

БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ КОНДЕНСАЦИЯ И ОБРАЗОВАНИЕ МЮОНОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ЧАСТИЦ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ УЛЬТРАВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

© 2024 г. В. А. Окорокhov^{1),*}

Поступила в редакцию 08.11.2023 г.; после доработки 08.11.2023 г.; принята к публикации 08.11.2023 г.

Столкновения частиц космических лучей с ультравысокими начальными энергиями с ядрами в атмосфере открывают широкие возможности для появления новых динамических особенностей многочастичных процессов. В частности, лазероподобное поведение пионов, обусловленное Бозе-эйнштейновской конденсацией, могло бы приводить к смещению в область больших множественностей соответствующего параметра и, как следствие, могло бы обеспечить, в общем случае, повышенный выход космических мюонов. В данной работе выполнены оценки критического значения пространственной плотности заряженных частиц для начала конденсации Бозе–Эйнштейна. Оценки получены в рамках модели полной симметризации многочастичного состояния для области энергий, соответствующей космическим лучам ультравысоких энергий (КЛУВЭ). Получены энергетические зависимости средней плотности заряженных пионов для случаев отсутствия эффекта Бозе–Эйнштейна и для присутствия лазероподобного поведения пионов. Рассмотрено возможное влияние Бозе-эйнштейновской конденсации на образование мюонов в столкновениях частицы КЛУВЭ с атмосферой.

DOI: 10.31857/S0044002724030066, EDN: IWNPEW

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования взаимодействий космических лучей ультравысоких энергий (КЛУВЭ), т.е. частиц космических лучей с начальными энергиями в лабораторной системе отсчета (л.с.) больше 10^{17} – 10^{18} эВ, с ядрами в атмосфере открывают новые уникальные возможности для исследования процессов множественного образования частиц при энергиях (значительно) выше не только диапазона Большого адронного коллайдера (ЛНС), но также и будущего коллайдера, возможность создания которого на Земле рассматривается в настоящее время [1]. Среди важных особенностей сильных взаимодействий частиц КЛУВЭ с ядрами в атмосфере Земли может быть отмечено вероятное образование сильно взаимодействующей материи при экстремальных условиях, называемой также кварк-глюонной плазмой (КГП). Вследствие химического состава воздуха и доминирующих компонентов КЛУВЭ, прохождение частиц КЛУВЭ через атмосферу можно рассматривать как столкновения, главным образом, малых систем, и возможность образования КГП в таких столкновениях была количественно обоснована в [1].

Мюонная загадка — хорошо известная проблема в физике КЛУВЭ, один из аспектов которой заключается в избытке экспериментально регистрируемых групп мюонов по сравнению с расчетами в рамках

доступных феноменологических моделей [2, 3]. Доминирующим механизмом образования мюонов в атмосферных ливнях является распад легких заряженных мезонов [4]. Модели адронных взаимодействий, непрерывно обогащаемые новыми ускорительными данными, играют ключевую роль в понимании физических процессов, которые определяют образование широких атмосферных ливней (ШАЛ), вызываемых КЛУВЭ в атмосфере [5]. Поэтому исследование возможных новых особенностей в динамике процессов множественного образования частиц позволяет лучше понять выход мюонов в столкновениях частиц КЛУВЭ с атмосферой и может пролить новый свет на мюонную проблему.

Система с произвольным числом бозонов может испытать Бозе-эйнштейновскую конденсацию (БЭК) вследствие статистических свойств квантовой системы и симметрии волновой функции (ВФ) бозонного состояния. В частности, в физике конденсированных сред конденсат Бозе–Эйнштейна — это состояние вещества при некоторых условиях, в котором большая доля бозонов занимает самое низкое квантовое состояние (см., например, [6]). В этом состоянии микроскопические квантово-механические явления, особенно интерференция ВФ, становятся очевидными на макроскопическом уровне, и конденсат описывается ВФ, когерентной во всем объеме. Эффект БЭК ответственен за лазерное излучение, сверхтекучесть и сверхпроводимость. Поскольку физической основой БЭК является свойство симметрии ВФ [7], БЭК может проявляться в мультибозонных системах

¹⁾ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия.

* E-mail: VAOkorokhov@mephi.ru

при высоких плотностях частиц (n) и при конечных, в смысле квантовой теории поля (КТП), температурах (T), т.е. при $T \sim 0.1-0.2$ ГэВ [8]. Важной особенностью БЭК при высоких n и T является наличие конечной доли частиц, не принадлежащих конденсированному состоянию [7, 8]. Это отличает БЭК при высоких n и T от ситуации при малых T ($T \rightarrow 0$), которая, вероятно, вследствие наиболее известных макроскопических проявлений БЭК – сверхтекучесть и сверхпроводимость – считается стандартной и наблюдается, например, в экспериментах с ультрахолодными атомами [9]. Таким образом, система с произвольным числом бозонов может подвергнуться БЭК (а) или охлаждаясь, (б) или увеличивая плотность бозонов, (в) или увеличивая перекрытие волновых пакетов мультибозонных состояний, достигаемое с помощью изменения размера одночастичных волновых пакетов.

В реальных экспериментах как в физике конденсированных сред, так и в физике фундаментальных взаимодействий число частиц в системе на много порядков меньше макроскопических значений, для которых применим термодинамический предел. Например, в современных экспериментах с ультрахолодными атомами число частиц в состоянии конденсата Бозе–Эйнштейна $N_0 \lesssim 10^7$ [9]. Поэтому для реальных систем БЭК, строго говоря, не может рассматриваться как фазовый переход. Однако исследования показали, что поправка низшего порядка на эффект конечности размера системы убывает как $N^{-1/3}$ с ростом общего числа частиц в системе (N), и уже при $N = 10^3$ результат для N_0/N не отличим от точного решения, полученного суммированием по возбужденным состояниям гамильтониана осциллятора [9]. На основе численного моделирования было показано, что влияние эффекта конечного размера системы существенно только при $N \lesssim 10^4$ [10]. Диапазон значений $N \simeq 10^3-10^4$ соответствует полной множественности вторичных заряженных частиц в ядро-ядерных столкновениях при высоких энергиях.

В случае процессов множественного образования частиц механизмы (б) и (в) приводят к конденсации бозонов в то же самое квантовое состояние, что открывает возможность возникновения бозонного, в частности, пионного лазера [11–13]. Если система вторичных бозонов подвергается БЭК, т.е. присутствует эффект симметризации, то, как показано ниже (разд. 2), результирующая средняя множественность бозонов демонстрирует тенденцию к переходу в область очень больших, в общем случае, бесконечных значений [11]. В частности, для пуассоновского источника обнаружено значительное увеличение числа испускаемых бозонов (пионов) при наличии эффекта симметризации, по сравнению с тем, когда симметризация не учитывается [11]. Вследствие того что мода распада $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ составляет $\approx 99.99\%$ [14], эффект симметризации для пионов, т.е. эффект БЭК, может давать вклад в повышенный вы-

ход мюонов, обнаруженный в столкновениях частиц КЛУВЭ.

Поэтому исследование такой новой особенности адронных процессов при ультравысоких энергиях, как БЭК, представляется важным для лучшего понимания физики КЛУВЭ, и, в частности, это может быть одной из причин избыточного выхода мюонов при взаимодействиях частиц КЛУВЭ с ядрами в атмосфере [15].

2. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ БЭК В ЯДЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

В [16] было обосновано использование стандартной инвариантной переменной Мандельштама для нуклон-нуклонной/протон-протонной пары $s_{NN/pp} = 2m_{N/p}(E_{N/p} + m_{N/p})$ совместно с $E_{N/p}$ для исследования взаимодействий КЛУВЭ с ядрами, где $E_{N/p}$ и $m_{N/p}$ – энергия в л.с. и масса нуклона/протона [14]. Соотношение между s_{NN} и s_{pp} было подробно обсуждено в [1]. Детальный анализ [1, 15, 16] позволяет в качестве диапазона энергий для протонов, рассматриваемых в настоящей работе, выбрать $E_p = 10^{17}-10^{21}$ эВ, включая область энергий, соответствующую пределу Грейзена–Зацепина–Кузьмина (ГКЗ) [17], и несколько расширяя ее. Поэтому результаты данной работы могут быть полезными для физики КЛУВЭ и для экспериментов на коллайдерах [1, 15, 16].

