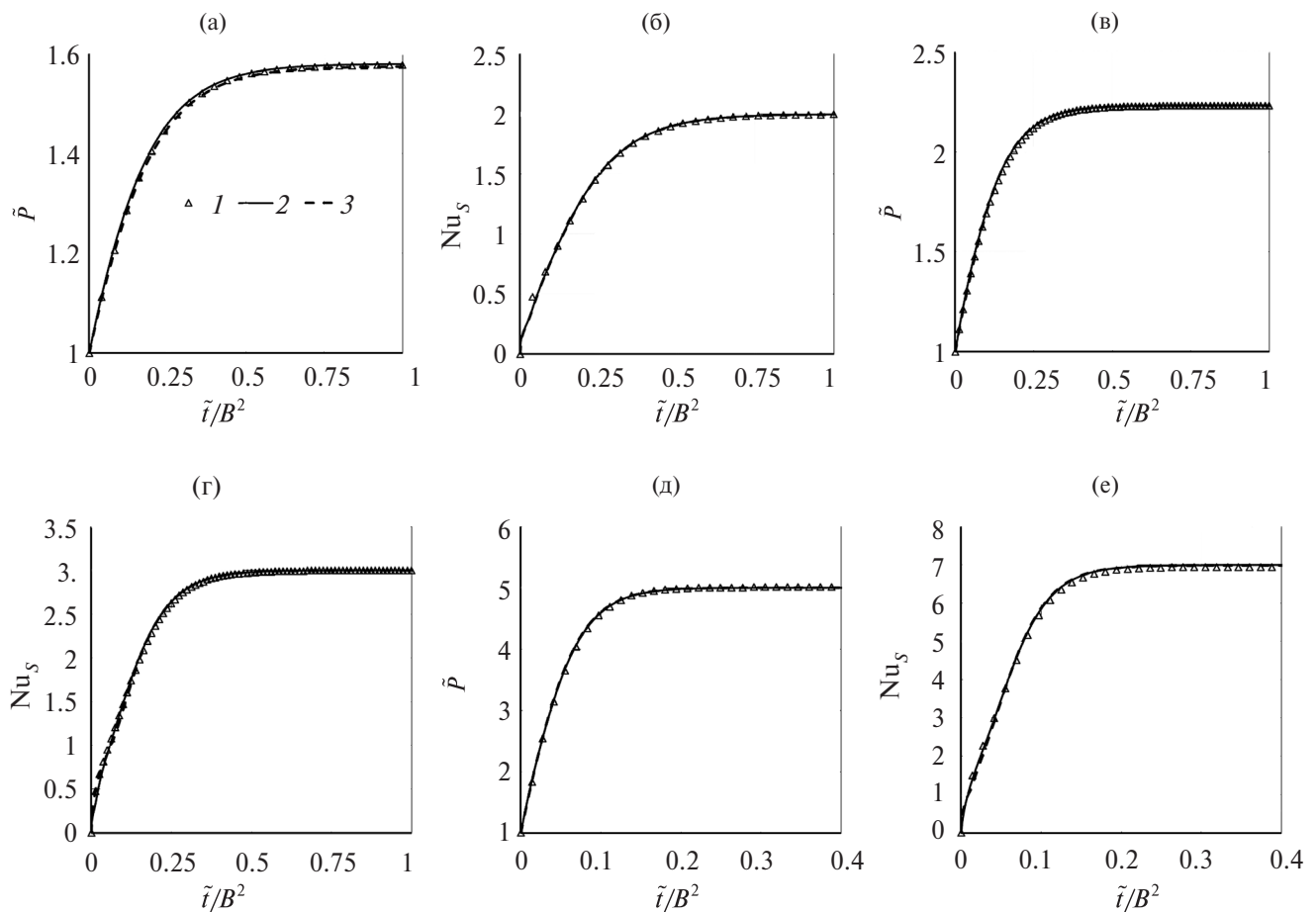


Рис. 5. Сравнение динамики давления (а), (в), (д) и теплообмена (б), (г), (е) на изотермической границе при $\varepsilon_S = 2$, $Pr_S = 0.76$: $B = 0.5$ (а), (б); 1.0 (в), (г); 3.0 (д), (е); 1 – решение уравнения (10), 2 – расчет методом [16, 17] при $Ra_S = 10^8$, 3 – 10^4 .

