

РЕДКИЕ РАСПАДЫ D_s -МЕЗОНОВ НА ТРИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЛЕПТОНА И НЕЙТРИНО В РАМКАХ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

© 2024 г. А. В. Данилина^{1),2),*}, Н. В. Никитин^{1),2),3),4),**}

Поступила в редакцию 07.12.2023 г.; после доработки 05.03.2024 г.; принята к публикации 14.03.2024 г.

В рамках Стандартной модели найдены значения парциальных ширин, получены и проанализированы однократные дифференциальные распределения для четырехлептонных распадов $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ и $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$. При вычислениях учитывались вклады от процессов излучения виртуального фотона s - и c -кварками D_s^- -мезона и тормозное излучение виртуального фотона заряженным лептоном в конечном состоянии. Излучение виртуального фотона s -кварком описывалось при помощи модели доминантности векторных мезонов.

DOI: 10.31857/S0044002724050088, EDN: JEWBTB

1. ВВЕДЕНИЕ

Распады тяжелых заряженных псевдоскалярных мезонов на три заряженных легких лептона и нейтрино стали изучать сравнительно недавно. Первая теоретическая работа, в которой были получены предсказания для парциальных ширин распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$, опубликована в 2018 г. [1]. В 2019 г. появилась первая и пока единственная экспериментальная работа коллаборации LHCb [2], содержащая верхний предел на парциальную ширину распада $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$. Экспериментальный верхний предел оказался существенно ниже, чем теоретическое предсказание работ [1] и [3]. Этот факт стимулировал появление работ [4–9], в которых обсуждались пути уменьшения величины теоретических предсказаний. Учет изотопических факторов в работе [4] позволил понизить предсказания для парциальной ширины распада $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ почти в 2 раза. В работе [5] было указано на то, что амплитуда (13) из статьи [1] содержит лишний полюс при $q^2 \rightarrow 0$, который противоречит калибровочной инвариантности. Наконец в работе [7] была предложена согласованная с требованием калибровочной инвариантности вычитательная процедура, использование которой позволило еще больше понизить теоретические предсказания, хотя они и продолжают превышать эксперимен-

тальный верхний предел [2]. Идея работы [7] будет использована в настоящей статье для модернизации формул статей [1] и [4].

Распады D -мезонов на четыре лептона до настоящего времени не изучались. Такие распады, как и распады B -мезонов, можно разделить на два типа. К первому типу относятся распады, которые связаны с переходом $c \rightarrow u$, т.е. идут за счет нейтральных токов, нарушающих аромат. Характерным примером таких распадов является распад $D^0 \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^+ \ell'^-$, где лептоны ℓ и ℓ' могут быть как разными, так и одинаковыми. Чтобы не противоречить закону сохранения энергии, подобные распады могут идти только с участием легких лептонов: электронов и мюонов. Однако данные распады чрезвычайно подавлены вследствие унитарности матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава (ККМ-матрицы) в Стандартной модели (СМ). Заметим, что любое отклонение от унитарности ККМ-матрицы может сильно повлиять на значения парциальных ширин подобных распадов. Во втором типе распадов конечное четырехлептонное состояние возникает из-за большого числа электромагнитных и слабых процессов, которые, тем не менее, идут только на древесном уровне. К таким распадам относятся распады заряженных D -мезонов, т.е. распады вида $D_{(s)}^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$. Заметим, что распады $D_s^\pm$ -мезонов с экспериментальной точки зрения имеют явное преимущество перед распадами $D^\pm$ -мезонов, поскольку для распадов с легкими лептонами в конечном состоянии

$$\frac{\text{Br}(D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-)}{\text{Br}(D^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-)} \sim \frac{|V_{cs}|^2}{|V_{cd}|^2} \left(\frac{M_{D_s}}{M_D} \right)^5 \frac{\tau_{D_s}}{\tau_D} \sim 12,$$

где $\tau_{D_{(s)}}$ и $M_{D_{(s)}}$ – время жизни и масса $D_{(s)}$ -мезона, которые можно найти в [10]. Поэтому далее в настоящей работе будем рассматривать только распады D_s -мезонов. Помимо распадов D_s^- -мезона в три лег-

¹⁾ Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

²⁾ Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт” — Курчатовский комплекс теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.

³⁾ Физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

⁴⁾ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия.

* E-mail: anna.danilina@cern.ch

** E-mail: Nikolai.Nikitine@cern.ch

ких заряженных лептона и нейтрино, возможен распад $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\tau \tau^-$, который подавлен фактором $(M_{D_s} - m_\tau)^5 / M_{D_s}^5 \sim 10^{-5}$ по сравнению с распадами D_s -мезонов в легкие лептоны и, следовательно, не представляет никакого интереса с экспериментальной точки зрения.

Таким образом, в настоящей работе мы будем рассматривать распады D_s -мезонов только на три легких заряженных лептона и нейтрино. Можно предположить, что основной вклад в такие четырехлептонные распады D_s -мезонов должен вносить каскадный распад с участием промежуточного $\varphi(1020)$ -резонанса, т.е. доминирующим является процесс $D_s^- \rightarrow (\varphi(1020) \rightarrow \ell^+ \ell^-) \bar{\nu}_\ell \ell'^-$. Данное предположение основывается на том факте, что в аналогичные распады прелестных мезонов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ основной вклад вносит узкий $\omega(782)$ -резонанс [1, 4]. Тогда следующим образом можно сделать простую оценку величины резонансного вклада

$$\text{Br}_\varphi(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \approx \text{Br}(D_s^- \rightarrow \varphi(1020) \bar{\nu}_e e^-) \times \text{Br}(\varphi(1020) \rightarrow \mu^+ \mu^-) \approx 0.7 \times 10^{-5} \quad (1)$$

и

$$\text{Br}_\varphi(D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-) \approx \text{Br}(D_s^- \rightarrow \varphi(1020) \bar{\nu}_\mu \mu^-) \times \text{Br}(\varphi(1020) \rightarrow e^+ e^-) \approx 0.6 \times 10^{-5}. \quad (2)$$

Т.е. в обоих случаях для резонансного вклада получаем $\text{Br}_\varphi \sim 10^{-5}$.

Нерезонансный вклад можно оценить, например, следующим образом:

$$\text{Br}_{\text{NR}}(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \sim \alpha_{\text{em}} \text{Br}(D_s^- \rightarrow \gamma \bar{\nu}_e e^-).$$

В настоящее время для $\text{Br}(D_s^- \rightarrow \gamma \bar{\nu}_e e^-)$ имеется только экспериментальный верхний предел 1.3×10^{-4} на 90% уровне достоверности [11], а теоретические предсказания варьируются в диапазоне от 10^{-3} до 10^{-5} [12–17]. Исходя из экспериментального ограничения можно написать, что

$$\text{Br}_{\text{NR}}(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) < 10^{-6}.$$

Таким образом, следует ожидать, что нерезонансный вклад будет минимум на порядок меньше резонансного.

При помощи рассмотренных выше оценок невозможно учесть полюсной вклад тормозного излучения от заряженного лептона в конечном состоянии. Но можно ожидать, что подобный дополнительный вклад только увеличит значение парциальной ширины распадов $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$.

Из [10] известно, что в настоящее время все экспериментально открытые распады D_s -мезонов име-

ют парциальные ширины не меньше, чем 10^{-4} , кроме канала $D_s^+ \rightarrow \pi^+(\varphi(1020) \rightarrow e^+ e^-)$, парциальная ширина которого $\sim 10^{-5}$. Таким образом, приведенные выше оценки показывают, что распады $D_s \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ с легкими лептонами в конечном состоянии находятся в зоне потенциального экспериментального обнаружения, прежде всего, на установке BESIII [18]. В этом случае теоретические предсказания для парциальных ширин таких распадов становятся особенно актуальными. Анализ аналогичных распадов заряженных B -мезонов показывает, что результаты аккуратных теоретических вычислений по порядку величины в целом соответствуют простым оценкам [1, 3, 4]. Такое же согласие будет продемонстрировано и в настоящей работе.

