

ОПИСАНИЕ ЧЕТЫРЕХЧАСТИЧНЫХ РАСПАДОВ $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

© 2024 г. А. В. Данилина^{1),2),*}, Н. В. Никитин^{1),2),3),4),**}

Поступила в редакцию 02.10.2023 г.; после доработки 02.10.2023 г.; принята к публикации 25.10.2023 г.

В рамках Стандартной модели вычислены парциальные ширины, двойные и однократные дифференциальные распределения для четырехлептонных распадов $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$, где $q = \{d, s\}$. Учтены вклады излучения виртуального фотона легким q - и тяжелым b -кварками, тормозное излучение виртуального фотона заряженными лептонами в конечном состоянии, вклад "слабой аннигиляции" и вклад широких векторных $c\bar{c}$ -резонансов. Вклад узких J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансов исключен. Излучение виртуального фотона легким кварком $\bar{B}_q$ -мезона описано при помощи модели доминантности векторных мезонов, в рамках которой принимались во внимание только вклады легчайших векторных мезонов, включающих в свой состав $q\bar{q}$ -пары. Для $\bar{B}_s$ -мезона это $\phi(1020)$ -резонанс. Для $\bar{B}_d$ -мезона учитывались вклады $\rho^0(770)$ - и $\omega(782)$ -резонансов. В настоящей работе рассмотрены две возможности. Первая, когда вклады узких $\phi(1020)$ - и $\omega(782)$ -мезонов исключены из парциальных ширин соответствующих распадов. Вторая, когда вклады узких резонансов учтены в парциальных ширинах. Отдельно изучен вопрос о влиянии вычитательной процедуры на величину парциальных ширин распадов $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$.

DOI: 10.31857/S0044002724030133, EDN: IVZANQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование четырехлептонных распадов нейтральных $\bar{B}_{d,s}$ -мезонов позволяет проверить предсказания Стандартной модели (СМ) в высших порядках теории возмущений для процессов с экстремально малыми парциальными ширинами $< 10^{-9}$ и на фоне подавленной "стандартной физики" попытаться найти проявления физики за пределами СМ. Рассматриваемые в настоящей статье распады связаны с переходами b -кварка в d - или s -кварки. Такие переходы обусловлены так называемыми нейтральными токами, нарушающими аромат (FCNC), которые в рамках Стандартной модели запрещены на древесном уровне и возникают в высших порядках теории возмущений за счет петлевых диаграмм типа "пингвин" и "квадратик". В работе мы сконцентрируемся на предсказаниях для распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$, когда в конечном состоянии имеются две пары заряженных лептонов разного аромата. Для распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ будут приведены правдоподобные оценки. Заметим, что распады с тождественными лептонами в конечном состоянии менее информативны, чем распады с лептонами разного аромата. Например, в распадах $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ имеет смысл говорить о зарядовой лептонной асимметрии, "нулевая точка" которой, как хорошо известно, чрезвычайно чувстви-

тельна к расширениям СМ и слабо чувствительна к различным непертурбативным описаниям вклада от сильных взаимодействий [1, 2]. Измерение зарядовой лептонной асимметрии в распадах $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ не имеет смысла, поскольку принципиально невозможно различить тождественные мюоны, входящие в разные лептонные пары.

С экспериментальной точки зрения, наоборот, существенно проще выделить и реконструировать треки мюонов, чем электронов. Четыре мюонных трека, выходящие из одной вершины и попадающие в инвариантную массу $\bar{B}_q$ -мезона, эффективно исключают практически любые возможные фоновые события. Поэтому последние десять лет коллаборация LHCb публикует верхние пределы исключительно для процессов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ [3–5]. В настоящее время экспериментально установлены следующие верхние границы:

$$\begin{aligned} \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) &< 8.6 \times 10^{-10} \quad \text{на } 95\% \text{CL}; \\ \text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) &< 1.8 \times 10^{-10} \quad \text{на } 95\% \text{CL}. \end{aligned}$$

На текущий момент для парциальных ширин и других характеристик распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ и $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ существуют три теоретических предсказания [6–8] и одна правдоподобная теоретическая оценка [9].

¹⁾ Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

²⁾ Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт" — Курчатовский комплекс теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.

³⁾ Физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

⁴⁾ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия.

* E-mail: anna.danilina@cern.ch

** E-mail: Nikolai.Nikitine@cern.ch

В работе [6] даны первые теоретические предсказания для парциальных ширин распадов $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ и $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$. Предсказания были получены в предположении, что распады $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-(\mu^+\mu^-\mu^+\mu^-)$ сводятся к простому процессу $\bar{B}_s \rightarrow (\gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)(\gamma^* \rightarrow e^+e^-(\mu^+\mu^-))$, который можно домножить на фактор, отвечающий вкладу слабых и сильных взаимодействий. При этом адронные формфакторы были получены в рамках эффективной теории тяжелых кварков (HQET), которая, как известно, плохо применима для описания переходов $b \rightarrow s$ и совершенно неприменима при описании переходов $b \rightarrow d$. В результате всех вычислений в работе [6] были даны следующие теоретические предсказания:

$$\text{Br}_{\text{DS}}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-) = (0.91 \times 10^{-4}) \times \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \gamma\gamma) \approx 1.1 \times 10^{-10} \quad (1)$$

и

$$\text{Br}_{\text{DS}}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-) = (0.28 \times 10^{-4}) \times \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \gamma\gamma) \approx 0.3 \times 10^{-10}, \quad (2)$$

если $\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \gamma\gamma) = 1.23 \times 10^{-6}$ [10]. Поскольку $\alpha_{\text{em}}^2 \approx 0.5 \times 10^{-4}$, то предсказания (1) и (2) по порядку величины неплохо согласуются с наивной оценкой

$$\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \ell^+\ell^-\ell^+\ell^-) \sim \kappa \alpha_{\text{em}}^2 \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \gamma\gamma), \quad (3)$$

где в пределе нулевых масс электрона и мюона $\kappa = 2$ для конечного состояния $\mu^+\mu^-e^+e^-$ и $\kappa = 1/2$ для конечной конфигурации $\mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$. Значения κ можно получить из симметричных соображений. Авторы [6] предлагают иное соотношение:

$$\frac{1}{3} \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-) = \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-),$$

которое, по их мнению, вытекает из (1) и (2) и корректно учитывает различие масс электронов и мюонов.

Предсказания работы [6] не учитывают вклады от широких $c\bar{c}$ векторных резонансов, "хвосты" от узких J/ψ - и $\psi(2S)$ -мезонов, "слабую аннигиляцию", резонансный вклад промежуточного $\phi(1020)$ -мезона и ряд других процессов, которые были последовательно учтены в конференционном сообщении [7]. Наконец, в краткой заметке [8] философия работы [7] была распространена на четырехлептонные распады $\bar{B}_d$ -мезонов. В настоящей статье мы всесторонне обсудим идеи и предположения, которые привели к результатам [7, 8], но из-за недостатка места не были включены в эти два конференционных сообщения. Кроме того, представим новые результаты и рассмотрим возможность модификации формул работ [7, 8] при помощи вычитательной процедуры, на желательность применения которой впервые было указано в работе [11].

В статье [9] в пределе нулевых лептонных масс предложена оценка для парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ исходя из величины парциальной ширины распада $B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-$, которая была точно вычислена в этой же работе [9]. Для получения оценки использовалось предположение, что непертурбативные вклады от сильных взаимодействий для распадов $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ и $B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-$ совпадают по порядку величины, а основное различие между распадами возникает за счет слабых и электромагнитных взаимодействий. На основании этого предположения с учетом более корректного численного результата для $\text{Br}(B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-)$ из работы [12] можно получить следующую оценку парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ с учетом резонансного вклада от $\rho^0(770)$ - и $\omega(782)$ -мезонов:

$$\begin{aligned} \text{Br}_{\text{DNT}}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-) &\sim \frac{\tau_{B_d}}{2\tau_{B^-}} \left| \frac{\alpha_{\text{em}} C_{10A}}{2\pi} \right|^2 \times \\ &\times \frac{|V_{tb}V_{td}^*|^2}{|V_{ub}|^2} \left(\frac{M_{B_d}}{M_{B^-}} \right)^5 \text{Br}(B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-) \approx \\ &\approx 0.4 \times 10^{-11}, \quad (4) \end{aligned}$$

где $|C_{10A}| = 4.41$ — абсолютное значение коэффициента Вильсона из эффективного гамильтониана переходов $b \rightarrow (d, s)\ell^+\ell^-$ [13, 14], который задается формулой (8). Заметим, что для получения парциальной ширины распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ проведение аналогичной оценки не вполне корректно, поскольку вклад $\phi(1020)$ -резонанса существенно отличается от вкладов $\rho^0(770)$ - и $\omega(782)$ -резонансов. На этом предсказания и оценки для парциальных ширин распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$, которые предшествуют настоящей статье, исчерпываются.

Корректность оценки (4) можно независимо проверить при помощи другого подхода. Для этого будем рассматривать распад $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ как совокупность двух каскадных распадов $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-(\gamma^* \rightarrow e^+e^-)$ и $\bar{B}_d \rightarrow (\gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)e^+e^-$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Br}_{\text{MN}}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-) &\sim \alpha_{\text{em}} \left(\text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma) + \right. \\ &\left. + \text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow e^+e^-\gamma) \right) \approx 0.4 \times 10^{-11}, \quad (5) \end{aligned}$$

где численные значения $\text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \ell^+\ell^-\gamma)$ взяты из работ [15] и [16]. В этих работах при вычислении парциальных ширин распадов $\bar{B}_d \rightarrow \ell^+\ell^-\gamma$ учтен вклад $\rho^0(770)$ - и $\omega(782)$ -резонансов, но исключен вклад J/ψ - и $\psi(2S)$ -мезонов, как этого требует экспериментальная процедура [3–5]. Вклад от хвостов J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансов, широких $c\bar{c}$ -состояний и "слабой аннигиляции" учтен полностью. Мы видим, что оценки (4) и (5) совпадают друг с другом и задают порядок величины для парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$.

Теперь можем вернуться к оценке парциальной ширины распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Этот распад включает в себя нерезонансную часть, для которой приемлемой может считаться оценка (3), и резонансный вклад. Если исключить область J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансов, как это сделано в работах [3–5], то основной резонансный вклад будет происходить от распада $\bar{B}_s \rightarrow (\varphi(1020) \rightarrow \ell^+ \ell^-) \ell'^+ \ell'^-$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Br}_\varphi(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) &\sim \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \varphi \mu^+ \mu^-) \times \\ &\times (\text{Br}(\varphi \rightarrow e^+ e^-) + \text{Br}(\varphi \rightarrow \mu^+ \mu^-)) \approx \\ &\approx (4.5-5.3) \times 10^{-10}. \end{aligned} \quad (6)$$

Численные значения парциальных ширин, входящих в формулу (6), взяты из [17]. Практика показывает, что грубую оценку (6) можно рассматривать как нижнюю границу резонансного вклада. Для грубой оценки нижней границы парциальной ширины с учетом нерезонансного вклада и экспериментальных ограничений [3–5] на резонансный вклад используем выражение, аналогичное (5). Тогда

$$\begin{aligned} \text{Br}_{\text{MN}}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) &\sim \alpha_{\text{em}} (\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma) + \\ &+ \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow e^+ e^- \gamma)) \approx 3.2 \times 10^{-10}. \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнение (6) и (7) указывает на то, что подавляющий вклад в парциальную ширину распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ дает процесс с участием промежуточного $\varphi(1020)$ -резонанса. Отсюда следует, что представляет интерес отдельное рассмотрение предсказания для парциальной ширины с участием и без участия $\varphi(1020)$ -мезона. Тем более, что предсказания [5] приводятся без учета вклада $\varphi(1020)$ -резонанса. Для распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ по аналогии следует провести вычисления с учетом и без учета вклада узкого $\omega(782)$ -резонанса, что также согласуется с экспериментальным анализом [5].

Работа устроена следующим образом. Во Введении дается общий исторический обзор теоретического и экспериментального изучения четырехлептонных распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$, делаются простые оценки для парциальных ширин рассматриваемых распадов. В разд. 2 приводятся основные соглашения и выписываются фундаментальные и эффективные гамильтонианы процессов, которые дают вклад в распады $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Раздел 3 содержит подробное описание всех учитываемых в настоящей работе вкладов в амплитуду распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. В разд. 4 обсуждаются особенности амплитуды распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ по отношению к амплитуде распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Раздел 5 содержит численные предсказания для парциальных ширин распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ с учетом и без учета резонансного вклада. В разд. 6 приводятся различные дифференциальные распределения рассматриваемых распадов.

В заключении кратко изложены основные результаты работы. Три приложения содержат громоздкие формулы, необходимые для вычисления амплитуд и парциальных ширин распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$.

2. ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТониАН РАСПАДОВ $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Чтобы получить амплитуды четырехлептонных распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$, необходимо определить фундаментальные и эффективные гамильтонианы процессов, которые дают вклад в эти амплитуды. В настоящей работе примем, что вильсоновский коэффициент $C_2(M_W) = -1$ [13, 14], элементарный заряд $e = |e| > 0$ нормирован условием $e^2 = 4\pi\alpha_{\text{em}}$, где $\alpha_{\text{em}} \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры. Матрица γ^5 определена как $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ и $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$. Знак полностью антисимметричного тензора четвертого ранга фиксирован условием $\epsilon^{0123} = -1$. Выбор знака для $C_2(M_W)$ задает знаки для всех гамильтонианов, которые будут выписаны ниже.

