

ПРЕЦИЗИОННЫЙ РАСЧЕТ ОДНОПЕТЛЕВЫХ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВК В МЕЛЛЕРОВСКОМ РАССЕЙАНИИ

© 2024 г. В. А. Зыкунов^{1), 2)*}, А. Н. Ильичев^{3), 4)**}

Поступила в редакцию 31.08.2023 г., после доработки 20.10.2023 г., принята к публикации 20.10.2023 г.

Представлен детальный аналитический расчет однопетлевых электромагнитных радиационных поправок в меллеровском рассеянии за пределами ультррелятивистского приближения (с полным учетом всех масс). Инфракрасная расходимость (ИКР) устраняется с использованием ковариантного подхода Бардина–Шумейко. В широком кинематическом диапазоне произведено успешное численное сравнение радиационных эффектов с результатами, полученными ранее, где для устранения ИКР использовались альтернативные методы. Установлена кинематическая область, в которой для получения точной оценки радиационных эффектов требуется избегать ультррелятивистского приближения.

DOI: 10.31857/S0044002724010091, EDN: KDOTFW

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные технические достижения в области экспериментальной физики низких и высоких энергий возродили интерес к высокоточным вычислениям в квантовой электродинамике (КЭД). Для обеспечения точности обработки экспериментальных данных подобные вычисления зачастую должны выходить за рамки ультррелятивистского приближения.

Ярким примером того, насколько подобные высокоточные теоретические предсказания становятся важными, является исследование процесса электрон-электронного рассеяния, обычно его называют меллеровским рассеянием (МР). Поскольку этот процесс сопровождается электронным пучком, он был исследован для измерения светимости [1, 2] и специальных измерений при низких энергиях для изучения массы электронов [3]. Точное знание КЭД-эффектов также могло бы быть полезно для эксперимента MOLLER [4], в котором будет исследоваться нарушающая четность асимметрия — наблюдаемая величина, исследования которой, возможно, помогут найти указания на проявления Новой физики. Основная же мотивация к произведенным точным расчетам обусловлена

экспериментом по измерению радиуса протона PRad [5, 6] и его обновленной версии PRad II [7].

Зачастую при изучении эффектов КЭД ограничиваются учетом вклада виртуальных частиц и мягких фотонов, см., например, [8], однако современные экспериментальные возможности и высокие требования к точности извлечения данных обуславливают необходимость прецизионного учета также и жестких тормозных фотонов в соответствии с возможностями детектора (fiducial cuts).

Впервые разработка системного подхода к расчету радиационных эффектов с излучением жестких фотонов (для упругого и неупругого электрон-протонного рассеяния) была осуществлена Мо и Тсаи в 1969 г. в работе [9]. Одним из ограничений в их расчетах был приблизительный способ учета вклада мягких фотонов, в результате чего окончательные выражения зависят от искусственного параметра Δ , который был введен для разделения фазового пространства (по энергии тормозного фотона) на мягкую и жесткую части. При численных расчетах, с одной стороны, этот параметр следует выбирать как можно меньшим, чтобы уменьшить область, оцениваемую приблизительно, но, с другой стороны, его нельзя выбирать слишком малым из-за возможной численной нестабильности при расчете излучения жестких фотонов.

В 1977 г. Бардин и Шумейко в своей статье [10] показали, как эта проблема может быть решена в рамках ковариантного расчета. Для точного расчета поляризационного МР ковариантный подход [10] был применен в работе [11]. Для оценки эффектов зависимости от экспериментальных ограничений на неупругость (или потерянную массу) был сделан дополнительный расчет в [12], на

¹⁾Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

²⁾Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Беларусь.

³⁾Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.

⁴⁾Институт ядерных проблем, Минск, Беларусь.

*E-mail: zykunov@cern.ch

**E-mail: ily@hep.by

основе которого построен Монте-Карло-генератор [13] для моделирования излучения жестких фотонов.

Впервые электромагнитные радиационные поправки (ЭМП) к лептонному току в упругом ep -рассеянии и МР были рассмотрены [одним из нас (А. Н. И.) в соавторстве] в работе [14] именно с применением ковариантного подхода для обработки ИКР [10]. Требуемая высокая точность побудила авторов [14] выйти за рамки ультрарелятивистского приближения и удержаться в расчете массу электрона. В данной работе был рассмотрен один тип экспериментальных ограничений — на неупругость (потерянную массу). Существуют и другие расчеты радиационных эффектов без пренебрежения массой электрона, например, недавний результат группы SANC [15], где анализ был сосредоточен на поляризационных наблюдаемых и области энергий выше Z -резонанса. Стоит упомянуть и работу [16] по оценке радиационных поправок (вплоть до второго порядка) с выделением инфракрасной расходимости ковариантным методом, расчет в которой основан на FKS'-методе [17–19].

Альтернативный метод выделения инфракрасной расходимости был предложен одним из нас (В. А. З.) в работе [20], где он применялся для расчета наблюдаемых поляризационного МР. Впоследствии W -метод (от “whole” — полный, цельный, без разделения на области мягких и жестких фотонов) был применен для расчета и других реакций, например, в работе [21] для поляризационного Баба-рассеяния. С использованием W -метода два года назад был выполнен независимый расчет ЭМП в меллеровском рассеянии [22]. Представленный там численный анализ показал необходимость детальной сверки с авторами [14] в целях получения более точного согласия.

Данная статья отвечает на запрос, поднятый в работе [22]. Подобно работе [14] все вычисления выполняются с удержанием массы электрона, а для выделения ИКР используется метод Бардина–Шумейко с некоторыми существенными улучшениями. Так, вместо громоздкой функции S_ϕ , определяемой формулой (А.14) в работе [14], для численной оценки используется ее более компактный аналог, предложенный в Приложении В работы [23]. Представленные детальные выкладки обработки ИКР показывают как с помощью несложных манипуляций также избавиться от громоздкого выражения δ_1^H , определяемого формулой (А.3) работы [14].

Данная работа преследует три цели:

- произвести прецизионный расчет однопетлевых электромагнитных радиационных поправок для наблюдаемых величин неполяризационного меллеровского рассеяния без привлечения каких-либо дополнительных параметров (“мягкости”) с удержанием массы электрона на всех этапах вычисления;

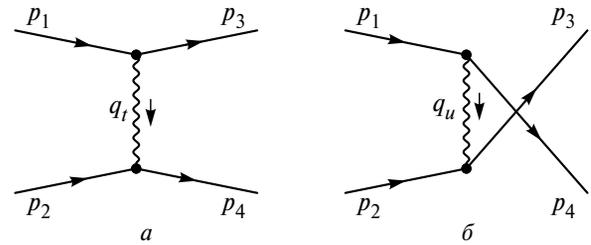


Рис. 1. Фейнмановские диаграммы для меллеровского процесса $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ в приближении однофотонного обмена: a — t -канальная, b — u -канальная.

- произвести численное сравнение радиационных эффектов с результатами, полученными ранее, где для устранения ИКР использовались другие подходы: метод Мо–Тсаи и W -метод;
- выяснить кинематическую область, в которой для получения точной оценки радиационных эффектов требуется избегать ультрарелятивистского приближения.

План работы следующий: в разд. 2 дано общее описание процесса в борновском приближении, в разд. 3 приведены выражения виртуальных однопетлевых ЭМП, в разд. 4 подробно разобран вклад тормозного излучения. Численный сравнительный анализ проведен в разд. 5. Технические детали расчета вклада конечной части двухфотонного обмена представлены в Приложении.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОФОТОННОГО ОБМЕНА

Процесс меллеровского рассеяния

$$e^-(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^-(p_4) \quad (1)$$

($p_i^2 = m^2$, $i = \overline{1,4}$) в приближении однофотонного обмена (борновском приближении) описывается следующими переменными:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \\ u &= (p_2 - p_3)^2 = 4m^2 - s - t. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку конечные частицы неразличимы, существует две возможности описания данного процесса в рамках КЭД. В первом случае обмен фотона происходит согласно диаграмме, показанной на рис. 1, a , вследствие чего виртуальность равна $q_t^2 = (p_1 - p_3)^2 = t$, а такой процесс называется t -канальным. Во втором случае обмен фотона происходит согласно диаграмме, представленной на рис. 1, b (имеет место замена тождественных частиц $p_3 \leftrightarrow p_4$), виртуальность фотона теперь определяется как $q_u^2 = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = u$, а процесс называется u -канальным. Кроме введенных в (2) переменных, для описания МР также будет полезно определить следующие величины:

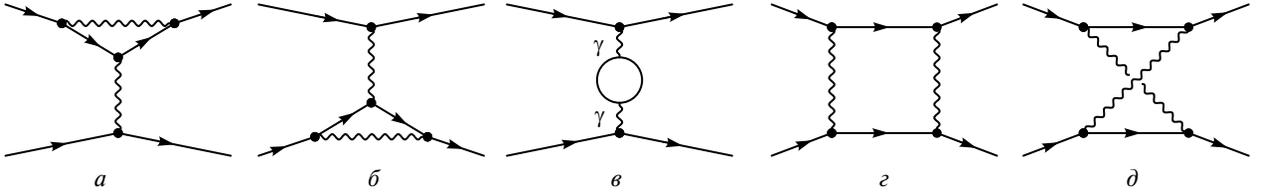


Рис. 2. Фейнмановские t -канальные диаграммы вкладов виртуальных частиц: вершинных функций (a , b), собственных энергий (v), прямого (z) и перекрестного (d) двухфотонного обмена в процесс МР.

$$\xi_s = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}; \quad \xi_t = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}}; \quad \xi_u = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{u}}. \quad (3)$$

$$m_b^u m_b^{t+} = m_b^t m_b^{u+};$$

$$m_b^u m_b^{u+} = \frac{e^4}{u^2} \left((s-t)^2 + u(u-8m^2) \right), \quad (8)$$

запишем борновское сечение в следующем виде:

$$\frac{d\sigma_B}{dc_\theta} = \frac{d\sigma_B^t}{dc_\theta} + (t \leftrightarrow u), \quad (9)$$

Сечение однофотонного обмена строится стандартным образом:

$$d\sigma_B = \frac{m_b m_b^+}{2s \xi_s} d\Gamma_2. \quad (4)$$

Матричный элемент борновского процесса представляет собой разность t -канального и u -канального вкладов:

$$m_b = m_b^t - m_b^u,$$

где

$$m_b^t = \frac{ie^2}{t} \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_1);$$

$$m_b^u = \frac{ie^2}{u} \bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_2). \quad (5)$$

Элементарный заряд $e = \sqrt{4\pi\alpha}$, где $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Фазовый объем выражается через косинус угла рассеяния θ детектируемого электрона с 4-импульсом p_3 в с.ц.м. начальных электронов $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$:

$$d\Gamma_2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times$$

$$\times \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2p_{30}} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2p_{40}} = \frac{dt}{8\pi s \xi_s} = \frac{\xi_s dc_\theta}{16\pi}, \quad (6)$$

где $c_\theta = \cos\theta$ (мы перешли в сферическую систему координат и произвели интегрирование по азимутальному углу). Инварианты t и u определяются через угол θ следующим образом:

$$t = -\frac{s\xi_s^2}{2}(1 - c_\theta), \quad u = -\frac{s\xi_s^2}{2}(1 + c_\theta). \quad (7)$$

Выражая квадраты матричных элементов через инварианты:

$$m_b^t m_b^{t+} = \frac{e^4}{t^2} \left((s-u)^2 + t(t-8m^2) \right);$$

$$m_b^t m_b^{u+} = -\frac{2e^4}{tu} (s-6m^2)(s-2m^2);$$

$$\frac{d\sigma_B^t}{dc_\theta} = \frac{m_b^t m_b^{t+}}{32\pi s} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} \left[\frac{(s-u)^2 + t(t-8m^2)}{t^2} + \frac{2(s-6m^2)(s-2m^2)}{tu} \right]. \quad (10)$$

3. ВКЛАД ВИРТУАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Сечение, соответствующее вкладу дополнительных виртуальных частиц в меллеровское рассеяние, состоит из трех слагаемых:

$$\frac{d\sigma_{\text{virt}}}{dc_\theta} = \frac{d\sigma_{\text{vert}}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{\text{vac}}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma}}{dc_\theta}, \quad (11)$$

где первое слагаемое соответствует вкладу вершинных функций, представленных диаграммами Фейнмана на рис. 2, a , b , второе — поляризации вакуума, которая изображена на рис. 2, v , а третье — двухфотонному обмену (рис. 2, z , d). Каждый из представленных вкладов выражается через интерференцию соответствующего матричного элемента с борновским:

$$\frac{d\sigma_{\text{vert}}}{dc_\theta} = \frac{m_{\text{vert}}^t m_b^{t+} + m_b m_{\text{vert}}^{t+}}{32\pi s} + (t \leftrightarrow u); \quad (12)$$

$$\frac{d\sigma_{\text{vac}}}{dc_\theta} = \frac{m_{\text{vac}}^t m_b^{t+} + m_b m_{\text{vac}}^{t+}}{32\pi s} + (t \leftrightarrow u); \quad (13)$$

$$\frac{d\sigma_{2\gamma}}{dc_\theta} = \frac{(m_{2\gamma d}^t + m_{2\gamma x}^t) m_b^{t+} + m_b (m_{2\gamma d}^t + m_{2\gamma x}^t)^+}{32\pi s} + (t \leftrightarrow u), \quad (14)$$

где, как и ранее, верхний индекс t у матричных элементов обозначает t -канальный процесс, а нижние индексы в последнем равенстве определяют прямую (d , рис. 2, z) и перекрестную (x , рис. 2, d) составляющие двухфотонного обмена.

Матричные элементы, соответствующие t -канальным вершинным функциям и собственным энергиям фотона, имеют следующую структуру:

$$m_{\text{vert}}^t = \frac{ie^2}{t} \left[\bar{u}(p_3) \Lambda_\mu(q) u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2) + \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \Lambda^\mu(-q) u(p_2) \right];$$

$$m_{\text{vac}}^t = \frac{ie^2}{t} \bar{u}(p_3) \gamma^\alpha u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma^\beta u(p_2) \Pi_{\alpha\beta}^t. \quad (15)$$

Выражения Λ_μ и $\Pi_{\alpha\beta}^t$ содержат ультрафиолетовую расходимость, а Λ_μ также и инфракрасно расходится. Для их вычисления используем метод размерной регуляризации однопетлевых интегралов:

$$\Lambda_\mu(p_1 - p_3) = -ie^2 \int \frac{d^n \ell}{(2\pi)^n \mu^{n-4}} \times$$

$$\times \frac{\gamma_\alpha (\hat{p}_3 - \hat{\ell} + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{\ell} + m) \gamma^\alpha}{\ell^2 (\ell^2 - 2\ell p_3) (\ell^2 - 2\ell p_1)};$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^t = \frac{ie^2}{t} \int \frac{d^n \ell}{(2\pi)^n \mu^{n-4}} \times$$

$$\times \sum_{i=e,\mu,\tau} \frac{\text{Tr}[(\hat{\ell} + m_i) \gamma_\alpha (\hat{\ell} - \hat{q} + m_i) \gamma_\beta]}{(\ell^2 - m_i^2) ((\ell - q)^2 - m_i^2)}, \quad (16)$$

где μ — свободный параметр размерности массы.

Расчет представленных выше интегралов, как и сокращение ультрафиолетовой расходимости, хорошо известны и в данной работе не приводятся. Используя общепринятую схему перенормировки на массовой поверхности, находим, что:

$$\frac{d\sigma_{\text{vert}}}{dc_\theta} = \frac{2\alpha}{\pi} \left[\delta_{\text{vert}}^t(t) \frac{d\sigma_b^t}{dc_\theta} + \delta_{\text{vert}}^t(u) \frac{d\sigma_b^u}{dc_\theta} \right] +$$

$$+ \frac{d\sigma_A^t}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_A^u}{dc_\theta};$$

$$\frac{d\sigma_{\text{vac}}}{dc_\theta} = \frac{\alpha}{\pi} \left[\delta_{\text{vac}}^t(t) \frac{d\sigma_b^t}{dc_\theta} + \delta_{\text{vac}}^t(u) \frac{d\sigma_b^u}{dc_\theta} \right]. \quad (17)$$

Заметим, что вклады, факторизующиеся перед борновским сечением, не меняют магнитный момент электрона. Для вершинной части этот вклад имеет вид

$$\delta_{\text{vert}}^t(t) = \left[2 - \frac{1 + \xi_t^2}{\xi_t} l_t \right] \left(P_{\text{IR}} + \ln \frac{m}{\mu} \right) +$$

$$+ \frac{1 + 2\xi_t^2}{2\xi_t} l_t - 2 - \frac{1 + \xi_t^2}{4\xi_t} \left[l_t^2 + 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_t}{1 + \xi_t} - \pi^2 \right], \quad (18)$$

где

$$l_t = \ln \frac{\xi_t + 1}{\xi_t - 1}, \quad (19)$$

а выражение

$$P_{\text{IR}} = \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \gamma_E + \ln \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \quad (20)$$

осуществляет параметризацию инфракрасного полюса в n -мерном пространстве. Часть вершинного сечения, в которой нет полной факторизации перед борновским выражением (она обозначена символом “ A ”, от “anomalous”), имеет вид

$$\frac{d\sigma_A^t}{dc_\theta} = -\frac{2\alpha^3}{st^2 \xi_t} m^2 l_t \left[3s \xi_s^2 \frac{s - 2m^2}{u} + 10m^2 - 3u \right];$$

$$\frac{d\sigma_A^u}{dc_\theta} = \frac{d\sigma_A^t}{dc_\theta} (t \leftrightarrow u). \quad (21)$$