Работа устроена следующим образом. Во Введении обсуждается актуальность поиска распадов $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ с легкими лептонами в конечном состоянии и приводятся простые оценки для парциальных ширин таких распадов. В разд. 2 даются определения гамильтонианов и адронных матричных элементов, которые необходимы для вычисления различных характеристик распадов $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$. Раздел 3 посвящен исследованию общей структуры амплитуды распадов $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$, в том числе фиксации вычитательных членов. В разд. 4 соответствующая амплитуда вычисляется точно с учетом вклада тормозного излучения и резонансов. Раздел 5 содержит численные предсказания для парциальных ширин и однократные дифференциальные распределения, а также обсуждение полученных результатов. В Заключение представлены основные выводы работы. В Приложении А кратко дается кинематика четырехчастичных распадов.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В терминах фундаментальных полей кварков, лептонов и калибровочных бозонов гамильтониан для вычисления амплитуды четырехлептонных распадов $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ имеет вид

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}(x) = \mathcal{H}_W(x) + \mathcal{H}_{\text{em}}(x). \quad (3)$$

Гамильтониан слабых переходов $\bar{c} \rightarrow \bar{s} W^- \rightarrow \bar{s} \ell^- \bar{\nu}_\ell$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_W(x) = & -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} \left(\bar{c}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) s(x) \right) \times \\ & \times \left(\bar{\ell}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_\ell(x) \right) + \text{h.c.}, \end{aligned}$$

где $c(x)$ и $s(x)$ — поля кварков, $\ell(x)$ и $\nu_\ell(x)$ — поля заряженных лептонов и нейтрино соответственно, G_F — константа Ферми, V_{cs} — матричный элемент ККМ-матрицы, матрица γ^5 определена согласно $\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5$.

Гамильтониан электромагнитного взаимодействия записывается как

$$\mathcal{H}_{\text{em}}(x) = -e \sum_f Q_f \left(\bar{f}(x) \gamma^\mu f(x) \right) A_\mu(x) = -j_{\text{em}}^\mu(x) A_\mu(x).$$

Элементарный заряд $e = |e| > 0$ нормирован условием $e^2 = 4\pi\alpha_{\text{em}}$, где $\alpha_{\text{em}} \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры, Q_f — заряд фермиона аромата f в единицах элементарного заряда, $f(x)$ — поле фермионов аромата f и $A_\mu(x)$ — 4-потенциал электромагнитного поля.

Для описания вклада промежуточного $\varphi(1020)$ -резонанса в распады $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ используется модель доминантности векторных мезонов (VMD). В рамках этой модели взаимодействие векторного мезона с фотоном задается при помощи эффективного гамильтониана

$$\mathcal{H}_{\text{VMD}}(x) = -e \sum_{V_i} \frac{M_{V_i}^2}{f_{V_i}} V_i^\mu(x) A_\mu(x), \quad (4)$$

где $V_i^\mu(x)$ — эффективное поле векторного мезона V_i , а M_{V_i} — масса этого мезона. Безразмерная константа взаимодействия f_{V_i} определяется как

$$\langle 0 | j_{\text{em}}^\mu(0) | V_i(M_{V_i}, p, \varepsilon) \rangle = e \varepsilon^\mu \frac{M_{V_i}^2}{f_{V_i}}.$$

Данное определение однозначно фиксирует знак f_{V_i} . Абсолютная величина константы f_{V_i} вычисляется из экспериментального значения ширины распада $V_i \rightarrow \ell^+ \ell^-$ в легкие лептоны, т.е. при $M_{V_i} \gg m_\ell$. В работе [19] найдено, что $f_{\varphi(1020)} = -13.2$.

Заметим, что определения гамильтонианов $\mathcal{H}_W(x)$, $\mathcal{H}_{\text{em}}(x)$ и $\mathcal{H}_{\text{VMD}}(x)$ в настоящей работе отличаются знаком от аналогичных определений в работе [1] и совпадают по знаку с определениями в работе [4].

Для дальнейших вычислений определим следующие адронные матричные элементы:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{c} \gamma^\mu \gamma^5 s | D_s^-(M_1, p) \rangle &= i f_{D_s} p^\mu, \\ \langle 0 | \bar{c} \gamma^\mu s | D_s^{*-}(M_{D_s^*}, k, \varepsilon) \rangle &= \varepsilon^\mu M_{D_s^*} f_{D_s^*}, \\ \langle V(M_2, q, \varepsilon) | \bar{c} \gamma_\mu s | D_s^-(M_1, p) \rangle &= \\ &= \frac{2 V(k^2)}{M_1 + M_2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{*\nu} p^\alpha q^\beta, \quad (5) \\ \langle V(M_2, q, \varepsilon) | \bar{c} \gamma_\mu \gamma^5 s | D_s^-(M_1, p) \rangle &= \\ &= i \varepsilon^{*\nu} \left[(M_1 + M_2) A_1(k^2) g_{\mu\nu} - \frac{A_2(k^2)}{M_1 + M_2} (p + q)_\mu p_\nu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 M_2}{k^2} (A_3(k^2) - A_0(k^2)) k_\mu p_\nu \right], \\ \langle D_s^{*-}(M_{D_s^*}, k, \varepsilon) | \bar{c} \gamma^\mu c | D_s^-(M_1, p) \rangle &= \\ &= \frac{2 V_c(q^2)}{M_1 + M_{D_s^*}} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{*\nu} p^\alpha k^\beta, \end{aligned}$$

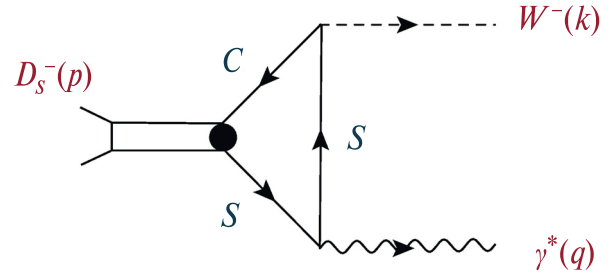


Рис. 1. Диаграмма, описывающая излучение виртуального фотона s -кварком D_s^- -мезона.

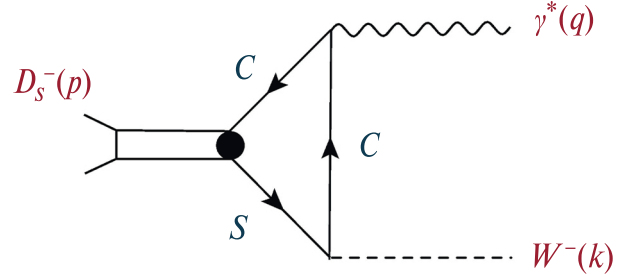


Рис. 2. Диаграмма, описывающая излучение виртуального фотона c -кварком D_s^- -мезона.

где M_1 — масса D_s^- -мезона, $p^\mu = q^\mu + k^\mu$ — 4-импульс D_s^- -мезона, M_2 и $M_{D_s^*}$ — массы промежуточных векторных мезонов, ε^μ — поляризации промежуточных векторных мезонов, а компоненты полностью антисимметричного тензора $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ заданы условием $\varepsilon^{0123} = -1$.

3. ОБЩАЯ СТРУКТУРА АМПЛИТУД ДЛЯ РАСПАДОВ $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ В ПРЕДЕЛЕ НУЛЕВЫХ ЛЕПТОННЫХ МАСС

Определим $q = k_1 + k_2$ и $k = k_3 + k_4$. В амплитуду $\mathcal{M}_{fi}(q^2, k^2)$ распадов $D_s^-(p) \rightarrow \gamma^*(q) W^-(k) \rightarrow \ell^+(k_1) \ell^-(k_2) \bar{\nu}_{\ell'}(k_3) \ell'^-(k_4)$, когда аромат лептона ℓ не совпадает с ароматом лептона ℓ' , вносят вклад три основных типа диаграмм. Первый тип отвечает ситуации, когда виртуальный фотон излучается легким s -кварком (см. рис. 1). Второй тип соответствует излучению виртуального фотона относительно тяжелым c -кварком (см. рис. 2). Наконец, третий тип связан с процессом тормозного излучения, когда виртуальный фотон излучается заряженным лептоном в конечном состоянии (см. рис. 3).