В пренебрежении массой легкого кварка q эффективный гамильтониан FCNC-переходов $b \rightarrow q \ell^+ \ell^-$, где $q = \{d, s\}$ может быть записан в форме вильсоновского разложения [13, 14]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}}^{b \rightarrow q \ell^+ \ell^-}(x) &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_{\text{em}}}{2\pi} V_{tb} V_{tq}^* \left[-2im_b \frac{C_{7\gamma}(\mu)}{q^2} \times \right. \\ &\times \bar{d}(x) \sigma_{\mu\nu} q^\nu (1 + \gamma_5) b(x) \cdot \bar{\ell}(x) \gamma^\mu \ell(x) + C_{9V}(\mu) \times \\ &\times \bar{d}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b(x) \cdot \bar{\ell}(x) \gamma^\mu \ell(x) + C_{10A}(\mu) \times \\ &\times \bar{d}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b(x) \cdot \bar{\ell}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \ell(x) \left. \right] + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (8)$$

где G_F – постоянная Ферми, V_{tb} и V_{tq} – элементы матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы [17], q^ν – 4-импульс лептонной пары и $q^2 = q^\nu q_\nu$. Масштабный параметр $\mu \sim m_b \sim 5$ ГэВ разделяет пертурбативный и непертурбативный вклады от сильных взаимодействий. Пертурбативный вклад содержится в вильсоновских коэффициентах $C_{7\gamma}(\mu)$, $C_{9V}(\mu)$ и $C_{10A}(\mu)$. Непертурбативный вклад в основном возникает при вычислении матричных элементов гамильтониана (8) от кварковых токов между начальным и конечным адронными состояниями. В рамках СМ при $\mu_0 = 5$ ГэВ для вильсоновских коэффициентов можно получить следующие численные значения: $C_1(\mu_0) = 0.241$, $C_2(\mu_0) = -1.1$, $C_3(\mu_0) = -0.0104$, $C_4(\mu_0) = 0.02433$, $C_5(\mu_0) = -0.00706$, $C_6(\mu_0) = 0.0294$, $C_{7\gamma}(\mu_0) = 0.312$, $C_{9V}(\mu_0) = -4.21$ и $C_{10A}(\mu_0) = 4.41$ [1, 13, 14, 18].

В коэффициенте $C_{9V}(\mu)$ дополнительно необходимо учесть пертурбативный вклад от $c\bar{c}$ - и $u\bar{u}$ -пар и непертурбативный вклад от векторных резонансов, в кварковый состав которых входят рассматриваемые пары. Введем следующие обозначения; $\hat{s} = q^2/m_b^2$ и $\hat{m}_Q = m_Q/m_b$, где $Q = \{u, c\}$. Для записи дальнейших формул удобно доопределить $\hat{m}_b = 1$ и $\hat{m}_q \approx 0$, поскольку в (8) мы пренебрегли массой легкого квар-

ка q по сравнению с массой b -кварка. Наконец обозначим $\lambda_Q = \frac{V_{Qb}V_{Qq}^*}{V_{tb}V_{tq}^*}$. В силу унитарности матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы

$$\lambda_u + \lambda_c + 1 = 0.$$

Тогда в NLO-приближении вильсоновский коэффициент $C_{9V}(\mu)$ переходит в эффективный вильсоновский коэффициент $C_{9V}^{\text{eff}}(\mu, \hat{s})$ [14], который нужно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{9V}^{\text{eff}}(\mu, \hat{s}) = & \left(1 + \frac{\alpha_s(m_b)}{\pi} \omega(\hat{s})\right) C_{9V} - (3C_1 + C_2) \times \\ & \times \left(\lambda_u h(\hat{m}_u, \hat{s}) + \lambda_c h(\hat{m}_c, \hat{s})\right) + (3C_3 + C_4 + 3C_5 + C_6) \times \\ & \times \left(\frac{2}{9} + h(\hat{m}_c, \hat{s})\right) - \frac{1}{2} (4C_3 + 4C_4 + 3C_5 + C_6) \times \\ & \times h(\hat{m}_b, \hat{s}) - \frac{1}{2} (C_3 + 3C_4) h(\hat{m}_q, \hat{s}). \end{aligned} \quad (9)$$

Функции $\omega(\hat{s})$, $h(\hat{m}, \hat{s})$ и $h(0, \hat{s})$ можно найти в работах [14, 19, 20], $\alpha_s(\mu)$ — бегущая константа сильного взаимодействия, коэффициенты $C_i = C_i(\mu_0)$. Для учета вклада векторных резонансов воспользуемся подходом из работ [19, 20] и учтем коррекцию выражения для резонансного вклада, которая была выполнена в статье [15]. Тогда

$$\begin{aligned} h(\hat{m}_c, \hat{s}) \rightarrow H(\hat{m}_c, \hat{s}) = & h(\hat{m}_c, \hat{s}) - \\ & - \frac{3\pi}{\alpha_{\text{em}}^2} \sum_i \frac{q^2}{M_i^2} \frac{M_i \Gamma(V_i \rightarrow \ell^+ \ell^-)}{q^2 - M_i^2 + iM_i \Gamma_i}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} h(\hat{m}_u, \hat{s}) \rightarrow H(\hat{m}_u, \hat{s}) = & h(\hat{m}_u, \hat{s}) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3\pi}{\alpha_{\text{em}}^2} \sum_j \frac{q^2}{M_j^2} \frac{M_j \Gamma(V_j \rightarrow \ell^+ \ell^-)}{q^2 - M_j^2 + iM_j \Gamma_j}, \end{aligned}$$

где $i = \{J/\psi, \psi(2S), \psi(3770), \psi(4040), \psi(4160), \psi(4415)\}$, индекс $j = \{\rho^0(770), \omega(782)\}$. Изотопический фактор $1/\sqrt{2}$ отражает вклад $u\bar{u}$ -пары в волновые функции $\rho^0(770)$ - и $\omega(782)$ -мезонов. Численные значения остальных постоянных можно найти в [17].

Согласованный с выбором знака $C_2(M_W)$ гамильтониан электромагнитного взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{em}}(x) = & -|e| \sum_f Q_f \left(\bar{f}(x) \gamma^\mu f(x) \right) A_\mu(x) = \\ = & -j_{\text{em}}^\mu(x) A_\mu(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где $f(x)$ — поле фермиона аромата f , $A^\mu(x)$ — четырехпотенциал электромагнитного поля, Q_f — заряд фермиона аромата f в единицах $|e|$ и $j_{\text{em}}^\mu(x)$ — оператор электромагнитного фермионного тока.

Помимо вильсоновского коэффициента C_{9V}^{eff} векторные резонансы дают вклад непосредственно в ам-

плитуду распадов $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$, когда виртуальный фотон излучается легким кварком q . Для описания таких процессов будет использована модель доминантности векторных мезонов (VMD). Эффективный гамильтониан VMD имеет вид

$$\mathcal{H}_{\text{VMD}}(x) = -|e| \sum_i \frac{M_{V_i}^2}{f_{V_i}} V_i^\mu(x) A_\mu(x), \quad (12)$$

где $V_i^\mu(x)$ — поле нейтрального векторного мезона V_i и M_{V_i} — масса соответствующего мезона. Абсолютные величины констант взаимодействия f_{V_i} вычисляются из экспериментальных значений ширин распадов $V_i \rightarrow \ell^+ \ell^-$ в пределе $M_{V_i} \gg m_\ell$ согласно формуле

$$\Gamma(V_i \rightarrow \ell^+ \ell^-) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\alpha_{\text{em}}}{|f_{V_i}|} \right)^2 M_{V_i}. \quad (13)$$

Безразмерные константы f_{V_i} являются действительными числами, знак которых зависит от знака заряда кварков, входящих в векторный мезон V_i . Знак константы f_{V_i} можно найти, если использовать иное определение

$$\langle 0 | j_{\text{em}}^\mu(0) | V_i(M_{V_i}, k, \varepsilon) \rangle = |e| \varepsilon^\mu M_{V_i} f_{V_i}^{\text{em}}.$$

При помощи данного определения легко вычислить матричный элемент распада $V_i \rightarrow \ell^+ \ell^-$ и получить, что $f_{V_i}^{\text{em}} = M_{V_i}/f_{V_i}$. Безразмерные постоянные f_{V_i} использовались в наших работах [9] и [21], в то время как постоянным $f_{V_i}^{\text{em}}$ было отдано предпочтение в работах [7, 8, 12, 15] и [16]. В настоящей работе нам удобно использовать безразмерные постоянные f_{V_i} и гамильтониан VMD вида (12).

Эффективный гамильтониан, описывающий переходы $\bar{q}b \rightarrow \bar{Q}Q$ (так называемые процессы "слабой аннигиляции"), имеет вид

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}^{\bar{B}_q \rightarrow \bar{Q}Q} = & -\frac{G_F}{\sqrt{2}} a_1(\mu) V_{Qb} V_{Qq}^* \left(\bar{q}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b(x) \right) \times \\ & \times \left(\bar{Q}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) Q(x) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $a_1(\mu_0) = C_1(\mu_0) + C_2(\mu_0)/N_c \approx -0.13$ и N_c — число цветов [22].

3. ОПИСАНИЕ ВКЛАДОВ РАЗЛИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ В АМПЛИТУДУ РАСПАДА

$$\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$$

В настоящем разделе будут найдены вклады в амплитуду распада

$$\bar{B}_s(p, M_1) \rightarrow \mu^+(k_1) \mu^-(k_2) e^+(k_3) e^-(k_4)$$

от различных процессов, которые мы считаем ведущими. Учтены тормозное излучение, резонансный вклад от $\phi(1020)$ -мезона, нерезонансный вклад и "слабая аннигиляция". Специально подчеркнем,

что коэффициент $C_{9V}^{\text{eff}}(\dots)$, который задается формулой (9), содержит вклады от $\psi(3770)$ -, $\psi(4040)$ -, $\psi(4160)$ -, $\psi(4415)$ -, $\rho^0(770)$ - и $\omega(782)$ -резонансов. Согласно экспериментальной процедуре [3–5] мы сразу вырезаем ту часть кинематически разрешенной области, в которую дают основной вклад J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансы. Однако вклады ”хвостов” от этих резонансов учитываются в полной амплитуде.

Обозначим 4-импульс $\mu^+ \mu^-$ -пары как $q = k_1 + k_2$, 4-импульс $e^+ e^-$ -пары – как $k = k_3 + k_4$, а 4-импульс $\bar{B}_s$ -мезона – через $p = q + k$. Для дальнейших вычислений удобно воспользоваться безразмерными переменными

$$x_{12} = \frac{q^2}{M_1^2}, \quad x_{34} = \frac{k^2}{M_1^2}.$$

Практически во всех вычислениях настоящей работы мы считаем лептоны безмассовыми, т.е. полагаем, что $k_i^2 = 0$. Исключением будет только случай тормозного излучения, поскольку в безмассовом пределе тормозное излучение отсутствует.

3.1. Тормозное излучение

Рассмотрим тормозное излучение, когда виртуальный фотон испускается одним из лептонов в конечном состоянии. Такой процесс описывается четырьмя диаграммами рис. 1. Определим лептонную константу распада $\bar{B}_s$ -мезона f_{B_s} как

$$\langle 0 | \bar{s}(0) \gamma^\mu \gamma^5 b(0) | \bar{B}_s(M_1, p) \rangle = i f_{B_s} p^\mu. \quad (15)$$

Тогда амплитуда тормозного излучения $e^+ e^-$ -пары обоими мюонами в конечном состоянии имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(e)} = & \frac{\sqrt{2} G_F \alpha_{\text{em}}^2 V_{tb} V_{ts}^*}{M_1^2} \left[i d^{(PV)}(x_{34}, x_{134}, x_{234}) \times \right. \\ & \times q_\alpha \left(\bar{\mu}(k_2) \gamma^\mu \gamma^5 \mu(-k_1) \right) + f^{(TV)}(x_{34}, x_{134}, x_{234}) \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\beta \times \\ & \left. \times \left(\bar{\mu}(k_2) \gamma^\mu \gamma^\nu \mu(-k_1) \right) \right] \left(\bar{e}(k_4) \gamma^\alpha e(-k_3) \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Аналогичную формулу можно написать для амплитуды тормозного излучения $\mu^+ \mu^-$ -пары электроном и позитроном в конечном состоянии:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(\mu)} = & \frac{\sqrt{2} G_F \alpha_{\text{em}}^2 V_{tb} V_{ts}^*}{M_1^2} \left(\bar{\mu}(k_2) \gamma^\mu \mu(-k_1) \right) \times \\ & \times \left[i d^{(VP)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) k_\mu \left(\bar{e}(k_4) \gamma^5 e(-k_3) \right) + \right. \\ & \left. + f^{(VT)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\nu \left(\bar{e}(k_4) \gamma^\alpha \gamma^\beta e(-k_3) \right) \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Безразмерные функции $d^{(PV)}(\dots)$, $f^{(TV)}(\dots)$, $d^{(VP)}(\dots)$ и $f^{(VT)}(\dots)$ даны в Приложении А, формулы (A.1)–(A.4).

3.2. Нерезонансный вклад

Рассмотрим диаграмму, представленную на рис. 2. На этой диаграмме один из виртуальных фотонов излучается в FCNC-вершине и затем переходит в лептонную пару. Второй же виртуальный фотон напрямую излучается b -кварком $\bar{B}_s$ -мезона. Амплитуду такого процесса мы будем называть амплитудой нерезонансного вклада. Очевидно, что данная амплитуда не включает в себя весь нерезонансный вклад. Например, в рассматриваемую амплитуду не входит ”слабая аннигиляция” или вклад широких $c\bar{c}$ векторных мезонов. Эти вклады мы учитываем отдельно.