обмене на нижней границе можно объяснить следующим образом. Рассмотрим интегральный тепловой баланс в емкости, определяемый уравнением (5), для случая, когда нижнее сечение совпадает с изотермической границей. При развитии течения и теплообмена от однородных начальных условий тепловой поток на изотермической границе нарастает медленно даже при достаточно большой интенсивной конвекции (рис. 4). Суммарный подвод тепла через нагреваемые стенки при малых $\tilde{t}$ существенно больше, чем отвод тепла через изотермическую поверхность. Поэтому ошибка в его вычислении в несколько десятков процентов в рамках соотношения (10) не оказывает существенного влияния на скорость роста давления.

Рассмотрим изменение максимума скорости в объеме цилиндра. Введем его безразмерную величину следующим образом:

$$\tilde{U}_{\max} = \frac{\max \left(\left[\tilde{u}(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t})^2 + \tilde{w}(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\tilde{r}=0,1; \tilde{z}=0,\tilde{B}}}{\max \left(\left[\tilde{u}(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t})^2 + \tilde{w}(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\tilde{r}=0,1; \tilde{z}=0,\tilde{B}; \tilde{r}=0,\tilde{r}_{\max}}}$$

Из представленных на рис. 6 данных видно, что течение в области начинается сразу, в отличие от конвекции Буссинеска, где время начала движения определяется развитием конвективной неустойчивости. Данная особенность обусловлена наличием в газе поршневого эффекта [15]. При увеличении числа Рэлея максимум скорости сдвигается влево по графику. Далее следует достаточно плавное снижение скоростей течения по мере нарастания температурной стратификации, пока режим движения не придет к стационарному.

На рис. 7 представлены изолинии температуры и векторы скорости в емкости для различ-

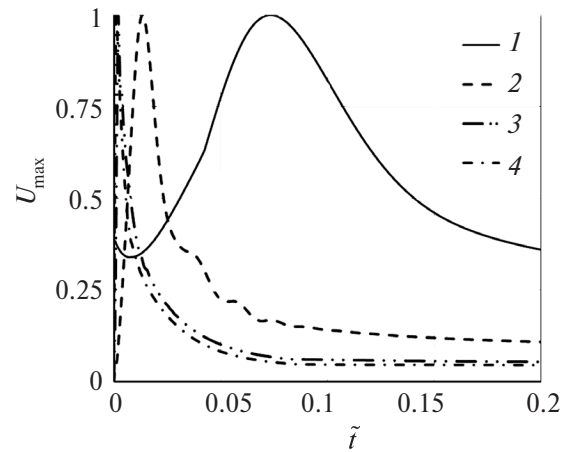


Рис. 6. Эволюция максимума скорости при малых временах нагрева и $\epsilon_S = 2$, $\text{Pr}_S = 0.76$, $B = 1$: 1 – $\text{Ra}_S = 10^4$, 2 – 10^6 , 3 – 10^8 , 4 – 10^9 .

ных моментов времени при $B = 1$. Как видно из рис. 5, в случае умеренного числа Рэлея в начале развития теплообмена картина распределения температуры и поля скорости определяется теплопроводностью и поршневым эффектом. Далее начинает развиваться конвективная неустойчивость вблизи боковой стенки, которая, однако, слабо влияет на распределение температуры по причине малости скорости. По мере нарастания интенсивности конвективных течений формируется вертикальная стратификация с существенной анизотропией поля температуры по сравнению с начальными моментами времени.