Плотность заряженных частиц определяется следующим образом:

$$n_{ch} = N_{ch}/V, \quad (1)$$

где N_{ch} – полная множественность заряженных частиц, V – оценка для объема области эмиссии рассматриваемых бозонов (пионов). Критическое значение для n_{ch} ($n_{ch,c}$) может быть вычислено с помощью (1) и соответствующего перехода к критической полной множественности ($N_{ch,c}$) в данном соотношении.

Необходимо подчеркнуть, что параметры в правой части (1) модельно-зависимы и, следовательно, оценки для плотности заряженных частиц и для соответствующего критического значения, рассматриваемые ниже, также являются модельно-зависимыми.

В [18] было предложено уравнение для критического значения N_{ch} в трехмерном случае, основанное на модели для одномерного теплового гауссовского распределения [11]. Применение уравнения из [18] к диапазону энергий $E_p = 10^{17}-10^{21}$ эВ показало возможность БЭК, по крайней мере, для взаимодействий частиц КЛУВЭ с ядрами [1].

В данной работе на основе обобщенной модели пионного лазера для случая перекрывающихся волновых пакетов с полной n -частичной симметризацией [12, 13], для трехмерного случая предложено следующую

шее уравнение для $N_{ch,c}$:

$$N_{ch,c} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1 + X + \sqrt{X + 1}}{2} \right)^{3/2}, \quad (2)$$

$$X \equiv 2m_\pi T_{\text{eff}} R_{\text{eff}}^2, \quad T_{\text{eff}} = T + \frac{\Delta_p^2}{2m_\pi},$$

$$R_{\text{eff}}^2 = R_m^2 + \frac{1}{2\Delta_p^2} \frac{T}{T_{\text{eff}}}.$$

Здесь T_{eff} и R_{eff} – эффективные температура и радиус области эмиссии (источника), Δ_p – разброс значений импульса испущенных бозонов (пионов), в общем случае, зависящий от типа столкновения, $\eta = 0.25$ – доля пионов, испускаемых статическим гауссовским источником (частиц 1-го поколения) в единице быстроты [11], R_m – оценка размера (радиуса) источника, $T \approx T_{\text{ch}}$ – температура источника, предполагаемая равной значению этого параметра при химическом застывании [18].

В соответствии с [18] для различных процессов сильного взаимодействия ($p + p / A + A$) используется одинаковая аналитическая зависимость T_{ch} от начальной энергии, предложенная в [19]. На основании [11] в предыдущих работах [1, 18] было выбрано одно значение $\Delta_p = 0.250$ ГэВ для любых типов столкновений. Однако, в общем случае, можно ожидать несколько больший Δ_p для $A + A$ -столкновений, чем в $p + p$ -взаимодействиях вследствие влияния сильно взаимодействующего окружения. Таким образом, в рамках данного исследования используются эмпирические значения $\Delta_p = 0.250$ и 0.375 ГэВ для $p + p$ - и $A + A$ -столкновений соответственно. Более строгий выбор значений Δ_p для различных столкновений требует дополнительного рассмотрения для надежного обоснования.

В данной работе для параметризации энергетической зависимости средней полной множественности заряженных частиц в $p + p$ -столкновениях используются следующие две аналитические функции. Гибридная функция

$$\langle N_{\text{ch}}^{pp} \rangle = 1.60 - 0.03 \ln \varepsilon_{pp} + 0.18 \ln^2 \varepsilon_{pp} + 0.03 \varepsilon_{pp}^{0.29} \quad (3)$$

была выведена в рамках модели диссипирующей энергии участников (мДЭУ) [20] с $\varepsilon_{NN/pp} \equiv s_{NN/pp}/s_0$, $s_0 = 1$ ГэВ². Применение квантовой хромодинамики (КХД) в качестве модельно-независимого квантово-полевого основания теории сильных взаимодействий представляется важным для исследования процессов множественного образования частиц при ультравысоких энергиях, в частности, для особенностей столкновений частиц КЛУВЭ. В данном исследовании для полноты информации полученная на основе КХД аналитическая функция [21]

$$\langle N_{\text{ch}}^{pp} \rangle = \langle N_{ch,F} \rangle + N_0 \quad (4)$$

рассматривается как второй вариант параметризации для $p + p$, где N_0 – свободный, в общем случае, параметр с выбранным здесь значением $N_0 = 2.20 \pm 0.19$ [21] и $\langle N_{ch,F} \rangle$ – средняя множественность заряженных частиц в кварковой струе, образованной в e^+e^- -аннигиляции. Пертурбативная КХД (пКХД) позволяет получить в следующем–к следующему–к следующему–к лидирующему порядку (С³ЛП) теории возмущений (ТВ) аналитическое решение [22, 23] для $\langle N_{ch,F} \rangle$:

$$\langle N_{ch,F} \rangle = \frac{K_{\text{ЛАПД}}}{r_0} Y^{-a_1 c^2} \exp[2c\sqrt{Y} + \delta_F(Y)], \quad (5)$$

$$\delta_F(Y) = \frac{c}{\sqrt{Y}} \left[r_1 + 2a_2 c^2 + \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} (\ln 2Y + 2) \right] + \frac{c^2}{Y} \left[a_3 c^2 + \frac{r_1^2}{2} + r_2 - \frac{a_1 \beta_1}{2\beta_0^2} (\ln 2Y + 1) \right].$$

Здесь $K_{\text{ЛАПД}}$ – константа общей нормировки вследствие локальной адрон-партоновой дуальности (ЛАПД), $Y \equiv \ln(k_0 \sqrt{s_{pp}}/2\Lambda)$, $c = \sqrt{N_c/\pi\beta_0}$, N_c – количество цветов, β_i , $i = 0, 1$ – коэффициенты β -функции в $(i + 1)$ -петлевом приближении [14], $k_0 = 0.35 \pm 0.01$ [21], причем параметры $K_{\text{ЛАПД}}$, Λ и $\forall i: a_i, r_i$ зависят от числа активных ароматов кварков N_f . Их численные значения могут быть найдены в [23, 24].

Для $A + A$ -столкновений предполагается, что зависимость от начальной энергии полной множественности заряженных частиц параметризуется следующими двумя аналитическими функциями. Гибридная функция

$$\xi^{-1} \langle N_{\text{ch}}^{AA} \rangle = -0.577 + 0.394 \ln \varepsilon_{NN} + 0.213 \ln^2 \varepsilon_{NN} + 0.005 \varepsilon_{NN}^{0.55} \quad (6)$$

была выведена в рамках мДЭУ [20], так же как и формула (3) для $p + p$, где $2\xi = \langle N_{\text{part}} \rangle$ и N_{part} – число нуклонов-участников. Функция

$$\xi^{-1} \langle N_{\text{ch}}^{AA} \rangle = 1.962 + 0.512 \varepsilon_{NN}^{0.15} \ln \varepsilon_{NN} \quad (7)$$

является аппроксимацией данных, полученных на Коллайдере релятивистских тяжелых ионов (RHIC) и установке ALICE (Большой ионный коллайдерный эксперимент) на ЛНС в широкой области энергий вплоть до $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ [25]. Важно отметить, что функция (7) разумно описывает результаты для тяжелых ионов (Au + Au, Pb + Pb) и экспериментальные точки, полученные для Cu + Cu-столкновений, т.е. для взаимодействий средних ядер [25].

Количественные оценки V были получены методом из [1, 18, 26], а именно, с помощью экстраполяции результатов фемтоскопии пионов на область ультравысоких энергий. Как было подчеркнуто в [18], рассматриваемая феноменология позволяет оценить только верхнюю границу для истинного значения отношения $n_{ch}/n_{ch,c}$ с дополнительной неопределенностью $\sim 3\sqrt{\pi/2}$ вследствие различных определений

объема области эмиссии, используемых для оценки n_{ch} (цилиндроподобная форма источника) и для $n_{\text{ch},c}$ (сферически-симметричная форма источника). Детальный анализ этой проблемы приведен в [18], и вышеупомянутая особенность должна приниматься во внимание для всех результатов, обсуждаемых ниже в разд. 3 и 4.