Для вычисления нерезонансного вклада определим следующие формфакторы [23] и [15, 16]:

$$\begin{aligned} \langle \gamma^*(q_2, \epsilon) | \bar{s}(0) \gamma_\xi \gamma^5 b(0) | \bar{B}_s(p) \rangle = & \\ = i e \epsilon^{*\eta} \left(g_{\xi\eta}(q_2 q_1) - q_{1\eta} q_{2\xi} \right) \frac{F_A(q_1^2, q_2^2)}{M_1}; \\ \langle \gamma^*(q_2, \epsilon) | \bar{s}(0) \gamma_\xi b(0) | \bar{B}_s(p) \rangle = & \\ = - e \epsilon^{*\eta} \epsilon_{\xi\eta q_2 q_1} \frac{F_V(q_1^2, q_2^2)}{M_1}; \quad (18) \\ \langle \gamma^*(q_2, \epsilon) | \bar{s}(0) \sigma_{\xi\nu} \gamma^5 b(0) | \bar{B}_s(p) \rangle q_1^\nu = & \\ = e \epsilon^{*\eta} \left(g_{\xi\eta}(q_2 q_1) - q_{1\eta} q_{2\xi} \right) F_{TA}(q_1^2, q_2^2); \\ \langle \gamma^*(q_2, \epsilon) | \bar{s}(0) \sigma_{\xi\nu} b(0) | \bar{B}_s(p) \rangle q_1^\nu = & \\ = - i e \epsilon^{*\eta} \epsilon_{\xi\eta q_2 q_1} F_{TV}(q_1^2, q_2^2). \end{aligned}$$

В формулах (18) $e = |e| > 0$, 4-импульс q_1 отвечает фотону, который излучается из FCNC-вершины, а 4-импульс q_2 -фотону, который излучается b -кварком и $p = q_1 + q_2$. В работе [15] была найдена следующая простая полюсная параметризация для формфакторов $F_i(q_1^2, q_2^2 = 0)$, где $i = \{V, A, TV, TA\}$:

$$F_i(q_1^2, q_2^2 = 0) = \frac{F_i(q_1^2 = 0, q_2^2 = 0)}{1 - q_1^2/M_{Ri}^2}. \quad (19)$$

При $i = \{V, TV\}$ параметр $M_{Ri} = M_{B_s^*}$, а при $i = \{A, TA\}$ аппроксимация хорошо работает с $M_{Ri} = M_{B_{s1}(5830)^0}$. При $q_2^2 \neq 0$ ближайший полюс, обусловленный электромагнитным током $\bar{b}(x) \gamma^\mu b(x)$, будет соответствовать вкладу $\Upsilon(1S)$ -резонанса, масса которого лежит далеко вне кинематически разрешенной области распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Тогда общая параметризация для формфакторов $F_i(q_1^2, q_2^2)$ имеет вид:

$$F_i(q_1^2, q_2^2) = \frac{F_i(q_1^2 = 0, q_2^2 = 0)}{\left(1 - q_1^2/M_{Ri}^2\right) \left(1 - q_2^2/M_{\Upsilon(1S)}^2\right)}. \quad (20)$$

При этом согласно [15] мы определяем формфакторы (20) с ошибкой порядка 10% по отношению к ”точному вычислению” в кварковой модели, что сравнимо с ошибкой, которую дает любой непертурбативный метод вычисления, как то: правила сумм, решеточные подходы или кварковые модели. Т.е. стремиться к большей точности вычисления формфакторов (20) не имеет смысла.

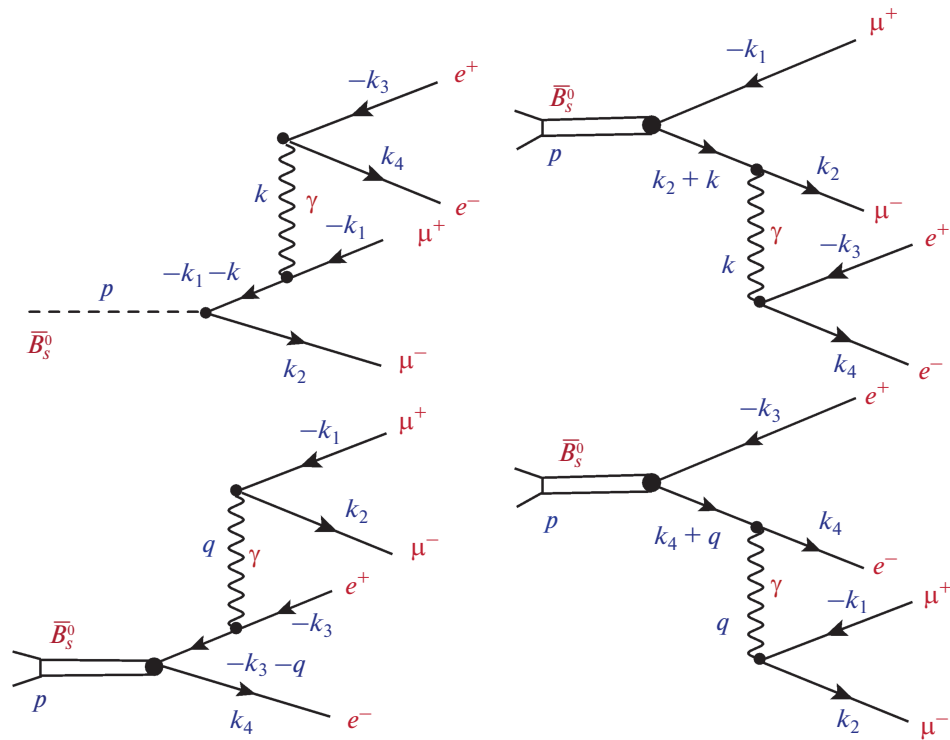


Рис. 1. Диаграммы, описывающие вклад тормозного излучения в распаде $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$.

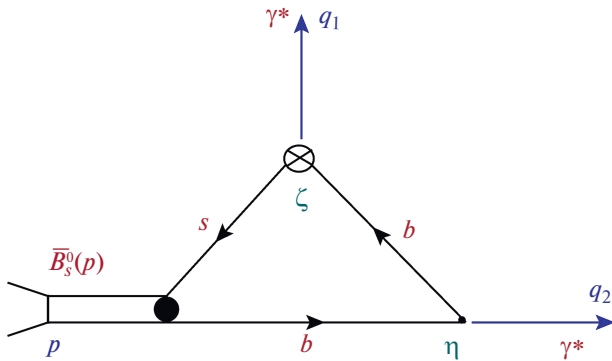


Рис. 2. Диаграмма, отвечающая излучению одного из двух виртуальных фотонов тяжелым кварком. Подобная диаграмма является основной частью нерезонансного вклада в распад $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Кругочек с крестиком внутри отвечает FCNC-вершине, которая соответствует эффективному гамильтониану (8).

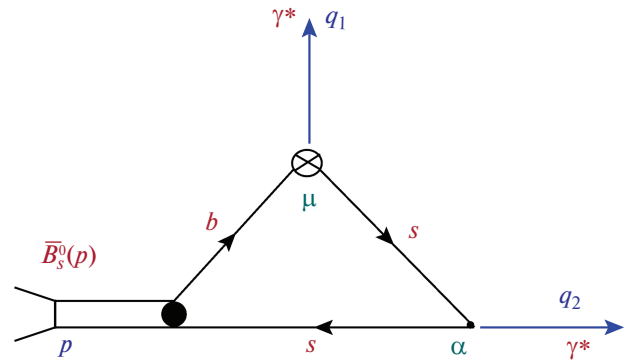


Рис. 3. Диаграмма, отвечающая излучению одного из двух виртуальных фотонов легким кварком. Подобная диаграмма определяет резонансный вклад в распад $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Кругочек с крестиком внутри отвечает FCNC-вершине, которая соответствует эффективному гамильтониану (8).

3.3. Резонансный вклад

Перейдем к диаграмме рис. 3. На этой диаграмме, как и на диаграмме рис. 2, один виртуальный фотон излучается в FCNC-вершине и переходит в лептонную пару. При этом второй виртуальный фотон излучается легким s -кварком $\bar{B}_s$ -мезона. Ближайший полюс, отвечающий матричному элементу от электромагнитного тока $\bar{s}(x)\gamma^\alpha s(x)$, в этом случае соответствует $\phi(1020)$ -мезону и лежит в кинематически разрешенной области распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$.

Поэтому для описания вклада диаграммы рис. 3 невозможно использовать матричные элементы вида (18) и простую полюсную параметризацию, аналогичную параметризации (20). Чтобы найти вклад диаграммы рис. 3, используем модель доминантности векторных мезонов. В рамках этой модели предполагается, что, излучая лептонную пару в FCNC-вершине, $\bar{B}_s$ -мезон переходит в $\phi(1020)$ -мезон за счет эффективного гамильтониана (8). Затем согласно VMD $\phi(1020)$ -мезон через промежуточный виртуальный фотон распадается на вторую лептон-

ную пару. Соответствующие диаграммы представлены на рис. 4. И этот резонансный процесс абсолютно доминирует над всеми другими процессами, которые связаны с диаграммой рис. 3. Т.е. мы пренебрегаем вкладами остальных $\bar{s}s$ векторных резонансов и нерезонансным вкладом. Определим формфакторы

$$\begin{aligned} \langle V(M_2, q, \varepsilon) | \bar{s}(0) \gamma_\mu b(0) | \bar{B}_s(p) \rangle &= \\ &= -\varepsilon^{*\alpha} \epsilon_{\mu\alpha qk} \frac{2V(k^2)}{M_1 + M_2}; \\ \langle V(M_2, q, \varepsilon) | \bar{s}(0) \gamma_\mu \gamma^5 b(0) | \bar{B}_s(p) \rangle &= \\ &= i\varepsilon^{*\alpha} \left[(M_1 + M_2) A_1(k^2) g_{\alpha\mu} - \frac{A_2(k^2)}{M_1 + M_2} P_\mu p_\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2M_2}{k^2} (A_3(k^2) - A_0(k^2)) k_\mu p_\alpha \right]; \\ \langle V(M_2, q, \varepsilon) | \bar{s}(0) \sigma_{\mu\nu} b(0) | \bar{B}_s(p) \rangle k^\nu &= \\ &= -i\varepsilon^{*\alpha} \epsilon_{\mu\alpha qk} 2T_1(k^2); \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle V(M_2, q, \varepsilon) | \bar{s}(0) \sigma_{\mu\nu} \gamma^5 b(0) | \bar{B}_s(p) \rangle k^\nu &= \varepsilon^{*\alpha} \times \\ \times \left[(Pk) T_2(k^2) g_{\alpha\mu} - 2k_\alpha q_\mu \left(T_2(k^2) + \frac{k^2}{(Pk)} T_3(k^2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + k_\alpha k_\mu \left(\frac{2(qk)}{(Pk)} T_3(k^2) - T_2(k^2) \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$A_3(k^2) = \frac{1}{2M_2} \left[(M_1 + M_2) A_1(k^2) - (M_1 - M_2) A_2(k^2) \right],$$

$k = p - q$ и $P = p + q = 2q + k$. В данной работе мы используем параметризацию формфакторов из (21), которая была получена при помощи дисперсионной формулировки кварковой модели [24]. Заметим, что слагаемые $\sim k_\mu$ и $\sim q_\alpha$ при свертке с лептонными токами исчезают из амплитуды резонансного вклада в пределе нулевых лептонных масс в силу сохранения векторного и аксиального лептонных токов в этом пределе. При ненулевых лептонных массах лептонный векторный ток по-прежнему сохраняется, а ненулевой вклад в амплитуду свертки с аксиальным лептонным током для электронов и мюонов сильно подавлен фактором m_ℓ/M_1 .

В рамках VMD-приближения для описания резонансного вклада при вычислении амплитуд распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ с формфакторами (21) следует выполнить замену

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha^*(q) &\rightarrow \frac{4\pi\alpha_{\text{em}}}{f_V} \frac{M_V^2}{q^2} \frac{1}{q^2 - M_V^2 + i\Gamma_V M_V} \times \\ &\times \left(\bar{\ell}(k_2) \gamma_\alpha \ell(-k_1) \right). \end{aligned}$$

В недавней работе [11] обсуждается необходимость применения вычитательной процедуры при записи амплитуды резонансного вклада для распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$. Аналогичную вычитательную процедуру можно провести и в нашем случае. При этом вычитательный член, который пропорционален $Q_{\bar{B}_s} f_{B_s}$, где $Q_{\bar{B}_s} = 0$ — заряд $\bar{B}_s$ -мезона и f_{B_s} — лептонная константа, определенная в (15), равен нулю. И, согласно [11], резонансный вклад в амплитуду распада $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ необходимо домножить только на безразмерный фактор q^2/M_V^2 . Вследствие подобного умножения для резонансного вклада в амплитуде исчезает полюсная зависимость при $q^2 \rightarrow 0$.