Общая структура амплитуды, отвечающей диаграммам рис. 1, рис. 2 и рис. 3, может быть представлена в виде

$$\mathcal{M}_{fi}(q^2, k^2) \sim \frac{1}{q^2} T_{\mu\nu}(q, k) j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3), \quad (6)$$

где

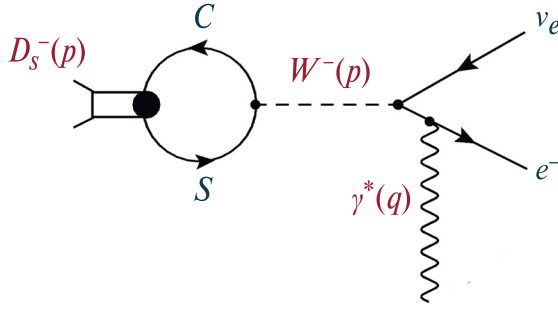


Рис. 3. Диаграмма, соответствующая тормозному излучению виртуального фотона.

$$T^{\mu\nu}(q, k) = i \int d^4x e^{i(qx)} \langle 0 | T(j_{\text{em}}^\nu(x), V^\mu(0) - A^\mu(0)) | D_s^-(M_1, p) \rangle = T_V^{\mu\nu}(q, k) - T_A^{\mu\nu}(q, k).$$

Адронные токи определены как

$$V^\mu(x) = \bar{c}(x) \gamma^\mu s(x) \quad \text{и} \quad A^\mu(x) = \bar{c}(x) \gamma^\mu \gamma^5 s(x),$$

а лептонные токи имеют вид

$$j^\nu(k_2, k_1) = (\bar{\ell}(k_2) \gamma^\nu \ell(-k_1)) \quad \text{и} \\ J^\mu(k_4, k_3) = (\bar{\ell}(k_4) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\ell(-k_3)).$$

В выражении (6) для амплитуды $\mathcal{M}_{fi}(q^2, k^2)$ явно выделен полюс $1/q^2$ от фотонного пропагатора. Для обрезаия данного полюса в области $q^2 \rightarrow 0$ необходимо учесть, что лептоны имеют ненулевые массы и подвергаются различным процедурам кинематического отбора при регистрации на экспериментальных установках. Учет производится как при помощи точной формулы (А.3) для четырехчастичного фазового объема, так и с помощью эффективного обрезаия при некотором значении q_{min}^2 . Для $\ell \equiv \mu$ в качестве величины q_{min}^2 имеет смысл выбрать естественный кинематический порог, равный $4m_\mu^2$. В то время как для $\ell \equiv e$ разумно остановиться на кинематических ограничениях, обусловленных возможностями конкретной экспериментальной установки. Например, в электромагнитном калориметре установки LHCb регистрируются e^- и e^+ с поперечными импульсами $p_T > 200$ МэВ. Это почти на три порядка больше, чем масса электрона или позитрона, и по порядку величины совпадает с массой мюона. В подразделе 5.2 этот вопрос будет обсуждаться подробнее.

Тензор $T^{\mu\nu}(q, k)$ удовлетворяет условию поперечности: $q_\nu T^{\mu\nu}(q, k) = 0$. Тогда с учетом данного условия, следуя работам [4, 20], для векторной и аксиальной частей тензора $T^{\mu\nu}(q, k)$ можем написать:

$$T_V^{\mu\nu}(q, k) = \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \frac{e a(q^2, k^2)}{M_1} \quad (7)$$

и

$$T_A^{\mu\nu}(q, k) = i \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\nu q^\mu}{q^2} \right) e M_1 b(q^2, k^2) + \\ + 2ie \left(k^\nu - \frac{(qk)}{q^2} q^\nu \right) \left(k^\mu \frac{d(q^2, k^2)}{M_1} - q^\mu \frac{c(q^2, k^2)}{M_1} \right) + \\ + ie Q_{D_s} f_{D_s} \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} + ie Q_{D_s} f_{D_s} \frac{q_\nu k_\mu}{q^2}, \quad (8)$$

где $Q_{D_s} = Q_s - Q_c = -1$ – электрический заряд D_s^- -мезона в единицах положительного элементарного заряда, $a(q^2, k^2), \dots, d(q^2, k^2)$ – безразмерные формфакторы, которые являются функциями двух переменных – квадратов переданных 4-импульсов – q^2 и k^2 . Заметим, что тензор $T_V^{\mu\nu}(q, k)$ автоматически поперечен. Поэтому специально заботиться необходимо только о поперечности тензора $T_A^{\mu\nu}(q, k)$, что нашло свое отражение в выражении (8).

Формула (8) содержит кинематическую особенность при $q^2 \rightarrow 0$. Как было отмечено в [7], эта особенность не может отвечать реальной частице, поскольку в канале излучения $\ell^+ \ell^-$ -пары отсутствует безмассовый векторный мезон, а полюс фотонного пропагатора был явно учтен в формуле (6). Поэтому необходимо, чтобы комбинации формфакторов при лоренцевских структурах $q_\nu q_\mu/q^2$ и $q_\nu k_\mu/q^2$ при $q^2 \rightarrow 0$ стремились к нулю. Если следовать только логике работы [4], то из (8) сразу следует, что $b(0, 0) = c(0, 0) + Q_{D_s} f_{D_s}/M_1$ и $d(0, 0) = Q_{D_s} f_{D_s}/M_1$. Однако работа [7] позволяет продвинуться существенно дальше.

Рассмотрим комбинацию формфакторов при $q_\nu k_\mu/q^2$. Имеем

$$Q_{D_s} f_{D_s} - \frac{2(qk)}{M_1} d(q^2, k^2) \Big|_{q^2 \rightarrow 0} = 0.$$

Отсюда

$$d(0, k^2) = \frac{Q_{D_s} f_{D_s}}{M_1} \frac{1}{1 - x_{34}}, \quad (9)$$

где $x_{34} = k^2/M_1^2$. Теперь рассмотрим общее выражение для $d(q^2, k^2)$. Имеем:

$$d(q^2, k^2) = d(0, k^2) + \Delta(q^2, k^2).$$

Чтобы согласовать данную формулу с выражением (9), наложим на функцию $\Delta(q^2, k^2)$ дополнительное условие: $\Delta(0, k^2) = 0$.

Если мы ожидаем, что в функцию $\Delta(q^2, k^2)$ дает вклад только один промежуточный узкий векторный резонанс $\phi(1020)$, то в рамках VMD функцию $\Delta(q^2, k^2)$ можно представить в виде

$$\Delta(q^2, k^2) = \frac{f(k^2)}{q^2 - \delta},$$

где $\delta = M_2^2 - i\Gamma_2 M_2 \approx M_2^2$ для узких резонансов вдали от точки $q^2 = M_2^2$. Поскольку функция

$\Delta(0, k^2) = -f(k^2)/\delta$ не удовлетворяет дополнительному условию, то необходимо сделать минимум одно вычитание и вместо функции $\Delta(q^2, k^2)$ рассматривать функцию

$$\tilde{\Delta}(q^2, k^2) = \Delta(q^2, k^2) - \Delta(0, k^2) \approx \frac{q^2}{M_2^2} \Delta(q^2, k^2),$$

для которой $\tilde{\Delta}(0, k^2) = 0$. Окончательно

$$d(q^2, k^2) = \frac{Q_{D_s} f_{D_s}}{M_1} \frac{1}{1 - x_{34}} + \frac{q^2}{M_2^2} \Delta(q^2, k^2). \quad (10)$$

Теперь рассмотрим комбинацию формфакторов при $q_\nu q_\mu/q^2$. Имеем

$$Q_{D_s} f_{D_s} + \frac{2(qk)}{M_1} c(q^2, k^2) - M_1 b(q^2, k^2) \Big|_{q^2 \rightarrow 0} = 0.$$

Это дает следующее выражение для функции $c(0, k^2)$:

$$c(0, k^2) = -\frac{Q_{D_s} f_{D_s}}{M_1} \frac{1}{1 - x_{34}} + \frac{b(0, k^2)}{1 - x_{34}}.$$

Если для вычисления функций $b(q^2, k^2)$ и $c(q^2, k^2)$ снова воспользоваться приближением VMD с вычитательной процедурой, то получим:

$$b(q^2, k^2) = \frac{q^2}{M_2^2} \frac{g(k^2)}{q^2 - \delta}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что $b(0, k^2) = 0$. Тогда

$$c(q^2, k^2) = -\frac{Q_{D_s} f_{D_s}}{M_1} \frac{1}{1 - x_{34}} + \frac{q^2}{M_2^2} \frac{h(k^2)}{q^2 - \delta}. \quad (12)$$

Вопрос о проведении вычитательной процедуры для функции $a(q^2, k^2)$ из формулы (7) остается открытым. В данной работе мы предполагаем, что

$$a(q^2, k^2) = \frac{q^2}{M_2^2} \frac{r(k^2)}{q^2 - \delta}. \quad (13)$$

Функции $f(k^2)$, $g(k^2)$, $h(k^2)$ и $r(k^2)$ однозначно вычисляются в рамках приближения VMD.

При помощи выражений (7), (8) и уравнений движения в пределе нулевых лептонных масс можно написать следующую общую структуру для амплитуды (6):

$$\mathcal{M}_{fi}(q^2, k^2) \sim \frac{e}{q^2} \left(\epsilon_{\nu\mu qk} \frac{a(q^2, k^2)}{M_1} - i g_{\nu\mu} M_1 b(q^2, k^2) + i k_\nu q_\mu \frac{2ic(q^2, k^2)}{M_1} \right) j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3). \quad (14)$$

В этом пределе функция $d(q^2, k^2)$ выпадает из амплитуды (14). Однако для ненулевых масс заряженных лептонов вклад от $d(q^2, k^2)$ необходимо учитывать.

Последовательное вычисление функций $a(q^2, k^2)$, $b(q^2, k^2)$ и $c(q^2, k^2)$ представляет собой сложную задачу. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением только резонансного вклада легчайшего векторного мезона, который будет записан с учетом вычитательной процедуры, и процессами тормозного излучения.

4. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСПАДА $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$

Рассмотрим распады $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ и $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$, когда в конечном состоянии отрицательно заряженные легкие лептоны имеют разный аромат. В общем виде эти распады можно записать как $D_s^-(p, M_1) \rightarrow \ell^+(k_1) \ell^-(k_2) \bar{\nu}_{\ell'}(k_3) \ell'^-(k_4)$.

Начнем с вычисления вклада от излучения виртуального фотона s -кварком, который показан на рис. 1. Если положить $m_\ell = m_{\ell'} = 0$ и воспользоваться явным видом эффективных гамильтонианов (3) и (4), то можно найти, что в рамках модели доминантности векторных мезонов с вычитанием вклад процесса рис. 1 описывается при помощи диаграммы рис. 4, а соответствующая этой диаграмме амплитуда имеет вид

$$\mathcal{M}_{fi}^{(s)} = \frac{\mathcal{A}}{f_V} \frac{1}{q^2 - M_2^2 + i\Gamma_2 M_2} \mathcal{F}_{\mu\nu} j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3), \quad (15)$$

где $\mathcal{A} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} 4\pi \alpha_{em} V_{cs}$. С учетом определения (5) и уравнений движения для безмассовых лептонов находим структуру $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ в виде:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{2V(k^2)}{M_1 + M_2} \epsilon_{\mu\nu kq} - i(M_1 + M_2) A_1(k^2) g_{\mu\nu} + 2i \frac{A_2(k^2)}{M_1 + M_2} q_\mu k_\nu.$$

В формуле (15) принимается во внимание вклад только одного легчайшего $\varphi(1020)$ -резонанса. Формфакторы $V(k^2)$, $A_1(k^2)$ и $A_2(k^2)$ являются формфакторами перехода $D_s \rightarrow \varphi(1020)$. Данная формула позволя-

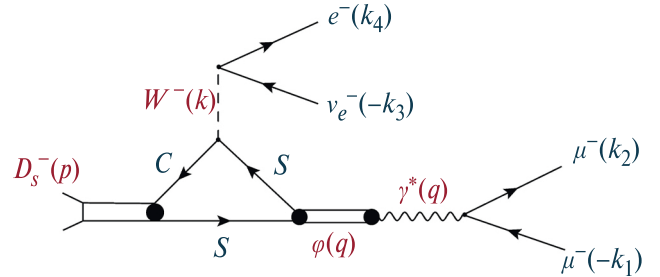


Рис. 4. Диаграмма для вычисления амплитуды $\mathcal{M}_{fi}^{(s)}$ (см. формулу (15)) на примере распада $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$. Излучение виртуального фотона s -кварком описывается в рамках модели доминантности векторных мезонов (4).

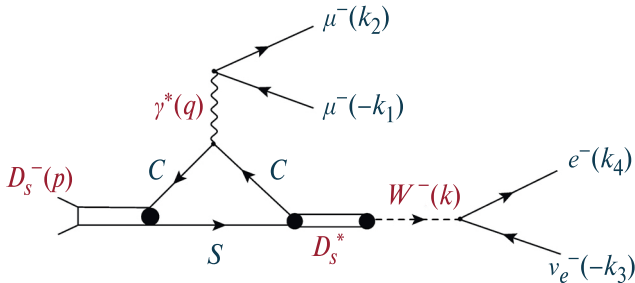


Рис. 5. Диаграмма для вычисления амплитуды $\mathcal{M}_{fi}^{(c)}$ (см. формулу (16)) на примере распада $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$.

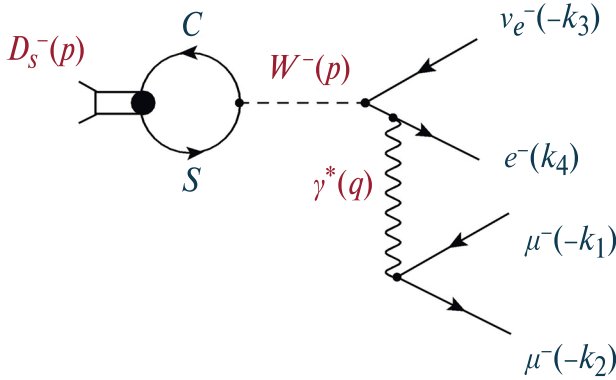


Рис. 6. Диаграмма для вычисления амплитуды тормозного излучения (см. формулу (17)) на примере распада $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$.

ет найти явный вид функций $g(k^2)$, $h(k^2)$ и $r(k^2)$, которые были введены в предыдущем разделе. Масса M_2 соответствует массе $\varphi(1020)$ -резонанса.

Вклад процесса рис. 2 дается диаграммой рис. 5, которая является кросс-каналом распада $D_s^- \rightarrow D_s^* \gamma^*$ векторного мезона в псевдоскалярный мезон и виртуальный фотон. С учетом определения (5) амплитуда такого процесса может быть записана в виде

$$\mathcal{M}_{fi}^{(c)} = -\frac{4}{3} \frac{\mathcal{A}}{q^2} \frac{M_{D_s^*} f_{D_s^*}}{k^2 - M_{D_s^*}^2} \frac{V_c(q^2)}{M_1 + M_{D_s^*}} \epsilon_{\mu\nu k q} \times j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3). \quad (16)$$

Мнимая добавка в пропагаторе отсутствует, поскольку $k^2 \leq (M_{D_s} - 2m_\ell)^2 < M_{D_s^*}^2$.

Перейдем к рассмотрению процесса тормозного излучения виртуального фотона, который описывается при помощи диаграммы рис. 6. Данный процесс корректно рассматривать, когда $m_\ell \neq 0$ и $m_{\ell'} \neq 0$. В этом случае амплитуда тормозного излучения имеет вид

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\text{brem})} = i \frac{\mathcal{A}}{q^2} f_{D_s} g_{\mu\nu} j^\nu(k_2, k_1) \tilde{J}^\mu(k_4, k_3),$$

где

$$\tilde{J}^\mu(k_4, k_3) = J^\mu(k_4, k_3) + \frac{m_{\ell'}}{(p - k_3)^2 - m_{\ell'}^2} \times \left(\bar{\ell}'(k_4) \gamma^\mu (\hat{p} + m_{\ell'}) (1 - \gamma^5) \nu_{\ell'}(-k_3) \right).$$

Поскольку $(2m_\ell + m_{\ell'})^2 \leq (p - k_3)^2 \leq M_1^2$, то второе слагаемое не содержит полюсов во всей кинематически разрешенной области. Второе слагаемое может быть сравнимо с первым только в области, где $(p - k_3)^2 \sim (2m_\ell + m_{\ell'})^2$. Но эта область подавлена при интегрировании по фазовому объему (А.3). Поэтому с хорошей степенью точности можем положить, что амплитуда тормозного излучения имеет вид

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\text{brem})} = i \frac{\mathcal{A}}{q^2} f_{D_s} g_{\mu\nu} j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3). \quad (17)$$

Суммируя результаты предыдущего и данного разделов можем окончательно записать амплитуду распада $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \mathcal{M}_{fi}^{(s)} + \mathcal{M}_{fi}^{(c)} + \mathcal{M}_{fi}^{(\text{brem})} = \\ &= \frac{\mathcal{A}}{q^2} \left[\frac{a(q^2, k^2)}{M_1} \epsilon_{\mu\nu k q} - i M_1 b(q^2, k^2) g_{\mu\nu} + \right. \\ &\quad \left. + 2i \frac{c(q^2, k^2)}{M_1} q_\mu k_\nu \right] j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3), \quad (18) \end{aligned}$$

где безразмерные функции $a(q^2, k^2) \equiv a(x_{12}, x_{34})$, $b(q^2, k^2) \equiv b(x_{12}, x_{34})$ и $c(q^2, k^2) \equiv c(x_{12}, x_{34})$ заданы выражениями:

$$\begin{aligned} a(x_{12}, x_{34}) &= -\frac{2}{3} \frac{\hat{M}_{D_s^*} \hat{f}_{D_s^*}}{x_{34} - \hat{M}_{D_s^*}^2 + i \hat{\Gamma}_{D_s^*} \hat{M}_{D_s^*}} \frac{2V_c(M_1^2 x_{12})}{1 + \hat{M}_{D_s^*}} + \\ &\quad + \frac{1}{f_V} \frac{x_{12}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i \hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \frac{2V(M_1^2 x_{34})}{1 + \hat{M}_2}; \\ b(x_{12}, x_{34}) &= -\hat{f}_{D_s} + \frac{1}{f_V} \frac{x_{12}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i \hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \times \\ &\quad \times (1 + \hat{M}_2) A_1(M_1^2 x_{34}); \\ c(x_{12}, x_{34}) &= \frac{\hat{f}_{D_s}}{1 - x_{34}} + \\ &\quad + \frac{1}{f_V} \frac{x_{12}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i \hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \frac{A_2(M_1^2 x_{34})}{1 + \hat{M}_2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Безразмерные переменные $x_{12} = q^2/M_1^2$ и $x_{34} = k^2/M_1^2$ определены в Приложении А. Входящие в (19) безразмерные постоянные заданы следующим образом: $\hat{f}_{D_s} = f_{D_s}/M_1$, $\hat{f}_{D_s^*} = f_{D_s^*}/M_1$, $\hat{M}_2 = M_2/M_1$, $\hat{M}_{D_s^*} = M_{D_s^*}/M_1$, $\hat{\Gamma}_2 = \Gamma_2/M_1$ и $\hat{\Gamma}_{D_s^*} = \Gamma_{D_s^*}/M_1$. Заметим, что формфакторы $V_c(q^2)$, $V(k^2)$, $A_1(k^2)$ и $A_2(k^2)$ также являются безразмерными функциями.