Нормированные на единицу состояния системы с произвольным числом бозонов n могут быть записаны как

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = \left(\sum_{\tau^{(n)}} \prod_{k=1}^n \langle \alpha_k | \alpha_{\tau_k} \rangle \right)^{1/2} \alpha_n^+ \dots \alpha_1^+ |0\rangle.$$

Здесь

$$\alpha_i^+ = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(\pi\sigma_i)^{3/4}} \exp\left[-(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{0i})^2/2\sigma_i^2 - i\mathbf{x}_{0i}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{0i}) + i\omega(\mathbf{p})(t - t_{0i})\right] a_{\mathbf{p}}^+$$

оператор образования одночастичного волнового пакета в импульсном пространстве с центром, характеризуемым вектором \mathbf{x}_{0i} (\mathbf{p}_{0i}) в координатном (импульсном) пространстве, шириной σ_i в импульсном пространстве и временем образования t_i , $a_{\mathbf{p}}^+$ – оператор образования бозона (пиона) с импульсом \mathbf{p} , $\forall i = 1 - n : \alpha_i = (\mathbf{x}_{0i}, \mathbf{p}_{0i}, \sigma_i, t_{0i})$ соответствует одночастичному волновому пакету с указанным набором параметров, суммирование выполняется по набору $\tau^{(n)}$ всех перестановок индексов n -бозонного состояния $\{1, 2, \dots, n\}$ и τ_k обозначает индекс, замещающий индекс k , в некоторой фиксированной перестановке из $\tau^{(n)}$ [12]. В рамках обобщения модели пионного лазера на случай перекрывающихся волновых пакетов и предположения об увеличении вероятности испускания бозона при наличии вблизи другого источника (аналог индуцированного излучения) получено следующее выражение для матрицы плотности n -частичного бозонного состояния [12, 13]:

$$\rho_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{\mathcal{N}(n)} \prod_{i=1}^n \rho_1(\alpha_i) \left(\sum_{\tau^{(n)}} \prod_{k=1}^n \langle \alpha_k | \alpha_{\tau_k} \rangle \right), \quad (8)$$

где коэффициент $\mathcal{N}(n)$ определяется из условия нормировки матрицы плотности квантовой системы. Матрица плотности (8) соответствует гипотезе о том, что образование бозона имеет большую вероятность для состояния, уже заполненного другим бозоном, и описывает квантовую систему волновых пакетов с индуцированным излучением. Интенсивность этого индуцированного излучения, т.е. количество испущенных бозонов, контролируется степенью перекрытия одночастичных волновых пакетов – степенью симметризации ВФ n -частичного состояния. Превышение n -частичной матрицы плотности $\rho_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с учетом симметризации над соответствующей вели-

чиной при полностью несимметричной ВФ определяется как

$$\rho_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \frac{\mathcal{N}(n)}{\prod_{i=1}^n \rho_1(\alpha_i)} = \sum_{\tau^{(n)}} \prod_{k=1}^n \langle \alpha_k | \alpha_{\tau_k} \rangle. \quad (9)$$

Величина (9) варьируется от 1 для полностью несимметричного случая (полное отсутствие перекрытия волновых пакетов) до $n!$ при полной n -частичной симметризации [12, 13], т.е. испускании всех n -частиц в состояниях одинаковых волновых пакетов (полное перекрытие всех n одночастичных волновых пакетов). Таким образом, перекрытие волновых пакетов мультибозонных состояний может при определенных условиях приводить к БЭК и, как следствие, к значительному росту множественности вторичных частиц в случае n -частичной симметризации ВФ.

Влияние БЭК на множественность вторичных бозонов рассмотрено в [13], в частности, для случая распределения Пуассона для множественности. Указанное распределение со средним n_0 для случая, когда Бозе-эйнштейновские эффекты отсутствуют, может быть представлено в стандартном виде

$$\mathcal{P}_n^{(0)} = (n_0^n/n!) \exp(-n_0). \quad (10)$$

Тогда распределение вероятности для частного случая разряженного Бозе-газа, т.е. $X \gg 1$, с учетом БЭК описывается аналитической формулой [13]

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(0)} \left[1 + \frac{n(n-1) - n_0^2}{2(4X)^{3/2}} \right] \quad (11)$$

со средним значением [13]

$$n = n_0 \left[1 + \frac{n_0}{(2X)^{3/2}} \right]. \quad (12)$$

Видно, что относительное увеличение средней множественности вследствие влияния БЭК составляет $(\delta n)_{\text{БЭК}} = (n - n_0)/n_0 \propto X^{-3/2}$ как функция X для вышеупомянутого частного случая.

Можно отметить, что соотношения (11) и (12) были получены в [13] с использованием матрицы плотности, что является наиболее общей формой описания квантовых систем, лежащей в основе квантовой статистики, при этом какие-либо ограничения на кинематические параметры (4-импульс) частиц начального состояния отсутствовали. Все это позволяет предположить корректность (11) и (12) для изучаемой области ультравысоких начальных энергий соответственно для частного случая распределения Пуассона для множественности.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рис. 1 демонстрирует $\langle n_{\text{ch}}^{pp} \rangle$ и $n_{\text{ch},c}^{pp}$ в зависимости от энергетических параметров в $p + p$ -столкновениях.

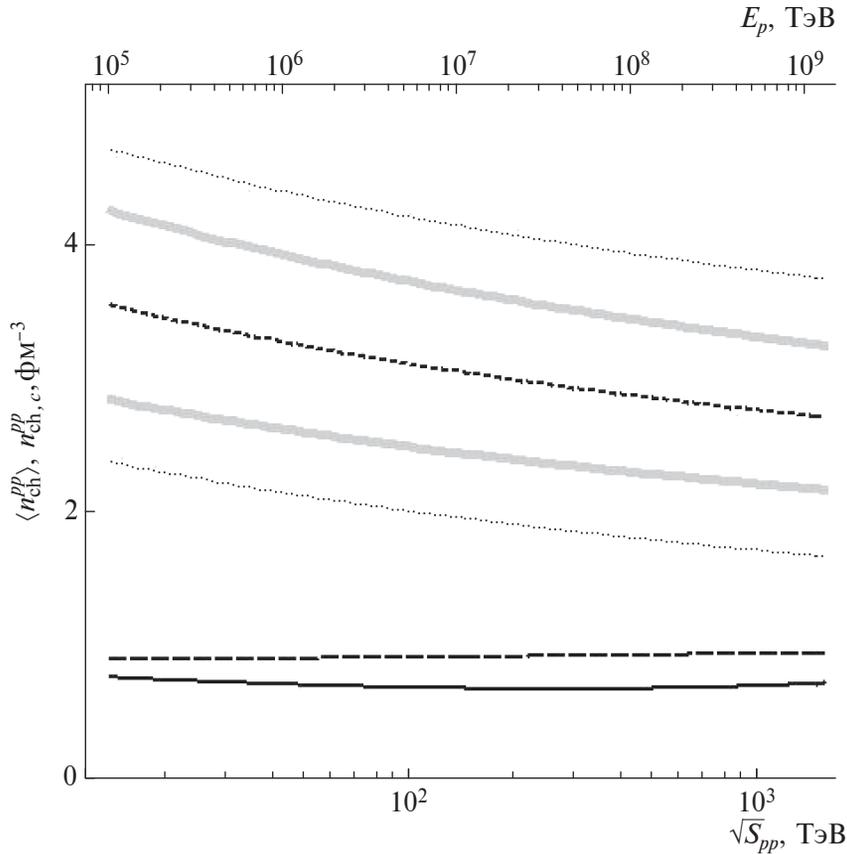


Рис. 1. Зависимость от энергии $\langle n_{ch} \rangle$ и критического параметра, вычисленного в рамках подхода из [12, 13], в $p + p$ -столкновениях. Сплошная кривая соответствует гибриднему приближению (3) для $\langle N_{ch}^{pp} \rangle$ и штриховая – основанной на КХД функции (4) с уравнением (5) в S^3 ЛП пКХД. Критическая плотность показана точечной кривой, тонкие точечные кривые – границы диапазона значений $n_{ch,c}$ с учетом статистических погрешностей. Толстые серые кривые соответствуют систематической неопределенности $\pm 1\sigma$ для критической плотности, вычисленной с помощью изменения η на ± 0.05 .

