

УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИ ОПИСАНИИ СТОЛКНОВЕНИЙ АТОМНЫХ ЯДЕР

© 2023 г. А. Т. Дьяченко^{1), 2)*}

Поступила в редакцию 27.12.2022 г.; после доработки 27.12.2022 г.; принята к публикации 27.12.2022 г.

В настоящей работе получены уравнения квантовой релятивистской гидродинамики из уравнения Клейна—Гордона, которые в нерелятивистском квазиклассическом пределе сводятся к традиционным уравнениям гидродинамики идеальной жидкости. Найдено аналитическое решение уравнений гидродинамики в приближении солитонов для столкновения ядерных слоев в одномерном и двумерном случаях. Отмечается важность учета неравновесных процессов. Рассмотрены стадии сжатия, стадии расширения и стадии разлета в рамках единой формулы для слоев с энергиями порядка десяти МэВ на нуклон. Такое сведение решений уравнений гидродинамики к солитонным решениям ранее не рассматривалось. Обобщение на двумерный случай приводит к представлению об образовании на стадии расширения разреженной области — пузыря. А сам подход может быть использован и в других областях физики при расчетах нелинейной динамики колебаний сложных систем.

DOI: 10.31857/S0044002723030078, EDN: RKTQVC

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения квантовой релятивистской гидродинамики можно получить из уравнения Клейна—Гордона [1, 2] по аналогии с представлением Мадделунга [3] для временного уравнения Шредингера. В квазиклассическом приближении получаются традиционные уравнение непрерывности и уравнение Эйлера.

В случае атомного ядра, состоящего из нуклонов, его свойства могут быть описаны моделью жидкой капли, предложенной Бором и Уиллером для описания процесса деления [4]. Штокер и Грайнер одними из первых применили гидродинамику к столкновениям тяжелых ионов [5].

Для исследования столкновений тяжелых ионов важен выбор уравнения состояния (EOS — equation of state). В гидродинамическом подходе в качестве уравнения состояния можно выбрать локально-равновесное уравнение состояния, отвечающее наступлению локального термодинамического равновесия [5]. В наших работах [6–13] предложено неравновесное уравнение состояния.

Решение этих уравнений гидродинамики в одномерном случае можно получить аналитически с

использованием односолитонных решений уравнения Кортевега—де Фриза [14, 15] как в работе [16] для слабой нелинейности, так и в случае нелинейных возмущений большой амплитуды для ударных волн. В рамках единой формулы могут быть описаны стадии сжатия, расширения и разлета вещества. Это представляет самостоятельный интерес, поскольку солитоны играют большую роль в физике элементарных частиц и ядерной физике. Нам было важно убедиться, что дисперсионные члены, появляющиеся в уравнениях гидродинамики и в уравнении Кортевега—де Фриза, не нарушают представления об образовании горячего пятна hot spot. Обобщение этого рассмотрения на двумерный случай приводит к близкой динамике колебаний сложной системы, а также к возникновению области разрежения — пузыря в центре при расширении системы.

Образование и существование пузырчатых ядер относится к ядерной экзотике. Поиск и исследование пузырчатых ядер имеет долгую историю. Этим занимались, например, Сименс и Бете [17] и Вонг [18]. В работе [19] в капельной модели с оболочечными поправками была обоснована возможность образования устойчивого пузыря только для сверхтяжелых ядер с зарядовым числом $Z > 120$. Но вот в работе [20] было предсказано с помощью метода Хартри—Фока—Боголюбова и подтверждено экспериментально существование разрежения в центре для плотности протонов дважды магического ядра ^{34}Si . В работе [21] с помощью ре-

¹⁾НИЦ “Курчатовский институт” — ПИЯФ, Гатчина, Россия.

²⁾Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Санкт-Петербург, Россия.

*E-mail: dyachenko_a@mail.ru

лятивистского метода Хартри–Фока–Боголюбова показано существование пузырька в ядре ^{48}Si как для плотностей нейтронов, так и протонов в центре ядра. Это статические решения для пузырей. Возникающий динамический пузырь в области разрежения в наших расчетах возникает всегда на стадии расширения гидродинамической системы.