Дифференциальная парциальная ширина распада $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\tau_{D_s^-}} \frac{d\text{Br}(D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-)}{d\Phi_4} = \frac{\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{fi}|^2}{2M_1}, \quad (20)$$

где $\tau_{D_s^-}$ — время жизни D_s^- -мезона, 4-частичный фазовый объем $d\Phi_4$ задается выражением (А.3), суммирование происходит по спинам всех конечных лептонов. Номер спина лептона соответствует номеру 4-импульса этого лептона.

В заключении данного раздела имеет смысл обсудить соответствие между формфакторами F_V , F_{1A} и F_{2A} работы [7] и аналогичными им безразмерными функциями (19). Пусть $\tilde{F}_V = F_V$ — вычитательные члены. Аналогично введем $\tilde{F}_{1A}$, $\tilde{F}_{2A}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$. Наконец обозначим $\tilde{a} = a$ — вклад (16). Тогда имеет место следующее соответствие: $\tilde{F}_V(\dots) = \tilde{a}(\dots)$, $\tilde{F}_{1A}(\dots) = M_1^2 \tilde{b}(\dots)/(kq)$ и $\tilde{F}_{2A} = M_1^2 \tilde{b}(\dots)/(kq) - 2\tilde{c}(\dots)$. Вычитательные члены и дополнительные вклады в обеих работах разные и прямо не переходят друг в друга.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Выбор численных значений для адронных констант и формфакторов переходов

Для вычисления парциальных ширин и нахождения формы дифференциальных распределений используются значения масс, времен жизни, ширин распадов псевдоскалярных и векторных мезонов и матричные элементы ККМ-матрицы из [10]. Численная параметризация формфакторов переходов $D_s \rightarrow \varphi(1020)$ взята из работы [21]. Лептонная константа $f_{D_s} \approx 220$ МэВ [21], что не более чем на 10% отличается от актуальных результатов, полученных при помощи вычислений на решетке [22]. Поскольку предложенный нами метод имеет худшую точность, то данное численное различие не является критичным.

В выражение (19) для $a(x_{12}, x_{34})$ входят константа $f_{D_s^*}$ и формфактор $V_c(q^2)$. Чтобы оценить величину $f_{D_s^*}$, воспользуемся подходом эффективной теории тяжелых кварков (НҚЕТ). Тогда

$$\frac{f_{D_s^*}}{f_{D_s}} \approx \frac{f_{B^*}}{f_{B_u}}.$$

Если взять численные значения лептонных констант f_{B^*} и f_{B_u} из работы [1], то $f_{D_s^*}/f_{D_s} \approx 0.96$. С той точностью, с которой в настоящей статье проводятся вычисления, это означает, что фактически можно брать $f_{D_s^*} = f_{D_s}$.

Аналогично в приближении эффективной теории тяжелых кварков можем написать

$$\frac{V_c(0)}{V_b(0)} \approx \frac{f_D}{f_{B_u}}.$$

Заемствуя численные значения константы f_D из [21], а величин f_{B_u} и $V_b(0)$ — из [1], найдем, что $V_c(0) \approx 1.1$. Применяя аргументацию работы [20] к диаграмме рис. 2, для формфактора $V_c(q^2)$ запишем простую полюсную параметризацию:

$$V_c(q^2) = \frac{V_c(0)}{1 - q^2/M_{J/\psi}^2}.$$

5.2. Вычисление парциальных ширин распадов

$$D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^- \text{ и } D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$$

Согласно (18) амплитуда распадов $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ может быть записана в виде:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{2\sqrt{2}\pi G_F \alpha_{\text{em}} V_{cs}}{M_1^2} \sum_{\{L\}} \frac{1}{x_{12}} L_{\mu\nu} j^\nu J^\mu, \quad (21)$$

где j^ν и J^μ — лептонные токи, а $L_{\mu\nu}$ — различные лоренцевы структуры, которые входят в формулу (18). Тогда из (20) получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Br}(D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-) &= \\ &= \frac{\tau_{D_s^-}}{2M_1} \int \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \right) d\Phi_4 = \\ &= \frac{4\pi^2 G_F^2 \alpha_{\text{em}}^2 |V_{cs}|^2}{M_1^5} \tau_{D_s^-} \times \\ &\times \int \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \left| \sum_{\{L\}} \frac{1}{x_{12}} L_{\mu\nu} j^\nu J^\mu \right|^2 \right) d\Phi_4. \quad (22) \end{aligned}$$

Для проведения численного интегрирования выражения (22) по фазовому объему будем использовать программный пакет EvtGen [23] и перепишем (22) в виде:

$$\begin{aligned} \text{Br}(D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-) &\approx \\ &\approx \frac{4\pi^2 G_F^2 \alpha_{\text{em}}^2 |V_{cs}|^2}{M_1^5} \tau_{D_s^-} \left(M_1^6 |X|^2 \right) \frac{N_0}{N_{\text{tot}}} \Phi_4(0) = \\ &= \frac{\alpha_{\text{em}}^2 |V_{cs}|^2}{3 \cdot 2^{11} \cdot \pi^3} \tau_{D_s^-} G_F^2 M_1^5 |X|^2 \frac{N_0}{N_{\text{tot}}}, \quad (23) \end{aligned}$$

где N_{tot} — полное число событий, разыгранных Монте-Карло генератором EvtGen при помощи амплитуды (21); N_0 — число принятых событий; $|X|^2$ — максимальное значение безразмерной величины

$$\frac{\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \left| \sum_{\{L\}} \frac{1}{x_{12}} L_{\mu\nu} j^\nu J^\mu \right|^2}{M_1^6},$$

а $\Phi_4(0) = \frac{M_1^4}{3 \cdot 2^{13} \cdot \pi^5}$ — четырехчастичный фазовый объем при нулевых значениях лептонных масс. Поясним, откуда в знаменателе последней формулы появляется множитель M_1^6 . В используемом нами методе величина $|X|^2$ должна быть безразмерной. Хорошо известно, что размерность лептонных токов $j^\nu(k_2, k_1)$ и $J^\mu(k_4, k_3)$ совпадает с размерностью массы. А из формул (18) и (19) сразу следует, что любая лептонная структура $L_{\mu\nu}$ также имеет размерность массы. Отсюда видно, что безразмеривать числитель надо шестой степенью массы.

Используемый нами алгоритм вычисления парциальной ширины работает следующим образом. На

первом шаге следует определить значение константы $|X|^2$. Для этого проводится генерация событий в районе предполагаемого максимума матричного элемента. На втором шаге выполняется Монте-Карло интегрирование методами EvtGen при различных значениях N_{tot} , последовательно увеличивая полное число событий. Когда численное значение парциальной ширины, вычисленное при каждой последующей итерации, стабильно отличается от предыдущей итерации менее чем на 1%, процедура интегрирования прекращается. Заметим, что основная ошибка численного значения парциальной ширины возникает из неточности непертурбативного вычисления адронных матричных элементов.

Начнем с вычисления парциальной ширины распада $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$. В этом случае максимум квадрата модуля матричного элемента приходится на область $\phi(1020)$ -резонанса. В качестве кинематических ограничений снизу выберем $x_{12 \min} = 4\hat{m}_\mu^2 \approx 0.01$ и $x_{34 \min} = \hat{m}_e^2 \approx 0$, где $\hat{m}_\ell = m_\ell/M_1$. Значение $M_1^2 x_{12 \min}$ служит естественным параметром обрезания вклада фотонного полюса $\sim 1/q^2$ в формуле (18). Численное интегрирование дает

$$\text{Br}(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \Big|_{x_{12 \min}=0.01} \approx \approx 0.2 \frac{\tau_{D_s}}{5.04 \times 10^{-13} \text{ с}} \frac{|V_{cs}|^2}{0.95} \times 10^{-5}. \quad (24)$$

Результат (24) хорошо согласуется с наивной оценкой (1), что является дополнительным аргументом в пользу правильности проведенных вычислений. Неопределенность численного предсказания (24) напрямую зависит от неопределенности в величинах и параметризации адронных формфакторов и составляет примерно 30%.