Здесь и в последующем для полноты информации показаны две оси абсцисс, а именно, нижняя ось – энергия столкновения в с.ц.м. для протон-протонной пары и верхняя ось – энергия налетающей частицы в л.с. Результат вычисления $\langle n_{ch}^{pp} \rangle(s_{pp})$ с помощью гибридной функции (3) для $\langle N_{ch}^{pp} \rangle$ показан сплошной линией, в то время как штриховая линия – для основанной на КХД функции (4) с $\langle N_{ch,F} \rangle$, оцененной (5) в S^3 ЛП пКХД. Оценка параметра $n_{ch,c}$ в рамках подхода из [12, 13] показана точечной кривой, диапазон значений с учетом статистической погрешности – тонкими точечными кривыми. Толстые серые кривые соответствуют систематической неопределенности $\pm 1\sigma$ для $n_{ch,c}$, вычисленной, изменяя η на ± 0.05 в (2). Величина n_{ch} в $p+p$ заметно меньше, чем его критическое значение при энергиях столкновения вплоть до $\sqrt{s_{pp}} \sim 1$ ПэВ для любых аналитических аппроксимаций для $\langle N_{ch}^{pp} \rangle$, которые здесь рассматриваются (рис. 1).

Оценки параметра $\langle n_{ch}^{pp} \rangle$, доступные на основе измерений, представлены в [18] и ограничены диапазоном $\sqrt{s_{pp}} \leq 7$ ТэВ, что существенно меньше нижней границы рассматриваемой области энергий $E_{min} = 10^{17}$ эВ $\longleftrightarrow \sqrt{s_{min}} \approx 13.7$ ТэВ [1]. На ЛНС уже по-

лучены данные для $p + p$ -столкновений при $\sqrt{s_{pp}} = 13$ и 13.6 ТэВ, что (очень) близко $\sqrt{s_{min}}$, однако для этих $\sqrt{s_{pp}}$ пока отсутствуют экспериментальные результаты, в частности, для геометрии области эмиссии вторичных пионов в трехмерном случае, а доступные данные одномерных анализов не позволяют оценить объем источника для реалистичной (цилиндроподобной) формы. Поэтому новые результаты ускорительных экспериментов для $\langle N_{ch}^{pp} \rangle$ и V в мульти-ТэВной области энергий важны для проверки и совершенствования предложенной в данной работе феноменологической модели. Ожидается получение данных при номинальном значении ЛНС $\sqrt{s_{pp}} = 14$ ТэВ. В более отдаленной перспективе реализация международных проектов высокоэнергетической моды ЛНС (HE–ЛНС) и Будущего кольцевого коллайдера с протонными и ионными пучками (FCC–hh), как ожидается, позволит получить данные с высокой статистической обеспеченностью для $p+p$ -столкновений при $\sqrt{s_{pp}} = 27$ ТэВ [27] и 100 ТэВ [28] соответственно.

Современная информация о массовом составе КЛУВЭ ограничена и характеризуется значительными погрешностями [5, 29, 30], что

обусловлено в основном неопределенностями в моделях адронных взаимодействий, используемых для описания широких атмосферных ливней [29]. Несмотря на то, что в некоторых случаях – определение массового состава первичных КЛУВЭ на основе измерения глубины максимального образования мюонов (X_{\max}^{μ}) – отдельные модели, а именно, EPOS–LHC, предсказывают вклад компонент с $4 < \langle \ln A \rangle \leq 8$ при $2 \times 10^{19} \leq E_p \leq 6 \times 10^{19}$ эВ [31], консенсус основной части доступных экспериментальных и феноменологических данных позволяет утверждать, что в рассматриваемой области энергий $E_p = 10^{17}–10^{21}$ эВ массовый состав КЛУВЭ практически полностью определяется компонентами вплоть до ядер $^{56}\text{Fe}^{26+}$ с учетом (больших) погрешностей, т.е. до ядер с $A \lesssim 60$ [5, 29, 30], где A – массовое число. С другой стороны, как было подчеркнuto при исследовании глобальных характеристик ядерных столкновений при ультравысоких энергиях [1], значения свободных параметров в (6), (7) для $A + A$ были получены, главным образом, для взаимодействий тяжелых²⁾ ионов и, как правило, для наиболее центральных таких столкновений. Поэтому, строго говоря, результаты, полученные в данной работе и рассмотренные ниже, соответствуют симметричным ($A + A$) ядерным столкновениям для тяжелых и средних до $^{64}\text{Cu}^{29+}$ ионов. Их применимость для легких ядер, которые являются основными компонентами КЛУВЭ, требует дополнительного обоснования и аккуратной проверки³⁾.

Принимая во внимание это обсуждение, плотности вторичных бозонов (пионов), $\langle n_{\text{ch}}^{AA} \rangle$ и $n_{\text{ch},c}^{AA}$, изучаются для симметричных ($A + A$) ядерных столкновений в области энергий, соответствующих КЛУВЭ. На рис. 2 показаны $\langle n_{\text{ch}}^{AA} \rangle$ и $n_{\text{ch},c}^{AA}$ в зависимости от энергетических параметров для $A + A$ -столкновений. Сплошная кривая соответствует гибриднему приближению (6) для $\langle N_{\text{ch}}^{AA} \rangle$, штриховая линия – для уравнения (7). Обозначения кривых для $n_{\text{ch},c}^{AA}$ идентичны использованным для $n_{\text{ch},c}^{pp}$ на рис. 1. Здесь и ниже для случая $A + A$ -столкновений значение ξ соответствует типу тяжелого иона ($^{208}\text{Pb}^{82+}$) для налетающей частицы из [25]. Количественное исследование, основанное на доступных измерениях для более легких ядер, находится в стадии выполнения. Величина $\langle n_{\text{ch}}^{AA} \rangle$ больше, чем критическое значение для плотности заряженных частиц в $A + A$ -столкновениях при любых рассматриваемых энергиях ($E_N \geq 10^{17}$ эВ) для

²⁾ Данный термин используется применительно ко всей периодической системе элементов и в смысле, соответствующем современной ускорительной физике, т.е. под тяжелыми подразумеваются ядра с $A \gtrsim 200$, например, как было указано в пояснении к (7), $^{197}\text{Au}^{79+}$, $^{207}\text{Pb}^{82+}$ и т.д.

³⁾ Самое легкое ядро, учитываемое, например, аналитической функцией (7), близко к самому тяжелому компоненту КЛУВЭ. Это можно рассматривать как косвенное подтверждение применимости данного исследования к КЛУВЭ, по крайней мере, на качественном уровне.

обоих уравнений (6) и (7), используемых для аппроксимации $\langle N_{\text{ch}}^{AA} \rangle(s_{NN})$, если учитывать только среднюю кривую для $\langle n_{\text{ch},c}^{AA} \rangle$ на рис. 2. Поскольку ядерные столкновения допускают лазероподобный режим для многочастичного образования при ультравысоких энергиях, было изучено возможное влияние БЭК на мультипионное конечное состояние в частном случае распределения Пуассона для области энергий, соответствующих столкновениям частиц КЛУВЭ с атмосферой.

Оценки параметра $\langle n_{\text{ch}}^{AA} \rangle$, доступные на основе измерений, представлены в [18] и ограничены диапазоном $\sqrt{s_{NN}} \leq 2.76$ ТэВ, что существенно меньше $\sqrt{s_{\text{min}}}$. Для полноты информации на рис. 2 (врезка) показано $\langle n_{\text{ch}}^{AA} \rangle$ при $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ [18] в сравнении, в том числе, с кривыми для $n_{\text{ch},c}^{AA}(s_{NN})$, полученными в данной работе. Оценка $\langle n_{\text{ch}}^{AA} \rangle$ при $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ находится (очень) близко к нижней границе диапазона

$$[n_{\text{ch},c}^{AA} - \Delta_{\text{стат}} n_{\text{ch},c}^{AA}; n_{\text{ch},c}^{AA} + \Delta_{\text{стат}} n_{\text{ch},c}^{AA}],$$

$\Delta_{\text{стат}} n_{\text{ch},c}^{AA}$ – статистическая погрешность $n_{\text{ch},c}^{AA}$, где возможно начало БЭК. Таким образом, в рамках обобщенной модели пионного лазера появление БЭК при $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ представляется маловероятным даже для столкновений тяжелых ($\text{Pb} + \text{Pb}$) ядер. Этот вывод хорошо согласуется с результатами поиска сигналов БЭК с помощью мультипионных корреляций в $\text{Pb} + \text{Pb}$ -взаимодействиях при $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ [32]. В отличие от $p + p$, для ядро-ядерных взаимодействий получение оценок для $\langle n_{\text{ch}}^{AA} \rangle$ на основе данных ускорительных экспериментов при рассматриваемых ультравысоких энергиях можно ожидать только в отдаленной перспективе при реализации проекта FCC–hh для ионных пучков⁴⁾, в рамках которого, в частности, планируется исследовать $\text{Pb} + \text{Pb}$ при $\sqrt{s_{NN}} = 39$ ТэВ [28].