3.4. Суммарная амплитуда нерезонансного и резонансного вкладов

Применяя определения (8), (18) и (21) и используя VMD-приближение (12), можно в следующем виде записать суммарную амплитуду нерезонансного и резонансного вкладов:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(N+R)} &= \frac{\sqrt{2}G_F\alpha_{\text{em}}^2 V_{tb}V_{ts}^*}{M_1^2} \left\{ \left[-\frac{a^{(VV)}}{M_1} \epsilon_{\mu\alpha kq} - \right. \right. \\ &\quad \left. - ib^{(VV)} M_1 g_{\alpha\mu} + 2i \frac{c^{(VV)}}{M_1} q_\alpha k_\mu \right] j^\mu(k_2, k_1) J^\alpha(k_4, k_3) + \\ &\quad + \left[-\frac{a^{(VA)}}{M_1} \epsilon_{\mu\alpha kq} - ib^{(VA)} M_1 g_{\alpha\mu} + 2i \frac{c^{(VA)}}{M_1} q_\alpha k_\mu + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{g^{(VA)}}{M_1} k_\alpha k_\mu \right] j^\mu(k_2, k_1) J^{\alpha 5}(k_4, k_3) + \left[-\frac{a^{(AV)}}{M_1} \epsilon_{\mu\alpha kq} - \right. \\ &\quad \left. - ib^{(AV)} M_1 g_{\alpha\mu} + 2i \frac{c^{(AV)}}{M_1} q_\alpha k_\mu + i \frac{d^{(AV)}}{M_1} k_\alpha q_\mu \right] \times \\ &\quad \times j^{\mu 5}(k_2, k_1) J^\alpha(k_4, k_3) + \left[-\frac{a^{(AA)}}{M_1} \epsilon_{\mu\alpha kq} - ib^{(AA)} M_1 g_{\alpha\mu} + \right. \\ &\quad \left. + 2i \frac{c^{(AA)}}{M_1} q_\alpha k_\mu + i \frac{d^{(AA)}}{M_1} k_\alpha q_\mu + i \frac{g^{(AA)}}{M_1} k_\alpha k_\mu \right] \times \\ &\quad \left. \times j^{\mu 5}(k_2, k_1) J^{\alpha 5}(k_4, k_3) \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

где мы используем следующие соглашения для лептонных токов:

$$j^\mu(k_2, k_1) = \bar{\mu}(k_2) \gamma^\mu \mu(-k_1),$$

$$J^\alpha(k_4, k_3) = \bar{e}(k_4) \gamma^\alpha e(-k_3);$$

$$j^{\mu 5}(k_2, k_1) = \bar{\mu}(k_2) \gamma^\mu \gamma^5 \mu(-k_1),$$

$$J^{\alpha 5}(k_4, k_3) = \bar{e}(k_4) \gamma^\alpha \gamma^5 e(-k_3).$$

Вычисленные в рамках Стандартной модели безразмерные функции $a^{(IJ)} \equiv a^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$, $b^{(IJ)} \equiv b^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$, $c^{(IJ)} \equiv c^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$, $d^{(IJ)} \equiv d^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$ и $g^{(IJ)} \equiv g^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$, где $IJ =$

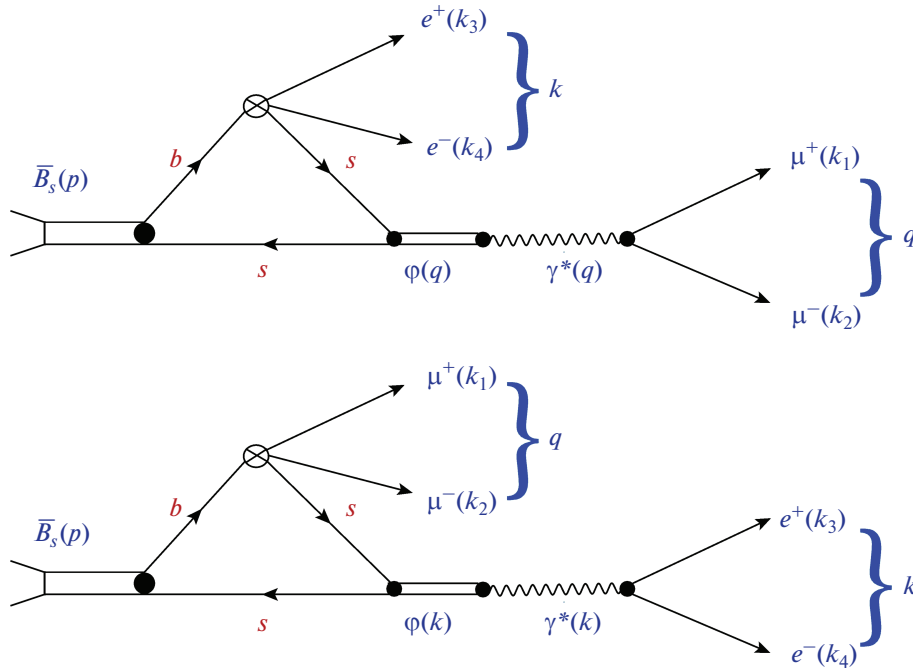


Рис. 4. Диаграммы, отвечающие резонансному вкладу $\bar{B}_s \rightarrow (\phi \rightarrow \ell^+ \ell^-) \ell^+ \ell^-$ от промежуточного $\phi(1020)$ -мезона в распад $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Кружочек с крестиком внутри соответствует FCNC-вершине, которая соответствует эффективному гамильтониану (8).

$= \{VV, VA, AV, AA\}$, определены в Приложении Б, формулы (Б.1) – (Б.16). В этих формулах суммирование производится только по $i = \{\phi(1020)\}$, изотопический фактор $I_\phi = \langle \phi(1020) | \bar{s}s \rangle = 1$.

3.5. Вклад процессов "слабой аннигиляции"

На рис. 5 показан еще один нерезонансный вклад, определяемый матричным элементом от гамильтониана (2). Это вклад так называемых процессов "слабой аннигиляции", которые обусловлены переходами $b\bar{s} \rightarrow \{u\bar{u}, c\bar{c}\}$. Вклад пропорционален дивергенции аксиального тока и является ничем иным, как аксиальной аномалией. Пренебрегая поправками порядка $(m_u/M_1)^2$ и $(m_c/M_1)^2$, получаем следующее выражение для амплитуды "слабой аннигиляции":

$$\mathcal{M}_{fi}^{(WA)} = \frac{\sqrt{2}G_F\alpha_{em}^2 V_{tb}V_{ts}^*}{M_1^2} \left(-\frac{\varepsilon_{\mu\alpha k q}}{M_1} \right) j^\mu(k_2, k_1) \times \\ \times J^\alpha(k_4, k_3) \left(-\frac{32}{3\pi} \right) \frac{1}{x_{12}x_{34}} \frac{V_{ub}V_{us}^* + V_{cb}V_{cs}^*}{V_{tb}V_{ts}^*} a_1(\mu) \hat{f}_{B_s}, \quad (23)$$

где $\hat{f}_{B_s} = f_{B_s}/M_1$. Из (23) следует, что вклад "слабой аннигиляции" необходимо учитывать только при малых значениях x_{12} или x_{34} . Но даже в этой области рассматриваемый вклад динамически подавлен по сравнению с нерезонансным вкладом из разд. 3.2 за счет малой величины вильсоновского коэффициента $a(\mu)$.

Из сравнения формул (22) и (23) видно, что для учета вклада "слабой аннигиляции" можно следующим образом переопределить коэффициент $a^{(VV)}(x_{12}, x_{34})$ из формулы (Б.1):

$$a^{(VV)}(x_{12}, x_{34}) \rightarrow a^{(VV)}(x_{12}, x_{34}) - \\ - \frac{32}{3\pi} \frac{1}{x_{12}x_{34}} \frac{V_{ub}V_{us}^* + V_{cb}V_{cs}^*}{V_{tb}V_{ts}^*} a_1(\mu) \hat{f}_{B_s}. \quad (24)$$

4. АМПЛИТУДА РАСПАДА $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Все вклады, кроме резонансного, в амплитуду распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ можно получить из соответствующих вкладов в амплитуду распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ простой заменой $s \rightarrow d$.

В отличие от распада $\bar{B}_s$ -мезона, резонансный вклад в распаде $\bar{B}_d$ -мезона определяется матричными элементами $\bar{d}(x)\gamma^\alpha d(x)$ - тока. Следуя логике модели доминантности векторных мезонов, мы считаем, что в FCNC-вершине $\bar{B}_d$ -мезон переходит в широкий $\rho^0(770)$ - или в узкий $\omega(782)$ -резонансы, как это показано на рис. 6. В рамках дисперсионной формулировки кварковой модели [24] вычислены только формфакторы (21) для $\bar{B} \rightarrow \rho$ -переходов. Формфакторы (21) для $B \rightarrow \omega$ -переходов принимаются теми же самыми. В формулах (Б.1)–(Б.16) суммирование происходит по $i = \{\rho^0(770), \omega(782)\}$, а изотопические факторы выбираются как $I_\rho = \langle \rho^0(770) | \bar{d}d \rangle = -1/\sqrt{2}$ и $I_\omega = \langle \omega(782) | \bar{d}d \rangle = +1/\sqrt{2}$ соответственно.

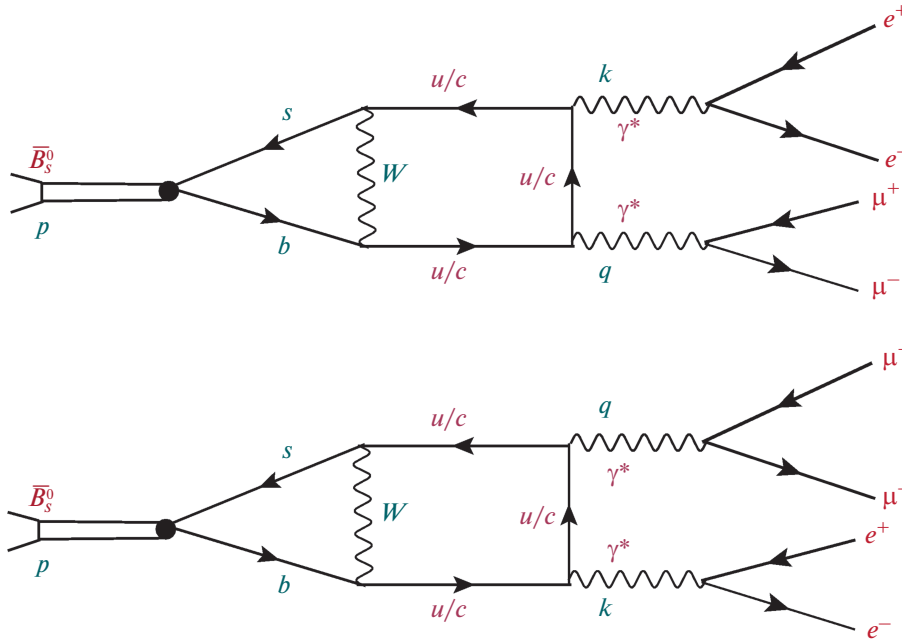


Рис. 5. Диаграммы, отвечающие вкладу "слабой аннигиляции" в распад $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРЦИАЛЬНОЙ ШИРИНЫ РАСПАДОВ $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Полная амплитуда распадов $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ может быть представлена в следующей форме:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(tot)} = \mathcal{M}_{fi}^{(e)} + \mathcal{M}_{fi}^{(\mu)} + \mathcal{M}_{fi}^{(N+R)} + \mathcal{M}_{fi}^{(WA)} = \frac{\sqrt{2} G_F \alpha_{em}^2 V_{tb} V_{tq}^*}{M_1^2} \sum_{\{L\}} L_{\mu\alpha} j^\mu J^\alpha, \quad (25)$$

где j^μ и J^α — лептонные токи, $L_{\dots}$ — различные лоренцовы структуры, которые описаны в формулах (16), (17), (22) и (23). Тогда выражение для парциальной ширины распадов $\bar{B}_q(p, M_1) \rightarrow \mu^+(k_1) \mu^-(k_2) e^+(k_3) e^-(k_4)$ имеет вид

$$\text{Br}(\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) = \frac{\tau_{B_q}}{2M_1} \times \int \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{fi}^{(tot)}|^2 \right) d\Phi_4 = \frac{G_F^2 \alpha_{em}^4 |V_{tb} V_{tq}^*|^2}{M_1^5} \tau_{B_q} \times \int \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \left| \sum_{\{L\}} L_{\mu\alpha} j^\mu J^\alpha \right|^2 \right) d\Phi_4, \quad (26)$$

где τ_{B_q} — время жизни $\bar{B}_q$ -мезона, а четырехчастичный фазовый объем $d\Phi_4$ определен в Приложении В, формула (В.4). Суммирование производится по проекциям спинов конечных лептонов s_1, s_2, s_3 и s_4 . Номер спина лептона соответствует номеру 4-импульса лептона.

Полное интегрирование выражения (26) по фазовому объему может быть проведено только численно. Для получения численных значений парциальных ширин нами применялся программный пакет EvtGen [25]. Чтобы использовать этот пакет, парциальные ширины распадов $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ необходимо записать в виде:

$$\text{Br}(\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx \frac{G_F^2 \alpha_{em}^4 |V_{tb} V_{tq}^*|^2}{M_1^5} \tau_{B_q} (M_1^6 |X|^2) \times \times \frac{N_0}{N_{\text{tot}}} \Phi_4(0) = \frac{\alpha_{em}^4 |V_{tb} V_{tq}^*|^2}{3 \cdot 2^{13} \cdot \pi^5} \tau_{B_q} G_F^2 M_1^5 |X|^2 \frac{N_0}{N_{\text{tot}}}, \quad (27)$$

где N_{tot} — полное число событий, разыгранных Монте-Карло-генератором EvtGen при помощи амплитуды (25); N_0 — число принятых событий; $|X|^2$ — максимальное значение безразмерной величины

$$\frac{\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \left| \sum_{\{L\}} L_{\mu\alpha} j^\mu J^\alpha \right|^2}{M_1^6}$$

и $\Phi_4(0) = \frac{M_1^4}{3 \cdot 2^{13} \cdot \pi^5}$ — значение четырехчастичного фазового объема при нулевых массах лептонов. Это значение хорошо совпадает с четырехчастичным фазовым объемом, если в конечном состоянии находятся только электроны и мюоны. Интегрирование происходит следующим образом. На первом этапе определяется значение $|X|^2$. Для этого проводится розыгрыш событий в районе предполагаемых максимумов матричного элемента. Затем выполняется Монте-Карло-интегрирование методами EvtGen

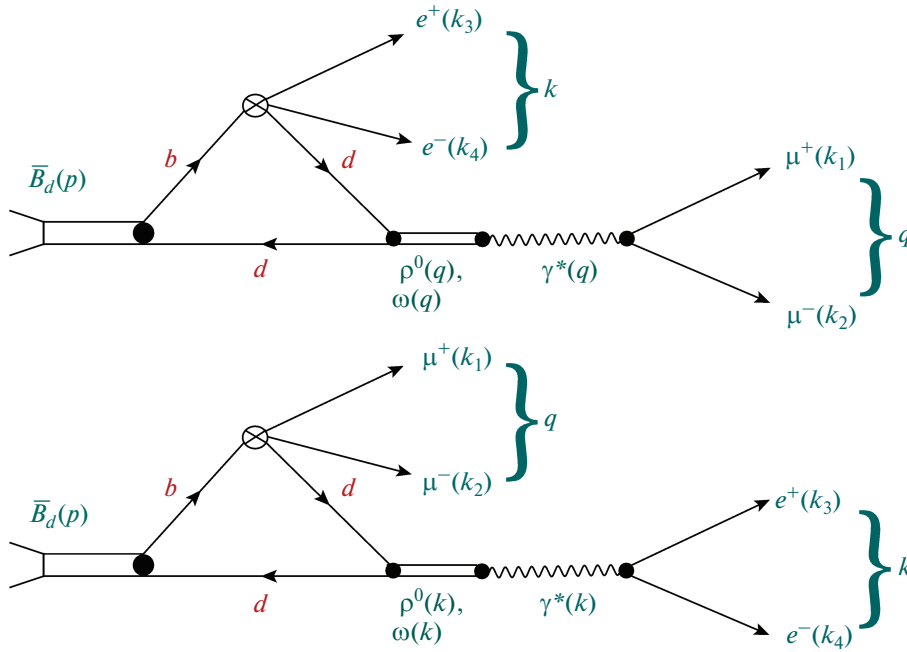


Рис. 6. Диаграммы, отвечающие резонансным вкладам $\bar{B}_d \rightarrow (\rho^0(770) \rightarrow \ell'^+ \ell'^-) \ell^+ \ell^-$ и $\bar{B}_d \rightarrow (\omega(782) \rightarrow \ell'^+ \ell'^-) \ell^+ \ell^-$ в распад $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Кругочек с крестиком внутри отвечает FCNC-вершине, которая соответствует эффективному гамильтониану (8).