Теперь рассмотрим парциальную ширину распада $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$. Как было отмечено в работе [1], если в качестве $x_{12 \min}$ для этого случая выбрать значение $4\hat{m}_e^2$, то такой выбор не будет соответствовать экспериментальной процедуре отбора событий, поскольку эффективность регистрации электрон-позитронных пар мала, если $\sqrt{q^2}$ меньше примерно 100 МэВ. Таким образом, область $\sqrt{q^2}$ от $2m_e$ до 100 МэВ не детектируется на современных установках и, следовательно, должна быть исключена из теоретических предсказаний. В свете вышесказанного для вычисления парциальной ширины распада $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ выберем $x_{12 \min} = \Lambda^2/M_1^2$. При $\Lambda = 100$ МэВ величина $x_{12 \min} = 0.003$. В этом случае численное интегрирование дает

$$\text{Br}(D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-) \Big|_{x_{12 \min}=0.003} \approx \approx 0.5 \frac{\tau_{D_s}}{5.04 \times 10^{-13} \text{ с}} \frac{|V_{cs}|^2}{0.95} \times 10^{-5}, \quad (25)$$

что прекрасно согласуется с наивной оценкой (2). Если выбрать $\Lambda = 200$ МэВ (чему соответствует

$x_{12 \min} = 0.01$), то в рамках 30%-ной точности настоящих вычислений, при которой можно пренебречь различием в фазовых объемах конечных состояний $\mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ и $e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$, имеет место следующее приближенное равенство:

$$\text{Br}(D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-) \Big|_{x_{12 \min}=0.01} \approx \approx \text{Br}(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \Big|_{x_{12 \min}=0.01}.$$

С ростом значения $x_{12 \min}$ парциальные ширины распадов $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ будут убывать и практически обратятся в нуль при $x_{12 \min} > M_{\phi(1020)}^2/M_1^2 \approx 0.3$. При выборе $x_{12 \min} > 0.3$ представленная в настоящей работе теория, по всей видимости, неприменима, поскольку в данной области следует учитывать нерезонансный вклад от распада $D_s^- \rightarrow (\gamma^* \rightarrow \ell^+ \ell^-) \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ и резонансный вклад от $\phi(1680)$ -мезона. Отметим, что учет данных вкладов практически не скажется на численных результатах (24) и (25). Похожая ситуация обсуждалась в работах [1, 4] применительно к распадам $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$.

5.3. Дифференциальные распределения в распадах

$$D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^- \text{ и } D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$$

Рассмотрим распределения по переменной x_{12} , которые представлены на рис. 7. В связи с тем, что данные распределения имеют фотонный полюс и полюс в области $\phi(1020)$ -резонанса, эти распределения удобно строить в логарифмическом масштабе. Распределения по переменной x_{12} представлены вплоть до значения 0.4, что соответствует области применения рассматриваемой в настоящей работе теории. Для распада $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ значение квадрата инвариантной массы $\mu^+ \mu^-$ -пары ограничено снизу величиной $4\hat{m}_\mu^2$, что соответствует $x_{12 \min} = 0.01$. В распаде $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ квадрат инвариантной массы $e^+ e^-$ -пары ограничен снизу параметром Λ^2 , где $\Lambda = 100$ МэВ $\sim m_\mu$. Поэтому на рис. 7a резонансный вклад доминирует над вкладом фотонного полюса, в то время как на рис. 7b вклад фотонного полюса доминирует над резонансным вкладом.

Перейдем к распределениям по переменной x_{34} , которые изображены на рис. 8. Исходя из свойств рассматриваемой модели, в которой данные распределения в основном определяются интегрированием по резонансному вкладу, распределения по x_{34} имеют следующий качественный вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dx_{34}} &\sim g(x_{34}) \int_{x_{12 \min}}^{(1-\sqrt{x_{34}})^2} dx_{12} \frac{f(x_{12})}{\left(x_{12} - \hat{M}_2^2\right)^2 + \hat{\Gamma}_2^2 \hat{M}_2^2} \approx \\ &\approx g(x_{34}) \left(C_1 + C_2 \arctg \left(\frac{(1-\sqrt{x_{34}})^2 - \hat{M}_2^2}{\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \right) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

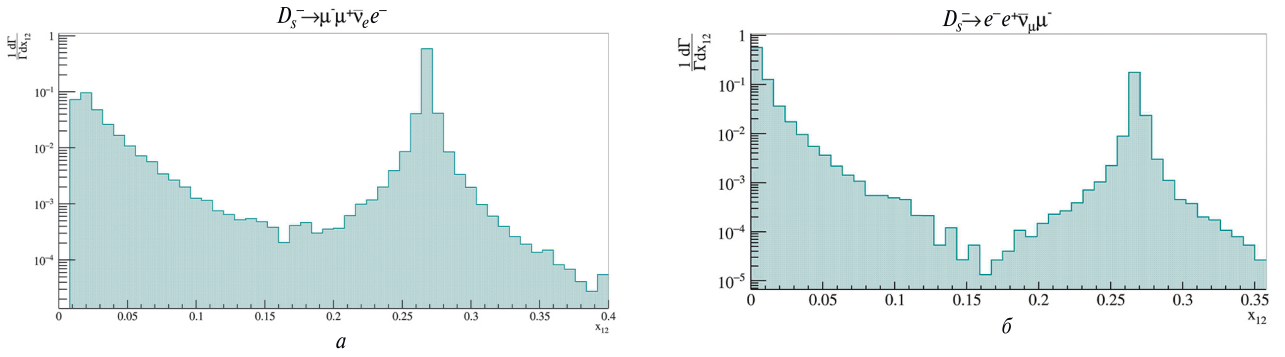


Рис. 7. Нормированные дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{12}}$ для распадов $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ при $x_{12 \min} = 0.01$ (а) и $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ при $x_{12 \min} = 0.003$ (б).

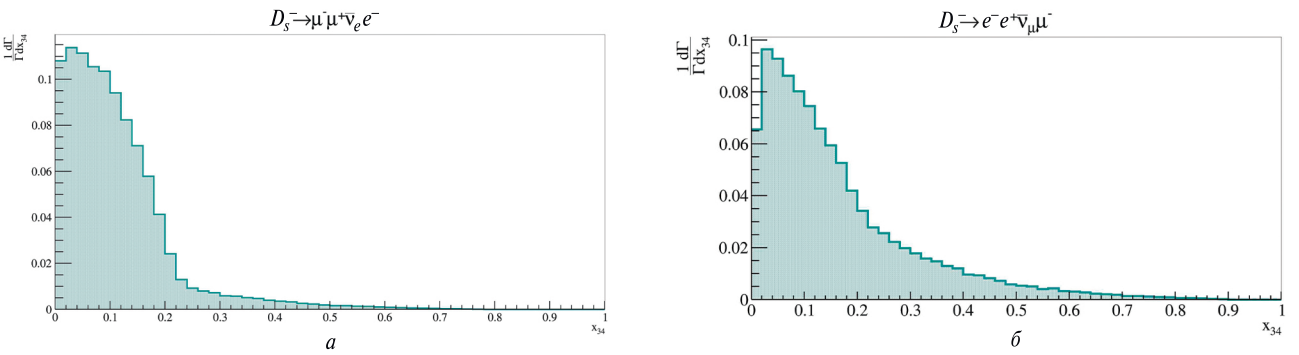


Рис. 8. Нормированные дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{34}}$ для распадов $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ (а) и $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ (б).

При вычислении интеграла в (26) мы положили $f(x_{12}) \approx f(\hat{M}_2^2)$, поскольку основной интеграл набирается в области узкого пика $\varphi(1020)$ -резонанса. Из формулы (26) видно, что "скачок" распределений $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{34}}$ должен происходить при

$$x_{34} = (1 - \hat{M}_2)^2 \approx 0.23.$$

Рис. 8 подтверждает данный качественный анализ.