В настоящей работе как первой стадии количественного исследования возможного влияния БЭК на множественность пионов при ультравысоких энергиях используется простое приближение с выбором некоторого постоянного X без учета зависимости данного параметра от энергии вследствие определения в (2). Рис. 3 демонстрирует энергетическую зависимость $\langle n_{\text{ch}} \rangle$ в симметричных ($A + A$) столкновениях тяжелых ионов с возможным эффектом БЭК при удовлетворении соответствующего условия, т.е. для области энергий с $\langle n_{\text{ch}}^{AA} \rangle > n_{\text{ch},c}^{AA}$. Влияние БЭК учитывается согласно (12), соответствующие кривые вычислены при $X = 5$. Из рис. 2 видно, что условие $\langle n_{\text{ch}}^{AA} \rangle > n_{\text{ch},c}^{AA}$ для начала БЭК справедливо для аппроксимации (6) даже при энергиях несколько меньше нижней границы $E_N = 10^{17}$ эВ рассматриваемо-

⁴⁾ В данной работе не рассматриваются сильно асимметричные $p + \text{Pb}$ -столкновения, для которых возможно достижение $\sqrt{s_{NN}} = 17$ ТэВ уже в рамках проекта HE–LHC [27].

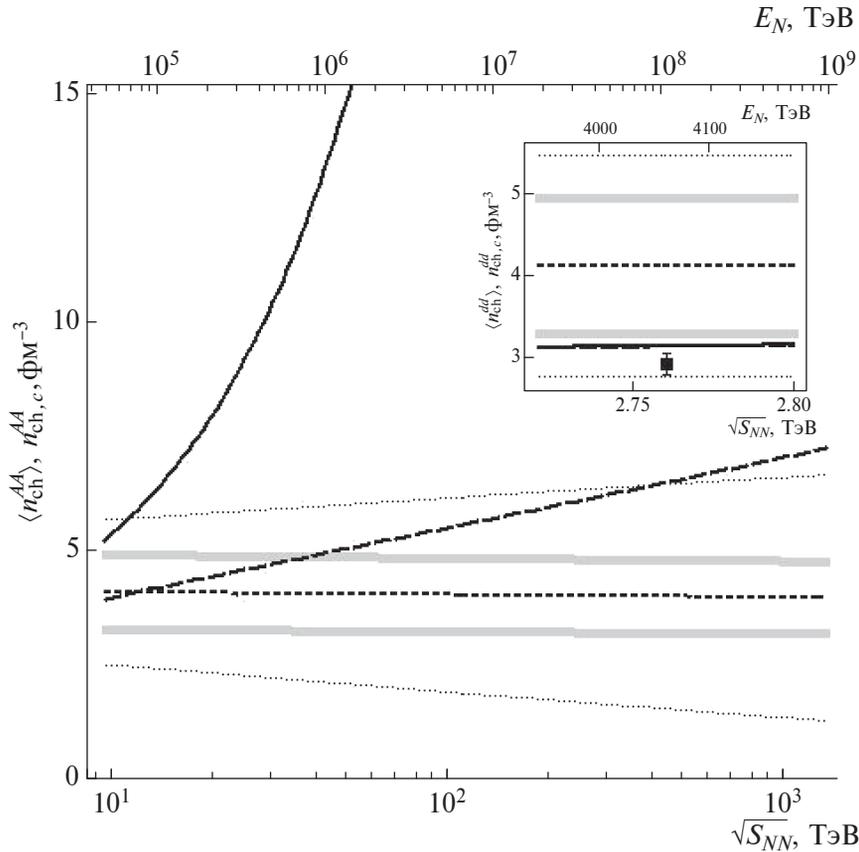


Рис. 2. Зависимость от энергии $\langle n_{ch} \rangle$ и критического параметра, вычисленного в рамках подхода из [12, 13], в симметричных $(A + A)$ столкновениях ионов. Сплошная кривая соответствует формуле (6) для $\langle N_{ch}^{AA} \rangle$ из гибридной модели и штриховая кривая – для уравнения (7). Обозначения кривых для $n_{ch,c}^{AA}$, те же, что и на рис. 1 для $n_{ch,c}^{pp}$. Врезка: точка – оценка для $\langle n_{ch}^{AA} \rangle$ при $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ [18] и расчетные кривые для узкого интервала $\sqrt{s_{NN}} = 2.72\text{--}2.80$ ТэВ вблизи этой точки.

го диапазона. Поэтому две кривые, а именно, с учетом (сплошная кривая) и без учета (тонкая сплошная кривая) возможного влияния БЭК вычислены для функции (6), чтобы явно показать изменение $\langle n_{ch}^{AA} \rangle$ вследствие БЭК в зависимости от параметра начальной энергии. Штриховая линия на рис. 3 соответствует уравнению (7). БЭК приводит к заметному увеличению плотности заряженных частиц даже при достаточно большом $X = 5$ для соответствующего диапазона энергии с $\langle n_{ch}^{AA} \rangle > n_{ch,c}^{AA}$. Кроме того, увеличение вследствие БЭК усиливается с ростом параметра энергии для процесса столкновения⁵.

В данной работе определены количественные характеристики

$$z_{\pi}^{(n)} = \frac{\ln \langle n_{ch,БЭК}^{AA} \rangle - \ln \langle n_{ch,0}^{pp} \rangle}{\ln \langle n_{ch,0}^{AA} \rangle - \ln \langle n_{ch,0}^{pp} \rangle}, \quad (13)$$

$$\Delta z_{\pi}^{(n)} = z_{\pi}^{(n)} - 1. \quad (14)$$

⁵Резкое поведение зависимости $\langle n_{ch}^{AA} \rangle$ от энергии, в частности, для функции (7) на рис. 3 на качественном уровне обсуждается в [15]. Точная форма кривой $\langle n_{ch}^{AA} \rangle(s_{NN})$ или от E_N в области энергий с $\langle n_{ch}^{AA} \rangle \approx n_{ch,c}^{AA}$ является предметом дополнительного исследования.

Здесь $\langle n_{ch,БЭК}^{AA/pp} \rangle$ – средняя плотность заряженных частиц (пионов) с учетом возможной Бозе-Эйнштейновской конденсации в области пространства (кинематических) параметров со средней плотностью больше критической ($\langle n_{ch} \rangle > n_{ch,c}$) в $A + A$ - или $p + p$ -столкновениях соответственно, $\langle n_{ch,0}^{AA/pp} \rangle$ – средняя плотность частиц в отсутствие эффекта БЭК для взаимодействия фиксированного типа. Параметры (13) и (14) применяются здесь для количественного исследования влияния БЭК на плотности вторичных заряженных пионов, и они являются аналогами соответствующих параметров, используемых в исследованиях избытка мюонов в столкновениях частиц КЛУВЭ с атмосферой [3, 4].