На рис. 8а приведено сопоставление результатов численного моделирования стационарной конвекции методом [16, 17] с решением уравнения (10) для двух различных моментов времени в нестационарном режиме. В случае слабой интенсивности конвекции отли-

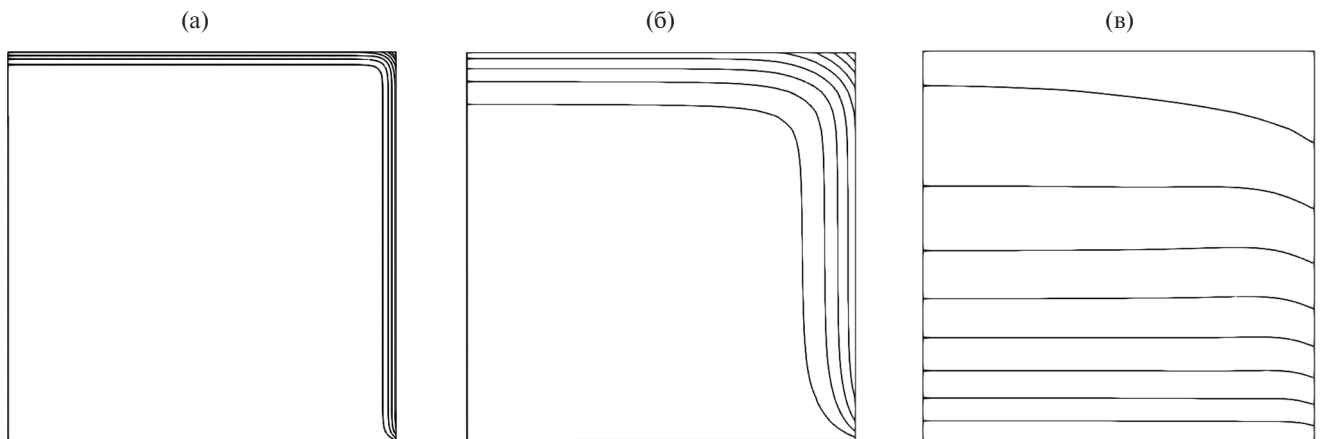


Рис. 7. Изолинии температуры в емкости при $\epsilon_S = 2$, $B = 1.0$, $\text{Pr}_S = 0.76$, $\text{Ra}_S = 10^6$: (а) – $\tilde{T}_{\min} = 0.51$, $\tilde{T}_{\max} = 0.55$, $U_{\max} = 3.51$, $\tilde{t} / B^2 = 0.0005$; (б) – 0.52, 0.65, 35.06, 0.005; (в) – 0.76, 1.53, 9.23, стационарный режим.

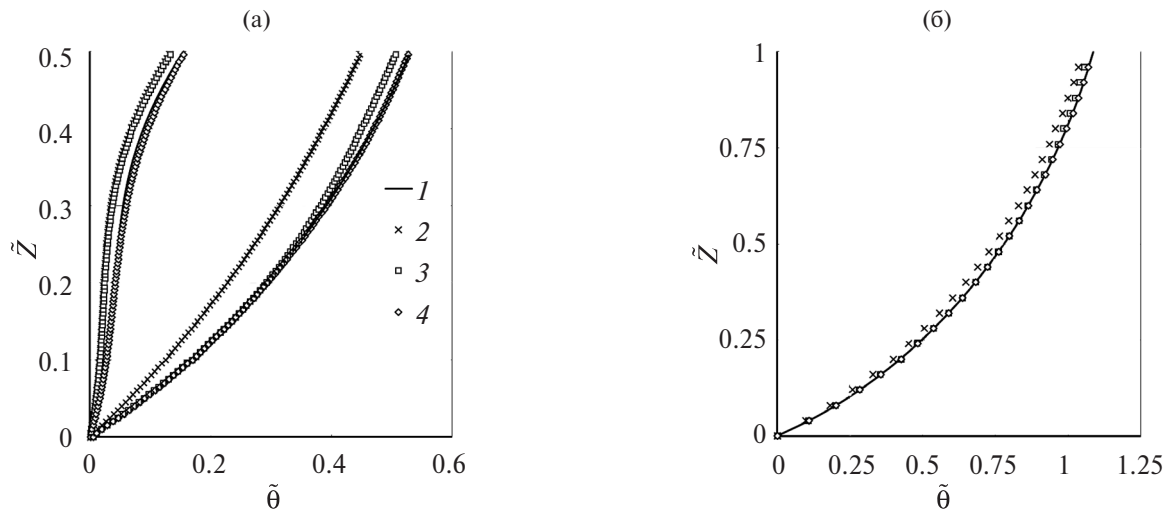


Рис. 8. Вертикальные профили избыточной температуры в цилиндре при $Pr_S = 0.76$, $\varepsilon_S = 2$: (а) — $B = 0.5$, $\tilde{t}/B^2 = 0.1, 0.4$; (б) — $B = 1.0$, стационарный режим; 1 — уравнение стратификации (10), расчет методом [16, 17]; 2 — $Ra_S = 10^4$, 3 — 10^6 , 4 — 10^9 .