при различных значениях N_{tot} , последовательно увеличивая полное число событий. Когда численное значение парциальной ширины, вычисленное при каждой последующей итерации, стабильно отличается от предыдущей итерации менее чем на 1%, процедура интегрирования прекращается. Заметим, что основная ошибка численного значения Br возникает от неточности вычисления адронных матричных элементов непертурбативными методами.

При вычислении парциальных ширин распадов $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ согласно экспериментальной процедуре [3–5] всегда исключаются области вокруг значений масс J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансов в соответствии с условием $|M_1 \sqrt{x_{ij}} - M_{\text{res}}| < 100$ МэВ, где $x_{ij} = \{x_{12}, x_{34}\}$. Дополнительно необходимо вести ограничения снизу на переменные x_{12} и x_{34} , поскольку в пределе нулевых лептонных масс парциальная ширина расходится из-за вклада фотонного полюса. Для переменной x_{12} существует естественное ограничение снизу $x_{12} \geq 4\hat{m}_\mu^2 \approx 0.0016$. Именно оно используется в настоящей работе. Для переменной x_{34} будет использоваться точно такое же ограничение снизу. Данное ограничение обусловлено тем, что в электромагнитном калориметре установки LHCb происходит отбор электронов и позитронов с поперечными импульсами $p_T > 200$ МэВ, что численно намного превосходит массу электрона и как раз порядка массы мюона. Таким образом, во всех дальнейших вычислениях настоящей статьи мы принимаем, что $x_{34} \geq 4\hat{m}_\mu^2$.

Начнем с численных значений парциальной ширины распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Без процедуры вычита-

ния, но с учетом вклада $\phi(1020)$ -резонанса, для парциальной ширины найдено значение

$$\text{Br}_R (\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (61 \pm 12) \times 10^{-10}. \quad (28)$$

Если же исключить вклад $\phi(1020)$ -резонанса согласно условию $|M_1 \sqrt{x_{ij}} - M_{\phi(1020)}| < 70$ МэВ (см. работу [5]), то получим, что

$$\text{Br} (\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (2.8 \pm 0.5) \times 10^{-10}. \quad (29)$$

На основе результата (29) можно оценить нерезонансную парциальную ширину распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$:

$$\begin{aligned} \text{Br} (\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) &\sim \frac{1}{2} \text{Br} (\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx \\ &\approx (1.4 \pm 0.3) \times 10^{-10}, \end{aligned} \quad (30)$$

что прекрасно согласуется с экспериментальным верхним пределом [5].

Заметим, что вычисленная на основе точной амплитуды (25) парциальная ширина распада с учетом резонансного вклада (28) практически на порядок превышает наивную оценку (7). Несколько меньшая разница возникает между нерезонансной оценкой (3) и точным нерезонансным результатом (29). При этом сравнение численных значений (28) и (29) полностью подтверждает качественный вывод, который был сделан во Введении: подавляющий вклад в парциальную ширину распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ дают процессы с участием промежуточного $\phi(1020)$ -мезона.

Учет вычитательной процедуры практически не меняет результат (28). В этом случае для парциаль-

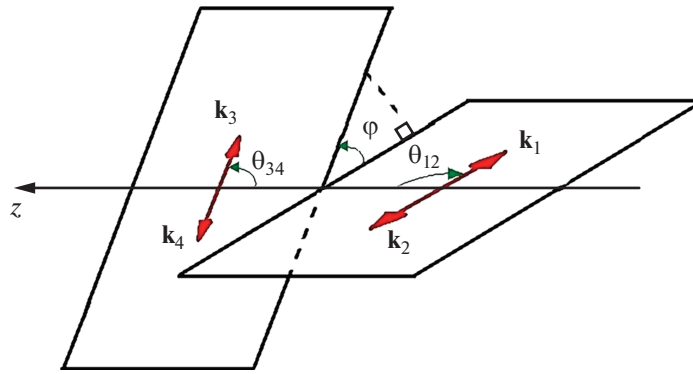


Рис. 7. Кинематика распада $\bar{B}_q(p, M_1) \rightarrow \mu^+(k_1) \mu^-(k_2) e^+(k_3) e^-(k_4)$. Угол θ_{12} определяется в системе покоя $\mu^+ \mu^-$ -пары, угол θ_{34} определяется в системе покоя $e^+ e^-$ -пары, а угол φ задается в системе покоя $\bar{B}_q$ -мезона. Ось z выбрана по направлению движения $\bar{B}_q$ -мезона в лабораторной системе координат.

ной ширины с учетом резонансного вклада $\varphi(1020)$ -мезона получается численное значение

$$\text{Br}_{R, \text{Sub}} (\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (58 \pm 11) \times 10^{-10}, \quad (31)$$

которое в пределах ошибок совпадает с (28). Нерезонансный вклад после выполнения вычитательной процедуры по сравнению с (29) уменьшается практически в 1.5 раза и составляет

$$\text{Br}_{\text{Sub}} (\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (1.6 \pm 0.2) \times 10^{-10}. \quad (32)$$

Отсюда можно оценить, что

$$\text{Br}_{\text{Sub}} (\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) \sim (0.8 \pm 0.1) \times 10^{-10}. \quad (33)$$

Обратимся теперь к вычислению парциальных ширин распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Как и для распада $\bar{B}_s$ -мезона, при получении парциальных ширин распада $\bar{B}_d$ -мезона исключается область J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансов согласно экспериментальной процедуре [3–5]. Ограничение снизу на переменные x_{12} и x_{34} составляет $4m_\mu^2$.

Начнем с результатов, которые были получены без использования вычитательной процедуры. Тогда с учетом вклада широкого $\rho^0(770)$ - и узкого $\omega(782)$ -резонансов возникает следующий численный результат:

$$\text{Br}_R (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (3.2 \pm 1.2) \times 10^{-11}, \quad (34)$$

который почти на порядок превосходит наивные оценки (4) и (5). Т.е. продолжается тенденция, которая уже была отмечена при обсуждении численных значений резонансных парциальных ширин в распаде $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Подобное расхождение между наивными оценками и точными вычислениями указывает на важность полного учета динамических характеристик распада, которые обусловлены вкладом от непертурбативной КХД. Теперь можно исключить вклад узкого $\omega(782)$ -резонанса согласно условию

$|M_1 \sqrt{x_{ij}} - M_{\omega(782)}| < 70 \text{ МэВ}$ [3–5]. Тогда получаем, что

$$\text{Br} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (1.1 \pm 0.3) \times 10^{-11}. \quad (35)$$

Отсюда

$$\text{Br} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) \sim (0.6 \pm 0.2) \times 10^{-11}. \quad (36)$$

Сравнение (34) и (35) показывает, что вклад $\omega(782)$ -резонанса в парциальную ширину распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ доминирует, но гораздо меньше, чем резонансный вклад от $\varphi(1020)$ -мезона в парциальную ширину распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. Поэтому можно предложить экспериментально искать распады $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ и $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$, не исключая при этом область $\omega(782)$ -резонанса.

Использование вычитательной процедуры приводит к следующим результатам:

$$\text{Br}_{R, \text{Sub}} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (3.1 \pm 1.2) \times 10^{-11}, \quad (37)$$

$$\text{Br}_{\text{Sub}} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (0.9 \pm 0.2) \times 10^{-11}. \quad (38)$$

Наконец,

$$\text{Br}_{\text{Sub}} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) \sim (0.5 \pm 0.2) \times 10^{-11}. \quad (39)$$

Сравнивая между собой нерезонансные численные значения (29) и (35) без проведения вычитательной процедуры или нерезонансные парциальные ширины (32) и (38) после проведения вычитательной процедуры, находим, что по порядку величины

$$\begin{aligned} \frac{\text{Br} (\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)}{\text{Br} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)} &\approx \\ &\approx \frac{\text{Br}_{\text{Sub}} (\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)}{\text{Br}_{\text{Sub}} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)} \sim \left| \frac{V_{ts}}{V_{td}} \right|^2 \approx 25. \end{aligned}$$

Данное равенство показывает согласованность численного интегрирования, проведенного при помощи пакета EvtGen.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В РАСПАДАХ $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$

Рассмотрим предсказания для различных дифференциальных распределений в распадах $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$. В данном разделе мы не используем вычитательную процедуру и всегда исключаем область вокруг J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансов согласно критериям отбора экспериментальных событий [3–5]. Вклад остальных резонансов учитывается во всех представленных ниже распределениях.

Прежде всего представляют интерес нормированные дифференциальные распределения по квадрату инвариантной массы $\mu^+\mu^-$ или e^+e^- -пары. Для распадов $\bar{B}_s$ -мезона такие распределения представлены на рис. 8а–8г, а для распадов $\bar{B}_d$ -мезонов – на рис. 9а–9г. По оси ординат выбран логарифмический масштаб, чтобы на рис. 8 и 9 помимо резонансного вклада и вклада фотонного полюса был виден нерезонансный вклад. Вырезы на распределениях рис. 8а, 8б, 9а и 9б соответствуют исключению вкладов вокруг J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансов. Полученные распределения по форме весьма похожи на аналогичные дифференциальные распределения для редких радиационных лептонных распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \gamma\ell^+\ell^-$ [15, 16, 21, 23, 26]. Несмотря на то, что парциальные ширины редких радиационных лептонных распадов на порядок больше, чем парциальные ширины редких четырехлептонных распадов $\bar{B}_{d,s}$ -мезонов, с экспериментальной точки зрения последние распады гораздо легче детектировать, особенно в четырехмюонной моде. Поэтому можно ожидать, что дифференциальные распределения для редких четырехлептонных распадов будут найдены гораздо раньше, чем аналогичные распределения для $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \gamma\ell^+\ell^-$ -распадов.

На рис. 10 показаны распределения по косинусу угла между направлением движения лептона ℓ^+ и нейтрального $\bar{B}_q$ -мезона в системе покоя $\ell^+\ell^-$ -пары. Подобные угловые распределения чувствительны к структуре эффективного гамильтониана (8) в гораздо большей степени, чем распределения по квадрату инвариантной массы лептонной пары. Угловые переменные y_{12} и y_{34} определены формулой (В.2). Из рис. 10 видно, что форма угловых распределений не чувствительна к тому, рассматривается распад $\bar{B}_s$ - или $\bar{B}_d$ -мезона, и слабо чувствительна к аромату лептона ℓ .

На рис. 11 представлены нормированные распределения по косинусу угла ϕ между плоскостями, которые образованы импульсами $\mu^+\mu^-$ и e^+e^- -пар в системе покоя $\bar{B}_q$ -мезона. Для безмассовых лептонов этот косинус определяется из уравнения (В.3). Из рис. 11 видно, что форма распределений по $\cos \phi$ для распадов $\bar{B}_s$ - и $\bar{B}_d$ -мезонов не отличается.

Таким образом, угловые распределения в четырехлептонных распадах $\bar{B}_s$ - и $\bar{B}_d$ -мезонов

практически не отличаются. С экспериментальной точки зрения лучше изучать такие распределения в распадах $\bar{B}_s$ -мезонов, поскольку даже нерезонансные парциальные ширины рассматриваемых распадов примерно в $|V_{ts}/V_{td}|^2 \sim 25$ раз больше, чем соответствующие нерезонансные парциальные ширины четырехлептонных распадов $\bar{B}_d$ -мезонов.

Хорошо известно, что формы угловых распределений и распределений по квадрату инвариантной массы лептонной пары чрезвычайно чувствительны к неопределенности в численных значениях адронных формфакторов [1, 2]. Гораздо меньшую чувствительность к адронным формфакторам демонстрирует зарядовая лептонная асимметрия, которая для $\mu^+\mu^-$ -пары определяется по формуле

$$A_{FB}^{(\bar{B}_q)}(x_{12}) = \left[\int_0^1 dy_{12} \frac{d^2 \text{Br}(\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12}dy_{12}} - \int_{-1}^0 dy_{12} \frac{d^2 \text{Br}(\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12}dy_{12}} \right] / \left[\frac{d\text{Br}(\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12}} \right], \quad (40)$$

а для e^+e^- -пары – по формуле

$$A_{FB}^{(\bar{B}_q)}(x_{34}) = \left[\int_0^1 dy_{34} \frac{d^2 \text{Br}(\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{34}dy_{34}} - \int_{-1}^0 dy_{34} \frac{d^2 \text{Br}(\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{34}dy_{34}} \right] / \left[\frac{d\text{Br}(\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{34}} \right]. \quad (41)$$

Стоит отметить, что в силу неразличимости тождественных частиц в квантовой механике невозможно построить зарядовые лептонные асимметрии в распадах $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$ и $\bar{B}_q \rightarrow e^+e^-e^+e^-$.

Различные зарядовые лептонные асимметрии для распадов $\bar{B}_s$ -мезона представлены на рис. 12а и 12б, а для $\bar{B}_d$ -мезона – на рис. 12в и 12г. На всех четырех графиках хорошо видна “нулевая точка” при $\{x_{12}, x_{34}\} \sim -2C_{7\gamma}(\mu_0)/C_{9V}(\mu_0) \approx 0.15$ [2].