Наконец, факторизующаяся часть от сечения, обусловленного поляризацией вакуума (здесь мы берем в расчет только поляризацию лептонами (e, μ, τ), адронная поляризация вакуума хорошо изучена и лежит несколько за рамками целей этой работы) имеет вид

$$\delta_{\text{vac}}^t(t) = \sum_{i=e,\mu,\tau} \left[\left(\frac{2m_i^2 - t}{3} + \frac{8m_i^4}{t} \right) \frac{2}{\sqrt{t(t - 4m_i^2)}} \times \right.$$

$$\left. \times \ln \frac{\sqrt{4m_i^2 - t} + \sqrt{-t}}{\sqrt{4m_i^2 - t} - \sqrt{-t}} - \frac{10}{9} - \frac{8m_i^2}{t} \right]. \quad (22)$$

Матричные элементы прямого $m_{2\gamma d}^t$ и перекрестного $m_{2\gamma x}^t$ двухфотонного обмена выражаются через однопетлевые интегралы следующим образом:

$$m_{2\gamma d}^t = \frac{e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 \ell}{\ell^2 (\ell - q)^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu \times$$

$$\times \frac{\hat{p}_1 - \hat{\ell} + m}{\ell^2 - 2p_1 \ell} \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma_\nu \frac{\hat{p}_2 + \hat{\ell} + m}{\ell^2 + 2p_2 \ell} \gamma_\mu u(p_2);$$

$$m_{2\gamma x}^t = \frac{e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 \ell}{\ell^2 (\ell - q)^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu \frac{\hat{p}_1 - \hat{\ell} + m}{\ell^2 - 2p_1 \ell} \times$$

$$\times \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma_\mu \frac{\hat{p}_4 - \hat{\ell} + m}{\ell^2 - 2p_4 \ell} \gamma_\nu u(p_2). \quad (23)$$

Инфракрасная расходимость в сечении двухфотонного обмена выделяется методом, предложенным Тсаи в его работе [24], и имеет следующий вид:

$$m_{2\gamma\{d,x\}}^{t\text{IR}} = m_{2\gamma\{d,x\}}^t |_{l \rightarrow 0} + m_{2\gamma\{d,x\}}^t |_{l \rightarrow q}. \quad (24)$$

Здесь

$$m_{2\gamma d}^t |_{l \rightarrow 0} = \frac{e^2}{8\pi^2} m_b^t K(p_1, -p_2);$$

$$m_{2\gamma d}^t |_{l \rightarrow q} = \frac{e^2}{8\pi^2} m_b^t K(p_3, -p_4);$$

$$m_{2\gamma x}^t \Big|_{l \rightarrow 0} = -\frac{e^2}{8\pi^2} m_b^t K(p_1, p_4);$$

$$m_{2\gamma x}^t \Big|_{l \rightarrow q} = -\frac{e^2}{8\pi^2} m_b^t K(p_3, p_2). \quad (25)$$

Подробный расчет трехточечных интегралов

$$K(a, b) = -\frac{2ab}{i\pi^2} \int \frac{(2\pi\mu)^{4-n} d^n \ell}{\ell^2 (\ell^2 - 2a\ell) (\ell^2 - 2b\ell)}, \quad (26)$$

представленный в Приложении А работы [25], показывает, что $K(p_1, -p_2) = K(p_3, -p_4) = K_d$ являются комплексными величинами, в то время как выражения $K(p_1, p_4) = K(p_3, p_2) = K_x$ — вещественные. После подстановки в уравнения (А.12) и (А.13) из работы [25] $M \rightarrow m$, $S \rightarrow s - 2m^2$ и $X \rightarrow 2m^2 - u$ мы находим, что

$$\text{Re}[K_d] = \frac{1 + \xi_s^2}{4\xi_s^2} \left[4\left(P_{\text{IR}} + \ln \frac{m}{\mu}\right) l_s + l_s^2 + 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_s}{1 + \xi_s} - 2\pi^2 \right];$$

$$K_x = \frac{1 + \xi_u^2}{4\xi_u^2} \left[4\left(P_{\text{IR}} + \ln \frac{m}{\mu}\right) l_u + l_u^2 + 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_u}{1 + \xi_u} - \pi^2 \right], \quad (27)$$

где

$$l_s = \ln \frac{1 + \xi_s}{1 - \xi_s};$$

$$l_u = \ln \frac{\xi_u + 1}{\xi_u - 1}. \quad (28)$$

Для вычитания ИКР произведем эквивалентное преобразование:

$$m_{2\gamma}^t = m_{2\gamma}^t - m_{2\gamma}^{\text{IR}} + m_{2\gamma}^{\text{IR}} = m_{2\gamma}^{\text{F}} + m_{2\gamma}^{\text{IR}}. \quad (29)$$

После подстановки полученного равенства в выражение (14) с учетом (25) получаем:

$$\frac{d\sigma_{2\gamma}}{dc_\theta} = \frac{\alpha}{\pi} \left[\delta_{2\gamma}^{\text{IR } t} \frac{d\sigma_b^t}{dc_\theta} + \delta_{2\gamma}^{\text{IR } u} \frac{d\sigma_b^u}{dc_\theta} \right] +$$

$$+ \frac{d\sigma_{2\gamma d}^{\text{F}}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma d}^{\text{uF}}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma x}^{\text{F}}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma x}^{\text{uF}}}{dc_\theta}, \quad (30)$$

где

$$\delta_{2\gamma}^{\text{IR } t} = 2(\text{Re}[K_d] - K_x);$$

$$\delta_{2\gamma}^{\text{IR } u} = \delta_{2\gamma}^{\text{IR } t} (t \leftrightarrow u). \quad (31)$$

Явные выражения для

$$\frac{d\sigma_{2\gamma i}^{\text{F}}}{dc_\theta} = \frac{m_{2\gamma i}^{\text{F}} m_b^+ + m_b m_{2\gamma i}^{\text{F}}}{32\pi s} \quad (i = d, x) \quad (32)$$

можно найти в Приложении,

$$\frac{d\sigma_{2\gamma i}^{\text{uF}}}{dc_\theta} = \frac{d\sigma_{2\gamma i}^{\text{F}}}{dc_\theta} (t \leftrightarrow u). \quad (33)$$

Таким образом, после выделения инфракрасной расходимости в отдельное слагаемое окончательно получаем

$$\frac{d\sigma_{\text{virt}}}{dc_\theta} = -\frac{\alpha}{\pi} J_0 \left[P_{\text{IR}} + \ln \frac{m}{\mu} \right] \frac{d\sigma_b}{dc_\theta} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\pi} \left[\delta_{\text{virt}}^t \frac{d\sigma_b^t}{dc_\theta} + \delta_{\text{virt}}^u \frac{d\sigma_b^u}{dc_\theta} \right] + \frac{d\sigma_A^t}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_A^u}{dc_\theta} +$$

$$+ \frac{d\sigma_{2\gamma d}^{\text{F}}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma d}^{\text{uF}}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma x}^{\text{F}}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma x}^{\text{uF}}}{dc_\theta}, \quad (34)$$

где выражение, факторизующееся перед борновским сечением и расходящимся членом, выглядит так:

$$J_0 = -2 \left[\frac{\xi_s^2 + 1}{\xi_s} l_s - \frac{\xi_t^2 + 1}{\xi_t} l_t - \frac{\xi_u^2 + 1}{\xi_u} l_u + 2 \right]; \quad (35)$$

$$\delta_{\text{virt}}^t = \frac{1 + \xi_s^2}{2\xi_s^2} \left[l_s^2 + 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_s}{1 + \xi_s} - 2\pi^2 \right] +$$

$$+ \frac{1 + 2\xi_t^2}{\xi_t} l_t + \frac{1 + \xi_t^2}{2\xi_t} \left[\pi^2 - l_t^2 - 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_t}{1 + \xi_t} \right] -$$

$$- \frac{1 + \xi_u^2}{2\xi_u} \left[l_u^2 + 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_u}{1 + \xi_u} - \pi^2 \right] - 4 + \delta_{\text{vac}}(t). \quad (36)$$

4. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ФОТОНА

Для описания излучения реального фотона, представленного в t -канале диаграммами на рис. 3,

$$e^-(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^-(p_4) + \gamma(p) \quad (37)$$

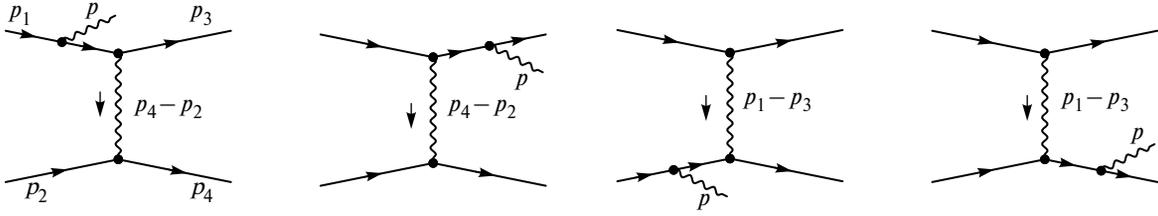
($p^2 = 0$), будем использовать три дополнительные переменные: v , τ и ϕ_p . Неупругость v определяется так: $v = (p_1 + p_2 - p_3)^2 - m^2$ видно, что она стремится к нулю при $p \rightarrow 0$.