Помимо распределений по переменным x_{12} и x_{34} с экспериментальной точки зрения имеет смысл ввести безразмерный квадрат инвариантной массы всех заряженных лептонов в четырехлептонных распадах D_s^- -мезонов. Данная переменная задается формулой

$$x_{124} = (k_1 + k_2 + k_4)^2 / M_1^2.$$

На рис. 9 показаны нормированные распределения по x_{124} . Из рисунка видно, что форма представленных распределений чувствительна к кинематике распада и выбору значения $x_{12 \min}$. На рис. 10 и 11 даны распределения по угловым переменным $\cos \theta_{12}$ и $\cos \theta_{34}$, которые задаются формулами (А.2). Эти распределения также проявляют чувствительность к выбору конечного лептонного состояния.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе

- в рамках Стандартной модели получено предсказание для парциальной ширины распада $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ на уровне

$$\begin{aligned} \text{Br}(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \Big|_{\sqrt{q^2} = 2 m_\mu} &\approx \\ &\approx 0.2 \frac{\tau_{D_s}}{5.04 \times 10^{-13} \text{ с}} \frac{|V_{cs}|^2}{0.95} \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Неопределенность данного предсказания составляет порядка 30%;

- в рамках Стандартной модели найдена парциальная ширина распада $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$

$$\begin{aligned} \text{Br}(D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-) \Big|_{\sqrt{q^2} = 100 \text{ МэВ}} &\approx \\ &\approx 0.5 \frac{\tau_{D_s}}{5.04 \times 10^{-13} \text{ с}} \frac{|V_{cs}|^2}{0.95} \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Неопределенность данного предсказания также оказывается порядка 30%;

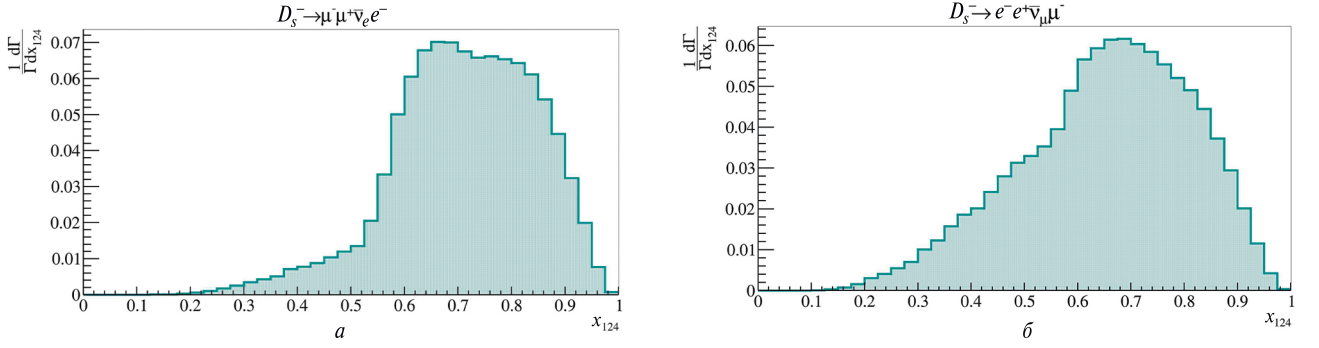


Рис. 9. Нормированные дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{124}}$ по безразмерному квадрату инвариантной массы всех заряженных лептонов в распадах $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ (а) и $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ (б).

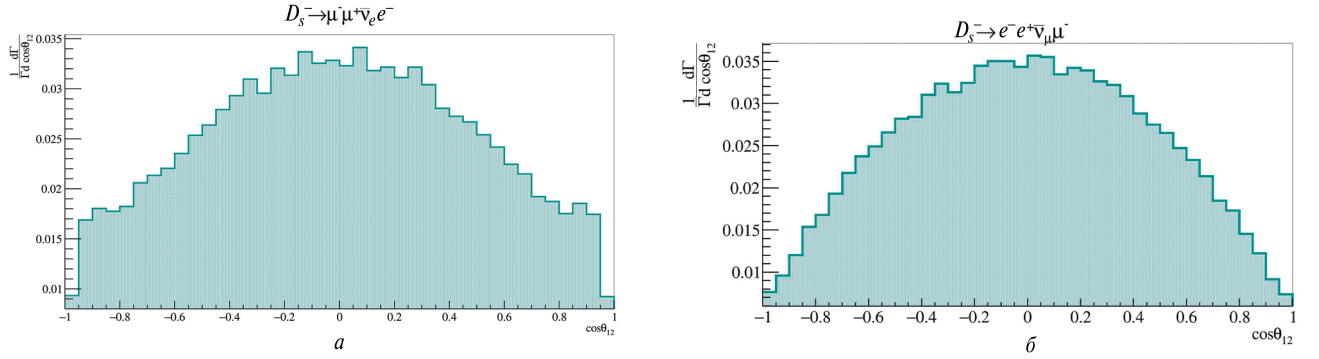


Рис. 10. Нормированные дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d \cos \theta_{12}}$ для распадов $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ (а) и $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ (б).

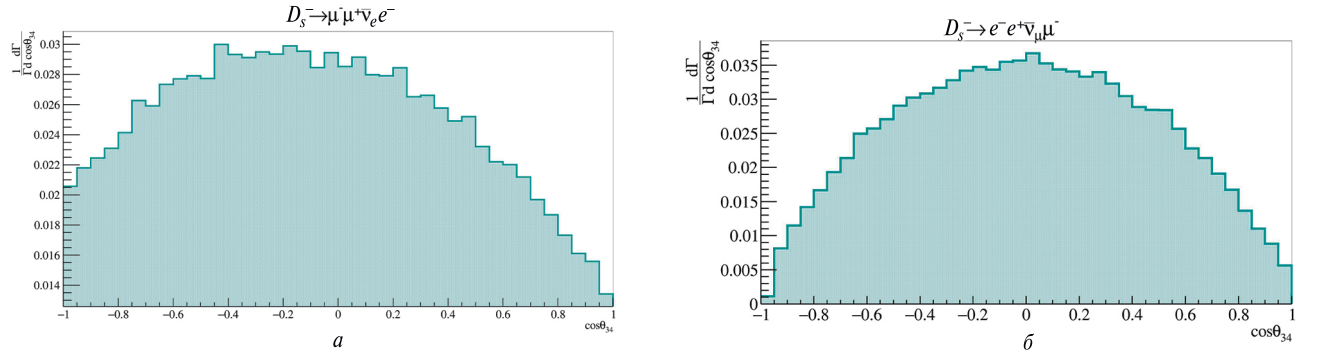


Рис. 11. Нормированные дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d \cos \theta_{34}}$ для распадов $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ (а) и $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ (б).

- показано, что распады $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ и $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ можно попытаться зарегистрировать на установке BESIII;
- построены и проанализированы однократные дифференциальные распределения для различных кинематических переменных в распадах $D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят И.М. Беляева, Э.Э. Бооса, А.А. Бузину, Л.В. Дудко и В.Ю. Егорычева за плодотворные дискуссии, способствовавшие улучшению работы. Кроме того авторы выражают благодарность за финансовую поддержку Российскому научному фонду, грант N 22-22-00297 "Редкие четырехлептон-

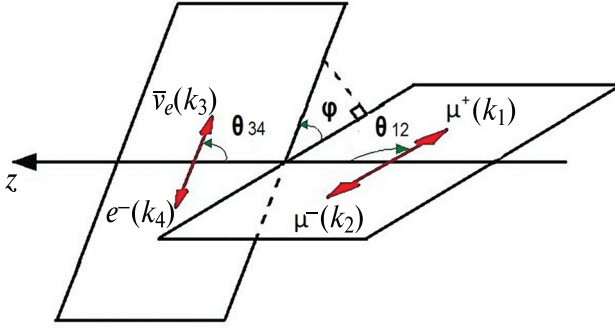


Рис. 12. Кинематика распада $D_s^-(p) \rightarrow \mu^+(k_1) \mu^-(k_2) \bar{\nu}_e(k_3) e^-(k_4)$. Угол θ_{12} определяется в системе покоя $\mu^+(k_1) \mu^-(k_2)$ -пары; θ_{34} определяется в системе покоя $\bar{\nu}_e(k_3) e^-(k_4)$ -пары; угол φ задается в системе покоя D_s^- -мезона.

ные распады тяжелых мезонов в Стандартной модели и ее расширениях”.