Наконец, на рис. 13 приведем двойные дифференциальные распределения

$$\frac{d^2 \text{Br}(\bar{B}_q \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12} dx_{34}}.$$

Из рисунка видим, что для формы двойных дифференциальных распределений существенно не только влияние фотонного полюса и векторных резонансов ($\phi(1029)$ для $\bar{B}_s$ и $\omega(782)$ для $\bar{B}_d$), но также влияние

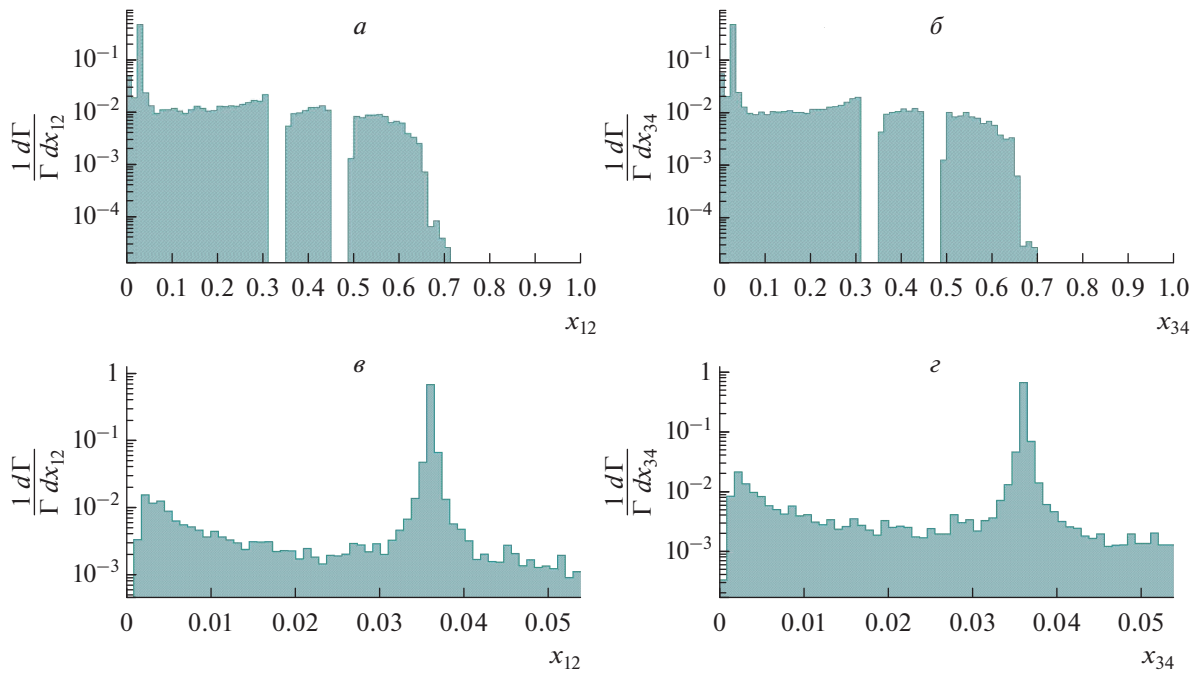


Рис. 8. Нормированные дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{ij}}$ для распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. На рисунках *a* и *б* представлены распределения во всем диапазоне изменения переменных x_{12} и x_{34} соответственно. На рисунках *в* и *г* отдельно показаны области, в которых основной вклад дает $\phi(1020)$ -резонанс. Из рисунков видно, что высота пика $\phi(1020)$ -резонанса почти на два порядка превышает высоту пика фотонного полюса.

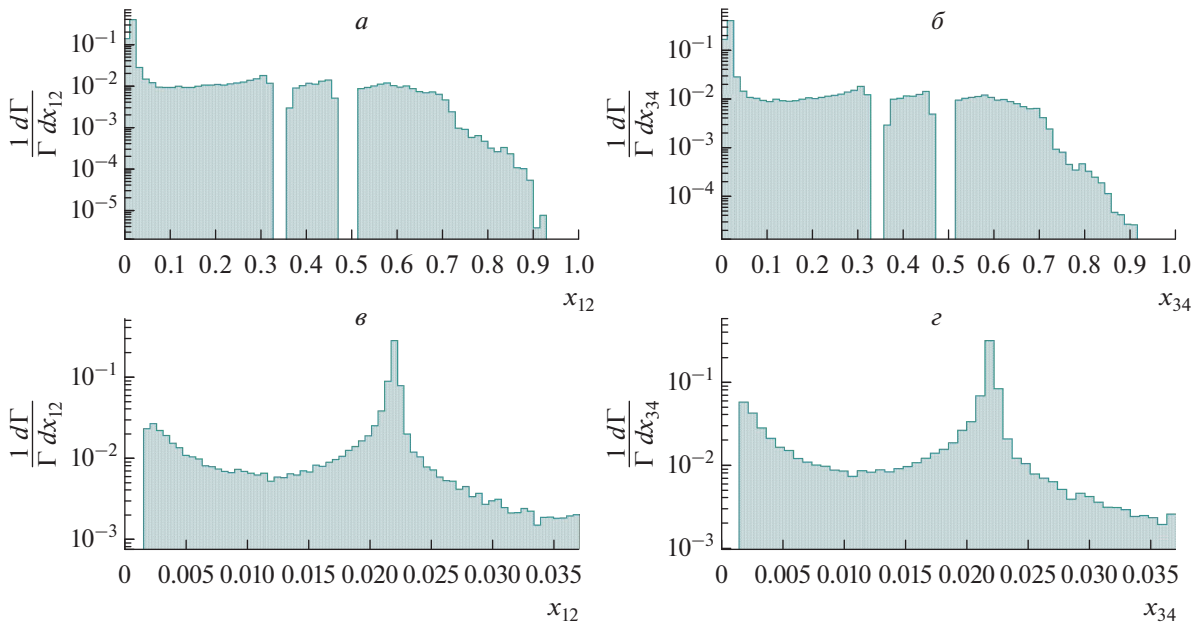


Рис. 9. Нормированные дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{ij}}$ для распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. На рисунках *a* и *б* представлены распределения во всем диапазоне изменения переменных x_{12} и x_{34} соответственно. На рисунках *в* и *г* отдельно показаны области, в которых основной вклад дает $\omega(782)$ -резонанс и фотонный полюс. Из рисунков видно, что высота пика $\omega(782)$ -резонанса менее чем на порядок превышает высоту пика от фотонного полюса. Это наглядно показывает, что резонансный вклад для распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ играет гораздо меньшую роль, чем для распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$.

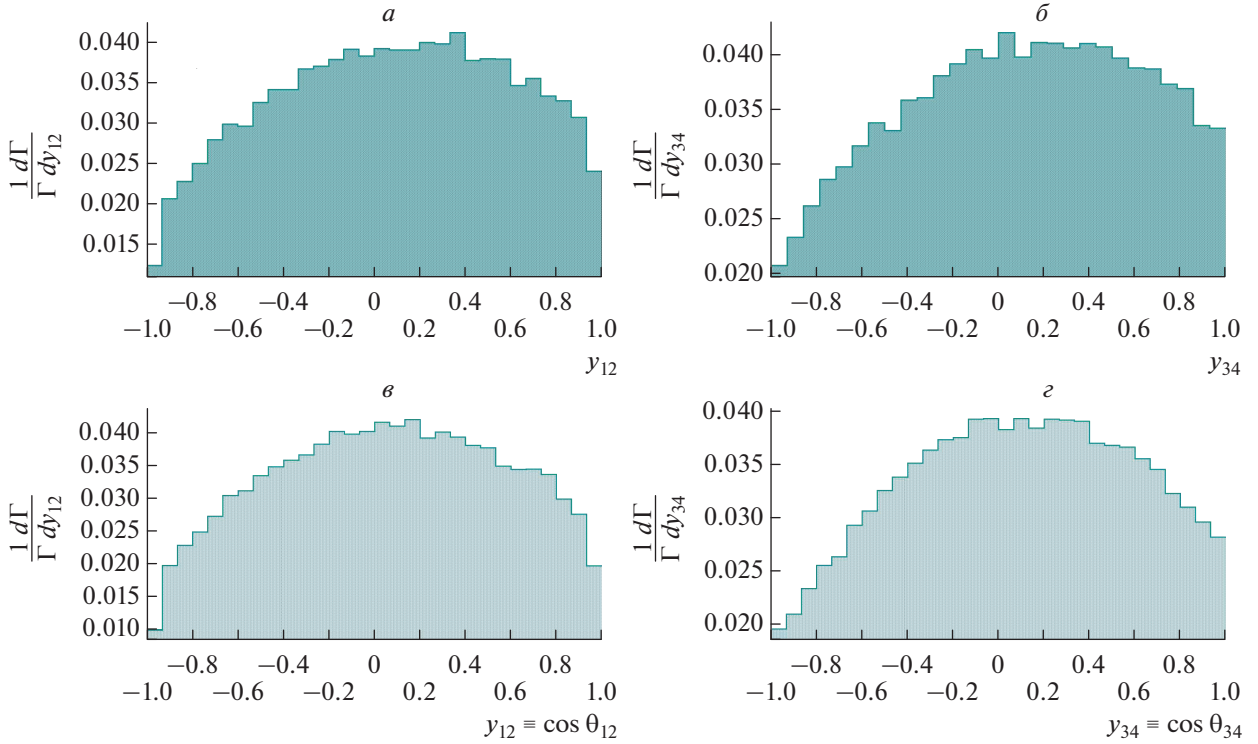


Рис. 10. Нормированные угловые дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dy_{ij}}$. Угловые переменные y_{12} и y_{34} определены выражением (В.2). На рисунках *а* и *б* представлены распределения для распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$, а на рисунках *в* и *г* аналогичные распределения для распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$.

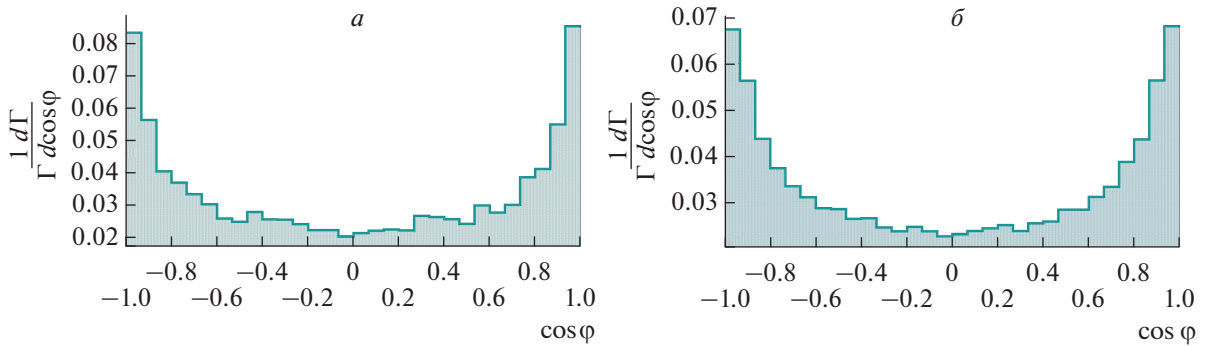


Рис. 11. Нормированные дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\cos \varphi}$. Выражение для $\cos \varphi$ можно найти из уравнения (В.3). На рисунке *а* показано распределение для распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$. На рисунке *б* – соответствующее распределение для распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$.

”хвостов” от J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансов и вклад широких $\bar{c}s$ векторных резонансов при промежуточных и больших значениях переменных x_{ij} .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе

- в рамках Стандартной модели получены парциальные ширины и дифференциальные распределения для распадов $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$, где $q = \{d, s\}$. Во всех вычислениях учитывались вклады излучения виртуального фотона тяжелым

b -кварком, тормозное излучение виртуального фотона заряженными лептонами в конечном состоянии, вклад ”слабой аннигиляции”, вклад широких векторных $c\bar{c}$ -резонансов. Согласно экспериментальной процедуре [3–5] всегда исключались вклады узких J/ψ - и $\psi(2S)$ -резонансов;

- вычисления парциальных ширин проводились без учета и с учетом (индекс ”sub”) вычитательной процедуры из работы [11]. Все дифференци-

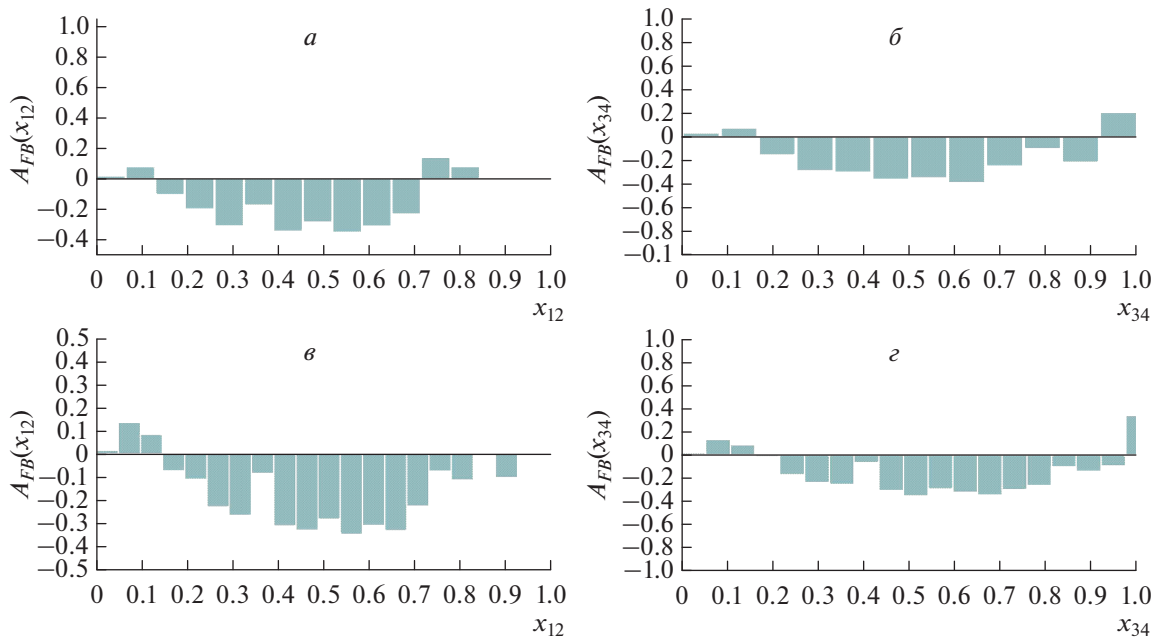


Рис. 12. Зарядовые лептонные асимметрии: $a - A_{FB}^{(\bar{B}_s)}(x_{12})$; $b - A_{FB}^{(\bar{B}_s)}(x_{34})$; $v - A_{FB}^{(\bar{B}_d)}(x_{12})$ и $z - A_{FB}^{(\bar{B}_d)}(x_{34})$. Формулы (40) и (41) определяют $A_{FB}^{(\bar{B}_q)}(x_{ij})$. Асимметрии вычислены в рамках Стандартной модели. На всех четырех графиках хорошо видна "нулевая точка" при $x_{ij} \sim 2 C_{7\gamma}(\mu_0)/C_{9V}(\mu_0) \approx 0.15$.