Далее, введя обозначение для 4-импульса обменного фотона $q = p_1 - p_3$, определим величину τ следующим образом: $\tau = pq / pp_2$. Наконец, ϕ_p — это угол между плоскостями $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3)$ и (\mathbf{p}, \mathbf{q}) в системе $\mathbf{p}_2 = 0$.

Поскольку мы рассматриваем зависимость сечения от угла в с.ц.м. начальных электронов, для радиационного случая переменная t определяется следующим образом:

$$t = \frac{1}{2} (4m^2 - s + v + c_\theta \xi_s \sqrt{\lambda_s}), \quad (38)$$

где $\lambda_s = (s - v)^2 - 4m^2 s$. Учитывая, что подкоренное выражение не должно быть отрицательным,


 Рис. 3. Фейнмановские t -канальные диаграммы вкладов с излучением тормозного фотона в МР.

максимальное значение неупругости определяется следующим образом:

$$v_{\max} = s - 2m\sqrt{s}. \quad (39)$$

На практике вклад жесткого реального фотонного излучения в наблюдаемое сечение может быть существенно подавлен путем наложения ограничения v_{cut} на верхний предел неупругости, которая также является измеряемой величиной в упругом рассеянии. Поэтому, имея в виду максимальные значения неупругости для верхнего предела этой величины, мы будем использовать v_{cut} в качестве экспериментально наблюдаемой величины.

Введение инвариантной величины τ позволяет избавиться от множества радикалов при расчете квадратов матричных элементов, поскольку в системе $\mathbf{p}_2 = 0$ переменная τ имеет простой вид:

$$\tau = \frac{1}{m} \left(q_0 - \cos\theta_p \sqrt{q_0^2 - t} \right). \quad (40)$$

Здесь $q_0 = (v - t) / (2m)$ — энергия переданного импульса q , а θ_p — полярный угол между 3-импульсами \mathbf{q} и \mathbf{p} . Пределы изменения этой переменной определяются через ограничения $-1 < \cos\theta_p < 1$ и имеют вид

$$\tau_{\max/\min} = \frac{v - t \pm \sqrt{\lambda_t}}{2m^2}, \quad (41)$$

где $\lambda_t = (v - t)^2 - 4m^2 t$.

Сечение радиационного процесса представим в виде

$$d\sigma_R = - \frac{2^6 \pi^3 \alpha^3 (1 + \tau) R_r}{s v \xi_s} d\Gamma_3, \quad (42)$$

где

$$R_r = - \frac{v}{2^7 \pi^3 \alpha^2 (1 + \tau)} |m_{r1} + m_{r2} - m_{r3} - m_{r4}|^2, \quad (43)$$

а матричные элементы m_{ri} имеют следующую структуру:

$$m_{r1} = \frac{ie^3}{t - \tau v / (1 + \tau)} \varepsilon_\alpha(p) \bar{u}(p_3) \Gamma_r^{\alpha\mu}(p_3, p_1) \times \\ \times u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_2);$$

$$m_{r2} = \frac{ie^3}{t} \varepsilon_\alpha(p) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \times \\ \times \Gamma_r^{\alpha\mu}(p_4, p_2) u(p_2);$$

$$m_{r3} = \frac{ie^3}{u_r + v} \varepsilon_\alpha(p) \bar{u}(p_4) \Gamma_r^{\alpha\mu}(p_4, p_1) \times \\ \times u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_2);$$

$$m_{r4} = \frac{ie^3}{u_r + z_1 v / (1 + \tau)} \varepsilon_\alpha(p) \bar{u}(p_4) \gamma_\mu \times \\ \times u(p_1) \bar{u}(p_3) \Gamma_r^{\alpha\mu}(p_3, p_2) u(p_2). \quad (44)$$

Здесь $\varepsilon_\alpha(p)$ — 4-вектор поляризации тормозного фотона, $u_r = 4m^2 - s - t$,

$$z_1 = \frac{pp_1}{pp_2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_t} \left[\begin{aligned} & t(u_r + v - s) + \tau(s(v - t) - 2m^2 v) - \\ & - 2 \cos\phi_p \sqrt{(m^2(4st - v^2) - st(s + t - v))} \times \\ & \times (\tau_{\max} - \tau)(\tau - \tau_{\min}) \end{aligned} \right], \quad (45)$$

а

$$\Gamma_r^{\alpha\mu}(a, b) = \left(\frac{b^\alpha}{bk} - \frac{a^\alpha}{ak} \right) \gamma^\mu - \frac{\gamma^\mu \hat{b} \gamma^\alpha}{2kb} - \frac{\gamma^\mu \hat{a} \gamma^\alpha}{2ka}. \quad (46)$$

Выражение для R_r получаем стандартными способами с помощью систем компьютерной алгебры, его вычисленный вид достаточно громоздок и в работе не приводится.

Фазовое пространство для процесса (37) определяется следующим образом:

$$d\Gamma_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p) \times \\ \times \frac{d^3 p}{2p_0} \frac{d^3 p_3}{2p_{30}} \frac{d^3 p_4}{2p_{40}} = \frac{\sqrt{\lambda_s} dc_0 dv}{2^8 \pi^4 s} d\Gamma_\gamma, \quad (47)$$

где

$$d\Gamma_\gamma = \delta\left((p_1 + q - p)^2 - m^2\right) \frac{d^3 p}{p_0} = \\ = \frac{v d\tau d\phi_k}{2(1 + \tau)^2 \sqrt{\lambda_t}}. \quad (48)$$

В результате находим, что

$$d\sigma_R = -\frac{\alpha^3 \sqrt{\lambda_s} R_r}{8\pi(1+\tau)s^2 \xi_s \sqrt{\lambda_t}} dc_\theta dv d\tau d\phi_k. \quad (49)$$

Прямое интегрирование по фазовому пространству фотонов невозможно из-за инфракрасной расходимости при $\nu \rightarrow 0$. Инфракрасный вклад может быть извлечен в достаточно произвольной форме, ограниченной только асимптотическим поведением при $\nu \rightarrow 0$. Для последовательного выделения и сокращения инфракрасной расходимости используем подход Бардина–Шумейко [10]. Итак, сечение тормозного излучения, содержащее ИКР, выделяется следующим образом:

$$\begin{aligned} d\sigma_R^{\text{IR}} &= \frac{1}{\nu} \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \sigma_R = -\frac{\alpha}{\pi^2} d\sigma_B dv d\Gamma_\gamma f_{\text{IR}} = \\ &= -\frac{\alpha}{\pi^2} d\sigma_B \frac{\nu dv d\tau d\phi_k}{2(1+\tau)^2 \sqrt{\lambda_t}} f_{\text{IR}}, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$f_{\text{IR}} = \frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{kk_1} + \frac{p_1}{kp_1} - \frac{k_2}{kk_2} - \frac{p_2}{kp_2} \right)^2. \quad (51)$$

Обработка инфракрасной расходимости методом Бардина–Шумейко требует разделения $d\sigma_R^{\text{IR}}$ на мягкую δ_S и жесткую δ_H части:

$$\frac{d\sigma_R^{\text{IR}}}{dc_\theta} = \frac{\alpha}{\pi} (\delta_S + \delta_H) \frac{d\sigma_B}{dc_\theta} \quad (52)$$

путем введения бесконечно малой неупругости $\bar{\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta_S &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\bar{\nu}} dv \int \frac{d^3k}{k_0} \delta\left((p_2 + q - p)^2 - m^2\right) f_{\text{IR}}, \\ \delta_H &= -\frac{1}{\pi} \int_{\bar{\nu}}^{\nu^{\text{cut}}} dv \int \frac{d^3k}{k_0} \delta\left((p_2 + q - p)^2 - m^2\right) f_{\text{IR}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Величина δ_S находится стандартным образом [10, 23, 25] и с использованием метода размерной регуляризации имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_S &= J_0 \left(P_{\text{IR}} + \ln \frac{\bar{\nu}}{\mu m} \right) + \frac{\xi_s^2 + 1}{2\xi_s} \times \\ &\times \left[l_s^2 + l_s + \text{Li}_2 \frac{2\xi_s}{(1+\xi_s)^2} \right] - \\ &- \frac{\xi_t^2 + 1}{2\xi_t} \left[l_t^2 - l_t + \text{Li}_2 \frac{2\xi_t}{(1+\xi_t)^2} \right] - \\ &- \frac{\xi_u^2 + 1}{2\xi_u} \left[l_u^2 - l_u + \text{Li}_2 \frac{2\xi_u}{(1+\xi_u)^2} \right] + \end{aligned} \quad (54)$$

$$+ S_\phi(p_1, p_3, p_4) - S_\phi(p_1, p_2, p_4) + S_\phi(p_2, p_3, p_4).$$

Компактное выражение для величины S_ϕ приведено в Приложении В работы [23].