Далее в разд. 2 устанавливается связь эффективного уравнения Клейна–Гордона с уравнениями квантовой релятивистской гидродинамики идеальной жидкости, затем в разд. 3 анализируются солитонные решения уравнений гидродинамики в одномерном и двумерном случаях с образованием горячего пятна и пузыря, в Заключение приведены основные выводы работы.

2. СВЯЗЬ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Уравнения квантовой релятивистской гидродинамики могут быть связаны с уравнением Клейна–Гордона. Для представления энергии E через не очень большой импульс p_0 и потенциальную энергию U частицы массы m имеем:

$$E^2 = p_0^2 c^2 + 2mUc^2 + m^2 c^4. \quad (1)$$

Соответствующее уравнение Клейна–Гордона имеет вид

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^0 \partial x_0} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^l \partial x_l} - \frac{2mU}{\hbar^2} \Psi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi, \quad (2)$$

где $\Psi = \Phi \exp\left(\frac{iQ}{\hbar}\right)$ — волновая функция с амплитудой Φ и фазой Q , одинаковой для всех частиц как в приближении Томаса–Ферми, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света. Здесь фаза $Q = (Et - \mathbf{p}_0 \mathbf{r})$, x_0 и x_l — временная и пространственная координаты с предполагаемым суммированием по повторяющимся значкам. Уравнение (2) — это эффективное одночастичное уравнение Клейна–Гордона для приближения Томаса–Ферми с эффективным потенциалом U .

Поскольку

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^k \partial x_k} = \Psi \left[\frac{\partial^2 \ln \Psi}{\partial x^k \partial x_k} + \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x^k} \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x_k} \right], \quad (3)$$

где $k = 0, 1, 2, 3$, то после подстановки (3) в (2) и последующего дифференцирования (2) $\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ имеем

$$-\frac{i\hbar}{2m} \left[\frac{\partial^2 - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x_k}}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x_k}}{\partial x^l \partial x_l} \right] - \quad (4)$$

$$- \left[\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x^0} \frac{\partial - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x_k}}{\partial x_0} + \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x^l} \frac{\partial - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x_k}}{\partial x_l} \right] = \frac{\partial U}{m \partial x_k}.$$

Обозначая

$$w_k c = -\frac{i\hbar}{m} \nabla_k \ln \Psi, \quad (5)$$

имеем

$$-\frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^l \partial x_l} \right) + c \left(w^0 \frac{\partial w_k}{\partial x^0} + w^l \frac{\partial w_k}{\partial x^l} \right) = \frac{\partial U}{m c \partial x^k}. \quad (6)$$

Выражение (5) можно переписать в терминах локальной плотности $\rho = \Phi^2$ и фазы Q :

$$w_k c = -\frac{i\hbar}{m} \left(\frac{\partial \ln \rho^{1/2}}{\partial x_k} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial Q}{\partial x_k} \right). \quad (7)$$

Обозначим далее

$$u_k c = \nabla_k Q / m. \quad (8)$$

Здесь u_k — четырехмерная скорость, которая для $l = 1, 2, 3$ равна $u^l = v_l / c / \sqrt{1 - (v/c)^2}$, $u_l = -u^l$, а $u_0 = 1 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$, где v — обычная трехмерная скорость. Разделяя действительную и мнимую части уравнения (6), получаем для действительной части

$$\frac{\hbar^2}{2m} \rho \nabla_k \left(\frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2} \partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2} \partial x^l \partial x_l} \right) - c^2 \left(\frac{\partial (m \rho u_0 u_k)}{\partial x_0} + \frac{\partial (m \rho u_l u_k)}{\partial x_l} \right) = -\rho \frac{\partial U}{\partial x_k}. \quad (9)$$

Здесь мы использовали уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_l} = 0, \quad (10)$$

также следующее из уравнения Клейна–Гордона (2). Если умножить уравнение (2) на комплексно-сопряженную функцию Ψ^* и написать его в комплексно-сопряженном виде, умножив последнее на Ψ , то после вычитания одного уравнения из другого с учетом (8) для мнимой части получается уравнение непрерывности (10), действительная часть равна нулю.