На рис. 4 представлены $z_{\pi}^{(n)}(a, b)$ и $\Delta z_{\pi}^{(n)}(v, z)$ в зависимости от начальных энергий в с.ц.м. и л.с. Параметры (13) и (14) вычислены для заряженных пионов с помощью соответствующих n_{ch} . В случае симметричных $(A + A)$ ядро-ядерных столкновений для частей (a, v) используется функция (6) для средней полной множественности $\langle N_{ch}^{AA} \rangle$, в то время как аналитическая функция (7) используется для частей (b, z). В каждой части рис. 4 сплошные кривые соответ-

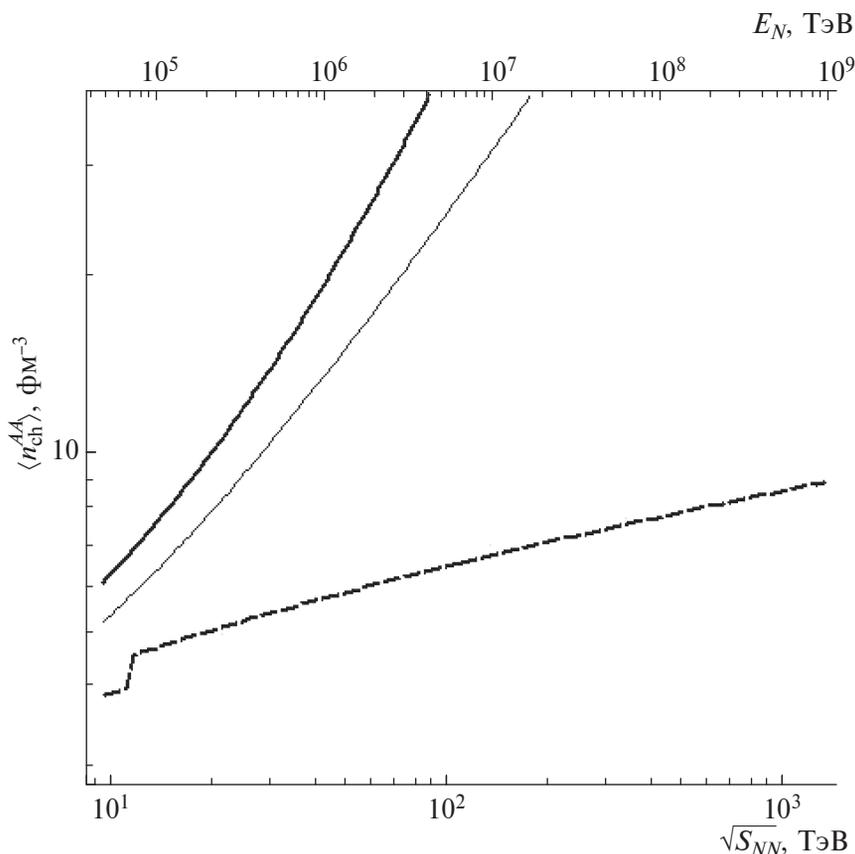


Рис. 3. Энергетическая зависимость $\langle n_{ch} \rangle$ для симметричных $(A + A)$ столкновений тяжелых ионов. Возможный эффект Бозе-эйнштейновской конденсации учитывается в соответствии с (12) при $X = 5$ для области энергий, в которой $\langle n_{ch}^{AA} \rangle > n_{ch,c}^{AA}$. Сплошная кривая соответствует формуле (6) для $\langle N_{ch}^{AA} \rangle$, причем для полноты информации тонкой сплошной кривой показан случай отсутствия БЭК. Штриховая кривая – для уравнения (7).

ствуют уравнению (3) для $\langle N_{ch}^{pp} \rangle$, штриховые – уравнению (4). Эффект БЭК учитывается в соответствии с (12) для области энергий с $\langle n_{ch}^{AA} \rangle > n_{ch,c}^{AA}$. Верхняя пара кривых соответствует $X = 2$, нижние кривые для $X = 5$. Из рис. 4а, б видно, что кривые для $z_{\pi}^{(n)}$ в зависимости от энергии показывают, в общем, близкое поведение для различных параметризаций $\langle N_{ch} \rangle$ в $p + p$, особенно при большем X . Функциональное поведение $z_{\pi}^{(n)}(s_{NN})$ практически не зависит от X при любых комбинациях функций для $\langle N_{ch}^{AA} \rangle$ и $\langle N_{ch}^{pp} \rangle$ (рис. 4а, б). Наблюдается явное увеличение $z_{\pi}^{(n)}$ с ростом энергии в случае функции (6) для $\langle N_{ch}^{AA} \rangle$ (рис. 4а), тогда как зависимость $z_{\pi}^{(n)}$ от s_{NN} (E_N) практически отсутствует для аппроксимации (7), особенно при $X = 5$, в области энергий с присутствием эффекта БЭК (рис. 4б). Значения $z_{\pi}^{(n)}$ заметно больше для вычислений с $X = 2$ и уравнением (4) для $\langle N_{ch}^{pp} \rangle$, чем для уравнения (3) в любых рассмотренных случаях аналитической параметризации для энергетической зависимости $\langle N_{ch}^{AA} \rangle$. Это расхождение несколько более явно для функции (7) в области $E_N \gtrsim 10^{19}$ эВ (рис. 4б). Как ожидалось, особенности поведения $\Delta z_{\pi}^{(n)}$ в зависимости от энер-

гетических параметров (рис. 4в, г) такие же, как и описанные выше для $z_{\pi}^{(n)}$ при соответствующем X и выборе аппроксимирующих функций для $\langle N_{ch}^{AA/pp} \rangle$ вследствие соотношения (14) между этими параметрами.

Для получения оценок параметров $z_{\pi}^{(n)}$ (13) и $\Delta z_{\pi}^{(n)}$ (14) на основе измерений на ускорителях с высокой статистической обеспеченностью начальные энергии для соответствующих выборок данных для $p + p$ - и $A + A$ -столкновений должны совпадать или, по крайней мере, быть близки друг другу. Таким образом, на основании вышеизложенного получение экспериментальных результатов для рассматриваемой области ультравысоких энергий $E_p = 10^{17} - 10^{21}$ эВ можно ожидать только в достаточно отдаленной перспективе не ранее середины 2060-х гг. при выполнении заявленного графика реализации проекта FCC-hh [28]. Это дополнительно подчеркивает важность изучения взаимодействий частиц КЛУВЭ с ядрами для физики фундаментальных взаимодействий при энергиях, недостижимых в ускорительной физике в ближне- и среднесрочной перспективе.

Важно отметить, что $\Delta z_{\pi}^{(n)} > 0$ при любых рассматриваемых энергиях (рис. 4в, г) и выполненный