Для расчета δ_H будем интегрировать по фотонным переменным ν , τ и ϕ_k :

$$\delta_H = -\frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\nu}}^{\nu^{\text{cut}}} \nu dv \int_{\tau_{\text{min}}}^{\tau_{\text{max}}} \frac{d\tau}{(1+\tau)^2 \sqrt{\lambda_t}} \int_0^{2\pi} d\phi_k f_{\text{IR}}. \quad (55)$$

Проинтегрировав по τ и ϕ_k , получаем

$$\delta_H = \int_{\bar{\nu}}^{\nu^{\text{cut}}} \frac{d\nu}{\nu} J_H(\nu), \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} J_H(\nu) &= \frac{\xi_t^2 + 1}{\xi_t} l_t - \frac{\xi_s^2 + 1}{\xi_s} l_s - \frac{4m^2 + 3\nu}{m^2 + \nu} - \\ &- \frac{(\xi_t^2 + 1)t}{\sqrt{\lambda_t}} \ln \frac{\nu - t + 2m^2 + \sqrt{\lambda_t}}{\nu - t + 2m^2 - \sqrt{\lambda_t}} - \\ &- \frac{(\xi_s^2 + 1)s}{\sqrt{\lambda_s}} \ln \frac{s - \nu - 2m^2 + \sqrt{\lambda_s}}{s - \nu - 2m^2 - \sqrt{\lambda_s}} - \\ &- \frac{(\xi_u^2 + 1)u}{\sqrt{\lambda_1}} \ln \frac{2m^2 - u - \sqrt{\lambda_1}}{2m^2 - u + \sqrt{\lambda_1}} - \\ &- \frac{(\xi_u^2 + 1)u}{\sqrt{\lambda_2}} \ln \frac{\sqrt{\lambda_2} - u - \nu}{\sqrt{\lambda_1} + u + \nu}, \end{aligned} \quad (57)$$

а комбинации инвариантов $\lambda_{1,2}$ выглядят так:

$$\lambda_1 = u^2 - 4m^2(u + \nu), \quad \lambda_2 = (u + \nu)^2 - 4m^2(u + \nu).$$

Принимая во внимание, что $J_H(0) = J_0$, после тождественного преобразования интеграл (56) можно представить в виде суммы $\delta_H = \delta_H^1 + \bar{\delta}_H$, где подынтегральное выражение

$$\delta_H^1 = \int_{\bar{\nu}}^{\nu^{\text{cut}}} \frac{d\nu}{\nu} (J_H(\nu) - J_H(0)) \quad (58)$$

конечно при $\nu \rightarrow 0$, а $\bar{\delta}_H$ имеет довольно простую структуру:

$$\bar{\delta}_H = J_H(0) \int_{\bar{\nu}}^{\nu^{\text{cut}}} \frac{d\nu}{\nu} = J_0 \ln \frac{\nu^{\text{cut}}}{\bar{\nu}}. \quad (59)$$

Поскольку, как упоминалось выше, произвольность в выборе вычитаемого инфракрасного выражения ограничена только его асимптотическим поведением при $\nu \rightarrow 0$, у нас есть возможность не вычитать из полного сечения слагаемое δ_H^1 , аналитическое выражение которого после интегрирования по ν при удержании массы электрона к тому же имеет довольно громоздкий вид (см. формулу (A.3) в работе [14]).

В результате вклад от излучения реальных фотонов может быть разделен на конечную и инфракрасно-расходящуюся части:

$$\frac{d\sigma_R}{dc_\theta} = \frac{d\sigma_R}{dc_\theta} - \frac{d\bar{\sigma}_R^{\text{IR}}}{dc_\theta} + \frac{d\bar{\sigma}_R^{\text{IR}}}{dc_\theta} = \frac{d\sigma_F}{dc_\theta} + \frac{d\bar{\sigma}_R^{\text{IR}}}{dc_\theta}, \quad (60)$$

где

$$\frac{d\bar{\sigma}_R^{\text{IR}}}{dc_\theta} = \frac{\alpha}{\pi} (\delta_S + \bar{\delta}_H) \frac{d\sigma_B}{dc_\theta} \quad (61)$$

не зависит от параметра разделения \bar{v} , введенного в выражениях (53).

После вычитания инфракрасного слагаемого, содержащего v -зависимость только в знаменателе, из проинтегрированного по τ и ϕ_p радиационного вклада (49), конечная часть сечения излучения жесткого фотона приобретает вид

$$\frac{d\sigma_F}{dc_\theta} = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^{v_{\text{cut}}} dv \left[\frac{\alpha^2 \sqrt{\lambda_s}}{8s^2 \xi_s \sqrt{\lambda_t}} \int_{\tau_{\text{min}}}^{\tau_{\text{max}}} \frac{d\tau}{1+\tau} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} d\phi_k a R_r + \frac{J_0}{v} \frac{d\sigma_B}{dc_\theta} \right], \quad (62)$$

где величина a (от “acceptance”) — это тета-функция, которая (наряду с v_{cut}) определяется ограничениями, накладываемыми на геометрию вылета жесткого фотона.

Суммируя выражения для вклада виртуальных частиц (34) и вклада излучения жесткого фотона (60), окончательно получаем свободное от инфракрасной расходимости выражение для однопетлевых радиационных поправок к меллеровскому расхождению в следующем виде:

$$\frac{d\sigma_{\text{RC}}^A(v_{\text{cut}})}{dc_\theta} = \frac{d\sigma_{\text{virt}}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_R}{dc_\theta} = \\ = \frac{\alpha}{\pi} \delta_{\text{VR}} \frac{d\sigma_b}{dc_\theta} + \frac{\alpha}{\pi} \left[\delta_{\text{virt}}^t \frac{d\sigma_b^t}{dc_\theta} + \delta_{\text{virt}}^u \frac{d\sigma_b^u}{dc_\theta} \right] + \frac{d\sigma_F}{dc_\theta} + \\ + \frac{d\sigma_A^t}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_A^u}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma d}^t F}{dc_\theta} + \\ + \frac{d\sigma_{2\gamma d}^u F}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma x}^t F}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma x}^u F}{dc_\theta}, \quad (63)$$

где

$$\delta_{\text{VR}} = \delta_S + \bar{\delta}_H - J_0 \left[P_{\text{IR}} + \ln \frac{m}{\mu} \right] = \\ = J_0 \ln \frac{v_{\text{cut}}}{m^2} + \frac{\xi_s^2 + 1}{2\xi_s} \left[l_s^2 + l_s + \text{Li}_2 \frac{2\xi_s}{(1 + \xi_s)^2} \right] - \\ - \frac{\xi_t^2 + 1}{2\xi_t} \left[l_t^2 - l_t + \text{Li}_2 \frac{2\xi_t}{(1 + \xi_t)^2} \right] - \\ - \frac{\xi_u^2 + 1}{2\xi_u} \left[l_u^2 - l_u + \text{Li}_2 \frac{2\xi_u}{(1 + \xi_u)^2} \right] + \\ + S_\phi(p_1, p_3, p_4) - S_\phi(p_1, p_2, p_4) + S_\phi(p_2, p_3, p_4).$$

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Для численного сравнения радиационных эффектов с результатами, полученными в работе [22], определим относительные поправки в следующем виде (таком же, как в [22]):

$$\delta = \frac{d\sigma_{\text{RC}}^A(v_{\text{cut}}) / dc_\theta}{d\sigma_b / dc_\theta}. \quad (65)$$

Будет рассмотрена зависимость относительной поправки δ , определенной выше, от значения $-t$ (см. рис. 4 и рис. 5) для трех различных энергий электронных пучков [минимального значения эксперимента PRad (1.1 ГэВ), на порядок большей величины энергии MOLLER (11 ГэВ) и еще на порядок большей энергии 110 ГэВ, соответствующей HE-режиму (от “high energy”)]. В работах [14] и [22] вместо $-t$ использовалось Q^2 , т.е. $Q^2 \equiv -t$. Сплошные кривые соответствуют представленному в данной работе расчету, а точки, соединенные штриховыми кривыми, соответствуют результату, представленному в [22].