При переходе от уравнения (6) к уравнению (9) взаимно сокращаются члены, содержащие дифференцирование вторых производных от Q , и члены,

содержащие произведения производных от $\rho^{1/2}$ и от Q . Это следует из уравнения (2).

Таким образом, мы получили для пространственных компонент $k = 1, 2, 3$ ($u_k = -v_k/c/\sqrt{1-(v/c)^2}$) релятивистский аналог уравнения Эйлера, которое содержит квантовый потенциал, аналогично представлению Маделунга [3]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(m\rho v_k/(1-(v/c)^2))}{\partial t} + \\ & + \frac{\partial(m\rho v_k v_l/(1-(v/c)^2))}{\partial x_l} = \\ & = -\rho \frac{\partial U}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2} c^2 \partial t^2} - \frac{\Delta \rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение для временной компоненты четырехмерной скорости является следствием этих уравнений. При малых скоростях $v \ll c$ уравнение (11) переходит в нерелятивистское уравнение Маделунга [3] с квантовым потенциалом $\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}}\Delta\sqrt{\rho}$, где Δ — оператор Лапласа (см. также о представлении Маделунга для уравнения Шредингера [5]). Этот квантовый потенциал влияет на дисперсию в уравнении Эйлера.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ПОМОЩЬЮ СОЛИТОНОВ

Уравнения (10), (11) отличаются, как и уравнения Маделунга [3], от уравнений обычной гидродинамики отсутствием членов диссипации. Для описания процессов взаимодействия в эти уравнения необходимо ввести тепловой член $I(\mathbf{r}, t)$. Его можно ввести как в традиционной гидродинамике с локально-равновесной функцией распределения [5]. А можно использовать для этого кинетическое уравнение.

Мы используем кинетическое уравнение (см. [7–11]) для нахождения нуклонной функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ($\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ — пространственная координата, $\mathbf{p}(p_1, p_2, p_3)$ — импульс, t — время). Решение кинетического уравнения для функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ищется в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_1 q + f_0(1 - q), \quad (12)$$

где $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — локально-равновесная функция распределения, $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — неравновесная функция распределения, q — релаксационный фактор.

В неравновесном случае при $q = 1$ получают уравнения длиннопобежной гидродинамики [6], которые в одномерном случае имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial(m\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(m\rho v^2 + P)}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(e + m\rho v^2/2)}{\partial t} + \\ & + \frac{\partial(v(e + m\rho v^2/2 + P))}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

К этой системе уравнений в нерелятивистском пределе могут быть сведены уравнения из предыдущего раздела с добавлением третьего уравнения для энергии. Здесь ρ — нуклонная плотность, v — скорость, e — плотность энергии, P — давление.

Обычно решение этой системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных находится численно на компьютере. Здесь развит подход к приближенному аналитическому решению этих уравнений как в случае слабой нелинейности путем сведения их к уравнениям Кортевега—де Фриза, так и в случае возмущений большой амплитуды, используя солитоноподобные решения. Проведено обобщение этого подхода на двумерный случай в случае плотности $\rho(x, t)$, зависящей только от координаты x и времени t .

Из уравнений (13)–(15) для нахождения нуклонной плотности $\rho(x, t)$, скорости $v(x, t)$, плотности тепловой энергии $I(x, t)$ при $q = 1$ следует, что тепловой член $I = I_1 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^3$ [6], где I_1 — не зависящий от ρ коэффициент, ρ_0 — равновесная плотность. Совместное решение уравнений (13) и (14) ищем в виде $v = v(\rho)$ и получаем два уравнения Кортевега—де Фриза [16].