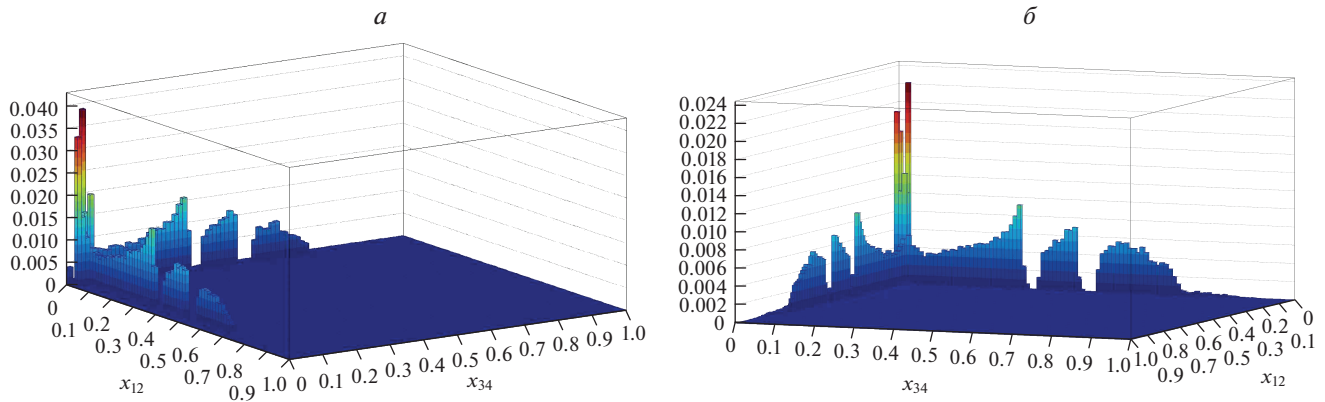


Рис. 13. Двойные дифференциальные распределения $a - \frac{d^2 \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ и $b - \frac{d^2 \text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$.

альные распределения были получены без учета вычитательной процедуры;

- вклад от излучения виртуального фотона легким d -кварком $\bar{B}_d$ -мезона описывался в рамках модели доминантности векторных мезонов. Всегда учитывался вклад широкого $\rho^0(770)$ -резонанса. Далее рассматривались два случая, когда вклад узкого $\omega(782)$ -резонанса учитывался (индекс "R") и когда этот вклад исключался согласно [5]. Было найдено, что вычитательная процедура слабо влияет на численный результат, который составляет при учете $\omega(782)$ -резонанса

$$\text{Br}_R(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (3.2 \pm 1.2) \times 10^{-11},$$

а без учета $\omega(782)$ -резонанса

$$\text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (1.0 \pm 0.4) \times 10^{-11};$$

- модель доминантности векторных мезонов также использовалась при описании излучения виртуального фотона s -кварком $\bar{B}_s$ -мезона. В этом случае учитывался или исключался согласно [5] вклад узкого $\phi(1020)$ -резонанса. Для распадов $\bar{B}_s$ -мезонов вычитательная процедура сильнее влияет на численный результат. При учете $\phi(1020)$ -резонанса находим, что

$$\text{Br}_R(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (60 \pm 13) \times 10^{-10},$$

а без учета этого резонанса получаем, что

$$\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (2.4 \pm 1.0) \times 10^{-10};$$

- дана оценка парциальных ширин распадов $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ без учета вкладов узких резонансов

$$\text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) \sim (0.6 \pm 0.2) \times 10^{-11};$$

$$\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) \sim (1.5 \pm 0.4) \times 10^{-10}.$$

Данная оценка не противоречит текущим экспериментальным верхним пределам из работы [5].

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят за финансовую поддержку Российский научный фонд, грант N 22-22-00297 "Редкие четырехлептонные распады тяжелых мезонов в Стандартной модели и ее расширениях". Отдельную благодарность авторы выражают В.Ю. Егорычеву, Д.В. Савриной и А.А. Бузиной за обсуждение различных аспектов настоящей работы.

Приложение А

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ВХОДЯЩИХ В АМПЛИТУДУ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Выпишем безразмерные функции, которые входят в амплитуды тормозного излучения (16) и (17) распада $\bar{B}_q(p, M_1) \rightarrow \mu^+(k_1)\mu^-(k_2)e^+(k_3)e^-(k_4)$. Для этого введем новые безразмерные величины $\hat{f}_{B_q} = f_{B_q}/M_1$, $\hat{m}_e = m_e/M_1$, $\hat{m}_\mu = m_\mu/M_1$ и обобщенное обозначение $x_{lmn} = (k_l + k_m + k_n)^2/M_1^2$. Тогда

$$d^{(PV)}(x_{34}, x_{134}, x_{234}) = -4C_{10A}\hat{m}_\mu\hat{f}_{B_q} \times \frac{1}{x_{34}(x_{234} - \hat{m}_\mu^2)(x_{134} - \hat{m}_\mu^2)} \frac{(k_1 - k_2, k)}{M_1^2}; \quad (\text{A.1})$$

$$f^{(TV)}(x_{34}, x_{134}, x_{234}) = -C_{10A}\hat{m}_\mu\hat{f}_{B_q} \times \frac{1 - x_{12} + x_{34}}{x_{34}(x_{234} - \hat{m}_\mu^2)(x_{134} - \hat{m}_\mu^2)}; \quad (\text{A.2})$$

$$d^{(VP)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) = -4C_{10A}\hat{m}_e\hat{f}_{B_q} \times \frac{1}{x_{12}(x_{124} - \hat{m}_e^2)(x_{123} - \hat{m}_e^2)} \frac{(k_3 - k_4, q)}{M_1^2}; \quad (\text{A.3})$$

$$f^{(VT)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) = -C_{10A}\hat{m}_e\hat{f}_{B_q} \times \frac{1 + x_{12} - x_{34}}{x_{12}(x_{124} - \hat{m}_e^2)(x_{123} - \hat{m}_e^2)}. \quad (\text{A.4})$$

Приложение Б

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕРЕЗОНАНСНОГО И РЕЗОНАНСНОГО ВКЛАДОВ $a^{(IJ)}$, $b^{(IJ)}$, $c^{(IJ)}$, $d^{(IJ)}$, $f^{(IJ)}$ и $g^{(IJ)}$

В этом приложении мы приводим явный вид безразмерных функций, которые входят в амплитуду (22). Пусть $\hat{m}_b = m_b/M_1$, $\hat{M}_{2i} = M_{2i}/M_1$ и $\hat{\Gamma}_{2i} = \Gamma_{2i}/M_1$. Если вычитательная процедура из разд. 3.3 не применяется, то функция $R(x) = 1$. В случае выполнения вычитательной процедуры $R(x) = x/\hat{M}_{2i}^2$.

Если вычитательная процедура из разд. 3.3 не применяется, то функция $R(x) = 1$. В случае выполнения вычитательной процедуры $R(x) = x/\hat{M}_{2i}^2$.

$$a^{(VV)}(x_{12}x_{34}) = \frac{4\hat{m}_b C_{7\gamma}(\mu)}{x_{12}x_{34}} \left(\frac{1}{2} (F_{TV}(q^2, k^2) + F_{TV}(k^2, q^2)) - \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \frac{\hat{M}_{2i}^2 I_i T_{1i}(q^2)}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \frac{\hat{M}_{2i}^2 I_i T_{1i}(k^2)}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} \right) + \frac{C_{9V}(q^2, \mu)}{x_{34}} \times \left(F_V(q^2, k^2) - \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \frac{2\hat{M}_{2i}^2 I_i}{1 + \hat{M}_{2i}} \times \frac{V_i(q^2)}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} \right) + \frac{C_{9V}(k^2, \mu)}{x_{12}} \left(F_V(k^2, q^2) - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \frac{2\hat{M}_{2i}^2 I_i}{1 + \hat{M}_{2i}} \frac{V_i(k^2)}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} \right); \quad (\text{B.1})$$

$$a^{(VA)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{C_{10A}}{x_{12}} \left[F_V(k^2, q^2) - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \frac{2\hat{M}_{2i}^2 I_i}{1 + \hat{M}_{2i}} \frac{V_i(k^2)}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} \right]; \quad (\text{B.2})$$

$$a^{(AV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{C_{10A}}{x_{34}} \left[F_V(q^2, k^2) - \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \frac{2\hat{M}_{2i}^2 I_i}{1 + \hat{M}_{2i}} \frac{V_i(q^2)}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} \right]; \quad (\text{B.3})$$

$$a^{(AA)}(x_{12}, x_{34}) = 0; \quad (\text{B.4})$$

$$b^{(VV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{2\hat{m}_b C_{7\gamma}(\mu)}{x_{12}x_{34}} \left(\frac{1 - x_{12} - x_{34}}{2} \times \left(F_{TA}(q^2, k^2) + F_{TA}(k^2, q^2) \right) - \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \times \frac{\hat{M}_{2i}^2(1 - \hat{M}_{2i}^2)I_i T_{2i}(q^2)}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \times \frac{\hat{M}_{2i}^2(1 - \hat{M}_{2i}^2)I_i T_{2i}(k^2)}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} \right) + \frac{C_{9V}(q^2, \mu)}{x_{34}} \times \left(\frac{1}{2} (1 - x_{12} - x_{34}) F_A(q^2, k^2) - \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \times \frac{\hat{M}_{2i}^2(1 + \hat{M}_{2i})I_i}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} A_{1i}(q^2) \right) + \frac{C_{9V}(k^2, \mu)}{x_{12}} \times \left(\frac{1}{2} (1 - x_{12} - x_{34}) F_A(k^2, q^2) - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \times \frac{\hat{M}_{2i}^2(1 + \hat{M}_{2i})I_i}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i}\hat{M}_{2i}} A_{1i}(k^2) \right);$$

$$\times \left(\frac{1}{2} (1 - x_{12} - x_{34}) F_A(k^2, q^2) - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\hat{M}_{2i}^2 (1 + \hat{M}_{2i}) I_i}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} A_{1i}(k^2) \right); \quad (\text{Б.5})$$

$$b^{(VA)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{12}} \left[\frac{1 - x_{12} - x_{34}}{2} F_A(k^2, q^2) - \right. \\ \left. - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \frac{\hat{M}_{2i}^2 (1 + \hat{M}_{2i}) I_i}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} A_{1i}(k^2) \right]; \quad (\text{Б.6})$$

$$b^{(AV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{34}} \left[\frac{1 - x_{12} - x_{34}}{2} F_A(q^2, k^2) - \right. \\ \left. - \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \frac{\hat{M}_{2i}^2 (1 + \hat{M}_{2i}) I_i}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} A_{1i}(q^2) \right]; \quad (\text{Б.7})$$

$$b^{(AA)}(x_{12}, x_{34}) = 0; \quad (\text{Б.8})$$

$$c^{(VV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{2\hat{m}_b C_{7\gamma}(\mu)}{x_{12} x_{34}} \left\{ \frac{1}{2} (F_{TA}(q^2, k^2) + \right. \\ \left. + F_{TA}(k^2, q^2)) - \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \frac{\hat{M}_{2i}^2 I_i}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \times \right. \\ \left. \times \left(T_{2i}(q^2) + \frac{T_{3i}(q^2) x_{12}}{(1 - \hat{M}_{2i}^2)} \right) - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\hat{M}_{2i}^2 I_i}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \left(T_{2i}(k^2) + \frac{T_{3i}(k^2) x_{34}}{(1 - \hat{M}_{2i}^2)} \right) \right\} + \\ + \frac{C_{9V}(q^2, \mu)}{x_{34}} \left(\frac{1}{2} F_A(q^2, k^2) - \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \frac{\hat{M}_{2i}^2 I_i}{(1 + \hat{M}_{2i})} \times \right. \\ \left. \times \frac{A_{2i}(q^2)}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \right) + \frac{C_{9V}(k^2, \mu)}{x_{12}} \left(\frac{1}{2} F_A(k^2, q^2) - \right. \\ \left. - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \frac{\hat{M}_{2i}^2 I_i}{(1 + \hat{M}_{2i})} \frac{A_{2i}(k^2)}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \right); \quad (\text{Б.9})$$

$$c^{(VA)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{12}} \left[\frac{1}{2} F_A(k^2, q^2) - \right. \\ \left. - \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \frac{\hat{M}_{2i}^2 I_i}{1 + \hat{M}_{2i}} \frac{A_{2i}(k^2)}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \right]; \quad (\text{Б.10})$$

$$c^{(AV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{34}} \left[\frac{1}{2} F_A(q^2, k^2) - \right. \\ \left. - \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \frac{\hat{M}_{2i}^2 I_i}{1 + \hat{M}_{2i}} \frac{A_{2i}(q^2)}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \right]; \quad (\text{Б.11})$$

$$c^{(AA)}(x_{12}, x_{34}) = 0; \quad (\text{Б.12})$$

$$d^{(AV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{34}} \sum_i \frac{R(x_{34})}{f_{V_i}} \times \\ \times \frac{\hat{M}_{2i} I_i}{x_{34} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \left[\frac{A_{2i}(q^2)}{1 + \hat{M}_{2i}} + \frac{2\hat{M}_{2i}}{x_{12}} \times \right. \\ \left. \times \left(A_{3i}(q^2) - A_{0i}(q^2) \right) \right]; \quad (\text{Б.13})$$

$$d^{(AA)}(x_{12}, x_{34}) = 0; \quad (\text{Б.14})$$

$$g^{(VA)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{12}} \sum_i \frac{R(x_{12})}{f_{V_i}} \times \\ \times \frac{\hat{M}_{2i} I_i}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i \hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \left[\frac{A_{2i}(k^2)}{1 + \hat{M}_{2i}} + \frac{2\hat{M}_{2i}}{x_{34}} \times \right. \\ \left. \times \left(A_{3i}(k^2) - A_{0i}(k^2) \right) \right]; \quad (\text{Б.15})$$

$$g^{(AA)}(x_{12}, x_{34}) = 0; \quad (\text{Б.16})$$

Приложение В КИНЕМАТИКА ЧЕТЫРЕХЛЕПТОННЫХ РАСПАДОВ

Обозначим через k_i , где $i = \{1, 2, 3, 4\}$, 4-импульсы конечных лептонов в четырехлептонных распадах $\bar{B}_q(p, M_1) \rightarrow \mu^+(k_1) \mu^-(k_2) e^+(k_3) e^-(k_4)$. Определим следующие 4-импульсы:

$$q = k_1 + k_2; \quad k = k_3 + k_4; \quad p = q + k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4,$$