На рис. 4 представлены относительные поправки для различных ограничений на неупругость v_{cut} в зависимости от $-t$. Рисунок иллюстрирует превосходное согласие результатов, полученных в двух различных подходах во всей области, где правомерно применение ультрарелятивистского приближения. Однако видно, что при низких энергиях эксперимента PRad для необходимой точности результата требуется удерживать массы уже при значениях переданного импульса $-t$ примерно на два порядка меньших, чем его максимальное значение: $-t \leq Q_{\text{max}}^2 \times 10^{-2}$, где $Q_{\text{max}}^2 = s - 4m^2 \approx s$. Ситуация усугубляется (расхождение растет) с увеличением значения ограничения v_{cut} , так, при $v_{\text{cut}} \approx s \times 10^{-1} = 10^{-4}$ ГэВ² эффект заметен даже при максимальных $-t$. При энергиях MOLLER расхождения не видны во всей исследованной области, а в HE-режиме хорошо заметны только при очень малых значениях v_{cut} (на пять порядков меньших s), где массы играют роль параметра коллинеарной сингулярности.

На рис. 5 представлены относительные поправки для различных ограничений на максимальное значение фотонной энергии, которая в с.ц.м. начальных электронов выражается через ранее определенные величины следующим образом:

$$p_0 = \frac{(1 + z_1)v}{2(1 + \tau)\sqrt{s}}. \quad (66)$$

Как и на предыдущем рисунке, видно превосходное согласие результатов от двух подходов там, где правомерно применение ультрарелятивистского приближения. В основном сохраняются некоторые общие закономерности проявления

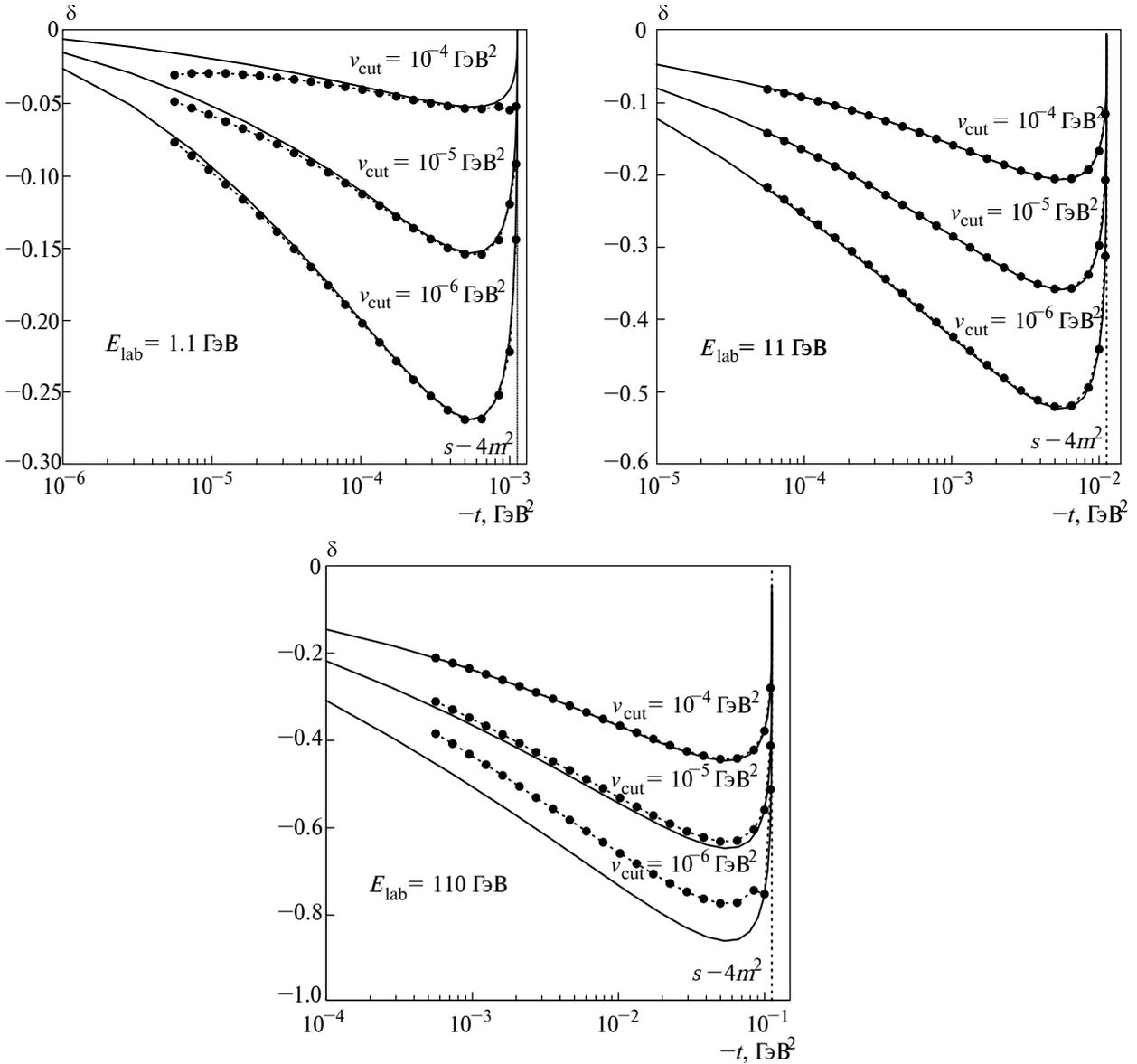


Рис. 4. Относительные поправки к сечению для различных энергий электронного пучка в зависимости от $-t$ при разных ограничениях на неупругость: сплошные кривые – результат данной работы, точечные кривые – результат, представленный в [22], вертикальная точная линия – верхняя граница на переменную $-t$.

различий от недоучета масс: так, при низких энергиях эксперимента PRad для необходимой точности результата требуется удерживать массы при значениях переданного импульса $-t$ примерно на порядок меньших, чем его максимальное значение. Расхождение практически не растет с увеличением значения ограничения на фотонную энергию. Однако хорошо заметны при максимальных значениях $-t$ для всех катов, поскольку, как известно, именно там снова массы играют роль параметра коллинеарной сингулярности.

Кроме вышесказанного, рис. 4 и рис. 5 воспроизводят основные закономерности относительных поправок, установленные в работах [14] и [22]: падение с ростом $-t$ почти до максимального значения, стремление к нулю при $Q^2 \rightarrow 0$, наличие минимума в области больших $-t$.

Итак, в работе был произведен прецизионный расчет однопетлевых электромагнитных радиационных поправок для наблюдаемых величин неполяризованного меллеровского рассеяния с применением схемы сокращения ИКР Бардина–Шумейко