чие температуры в расчете достигает 16% относительно решения уравнения стратификации. При этом уже при $Ra_S = 10^6$ совпадение значительно улучшается, а соответствующая ошибка падает до 5%. Отличие же осредненного профиля от решения уравнения стратификации для обоих моментов времени при $Ra_S = 10^9$ не превышает 2%. На рис. 8б представлены аналогичные результаты для случая стационарной конвекции. Относительное отличие избыточной температуры от значений, определяемых уравнением (10), не превысило 5%. Аналогичные результаты были получены и для других значений параметра B . В целом наибольшие отличия профиля температуры от решения уравнения (10) проявляются

при слабой конвекции и малых временах развития процесса.

На рис. 9 представлено сравнение расчетных профилей температуры и вертикальной компоненты скорости в середине емкости с автомодельными решениями, задаваемыми формулами (25), (26). Максимальный перепад температуры на стенке достаточно хорошо описывается в рамках локально-автомодельного приближения. Таким образом, хорошее соответствие по динамике давления, теплообмену на нижней границе и осредненному профилю температуры в рамках полной постановки при достаточно интенсивной конвекции ($Ra_S > 10^6$) с результатами решения уравнения (10) объясняется реализацией режима локальной автомодельности при конвекции газа.

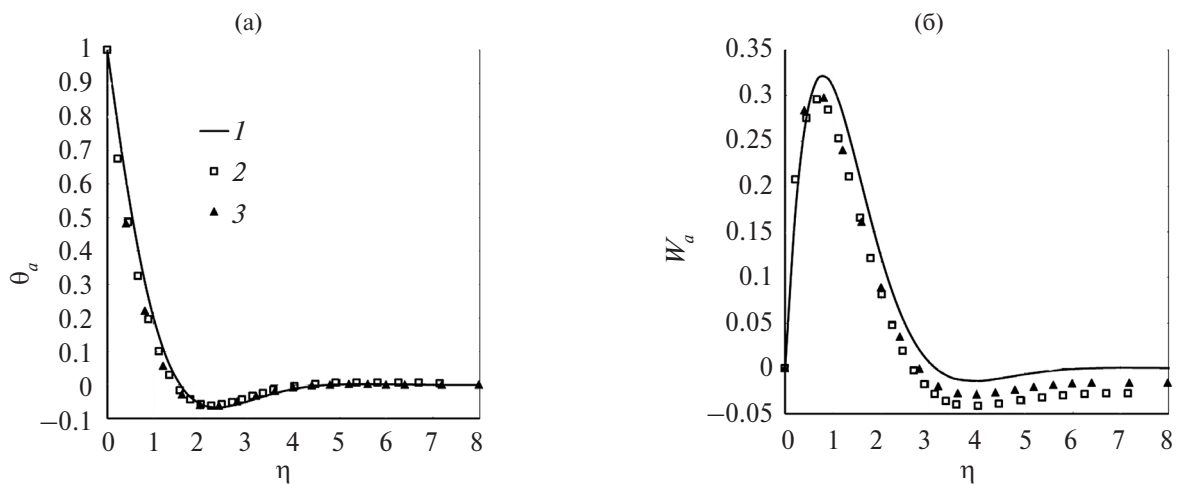


Рис. 9. Профили температуры (а) и вертикальной компоненты скорости (б) в автомодельных переменных в стационарном режиме при $\tilde{z} = 0.5$, $Pr_S = 0.76$, $\varepsilon_S = 2$, $B = 1.0$: 1 — автомодельное решение (30), 2 — расчет методом [16, 17] при $Ra_S = 10^8$, 3 — 10^9 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнено исследование свободно-конвективного тепломассопереноса в равномерно нагреваемом замкнутом объеме в однородном поле массовой силы, заполненном сжимаемым газом. Предложено новое соотношение для описания динамики стратификации плотности и температуры, полученное путем анализа уравнений конвекции в предположении о малости горизонтальных неоднородностей температуры.