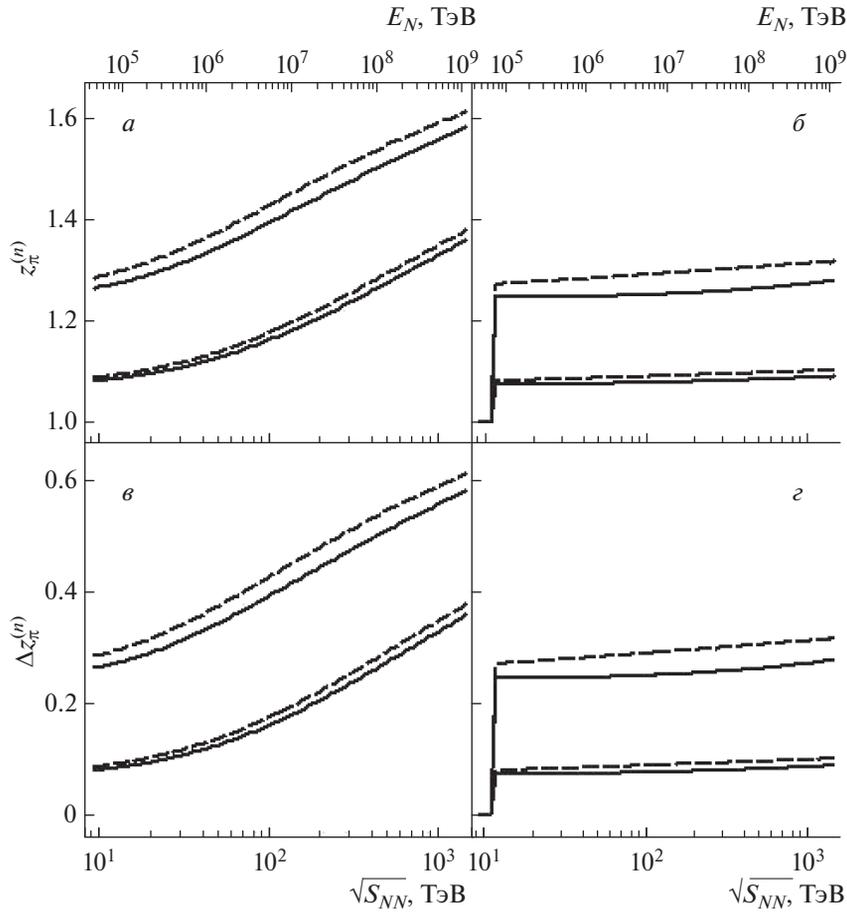


Рис. 4. Энергетические зависимости параметров $z_{\pi}^{(n)}$ (а, б) и $\Delta z_{\pi}^{(n)}$ (в, г), вычисленных для вторичных пионов с помощью $\langle n_{\text{ch}} \rangle$ для соответствующего $(p + p, A + A)$ взаимодействия. Уравнение (6) используется для $\langle N_{\text{ch}}^{AA} \rangle$ в случае симметричных $(A + A)$ столкновений ионов для (а, в), в то время как $\langle N_{\text{ch}}^{AA} \rangle$ аппроксимируется аналитической функцией (7) для (б, г). В каждой группе кривых, полученных в рамках предложенной модели, сплошные кривые соответствуют уравнению (3) для $\langle N_{\text{ch}}^{pp} \rangle$, штриховые линии – уравнению (4). При наличии, эффект БЭК учитывается в соответствии с (12) для области энергий с $\langle n_{\text{ch}} \rangle > n_{\text{ch},c}$ в столкновениях фиксированного типа. Верхняя пара кривых соответствует $X = 2$, нижняя – $X = 5$.

количественный анализ явно демонстрирует и подтверждает значительное увеличение средней плотности и, следовательно, средней полной множественности заряженных пионов в ядерных столкновениях при $E_N \geq 10^{17}$ эВ вследствие влияния БЭК. Очевидно, это утверждение сделано только с учетом средних кривых для соответствующих плотностей частиц в (13). Благодаря вышеупомянутым модам распадов π^{\pm} , параметры (13) и (14) могут быть непосредственно связаны с соответствующими характеристиками выхода мюонов как $z_{\pi}^{(n)} \approx z_{\mu}^{(n)}$ и $\Delta z_{\pi}^{(n)} \approx \Delta z_{\mu}^{(n)}$. Тогда диапазон $\Delta z_{\mu}^{(n)}$, оцененный в данной работе с помощью $\Delta z_{\pi}^{(n)}$ (рис. 4в, г), разумно согласуется по порядку величины с значениями соответствующего параметра, полученными в исследованиях мюонной загадки в КЛУВЭ, которые находятся, главным образом, в диапазоне $\Delta z \sim 0.2-1.0$ с учетом больших погрешностей [3, 4]. Это согласие значений наблюдается для любого выбора $\langle N_{\text{ch}}^{AA/pp} \rangle$, которые рассматриваются здесь, и для энергий $E_N \geq 10^{17}$ эВ. Явная за-

висимость Δz от энергии отсутствует вследствие больших погрешностей измерений [3, 4] с некоторым указанием на слабое увеличение Δz с ростом энергии. Зависимости $\Delta z_{\pi}^{(n)}$ от энергетических параметров, показанные на рис. 4в для $X = 2$ и 5, на качественном уровне ближе к общей тенденции в мюонных данных [3, 4], чем другие полученные кривые (рис. 4г). Таким образом, аппроксимация (6) для $\langle N_{\text{ch}}^{AA} \rangle$ представляет несколько более предпочтительной, чем (7) для соответствия доступным мюонным результатам для Δz из [3, 4]. Однако большие погрешности мюонных данных не позволяют однозначно исключить квазиневазисимое от энергии поведение Δz [3, 4]. Поэтому вышеупомянутое утверждение – только качественное, и для более строгого заключения представляется важным дальнейшее совершенствование как полученных феноменологических результатов, так и точности измерений выходов мюонов в КЛУВЭ.

На основании общих свойств процессов множественного образования частиц на качественном

уровне можно предположить, что БЭК приведет к большому количеству мягких пионов, и в возникающем избытке будут доминировать именно мягкие пионы. Следовательно, мюоны, появляющиеся вследствие распадов таких пионов, также будут мягкие. Эта качественная гипотеза предполагает, что эффект БЭК может привести к выходу мюонов, в частности, кинематические свойства которых существенно отличаются от соответствующих характеристик в случае распадов тяжелых частиц, в том числе (анти-)топ кварков [33]. Кроме того, исследования мюонной загадки в КЛУВЭ приводят в основном к требованию большого количества относительно мягких мюонов, и, по крайней мере, некоторые из этих работ рассматривают мягкий сектор физики сильных взаимодействий, например, различные схемы адронизации [4], как возможную область для объяснения мюонной загадки. Все это можно рассматривать как, по крайней мере, косвенный и качественный признак в пользу именно БЭК как возможного источника избытка мюонов при ультравысоких энергиях, а не распады тяжелых частиц, но без полного исключения последней гипотезы. Поэтому БЭК может быть одним из источников для мюонного избытка, особенно при наибольших энергиях и, следовательно, одним из возможных решений мюонной загадки в КЛУВЭ.

Имеется обширное поле для совершенствования феноменологической модели, предложенной в рамках данной работы, в частности, относительно пространственно-временной протяженности области эмиссии вторичных пионов, статистических свойств бозонной системы в конечном состоянии (лучший выбор типа распределения, приближения для описания Бозе-системы) и т.д. Работа в этом направлении находится в стадии выполнения. Однако необходимо отметить, что уже в рамках рассмотренной специфической, частной версии модели достигнуто вышеупомянутое качественное согласие для оценок $\Delta z_{\pi}^{(n)}$, обсужденных выше, и результатов, полученных для КЛУВЭ [3, 4]. Поэтому исследование возможного влияния БЭК на выход пионов при ультравысоких энергиях можно рассматривать как одно из перспективных направлений для лучшего понимания природы мюонной загадки в КЛУВЭ.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя изложенное выше, можно сделать следующие выводы.

Предложен феноменологический подход для количественного исследования влияния Бозе-эйнштейновской конденсации на плотность вторичных заряженных пионов в процессах множественного образования общего вида в широком диапазоне начальных энергий, в особенности для области ультравысоких энергий. Возможное влияние

БЭК вторичных пионов в рамках модели с полной n -частичной симметризацией было изучено, в частности, применительно к образованию мюонов в столкновениях частиц КЛУВЭ.

Результаты данной работы указывают на то, что гипотеза БЭК, соответствующая лазероподобной особенности в образовании пионов, представляется нереализуемой в $p + p$ -столкновениях вплоть до ультравысоких энергий в с.ц.м. $\mathcal{O}(1 \text{ ПэВ})$. Обнаружено влияние эффекта симметризации на множественность заряженных частиц в столкновениях идентичных пучков ($A + A$) тяжелых ионов для всех рассматриваемых энергий $E_N \geq 10^{17} \text{ эВ}$ и феноменологических моделей, используемых для аналитических аппроксимаций средних полных множественностей. Оба утверждения для $p + p$ и $A + A$ согласуются с предыдущей работой [1].

В данной работе введены в рассмотрение переменные $z_{\pi}^{(n)}$ и $\Delta z_{\pi}^{(n)}$, которые определены аналогичным способом как для параметров, используемых для исследования избытка мюонов в столкновениях частиц КЛУВЭ. Указанные переменные позволяют исследовать на количественном уровне различия между выходами заряженных пионов в случаях наличия или отсутствия БЭК. Для вторичных пионов рассмотрен частный случай распределения Пуассона по множественности, для которого были получены зависимости $z_{\pi}^{(n)}(s)$, $\Delta z_{\pi}^{(n)}(s)$ для различных соотношений между аналитическими аппроксимациями средних полных множественностей в $p + p$ - и $A + A$ -взаимодействиях. Поведение энергетических зависимостей $z_{\pi}^{(n)}$ и $\Delta z_{\pi}^{(n)}$ варьируется с изменением модели для средней полной множественности в $A + A$ -столкновениях. Оба параметра демонстрируют увеличение выхода пионов для случая присутствия БЭК, и амплитуда этого увеличения не противоречит, по крайней мере, на качественном уровне избытку мюонов, наблюдаемому в столкновениях частиц КЛУВЭ.