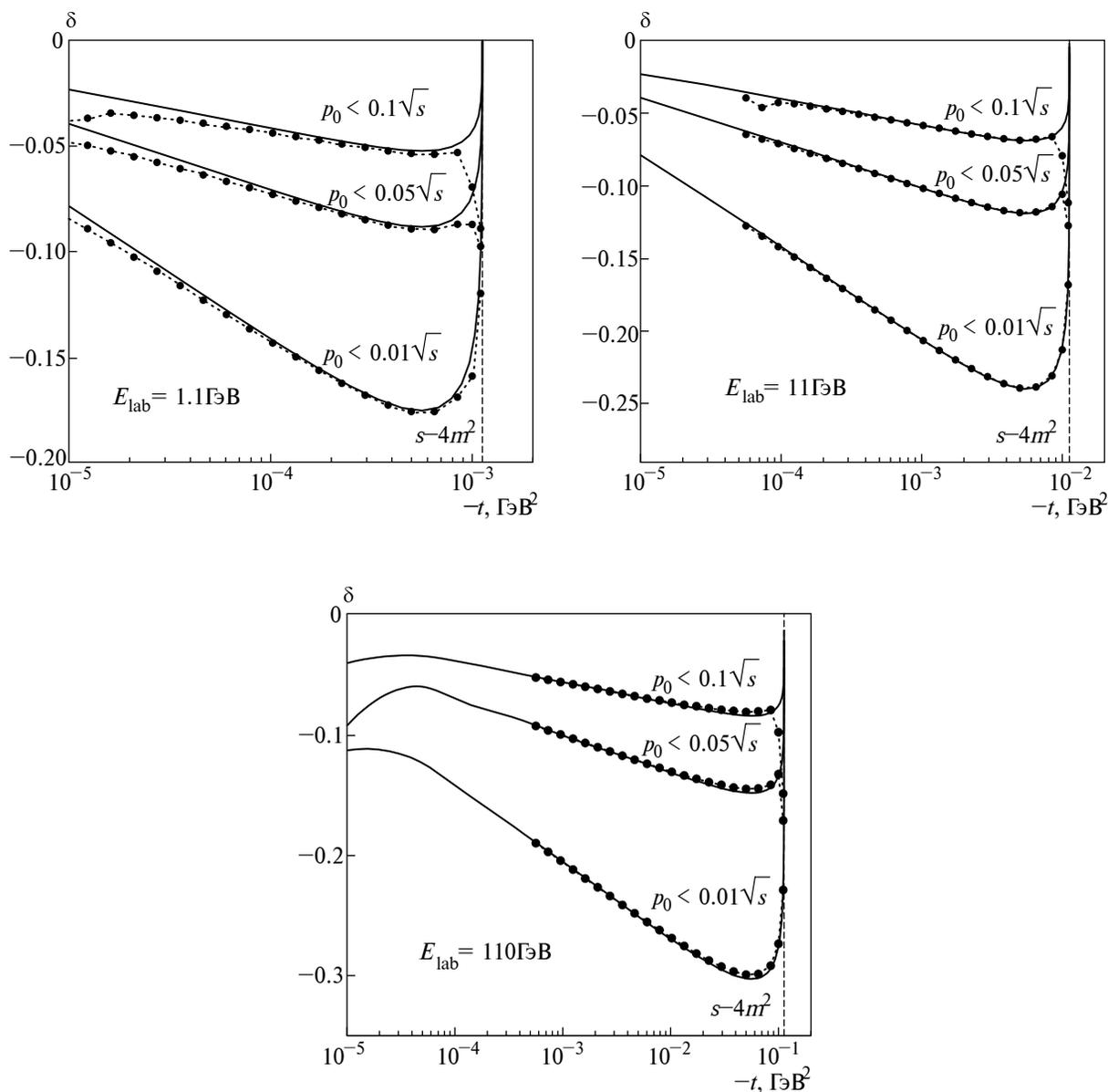


Рис. 5. Относительные поправки к сечению для различных энергий электронных пучков в зависимости от $-t$ при разных ограничениях на максимальную энергию тормозного фотона. Остальные обозначения см. на рис. 4.

и удержанием масс частиц на всех этапах вычисления. Сделана детальная взаимная сверка с предыдущими результатами в целях получения точного согласия, которая включила выяснение необходимости удерживать массовые слагаемые в расчете (нужно на краю областей), роль схем выделения ИКР (все схемы дали совпадающий результат в области применимости) и анализ в точном соответствии с возможностями детектора (обе схемы

достаточно гибки и соответствуют требованиям современных экспериментальных программ).

Работа выполнена частично при поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция 2025” (подпрограмма “Микромир и Вселенная”). Авторы признательны И. Акушевичу, А. Афанасьеву, Ю. Быстрицкому за обсуждение результатов работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РАСЧЕТ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ
ДВУХФОТОННОГО ОБМЕНА

После некоторых преобразований конечные части для прямого $d\sigma_{2\gamma d}^{tF}/dt$ и перекрестного $d\sigma_{2\gamma x}^{tF}/dt$ двухфотонного обмена можно выразить через инварианты (s, t, u) , однопетлевые интегралы $(J_{1-7}^{d,x})$ и их комбинации $(\delta J_{1-3}^{d,x})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{2\gamma d}^{tF}}{dt} &= \frac{\alpha^3}{s^2\xi_s^2u} \left[(s^2((2u-t)(1+3\xi_s^2) + \right. \\ &+ (2u+3t-6s)\xi_s^6) + t(t-u)(3t+5u)) \frac{\text{Re}[J_1^d]}{2t^2u} + \\ &+ 2(m^2(s(3t-4u)+5ut) + \xi_s^2(s-u) \times \\ &\times (2s^2\xi_s^2 + su + u^2) + m^2(11t-2u)) \frac{J_3}{stu\xi_t^2} + \\ &+ ((t-u) + s\xi_s^4) \frac{\delta J_1^d}{u} + (3 - \xi_u^2) \frac{\delta J_2^d}{\xi_t^2} + \\ &+ ((s-5t-u) + 2t\xi_u^2) \frac{\delta J_3^d}{2st} \Big]; \\ \frac{d\sigma_{2\gamma x}^{tF}}{dt} &= \frac{\alpha^3}{s^2\xi_s^2u} \left[2(u(2s+t)(t^2+tu+2u^2) + \right. \\ &+ 8m^2(u^3 + m^2(t-2u)(t+3u-2m^2))) \frac{J_1^x}{t^2u} + \\ &+ 2((s^2-u^2)(s^2+su+2u^2) + 2m^2(s+u) \times \\ &\times (3su+5u^2-6s^2) + 4m^4(11s^2-7u^2) - \\ &- 16m^6(3s+u)) \frac{J_3}{t^2u\xi_t^2} + s(1+\xi_s^2) \times \\ &\times \left. \left(\frac{(u-t)\delta J_3^x}{2tu} - \delta J_1^x + \frac{\delta J_2^x}{\xi_t^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П. 1})$$

Здесь и далее символ Re означает, что интеграл содержит мнимую часть, которая не дает вклада в наблюдаемые величины. Комбинации интегралов имеют следующий вид:

$$\delta J_1^d = \text{Re}[J_1^d] + \frac{2}{t} \text{Re}[J_2^d];$$

$$\delta J_2^d = J_3 - \frac{2\xi_t^2}{s} J_4^d;$$

$$\delta J_3^d = 2J_5 - 4J_6 + 2J_7^d;$$

$$\delta J_1^x = J_1^x + \frac{2}{t} J_2^x;$$

$$\delta J_2^x = J_3 + \frac{2\xi_t^2}{u} J_4^x;$$

$$\delta J_3^x = 2J_5 - 4J_6 + 2J_7^x.$$

Приведем встретившиеся интегралы:

$$\begin{aligned} \text{Re}[J_1^d] &= \text{Re} \left[\int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{\ell q - \ell^2}{\ell^2(\ell-q)^2(\ell^2-2\ell p_1)(\ell^2+2\ell p_2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2s\xi_s} \left[l_s^2 - 2l_s \ln \frac{s(1+\xi_s^2)^2}{-4t} - 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_s}{1+\xi_s} + 2\pi^2 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1^x &= \int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{\ell q - \ell^2}{\ell^2(\ell-q)^2(\ell^2-2\ell p_1)(\ell^2-2\ell p_4)} = \\ &= -\frac{1}{2u\xi_u} \left[3l_u^2 + 2l_u \ln \frac{u(\xi_u^2-1)^2}{4t} + \right. \\ &\quad \left. + 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_u}{1+\xi_u} - \pi^2 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re}[J_2^d] &= \text{Re} \left[\int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{t\ell^2 - (\ell q)^2}{\ell^2(\ell-q)^2(\ell^2-2\ell p_1)(\ell^2+2\ell p_2)} \right] = \\ &= -\frac{t}{2s\xi_s} \left[l_s^2 - 4l_s - 2l_s \ln \frac{s(1+\xi_s^2)^2}{-4t} - \right. \\ &\quad \left. - 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_s}{1+\xi_s} + 2\pi^2 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2^x &= \int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{t\ell^2 - (\ell q)^2}{\ell^2(\ell-q)^2(\ell^2-2\ell p_1)(\ell^2-2\ell p_4)} = \\ &= \frac{t}{4u\xi_u} \left[3l_u^2 + 2l_u \ln \frac{u(\xi_u^2-1)^2}{4t} + \right. \\ &\quad \left. + 4l_u + 4\text{Li}_2 \frac{2\xi_u}{1+\xi_u} - \pi^2 \right]; \end{aligned}$$

$$J_3 = \int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{1}{\ell^2(\ell-q)^2(\ell^2-2\ell p_1)} =$$

$$= \int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{1}{\ell^2(\ell-q)^2(\ell^2+2\ell p_2)} =$$

$$= \int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{1}{\ell^2(\ell-q)^2(\ell^2-2\ell p_4)} =$$

$$= -\frac{1}{6\xi_t t} \left[6\ln^2 \frac{1+\xi_t}{2} - 3l_t^2 + 12\text{Li}_2 \frac{1-\xi_t}{2} - 4\pi^2 \right];$$