Т.е. уравнения гидродинамики могут быть сведены к двум уравнениям Кортевега—де Фриза. Это позволяет перейти к представлению столкновения ядер как столкновению солитонов, если простую волну уравнения Кортевега—де Фриза проинтегрировать по x_1 . Т.е. найти

$$Z = \int_0^L \zeta \frac{dx_1}{L}, \quad (16)$$

где L — толщина слоя, Z является простой волной Кортевега—де Фриза, испущенной этим слоем, $\zeta(x - x_1, t)$ — односолитонное решение уравнения

Кортевега—де Фриза. Такое оказывается возможным благодаря законам сохранения для уравнения Кортевега—де Фриза, которые выполнены приближенно для слоя конечной длины и $\frac{\partial Z}{\partial t} \approx 0$. Это относится к каждому ядерному слою — источнику простых волн. Учитывая отражения волн Кортевега—де Фриза от границ системы, можно рассмотреть динамику столкновения ядерных слоев—слэбов и найти плотности и скорости в системе [16].

Рассмотрим теперь распространение возмущений произвольной амплитуды. Для плотности энергии можно использовать простое выражение [5]

$$e = K(\rho - \rho_0)^2, \quad (17)$$

где $\rho_0 = 0.15 \text{ Фм}^{-3}$ — равновесная плотность, плотность энергии $e = \int_0^\rho U d\rho$, $K \times 18\rho_0^2$ — модуль сжатия. Тогда давление

$$P = -\frac{\partial(e/\rho)}{\partial(1/\rho)} = K(\rho^2 - \rho_0^2) - \alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2. \quad (18)$$

Здесь мы добавили дисперсионный член, связанный с квантовыми членами и поверхностной энергией, с коэффициентом α , где можно выбрать $\frac{\alpha}{2mc_{so}^2}\rho_0 = (\text{Фм})^2$, исходя из ширины поверхностного слоя порядка Фм, скорость звука $c_{so} \approx 1/3c \approx \approx 10^8 \text{ м/с}$. Квантовый вклад потенциала Маделунга в давление в выражении (18) будем считать, что в основном совпадает с зависимостью $-\alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2$.

Он равен $-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} - \nabla^2 \rho \right)$ для плотности энергии: $\frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho}$. Коэффициент K можно переопределить.

В случае столкновения двух ядер образуются ударные волны, распространяющиеся со скоростью D , которую можно найти из уравнений (13) и (14), полагая $\frac{\partial}{\partial t} = -D \frac{\partial}{\partial x}$. Тогда из этих уравнений после интегрирования по скачку плотности получаем

$$D = -\frac{\rho_0 v_0}{\rho - \rho_0}, \quad (19)$$

где v_0 — начальная скорость сталкивающихся ядер. Полагая скорость D равной зависящей от плотности скорости звука $c_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$, получаем с учетом выражения для давления (18) уравнение для плотности ρ :

$$\pm \frac{(\rho - \rho_0)}{(\rho_1 - \rho)} \frac{d\rho}{dx} \sqrt{\alpha} = \quad (20)$$

$$= \sqrt{K(2\rho_1(\rho - \rho_0) + (\rho - \rho_0)^2)},$$

где ρ_1 — максимальная плотность сжатия на ударной волне

$$2K\rho_1 = \frac{(\rho_0 v_0)^2}{(\rho_1 - \rho_0)^2}. \quad (21)$$

Выражение (20) может быть проинтегрировано неявно в элементарных функциях, но ответ получается довольно громоздким. Выделяя главные члены решения, получаем выражение

$$\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_0)}{\rho_1^2} = -\exp\left(\pm \sqrt{\frac{K}{\alpha}} x\right), \quad (22)$$

где знак "+" отвечает решению вблизи ρ_1 , а знак "—" — вблизи ρ_0 . Решения должны быть сшиты при промежуточном значении плотности в точке перегиба. Так получается решение "кинк" для распространяющейся волны. При отрицательных значениях x рассуждения аналогичны. Однако, поскольку нас не интересуют сейчас детали структуры фронта волны, можно аппроксимировать решение (22) солитоноподобным решением

$$\rho = \rho_0 + 4 \frac{(\rho_1 - \rho_0)}{(\exp(-\lambda x/2) + \exp(\lambda x/2))^2}, \quad (23)$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{K}{\alpha}}$. Выражение (23) описывает главные особенности решения (22).