Приложение А:

Кинематика четырехлептонных распадов D_s^- -мезонов

Обозначим через k_i 4-импульсы конечных лептонов в четырехлептонном распаде $D_s^-(p, M_1) \rightarrow \ell^+(k_1) \ell^-(k_2) \bar{\nu}_{\ell'}(k_3) \ell'^-(k_4)$, где $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Введем следующие 4-импульсы:

$$q = k_1 + k_2; \quad k = k_3 + k_4; \quad p = q + k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

и $p^2 = M_1^2$. При дальнейших вычислениях удобно пользоваться безразмерными переменными $x_{ij} = (k_i + k_j)^2/M_1^2$, для которых справедливо равенство $x_{ij} = x_{ji}$. В данной статье используются $x_{12} = q^2/M_1^2$ и $x_{34} = k^2/M_1^2$. Практически во всех вычислениях настоящей работы, кроме вычисления вклада тормозного излучения, лептоны можно считать безмассовыми, т.е. полагать $k_i^2 = 0$. Поэтому, вообще говоря, следует учитывать зависимость четырехчастичного фазового объема от масс конечных лептонов. Интервалы изменения переменной x_{12} и переменной x_{34} (при фиксированном значении переменной x_{12}) следующие:

$$\begin{aligned} 4\hat{m}_\ell^2 &\leq x_{12} \leq (1 - \hat{m}_{\ell'})^2; \\ \hat{m}_{\ell'}^2 &\leq x_{34} \leq (1 - \sqrt{x_{12}})^2, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

где $\hat{m}_\ell = m_\ell/M_1$ и $\hat{m}_{\ell'} = m_{\ell'}/M_1$. Если лептон ℓ или ℓ' совпадает с электроном, то с экспериментальной точки зрения не имеет смысла задавать нижнюю границу переменной x_{12} или x_{34} в терминах массы покоя электрона. Действительно, в любом современном эксперименте происходит отбор по поперечным импульсам частиц, для которого справедливы условия $p_{T \min} \sim \Lambda \gg m_e$.

Введем угол θ_{12} между направлением импульса положительно заряженного лептона $\ell^+(k_1)$ и направлением движения D_s^- -мезона (ось z) в системе покоя $\ell^+ \ell^-$ -пары и угол θ_{34} между направлением движения антинейтрино $\bar{\nu}_{\ell'}(k_3)$ и направлением движения D_s^- -мезона (ось z) в системе покоя $\ell' \bar{\nu}_{\ell'}$ -пары. На рис. 12 показаны соответствующие углы для ситуации, когда $\ell \equiv \mu$ и $\ell' \equiv e$. В случае безмассовых лептонов для углов θ_{ij} можем написать следующие формулы:

$$y_{12} \equiv \cos \theta_{12} = \frac{1}{\lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34})} (x_{23} + x_{24} - x_{13} - x_{14}), \quad (\text{A.2})$$

$$y_{34} \equiv \cos \theta_{34} = \frac{1}{\lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34})} (x_{14} + x_{24} - x_{13} - x_{23}),$$

где $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$ — треугольная функция. Углы $\theta_{12} \in [0, \pi]$ и $\theta_{34} \in [0, \pi]$. Поэтому $y_{12} \in [-1, 1]$ и $y_{34} \in [-1, 1]$. Отсчет углов производится от оси z . Кроме того, в системе покоя D_s^- -мезона определим угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ между плоскостями, которые образованы парами векторов $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ и $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$. Для этого введем вектор $\mathbf{a}_1 = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2$, перпендикулярный плоскости $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, и вектор $\mathbf{a}_3 = \mathbf{k}_4 \times \mathbf{k}_3$, перпендикулярный плоскости $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_3|}.$$

Используя технику из книги [24], данный угол можно выразить через переменные x_{ij} , y_{12} и y_{34} [4, 25]. Отметим, что в настоящей работе определение переменных y_{ij} отличается знаком от определения аналогичных переменных в статье [25].

Четырехчастичный фазовый объем имеет вид

$$d\Phi_4 = M_1^4 \frac{dx_{12}}{2\pi} \frac{dx_{34}}{2\pi} d\Phi_2^{(qk)} d\Phi_2^{(12)} d\Phi_2^{(34)},$$

где с учетом ненулевой массы лептонов $\ell^\pm$ и ℓ' можно написать

$$\begin{aligned} d\Phi_2^{(qk)} &= 2\pi \delta(q^2 - x_{12} M_1^2) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - x_{34} M_1^2) \times \\ &\times \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p - q - k), \\ d\Phi_2^{(12)} &= 2\pi \delta(k_1^2 - m_\ell^2) \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k_2^2 - m_{\ell'}^2) \times \\ &\times \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(q - k_1 - k_2), \\ d\Phi_2^{(34)} &= 2\pi \delta(k_3^2) \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k_4^2 - m_{\ell'}^2) \times \\ &\times \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k_3 - k_4). \end{aligned}$$

При вычислении четырехчастичного фазового объема в качестве независимых переменных интегрирования

удобно выбрать $x_{12}, x_{34}, y_{12}, y_{34}$ и φ . Тогда

$$\Phi_2^{(qk)} = \frac{1}{2^3 \pi} \lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34})$$

и

$$d\Phi_2^{(12)} = \frac{1}{2^4 \pi} \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}_\ell^2}{x_{12}}} dy_{12};$$

$$d\Phi_2^{(34)} = \frac{1}{2^5 \pi^2} \left(1 - \frac{\hat{m}_{\ell'}^2}{x_{34}}\right) dy_{34} d\varphi.$$

Это дает

$$d\Phi_4 = \frac{M_1^4}{2^{14} \pi^6} \lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34}) \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}_\ell^2}{x_{12}}} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\hat{m}_{\ell'}^2}{x_{34}}\right) dx_{12} dx_{34} dy_{12} dy_{34} d\varphi. \quad (\text{A.3})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Данилина, Н. В. Никитин, *ЯФ* **81**, 347 (2018) [*Phys. At. Nucl.* **81**, 331 (2018)].
2. R. Aaij *et al.* [LHCb Collab.], *Eur. Phys. J. C* **79**, 675 (2019).
3. A. Danilina and N. Nikitin, *EPJ Web Conf.* **191**, 02011 (2018).
4. A. V. Danilina, N. V. Nikitin, and K. S. Toms, *Phys. Rev. D* **101**, 096007 (2020).
5. M. Beneke, P. Boer, P. Rigatos, and K. K. Vos, *Eur. Phys. J. C* **81**, 638 (2021).
6. A. Bharucha, B. Kindra, and N. Mahajan, arXiv: 2102.03193 [hep-ph].
7. M. Ivanov and D. Melikhov, *Phys. Rev. D* **105**, 014028 (2022); *Phys. Rev. D* **106**, 119901 (Erratum) (2022).
8. C. Wang, Yu.-M. Wang, and Y.-B. Wei, *JHEP* **2202**, 141 (2022).
9. S. Kurten, M. Zanke, B. Kubis, and D. van Dyk, *Phys. Rev. D* **107**, 053006 (2023).
10. R. L. Workman, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2022**, 083C01 (2022).
11. M. Ablikim *et al.* [BESIII Collab.], *Phys. Rev. D* **99**, 072002 (2019).
12. G. Burdman, J. T. Goldman, and D. Wyler, *Phys. Rev. D* **51**, 111 (1995).
13. D. Atwood, G. Eilam, and A. Soni, *Mod. Phys. Lett. A* **11**, 1061 (1996).
14. J.-C. Yang and M.-Z. Yang, *Nucl. Phys. B* **889**, 778 (2014).
15. J.-C. Yang and M.-Z. Yang, *Nucl. Phys. B* **914**, 301 (2017).
16. L. S. Lu, *Chin. Phys. C* **45**, 073101 (2021).
17. R. Frezzotti *et al.*, *Phys. Rev. D* **108**, 074505 (2023).
18. M. Ablikim *et al.* (BESIII Collab.), *Nucl. Instrum. Methods A* **614**, 345 (2010).
19. D. Melikhov, N. Nikitin, and K. Toms, *Phys. At. Nucl.* **68**, 1842 (2005).
20. A. Kozachuk, D. Melikhov, and N. Nikitin, *Phys. Rev. D* **97**, 053007 (2018).
21. D. Melikhov and B. Stech, *Phys. Rev. D* **62**, 014006 (2000).
22. Y. Aoki *et al.* [FLAG Collab.], *Eur. Phys. J. C* **82**, 869 (2022).
23. The development page for the EvtGen project, <https://evtgen.hepforge.org/>
24. E. Byckling and K. Kajantie, *Particle Kinematics* (John Wiley and Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973).
25. A. R. Barker, H. Huang, P. A. Toale, and J. Engle, *Phys. Rev. D* **67**, 033008 (2003).

THE RARE D_s -MESONS' DECAYS INTO THREE CHARGED LEPTONS AND NEUTRINOS IN THE FRAMEWORK OF STANDARD MODEL

A. V. Danilina^{1),2)}, N. V. Nikitin^{1),2),3),4)}

¹⁾Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow, Russia

²⁾NRC "Kurchatov Institute" — ITEP, Moscow, Russia

³⁾Lomonosov Moscow State University, Physics Faculty, Moscow, Russia

⁴⁾The Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia

In the framework of the Standard Model, the values of branching ratios and differential distributions for four-lepton decays $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ and $D_s^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ are found. In our calculations we took into account the processes of a virtual photon emission by s - and c -quarks of the D_s^- -meson and bremsstrahlung. The emission of a virtual photon by s -quark have been described using the vector mesons dominance model.