$$\begin{aligned}
 J_4^d &= \int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{(p_1 + p_2)\ell}{\ell^2(\ell - q)^2(\ell^2 - 2\ell p_1)} = \\
 &= -\int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{(p_1 + p_2)\ell}{\ell^2(\ell - q)^2(\ell^2 + 2\ell p_2)} = \\
 &= -\frac{s}{12\xi_s^3 t} \left[\frac{6\ln^2 \frac{1+\xi_t}{2} - 3l_t^2 + 12\text{Li}_2 \frac{1-\xi_t}{2} +}{+12\xi_s \ln \frac{-t}{m^2} - 4\pi^2} \right], \\
 J_4^x &= \int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{(p_4 - p_1)\ell}{\ell^2(\ell - q)^2(\ell^2 - 2\ell p_1)} = \\
 &= \int \frac{d^4\ell}{i\pi^2} \frac{(p_1 - p_4)\ell}{\ell^2(\ell - q)^2(\ell^2 - 2\ell p_4)} = \\
 &= -\frac{u}{12\xi_s^3 t} \left[\frac{6\ln^2 \frac{1+\xi_t}{2} - 3l_t^2 +}{+12\text{Li}_2 \frac{1-\xi_t}{2} + 12\xi_s \ln \frac{-t}{m^2} - 4\pi^2} \right]; \\
 J_5 &= \int \frac{d^n\ell}{i\pi^2(2\pi\mu)^{n-4}} \frac{1}{\ell^2(\ell - q)^2} = \\
 &= 2 - 2P_{\text{IR}} - \ln \frac{-t}{\mu}; \\
 J_6 &= \int \frac{d^n\ell}{i\pi^2(2\pi\mu)^{n-4}} \frac{1}{\ell^2(\ell^2 - 2\ell p_1)} = \\
 &= \int \frac{d^n\ell}{i\pi^2(2\pi\mu)^{n-4}} \frac{1}{(\ell - q)^2(\ell^2 - 2\ell p_1)} = \\
 &= \int \frac{d^n\ell}{i\pi^2(2\pi\mu)^{n-4}} \frac{1}{\ell^2(\ell^2 + 2\ell p_2)} = \\
 &= \int \frac{d^n\ell}{i\pi^2(2\pi\mu)^{n-4}} \frac{1}{(\ell - q)^2(\ell^2 + 2\ell p_2)} = \\
 &= \int \frac{d^n\ell}{i\pi^2(2\pi\mu)^{n-4}} \frac{1}{\ell^2(\ell^2 - 2\ell p_4)} = \\
 &= \int \frac{d^n\ell}{i\pi^2(2\pi\mu)^{n-4}} \frac{1}{(\ell - q)^2(\ell^2 - 2\ell p_4)} = \\
 &= 2 - 2P_{\text{IR}} - 2\ln \frac{m}{\mu};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Re}[J_7^d] &= \text{Re} \left[\frac{\int \frac{d^n\ell}{i\pi^2(2\pi\mu)^{n-4}} \times}{\left(\ell^2 - 2\ell p_1\right)\left(\ell^2 + 2\ell p_2\right)} \right] = \\
 &= 2 - 2P_{\text{IR}} - 2\ln \frac{m}{\mu} - \xi_s l_s; \\
 \text{Re}[J_7^x] &= \text{Re} \left[\frac{\int \frac{d^n\ell}{i\pi^2(2\pi\mu)^{n-4}} \times}{\left(\ell^2 - 2\ell p_1\right)\left(\ell^2 - 2\ell p_4\right)} \right] = \\
 &= 2 - 2P_{\text{IR}} - 2\ln \frac{m}{\mu} - \xi_u l_u.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что выражения для прямых боксов имеют следующий вид:

$$\delta J_1^d = \frac{2}{s\xi_s} l_s, \delta J_2^d = -\frac{2}{t} \ln \frac{m^2}{-t}, \tag{П. 2}$$

$$\delta J_3^d = 2\ln \frac{m^2}{-t} - 2\xi_s l_s,$$

а выражения для перекрестных боксов:

$$\delta J_1^x = \frac{2}{s\xi_u} l_u, \delta J_2^x = \delta J_2^d, \tag{П. 3}$$

$$\delta J_3^x = 2\ln \frac{m^2}{-t} - 2\xi_u l_u$$

не содержат расходимости и имеют компактный вид. Подставляя последние выражения в сечения, нетрудно убедиться, что в ультрарелятивистском пределе получается полное совпадение с работой [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Schmidt, C. O'Connor, J. C. Bernauer, and R. Milner, *Nucl. Instrum. Methods A* **877**, 112 (2018).
2. T. Benisch, S. Bernreuther, E. Devitsin, V. Kozlov, S. Potashov, K. Rith, A. Terkulov, and C. Weiskopf, *Nucl. Instrum. Methods A* **471**, 314 (2001).
3. C. S. Epstein, R. Johnston, S. Lee, J. C. Bernauer, R. Corliss, K. Dow, P. Fisher, I. Friscic, D. Hasell, R. G. Milner, *et al.*, *Phys. Rev. D* **102**, 012006 (2020).
4. MOLLER Collab. (J. Benesch *et al.*), arXiv: 1411.4088 [nucl-ex].
5. A. Gasparian, D. Dutta, H. Gao, and M. Khandaker, Jefferson Laboratory Experiment E12-11-106 (2011).
6. W. Xiong, A. Gasparian, H. Gao, D. Dutta, M. Khandaker, N. Liyanage, E. Pasyuk, C. Peng, X. Bai, L. Ye, K. Gnanvo, C. Gu, M. Levillain, X. Yan, D. W. Higinbotham, M. Mezziane, *et al.*, *Nature* **575**, 147 (2019).
7. A. Gasparian, H. Gao, D. Dutta, N. Liyanage, E. Pasyuk, D. W. Higinbotham, C. Peng, K. Gnanvo, I. Akushevich, A. Ahmidouch, C. Ayerbe, X. Bai, H. Bhatt, D. Bhetuwal, J. Brock, V. Burkert, *et al.*, arXiv: 2009.10510v1 [nucl-ex].
8. N. Kaiser, *J. Phys. G* **37**, 115005 (2010).
9. L. W. Mo and Y. S. Tsai, *Rev. Mod. Phys.* **41**, 205 (1969).
10. D. Yu. Bardin and N. M. Shumeiko, *Nucl. Phys. B* **127**, 242 (1977).
11. N. M. Shumeiko and J. G. Suarez, *J. Phys. G* **26**, 113 (2000).
12. A. N. Ilyichev and V. A. Zykunov, *Phys. Rev. D* **72**, 033018 (2005); hep-ph/0504191.
13. A. Afanasiev, Eu. Chudakov, A. Ilyichev, and V. Zykunov, *Comput. Phys. Commun.* **176**, 218 (2007); JLAB-PHY-06-456, hep-ph/0603027.
14. I. Akushevich, H. Gao, A. Ilyichev, and M. Mezziane, *Eur. Phys. J. A* **51**, 1 (2015).
15. S. G. Bondarenko, L. V. Kalinovskaya, L. A. Romyantsev, and V. L. Yermolchik, arXiv: 2203.10538 [hep-ph].
16. P. Banerjee, T. Engel, N. Schalch, A. Signer, and Y. Ulrich, *Phys. Rev. D* **105**, L031904 (2022).
17. S. Frixione, Z. Kunszt, and A. Signer, *Nucl. Phys. B* **467**, 399 (1996).
18. R. Frederix, S. Frixione, F. Maltoni, and T. Stelzer, *JHEP* **0910003** (2009).
19. T. Engel, A. Signer, and Y. Ulrich, *JHEP* **2001085** (2020).
20. В. А. ЗЫКУНОВ, *ЯФ* **80**, 388 (2017) [*Phys. At. Nucl.* **80**, 699 (2017)].
21. В. А. ЗЫКУНОВ, *ЯФ* **83**, 246 (2020) [*Phys. At. Nucl.* **83**, 463 (2020)].
22. В. А. ЗЫКУНОВ, *ЯФ* **84**, 447 (2021) [*Phys. At. Nucl.* **84**, 739 (2021)].
23. A. Afanasev and A. Ilyichev, *Eur. Phys. J. A* **57**, 280 (2021).
24. Y. S. Tsai, *Phys. Rev.* **122**, 1898 (1961).
25. A. Afanasev and A. Ilyichev, *Eur. Phys. J. A* **58**, 156 (2022).

PRECISE CALCULATION OF ONE-LOOP RADIATIVE CORRECTIONS IN MÖLLER SCATTERING

V. A. Zykunov^{1), 2)}, A. N. Ilyichev^{3), 4)}

¹⁾*JINR, Dubna, Moscow region, Russia*

²⁾*Francisk Skorina Gomel State University, Belarus*

³⁾*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

⁴⁾*Institute for Nuclear Problems, Minsk, Belarus*

The detailed analytical calculation of one-loop electromagnetic radiative corrections (ERC) in Møller scattering beyond ultrarelativistic approximation (taking into account all masses) is presented. The infrared divergence (IRD) is extracted using the covariant Bardin–Shumeiko approach. The successful numerical comparison of radiative effects with the well-known results using for IRD extraction alternative approaches is done in the wide kinematical range. A kinematic region is found in which it is needed to avoid the ultrarelativistic effects in order to get the exact estimation of radiative effects.