Также как мы делали раньше с солитонами Кортевега—де Фриза, можно проинтегрировать выражение (23) по длине слоя и рассматривать распространение фронта ударной волны и его отражение от границ. В результате интегрирования получаем, например, для волны, распространяющейся слева направо

$$\rho = \frac{1}{L} \int_{l_1}^{l_2} \rho' dx = \rho_0 + 4 \frac{(\rho_1 - \rho_0)}{\lambda L} \times \left[\frac{1}{1 + \exp(\lambda(x - l_2 - Dt))} - \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x - l_1 - Dt))} \right], \quad (24)$$

где ρ' — выражение (23), l_1 и l_2 — границы ядра, а $L = l_2 - l_1$ — его размер. Для максимума плотности ударной волны из уравнений (13) и (14) получается волновое уравнение, допускающее решение Даламбера, и законы сохранения для волн, распространяющихся вправо и влево. Что и было использовано. При этом скорость v можно найти из уравнения (13), используя для плотности выражение (24) с учетом возможных отражений ударных волн от границ системы и движения границ.

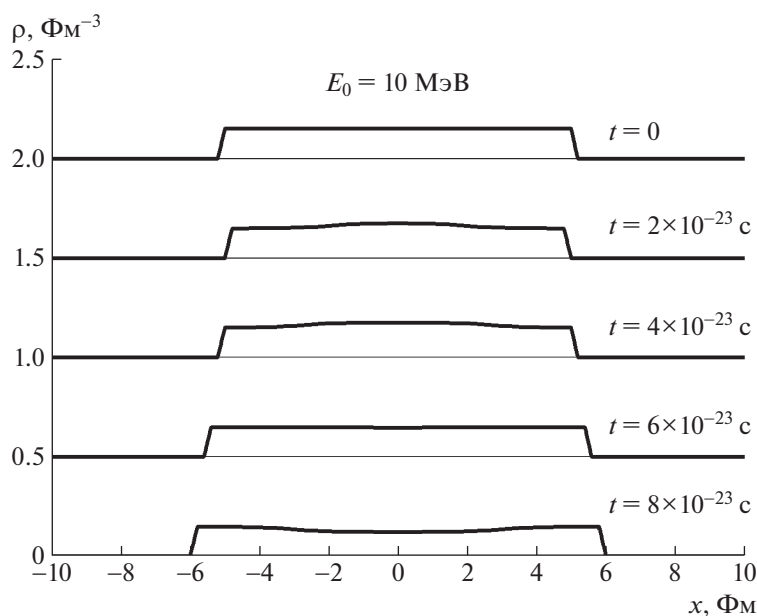


Рис. 1. Мгновенные профили столкновения ядерных слоев-слэбов при энергии $E_0 = 10$ МэВ на нуклон в различные моменты времени при $t = 0, 2, 4, 6, 8$ в единицах времени 10^{-23} с.