Таким образом, новая особенность многочастичных процессов – Бозе-эйнштейновская конденсация – могла бы, в общем случае, давать вклад в мюонный выход, регистрируемый в столкновениях частиц КЛУВЭ с атмосферой.

Работа была частично поддержана в рамках Программы “Приоритет 2030”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. A. Okorokov, Phys. At. Nucl. **82**, 838 (2019).
2. A. A. Petrukhin, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A **742**, 228 (2014).
3. H. P. Dembinski, J. C. Arteaga-Velazquez, L. Cazon, R. Conceicao, J. Gonzalez, Y. Itow, D. Ivanov, N. N. Kalmykov, I. Karpikov, S. Muller, T. Pierog, F. Riehn, M. Roth, T. Sako, D. Soldin, R. Takeishi, et al., EPJ Web Conf. **210**, 02004 (2019).

4. S. Baur, H. Dembinski, M. Perlin, T. Pierog, R. Ulrich, and K. Werner, *Phys. Rev. D* **107**, 094031 (2023).
5. A. Coleman, J. Eser, E. Mayotte, F. Saraziny, F. G. Schroder, D. Soldin, T. M. Venters, R. Aloisio, J. Alvarez-Muniz, R. Alves Batista, D. Bergman, M. Bertaina, L. Caccianiga, O. Deligny, H. P. Dembinski, P. B. Denton, *et al.*, *Astropart. Phys.* **149**, 102819 (2023).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов*, т. V, *Статистическая физика*, ч. 1 (Наука, Москва, 1976), с. 203; т. IX, *Статистическая физика*, ч. 2 (Наука, Москва, 1978), с. 124; K. Huang, *Statistical mechanics* (J. Wiley and Sons, N. J., 1987), с. 287.
7. Д. П. Зубарев. В сб.: *Физическая энциклопедия* (Большая российская энциклопедия, 1988), т. 1, с. 219.
8. D. Anchishkin, V. Gnatovsky, D. Zhuravel, V. Karpenko, I. Mishustin, and H. Stoecker, *Universe* **9**, 411 (2023).
9. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999); Y. Castin, *cond-mat/0105058*.
10. W. Ketterle and N. J. van Druten, *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).
11. S. Pratt, *Phys. Lett. B* **301**, 159 (1993).
12. T. Csorgo and J. Zimanyi, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 916 (1998).
13. J. Zimanyi and T. Csorgo, *Heavy Ion Phys.* **9**, 241 (1999).
14. R. L. Workman, V. D. Burkert, V. Crede, E. Klempt, U. Thoma, L. Tiator, K. Agashe, G. Aielli, B. C. Allanach, C. Amsler, M. Antonelli, E. C. Aschenauer, D. M. Asner, H. Baer, Sw. Banerjee, R. M. Barnett, *et al.* (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2022**, 083C01 (2022).
15. V. A. Okorokov, arXiv: 2309.06411 [hep-ph].
16. В. А. О कोरोков, *ЯФ* **81**, 481 (2018) [*Phys. At. Nucl.* **81**, 508 (2018)].
17. К. Greisen, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 748 (1966); Г. Т. Зацепин, В. А. Кузьмин, *Письма в ЖЭТФ* **4**, 114 (1966) [*JETP Lett.* **4**, 78 (1966)].
18. V. A. Okorokov, *Adv. High Energy Phys.* **2016**, 5972709 (2016).
19. J. Cleymans, H. Oeschler, K. Redlich, and S. Wheaton, *Phys. Rev. C* **73**, 034905 (2006).
20. E. K. G. Sarkisyan, A. N. Mishra, R. Sahoo, and A. S. Sakharov, *Phys. Rev. D* **93**, 054046 (2016).
21. J. F. Grosse-Oetringhaus and K. Reygers, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37**, 083001 (2010).
22. I. M. Dremin and J. W. Gary, *Phys. Lett. B* **459**, 341 (1999).
23. I. M. Dremin and J. W. Gary, *Phys. Rev.* **349**, 301 (2001).
24. A. Heister, S. Schael, R. Barate, R. Brunelière, I. De Bonis, D. Decamp, C. Goy, S. Jezequel, J.-P. Lees, F. Martin, E. Merle, M.-N. Minard, B. Pietrzyk, B. Trocme, S. Bravo, M. P. Casado, *et al.* (ALEPH Collab.), *Eur. Phys. J. C* **35**, 457 (2004).
25. E. Abbas, B. Abelev, J. Adam, D. Adamova, A. M. Adare, M. M. Aggarwal, G. Aglieri Rinella, M. Agnello, A. G. Agocs, A. Agostinelli, Z. Ahammed, A. Ahmad Masoodi, N. Ahmad, S. U. Ahn, S. A. Ahn, I. Aimo, *et al.* (ALICE Collab.), *Phys. Lett. B* **726**, 610 (2013).
26. V. A. Okorokov, *Adv. High Energy Phys.* **2015**, 790646 (2015).
27. A. Abada, M. Abbrescia, S. S. AbdusSalam, I. Abdyukhanov, J. Abelleira Fernandez, A. Abramov, M. Aburaia, A. O. Acar, P. R. Adzic, P. Agrawa, J. A. Aguilar-Saavedra, J. J. Aguilera-Verdugo, M. Aiba, I. Aichinger, G. Aielli, A. Akay, *et al.* (FCC Collab.), *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **228**, 1109 (2019).
28. A. Abada, M. Abbrescia, S. S. AbdusSalam, I. Abdyukhanov, J. Abelleira Fernandez, A. Abramov, M. Aburaia, A. O. Acar, P. R. Adzic, P. Agrawa, J. A. Aguilar-Saavedra, J. J. Aguilera-Verdugo, M. Aiba, I. Aichinger, G. Aielli, A. Akay, *et al.* (FCC Collab.), *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **228**, 755 (2019).
29. J. Blümer, R. Engel, and J. R. Hörandel, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **63**, 293 (2009).
30. P. Lipari, *Phys. Rev. D* **103**, 103009 (2021); N. Arsene, *Universe* **7**, 321 (2021).
31. A. Aab, P. Abreu, M. Aglietta, M. Ahlers, E. J. Ahn, I. Al Samarai, I. F. M. Albuquerque, I. Allekotte, J. Allen, P. Allison, A. Almela, J. Alvarez Castillo, J. Alvarez-Muniz, R. Alves Batista, M. Ambrosio, A. Aminaei, *et al.* (Pierre Auger Collab.), *Phys. Rev. D* **90**, 012012 (2014); *Phys. Rev. D* **90**, 039904 (Addendum) (2014); *Phys. Rev. D* **92**, 019903 (Erratum) (2015).
32. J. Adam, D. Adamova, M. M. Aggarwal, G. Aglieri Rinella, M. Agnello, N. Agrawal, Z. Ahammed, S. Ahmad, S. U. Ahn, S. Aiola, A. Akindinov, S. N. Alam, D. Aleksandrov, B. Alessandro, D. Alexandre, R. Alfaro Molina, *et al.* (ALICE Collab.), *Phys. Rev. C* **93**, 054908 (2016).
33. V. A. Okorokov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1690**, 012006 (2020); *Phys. At. Nucl.* **86**, 742 (2023).

**BOSE–EINSTEIN CONDENSATION AND MUON PRODUCTION
IN ULTRA-HIGH ENERGY COSMIC RAY PARTICLE COLLISIONS****V. A. Okorokov¹⁾***¹⁾National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia*

Collisions of cosmic ray particles with ultra-high initial energies with nuclei in the atmosphere open a wide room for appearing of the novel dynamical features for multiparticle production processes. In particular, the laser-like behavior of pions driven by Bose–Einstein condensation would result in the shift to larger multiplicities and, as consequence, could provide, in general, the enhanced yield of cosmic muons. In the present work the critical value of the space charged particle density for onset of Bose–Einstein condensation of the boson (pion) wave-packets into the same wave-packet state is estimated within the model with complete multiparticle symmetrization for the energy domain corresponding to the ultra-high energy cosmic rays (UHECR). Energy dependence of mean density of charged pions is evaluated for the cases of absence of the Bose–Einstein effects and for presence of laser-like behavior of pions. The possible influence of the Bose–Einstein condensation is discussed for the muon production in UHECR particle collisions with the atmosphere.