где p — это 4-импульс $\bar{B}_q$ -мезона и $p^2 = M_1^2$, 4-импульс $\mu^+ \mu^-$ -пары равен q , а 4-импульс $e^+ e^-$ -пары равен k . Для компьютерных вычислений удобно использовать безразмерные переменные. Поэтому введем $x_{ij} = (k_i + k_j)^2 / M_1^2$ и $\hat{m}_i = \sqrt{k_i^2} / M_1$. Очевидно, что $x_{ij} = x_{ji}$. Практически во всех вычислениях настоящей работы удобно полагать, что $k_i^2 = 0$. Однако при учете вклада тормозного излучения в области $q^2 \sim 4m_\mu^2$ и $k^2 \sim [4m_e^2, 4m_\mu^2]$ нельзя пренебрегать зависимостью матричного элемента и фазового объема от лептонных масс. В безмассовом пределе из закона сохранения 4-импульса находим, что переменные x_{ij} связаны условием

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34} = 1. \quad (\text{В.1})$$

Определим пределы изменения переменных $\hat{x}_{12}$ и $\hat{x}_{34}$ при ненулевых массах лептонов. Из неравенства $(k_i k_j) \geq \sqrt{k_i^2 k_j^2}$ немедленно следует, что

$$4\hat{m}_\mu^2 = (\hat{m}_1 + \hat{m}_2)^2 \leq x_{12} \leq (1 - \hat{m}_3 - \hat{m}_4)^2 = (1 - 2\hat{m}_e)^2.$$

При фиксированном значении переменной x_{12} имеем

$$x_{34} = \frac{k^2}{M_1^2} = \frac{(p-q)^2}{M_1^2} \leq \frac{(M_1 - \sqrt{q^2})^2}{M_1^2} = (1 - \sqrt{x_{12}})^2.$$

Тогда

$$4\hat{m}_e^2 = (\hat{m}_3 + \hat{m}_4)^2 \leq x_{34} \leq (1 - \sqrt{x_{12}})^2.$$

Теперь сопоставим положительно заряженному мюону импульс $\mathbf{k}_1$, а позитрону — импульс $\mathbf{k}_3$. Далее определим угол θ_{12} между направлением импульса μ^+ и направлением движения $\bar{B}_q$ -мезона (осью z) в системе покоя $\mu^+\mu^-$ -пары. Аналогично введем угол θ_{34} между направлением движения e^+ и направлением движения $\bar{B}_q$ -мезона в системе покоя e^+e^- -пары. Все вышесказанное проиллюстрировано на рис. 7. Тогда в безмассовом случае:

$$\begin{aligned} y_{12} &\equiv \cos \theta_{12} = \frac{1}{\lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34})} \times \\ &\quad \times (x_{23} + x_{24} - x_{13} - x_{14}), \\ y_{34} &\equiv \cos \theta_{34} = \frac{1}{\lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34})} \times \\ &\quad \times (x_{14} + x_{24} - x_{13} - x_{23}), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

где $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$ — треугольная функция. Легко проверить, что $\{\theta_{12}, \theta_{34}\} \in [0, \pi]$. Углы отсчитываются от оси z .

Наконец, в системе покоя $\bar{B}_q$ -мезона определим угол $\varphi \in [0, 2\pi]$ между плоскостями $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ и $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$. Для этого введем вектор $\mathbf{a}_1 = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2$, перпендикулярный плоскости $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, и вектор $\mathbf{a}_3 = \mathbf{k}_4 \times \mathbf{k}_3$, который ортогонален плоскости $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_3|}.$$

При нулевых лептонных массах с помощью техники из книги [27] можно получить:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \det \begin{pmatrix} M_1^2 & (pk_1) & (pk_2) \\ (pk_4) & (k_1k_4) & (k_2k_4) \\ (pk_3) & (k_1k_3) & (k_2k_3) \end{pmatrix} \Bigg/ \left[\right. \\ &\quad \sqrt{\det \begin{pmatrix} M_1^2 & (pk_1) & (pk_2) \\ (pk_1) & 0 & (k_1k_2) \\ (pk_2) & (k_1k_2) & 0 \end{pmatrix}} \times \\ &\quad \times \left. \sqrt{\det \begin{pmatrix} M_1^2 & (pk_3) & (pk_4) \\ (pk_3) & 0 & (k_3k_4) \\ (pk_4) & (k_3k_4) & 0 \end{pmatrix}} \right]. \end{aligned}$$

Упрощение этого выражения дает

$$-2\sqrt{x_{12}x_{34}(1-y_{12}^2)(1-y_{34}^2)} \cos \varphi +$$

$$+ (1 - x_{12} - x_{34})y_{12}y_{34} = x_{13} - x_{14} - x_{23} + x_{24}. \quad (\text{B.3})$$

Угол φ отсчитывается от плоскости $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ в направлении плоскости $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$.

Четырехчастичный фазовый объем можно записать как

$$d\Phi_4^{(1234)} = M_1^4 \frac{dx_{12}}{2\pi} \frac{dx_{34}}{2\pi} d\Phi_2^{(qk)} d\Phi_2^{(12)} d\Phi_2^{(34)},$$

где в случае ненулевых лептонных масс

$$\begin{aligned} d\Phi_2^{(qk)} &= 2\pi \delta(q^2 - x_{12}M_1^2) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - x_{34}M_1^2) \times \\ &\quad \times \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p - q - k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Phi_2^{(12)} &= 2\pi \delta(k_1^2 - m_1^2) \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k_2^2 - m_2^2) \times \\ &\quad \times \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(q - k_1 - k_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Phi_2^{(34)} &= 2\pi \delta(k_3^2 - m_3^2) \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k_4^2 - m_4^2) \times \\ &\quad \times \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k_3 - k_4). \end{aligned}$$

При вычислении $d\Phi_4^{(1234)}$ в качестве независимых переменных интегрирования удобно выбрать x_{12} , x_{34} , y_{12} , y_{34} и угол φ . Тогда

$$\Phi_2^{(qk)} = \frac{1}{2^3 \pi} \lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34})$$

и

$$d\Phi_2^{(12)} = \frac{1}{2^4 \pi} \sqrt{1 - \frac{(\hat{m}_1 + \hat{m}_2)^2}{x_{12}}} dy_{12};$$

$$d\Phi_2^{(34)} = \frac{1}{2^5 \pi^2} \sqrt{1 - \frac{(\hat{m}_3 + \hat{m}_4)^2}{x_{34}}} dy_{34} d\varphi.$$

Если положить $\hat{m}_1 = \hat{m}_2 = \hat{m}_\mu$ и $\hat{m}_3 = \hat{m}_4 = \hat{m}_e$, то

$$\begin{aligned} d\Phi_4^{(1234)} &= \frac{M_1^4}{2^{14} \pi^6} \lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34}) \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}_\mu^2}{x_{12}}} \times \\ &\quad \times \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}_e^2}{x_{34}}} dx_{12} dx_{34} dy_{12} dy_{34} d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

В Приложении В мы используем обозначения, которые практически идентичны обозначениям из работы [28], за исключением обозначений для y_{ij} в формуле (B.2). Выражения для y_{12} и y_{34} в настоящей работе имеют противоположный знак по сравнению с этими выражениями в работе [28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Melikhov, N. Nikitin, S. Simula, Phys. Lett. B **430**, 332 (1998).
2. G. Burdman, Phys. Rev. D **57**, 4254 (1998).
3. R. Aaij *et al.* [LHCb Collab.], Phys. Rev. Lett. **110**, 211801 (2013).
4. R. Aaij *et al.* [LHCb Collab.], JHEP **1703**, 001 (2017).
5. R. Aaij *et al.* [LHCb Collab.], JHEP **2203**, 109 (2022).
6. Y. Dincer and L. M. Sehgal, Phys. Lett. B **556**, 169 (2003).
7. A. V. Danilina and N. V. Nikitin, Phys. Scripta **97**, 074005 (2022).
8. A. V. Danilina and N. V. Nikitin, Phys. Part. Nucl. Lett. **20**, 336 (2023).
9. A. V. Danilina and N. V. Nikitin, Yad. Fiz. **81**, 331 (2018) [Phys. At. Nucl. **81**, 347 (2018)].
10. S. W. Bosch and G. Buchalla, JHEP **0208**, 054 (2002); G. L. Lin, J. Liu, and Y. P. Yao, Phys. Rev. D **42**, 2314 (1990); H. Simma and D. Wyler, Nucl. Phys. B **344**, 283 (1990); S. Herrlich and J. Kalinowski, Nucl. Phys. B **381**, 501 (1992).
11. M. Ivanov and D. Melikhov, Phys. Rev. D **105**, 014028 (2022); Phys. Rev. D **106**, 119901 (Erratum) (2022).
12. A. V. Danilina and N. V. Nikitin, K. S. Toms, Phys. Rev. D **101**, 096007 (2020).
13. G. Buchalla, A. J. Buras, and M. E. Lautenbacher, Rev. Mod. Phys. **68**, 1125 (1996).
14. A. J. Buras and M. Munz, Phys. Rev. D **52**, 186 (1995).
15. A. Kozachuk, D. Melikhov, and N. Nikitin, Phys. Rev. D **97**, 053007 (2018).
16. D. Melikhov and N. Nikitin, Phys. Rev. D **70**, 114028 (2004).
17. R. L. Workman, Prog. Theor. Exp. Phys. **2022**, 083C01 (2022).
18. D. Melikhov, N. Nikitin, and S. Simula, Phys. Rev. D **57**, 6814 (1998).
19. F. Kruger and L. M. Sehgal, Phys. Rev. D **55**, 2799 (1997).
20. F. Kruger and L. M. Sehgal, Phys. Rev. D **56**, 5452 (1997); Phys. Rev. D **60**, 099905 (Erratum) (1999).
21. D. Melikhov, N. Nikitin, and K. Toms, Phys. At. Nucl. **68**, 1842 (2005).
22. M. Neubert and B. Stech, Adv. Ser. Dir. High Energy Phys. **15**, 294 (1998).
23. F. Kruger and D. Melikhov, Phys. Rev. D **67**, 034002 (2003).
24. D. Melikhov and B. Stech, Phys. Rev. D **62**, 014006 (2000).
25. The development page for the EvtGen project, <https://evtgen.hepforge.org/>
26. I. Balakireva, D. Melikhov, N. Nikitin, and D. Tlisov, Phys. Rev. D **81**, 054024 (2010).
27. E. Byckling and K. Kajantie, *Particle Kinematics* (John Wiley and Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973).
28. A. R. Barker, H. Huang, P. A. Toale, and J. Engle, Phys. Rev. D **67**, 033008 (2003).

THE DESCRIPTION OF THE FOUR-PARTICLE DECAYS

$$\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^- \text{ IN THE FRAMEWORK}$$

OF THE STANDARD MODEL

A. V. Danilina^{1),2)}, N. V. Nikitin^{1),2),3),4)}¹⁾Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow, Russia²⁾NRC "Kurchatov Institute" — ITEP, Moscow, Russia³⁾Lomonosov Moscow State University, Physics Faculty, Moscow, Russia⁴⁾The Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia

In the framework of the Standard Model, partial widths, double and single differential distributions for four-lepton decays $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ were calculated, $q = \{d, s\}$. The contributions of the emission of a virtual photon by light q - and heavy b -quarks, the bremsstrahlung by charged leptons in the final state, the leading contribution of "weak annihilation", and the contribution of wide vector $c\bar{c}$ -resonances are taken into account. Contributions from narrow J/ψ - and $\psi(2S)$ -resonances are excluded. The emission of a virtual photon by a light quark $\bar{B}_q$ -meson is described using the vector meson dominance model. Only the contribution of the lightest vector mesons, which include a $q\bar{q}$ -pair, is taken into account. For the $\bar{B}_s$ -meson this is $\varphi(1020)$ -resonance. For the $\bar{B}_d$ -meson, the contributions of $\rho^0(770)$ - and $\omega(782)$ -resonances are taken into account. Two possibilities are considered. The first: the contributions of narrow $\varphi(1020)$ - and $\omega(782)$ -mesons are excluded from the partial widths of the corresponding decays. The second: the contributions of narrow resonances are taken into account. The question of the influence of the subtractive procedure on the magnitude of the partial widths of $\bar{B}_q \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ decays has been studied.