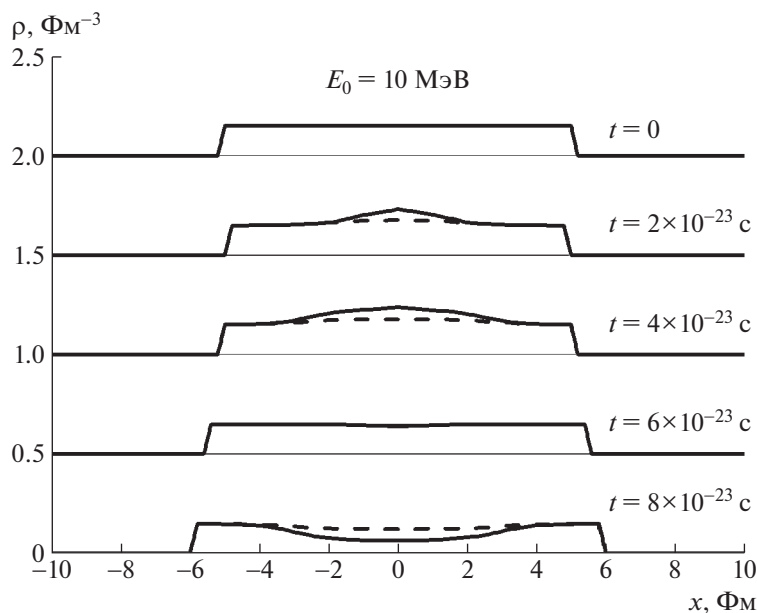


Рис. 2. Мгновенные профили столкновения одинаковых ядер (сплошные кривые) при энергии $E_0 = 10$ МэВ на нуклон в различные моменты времени при $t = 0, 2, 4, 6, 8$ в единицах времени 10^{-23} с для двумерного случая, штриховые кривые — профили плотности для одномерных слоев, как на рис. 1.

Таким образом, с помощью солитонных решений (23) и (24) можно исследовать динамику столкновений ядер в одномерном случае. Так, на рис. 1 представлены профили плотности для столкновения одинаковых ядер размером $L = 5$ Фм с энергией $E_0 = 10$ МэВ на нуклон в моменты времени $t = 2, 4, 6, 8$ в единицах времени 10^{-23} с. Можно ви-

деть первоначальное сжатие, образование hot spot и последующее расширение ядер с образованием разрежения в центральной области.

Мы также нашли упрощенное решение задачи в двумерном случае. Уравнения получаются из уравнений гидродинамики при интегрировании уравнений гидродинамики по поперечной координате, считая, что плотность $\rho(x, t)$ не зависит от

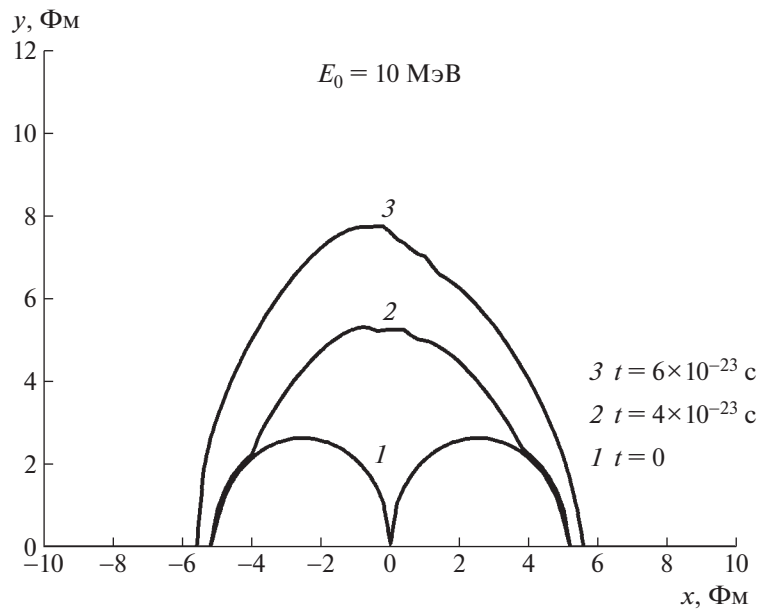


Рис. 3. Профили максимального поперечного размера ядер при энергии $E_0 = 10$ МэВ на нуклон в различные моменты времени при $t = 0, 4, 6$ в единицах времени 10^{-23} с.