Выполнен анализ уравнений стационарного пограничного слоя для сжимаемого газа на вертикальной пластине. С помощью преобразований Дородницына показано, что случай конвекции в идеальном газе при определенных условиях сводится к конвекции Буссинеска. Получены аналитические зависимости для профилей скорости и температуры в пограничном слое при конвекции сжимаемого газа на пластине. Приведены основные условия, определяющие применимость приближения Буссинеска для описания конвекции газа в пограничном слое в зависимости от параметров температурной стратификации в ядре потока, а также локальных значений числа Рэлея. Показано, что при реализации этих условий справедливо и уравнение (10), предложенное в данной работе для случая наличия вертикальной температурной стратификации в газе.

Проведено сопоставление результатов решения уравнения стратификации с данными численного моделирования полной системы уравнений Навье—Стокса в приближении малых чисел Маха для задачи о конвекции в вертикальном цилиндре при различных значениях чисел Рэлея и соотношениях между высотой и радиусом цилиндра. Получено хорошее совпадение результатов по динамике давления, теплообмену на нижней границе и вертикальным профилям температуры.

Выполнено сопоставление результатов решения полной системы уравнений Навье—Стокса сжимаемого газа в приближении малых чисел Маха в ламинарном случае для задачи о конвекции в вертикальном цилиндре с полученными для пластины аналитическими зависимостями. Показано достаточно хорошее совпадение для вертикальной компоненты скорости и температуры в пограничном слое. Данные результаты позволяют предположить реализацию в случае сжимаемого газа режима локальной автомодельности при достаточно интенсивной конвекции в условиях наличия вертикального температурного расслоения. Реализация этого режима объясняет достаточно высокую точность предложенного уравнения стратификации в предсказании основных параметров тепломассообмена в ядре емкости.

Список обозначений. U — вектор скорости, м/с; ρ — плотность, кг/м³; T — температура, К; P — тер-

модинамическое давление, Па; p — динамическое давление, Па; R_g — газовая постоянная, Дж/(кг К); μ — динамический коэффициент вязкости, Па с; c_p — теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг К); c_v — теплоемкость при постоянном объеме, Дж/(кг К); γ — показатель адиабаты; λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м К); τ — тензор вязких напряжений, Па; u — радиальная компонента скорости, м/с; α — коэффициент температуропроводности, м²/с; β — коэффициент теплового расширения, К⁻¹; ε — безразмерная характеристическая разность температур; B — отношение высоты цилиндра к радиусу; Nu_s — среднее число Нуссельта на изотермической границе; $U_{\max}$ — безразмерный максимум модуля скорости в области; нижние индексы s , S обозначают параметры на внешней границе пограничного слоя и на изотермической границе соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belyaev A.Yu., Ivanov A.V., Egorov S.D., Voyteshonok V.S., Mironov V.M., Rogozhinsky V.V., Sokolov B.A., Tumanin Y.N., Fyodorov V.I., Aksentov A.A. Pathways to Solve the Problem of Cryogenic Rocket Propellant Long Storage in Space // Proc. Int. Aerospace Congress. Moscow, Russia, Aug. 15–19. 1994. V. 1. P. 558.
2. Van Dresar N.T., Lin C.S., Hasan M.M. Self Pressurization of a Flightweight Liquid Hydrogen Tank: Effect of Fill Level at Low Wall Heat Flux // AIAA Paper-92-0818. 1992.
3. Barsi S., Alexander J.I.D., Kassemi M., Panzarella C.H. A Tank Self-pressurization Experiment Using a Model Fluid in Normal Gravity // 43rd AIAA Aerospace Sci. Meeting Exhibit. Reno, Nevada, 10–13 Jan. 2005.
4. Полежаев В.И., Черкасов С.Г. Нестационарная тепловая конвекция в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 148.
5. Ананьев А.В., Миронов В.В., Моисеева Л.А., Черкасов С.Г. Анизотропное влияние естественной конвекции на температурное поле в емкости при наличии устойчивой температурной стратификации // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 96.
6. Черкасов С.Г., Ананьев А.В., Миронов В.В., Моисеева Л.А. Температурное расслоение в вертикальной цилиндрической емкости с турбулентным свободно-конвективным пограничным слоем // Изв. РАН. Энергетика. 2016. № 4. С. 137.
7. Черкасов С.Г., Ананьев А.В., Моисеева Л.А. Особенности пристеночной свободной конвекции в стратифицированной по температуре среде // ТВТ. 2017. Т. 55. № 3. С. 410.
8. Gray D.D., Giorgini A. The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases // Int. J. Heat Mass Transfer. 1976. V. 19. P. 545.
9. Paolucci S. On the Filtering of Sound from the Navier–Stokes Equations. Sandia National Laboratories Report SAND82-8257. 1982.

10. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.
11. Черкасов С.Г., Ананьев А.В., Моисеева Л.А. Ограничение модели Буссинеска на примере ламинарной естественной конвекции газа между вертикальными изотермическими стенками // ТВТ. 2018. Т. 56. № 6. С. 902.
12. Le Quéré P., Weisman C., Paillère H., Vierendeels J., Dick E., Becker R., Braack M., Locke J. Modelling of Natural Convection Flows with Large Temperature Differences: A Benchmark Problem for Low Mach Number Solvers. Part 1. Reference Solutions // ESAIM: Math. Modell. Numer. Anal. 2005. V. 39. № 3. P. 609.
13. Соболева Е.Б. Численное моделирование динамики околокритической жидкости в твердой пористой матрице. Препринт № 817. М.: ИПМ РАН, 2006.
14. Beysens D., Chatain D., Nikolayev V.S., Ouazzani J., Garrabos Y. Possibility of Long-distance Heat Transport in Weightlessness Using Supercritical Fluids // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. Iss. 6. 061126.
15. Агафонов Д.В., Черкасов С.Г. Влияние переменности плотности на распространение тепла в газе // ТВТ. 2002. Т. 40. № 4. С. 617.
16. Черкасов С.Г., Лантев И.В., Ананьев А.В., Городнов А.О. Рост давления при нестационарной естественной конвекции паров водорода в вертикальном цилиндрическом сосуде с постоянной температурой нижней границы // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. № 5. С. 203.
17. Городнов А.О. Математическое моделирование сопряженной естественной конвекции в паре и жидкости при бездренажном хранении криогенных компонентов топлива // Матем. моделирование и численные методы. 2020. № 3. С. 47.
18. Choi S.W., Woo I.L., Han S.K. Numerical Analysis of Convective Flow and Thermal Stratification in a Cryogenic Storage Tank // Numer. Heat Transfer, Part A. 2017. V. 71. № 4. P. 402.
19. Kartuzova O., Kassemi M., Agui J., Moder J. Self-Pressurization and Spray Cooling Simulation of the Multipurpose Hydrogen Test Bed (MHTB) Ground-Based Experiment // 50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Prop. Conf., Cleveland. July 28–30. 2014.
20. Kassemi M., Kartuzova O., Hylton S. Validation of Two-phase CFD Models for Propellant Tank Self-Pressurization: Crossing Fluid Types, Scales, and Gravity Levels // Cryogenics. 2018. V. 89. P. 1.
21. Джалауря Й. Естественная конвекция. М.: Мир, 1983. 399 с.
22. Черкасов С.Г. Ламинарный свободно-конвективный пограничный слой в сжимаемом газе // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 5. С. 625.
23. Ouazzani J., Garrabos Y. A New Numerical Algorithm for Low Mach Number Supercritical Fluid. Preprint Elsevier, 23 Apr. 2007. 10 p.
24. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
25. Ляшкин С.В., Козелков А.С., Мелешкина Д.П., Ялозо А.В., Тарасова Н.В. Моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости разделенным и совмещенным алгоритмом типа SIMPLE // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 6. С. 64.