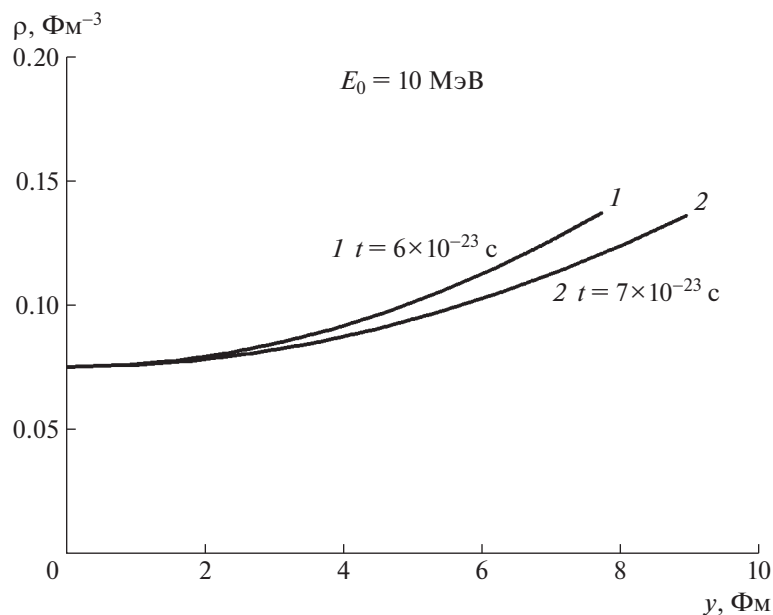


Рис. 4. Зависимость плотности $\rho(y, t)$ от поперечной координаты y для $x = 0$ при энергии $E_0 = 10$ МэВ на нуклон в различные моменты времени при $t = 6, 7$ в единицах времени 10^{-23} с.

координаты y [6]. Решение дается формулой (23) заменой $\rho_1 \rightarrow \rho_1 S(x, y, t)$ и последующим делением возмущения на S , где $S(x, y, t) = (y_0(x) + v_y t)^2 / y_0^2$, $y_0(x)$ — начальное положение движущейся поперечной координаты, а v_y совпадает со скоростью звука.

Так на рис. 2 представлены профили плотности для столкновения одинаковых ядер с продольным размером $L = 5$ Фм с энергией $E_0 = 10$ МэВ на

нуклон в моменты времени $t = 2, 4, 6, 8$ в единицах времени 10^{-23} с. В этом случае результаты отмечены сплошными кривыми. Штриховые кривые соответствуют одномерному случаю. Можно видеть, что в двумерном случае колебания сжатия и разрежения получаются более сильными.

На рис. 3 представлены зависимости поперечного размера $y = y_0(x) + v_y t$ в зависимости от координаты x в моменты времени $t = 0, 4, 6$ в

единицах времени 10^{-23} с. Эти результаты получены для плотности, не зависящей от координаты y . Из рис. 2 видно, что по завершении столкновения образуется в центре разреженная область, а на концах — нормальная плотность. Т.е. можно ожидать образование пузыря в центре ядра.

Для поперечной координаты y можно видеть аналогичную ситуацию. На рис. 4 представлено изменение плотности $\rho(y) = \rho'_0 \left(1 + \frac{(y - y_0)^2}{4t^2 c_s^2} \right)$ при $x = 0$ в различные моменты времени. Эта зависимость получена из решения гидродинамического уравнения Эйлера для скорости $v_y = \frac{y - y_0}{t}$ уже с учетом поправки на изменение плотности с координатой y . Таким образом, оценка для двумерного случая подтверждает образование пузыря в центре ядра, где образуется разреженная область с плотностью ρ'_0 . При низких энергиях сталкивающихся систем в результате колебаний плотности для чередующихся разрежений и сжатий может сформироваться устойчивый пузырь в центре.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе были получены уравнения квантовой релятивистской гидродинамики из уравнения Клейна—Гордона и было продолжено развитие неравновесного гидродинамического подхода для описания столкновения атомных ядер. Неравновесный подход к гидродинамическим уравнениям позволяет описывать экспериментальные данные лучше, чем уравнение состояния, соответствующее традиционной гидродинамике, предполагающей установление локального термодинамического равновесия. При этом описании существенным было выделение горячего пятна hot spot. В настоящей работе показано, что введение дисперсионных членов не нарушает это представление и при низких энергиях. На стадии расширения образуется разреженная область в центре системы — динамический пузырь. Это рассмотрение проведено в одномерном и в двумерном случаях.

Сведение уравнений гидродинамики к решению двух уравнений Кортевега—де Фриза в виде солитонов позволяет найти аналитическое решение задачи. Обобщение результатов данного подхода на случай возмущений большой амплитуды и дополнительных измерений представляет самостоятельный интерес. Рассмотрение может быть продолжено при больших скоростях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926).
2. W. Gordon, Z. Phys. **40**, 117 (1926).

3. E. Madelung, Z. Phys. **40**, 332 (1926).
4. N. Bohr and J. A. Wheeler, Phys. Rev. **56**, 426 (1939).
5. H. Stöcker and W. Greiner, Phys. Rept. **137**, 277 (1986).
6. A. T. D'yachenko, K. A. Gridnev, and W. Greiner, J. Phys. G **40**, 085101 (2013).
7. А. Т. Дьяченко, И. А. Митропольский, ЯФ **83**, 317 (2020) [Phys. At. Nucl. **83**, 558 (2020)].
8. А. Т. Дьяченко, И. А. Митропольский, Изв. РАН. Сер. физ. **84**, 508 (2020) [Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **84**, 391 (2020)].
9. А. Т. Дьяченко, И. А. Митропольский, ЭЧАЯ **53**, 464 (2022) [Phys. Part. Nucl. **53**, 505 (2022)].
10. А. Т. Дьяченко, К. А. Гриднев, И. А. Митропольский, Изв. РАН. Сер. физ. **79**, 952 (2015) [Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **79**, 858 (2015)].
11. А. Т. Дьяченко, И. А. Митропольский, Изв. РАН. Сер. физ. **81**, 1720 (2017) [Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **81**, 1521 (2017)].
12. A. T. D'yachenko and I. A. Mitropolsky, EPJ Web Conf. **204**, 03018 (2019).
13. A. T. D'yachenko and I. A. Mitropolsky, Phys. At. Nucl. **82**, 1641 (2019).
14. D. J. Korteweg and G. de Vries, Phil. Mag. **39**, 422 (1895).
15. A. T. D'yachenko, in *Proceedings of the International Conference on Nuclear Physics "Nuclear Shells — 50 Years", Dubna, 21–24 April 1999*, Ed. by Yu. Ts. Oganessian and R. Kalpakchieva (World Sci., Singapore, 2000), p. 492.
16. А. Т. Дьяченко, И. А. Митропольский, Изв. РАН. Сер. физ. **86**, 1162 (2022) [Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **86**, 962 (2022)].
17. P. J. Siemens and H. A. Bethe, Phys. Rev. Lett. **18**, 704 (1967).
18. C. Y. Wong, Ann. Phys. **77**, 279 (1973).
19. J. Decharge, J.-F. Beger, K. Dietrich, and M. S. Weiss, Phys. Lett. B **451**, 275 (1999).
20. A. Mutschler, A. Lemasson, O. Sorlin, D. Bazin, C. Borcea, R. Borcea, Z. Dombrádi, J.-P. Ebran, A. Gade, H. Iwasaki, E. Khan, A. Lepailleur, F. Recchia, T. Roger, F. Rotaru, D. Sohler, *et al.*, Nat. Phys. **13**, 152 (2017).
21. X.-H. Fan, G.-C. Yong, and W. Zuo, Phys. Rev. C **99**, 041601 (2019).

EQUATIONS OF QUANTUM RELATIVISTIC HYDRODYNAMICS AND SOLITON SOLUTIONS IN DESCRIBING COLLISIONS OF ATOMIC NUCLEI

A. T. D'yachenko^{1),2)}

¹⁾*NRC "Kurchatov Institute" — PNPI, Gatchina, Russia*

²⁾*Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, St. Petersburg, Russia*

In the present work, the equations of quantum relativistic hydrodynamics are obtained from the Klein–Gordon equation, which in the nonrelativistic semiclassical limit is reduced to the traditional equations of hydrodynamics of an ideal fluid. An analytical solution of the equations of hydrodynamics in the approximation of solitons for the collision of nuclear layers in the one-dimensional and two-dimensional cases is found. The compression stage, the decompression stage, and the expansion stage are considered within the framework of a single formula for layers with energies on the order of ten MeV per nucleon. Such a reduction of solutions of hydrodynamic equations to soliton solutions has not been considered before. Our generalization to the two-dimensional case leads to the idea of the formation of a rarefied bubble region at the stage of expansion. And the approach itself can be used in other areas of physics when calculating the nonlinear dynamics of oscillations of complex systems.