

# ОБ ЭНЕРГИЯХ СВЯЗИ ЯДЕР $^3\text{H}$ , $^3\text{He}$ В ТРЕХЧАСТИЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ ФАДДЕЕВА С ПРЯМЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

© 2024 г. А. Гапченко<sup>1)</sup>, О. Голева<sup>1)</sup>, М. Егоров<sup>1),2),\*</sup>

Поступила в редакцию 21.02.2024 г.; после доработки 25.04.2024 г.; принята к публикации 10.05.2024 г.

В работе представлен новый метод поиска энергий связи систем из трех тел, основанный на численном решении системы однородных уравнений Фаддеева относительно матрицы  $T$  с прямым численным интегрированием без традиционного парциально-волнового разложения. В работе мы стремились продемонстрировать на простейших системах с тремя точечными нуклонами особенности численного решения однородных уравнений Фаддеева, двухчастичные  $t$ -матрицы, в которых генерируются как локальными, так и нелокальными потенциалами. Установлено характерное поведение энергий связи трех тел в зависимости от изменения числа узлов радиальной сетки относительных импульсов. В работе сравниваются метод Паде-аппроксимантов и алгебраический метод обращения матриц при численном решении уравнений Липпмана–Швингера. Показано, что оба метода могут быть использованы в задачах поиска энергий связи систем из трех тел. В выбранной численной схеме проведены оценки влияния кулоновского отталкивания и трехчастичной  $NNN$ -силы на энергии связи рассматриваемых систем. Показано, что отсутствующее  $NNN$ -взаимодействие должно быть зарядово-зависимым, чтобы объяснить перекося в недостающих вкладах в энергиях связи рассматриваемых ядер  $^3\text{He}$ ,  $^3\text{H}$  на уровне 143 кэВ.

DOI: 10.31857/S0044002724060048, EDN: HPDGKO

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Описание свойств простейших трехчастичных ядер  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$  является одной из старейших проблем ядерной физики. Ряд особенностей динамики трех тел определяет критерии, которым должны удовлетворять реалистичные модели  $NN$ -взаимодействия. Среди таких особенностей ключевой является нарушение зарядовой симметрии (CSB-эффект) в энергиях связи самых легких зеркальных ядер, которое также интенсивно изучалось [1–6]. На сегодняшний день не вызывает сомнений факт зависимости трехчастичных энергий связи ядер  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$  от выбора реалистичных  $NN$ -моделей. Помимо зарядово-зависимых компонент  $NN$ -потенциала наиболее важные различия между моделями связаны с зарядово-независимыми и кулоновскими эффектами [7], которые могут объяснять величину отличий между энергиями связи зеркальных ядер  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$  до 620–640 кэВ. Поиск энергий связи простейших трехчастичных ядер с реалистичными  $NN$ -потенциалами с помощью решения однородных уравнений Фаддеева систематически сталкивается [7–10] с необходимостью учитывать дополнительное по отношению к  $NN$ -потенциалу трехчастичное взаимодействие. Результатом микроскопических расчетов [10] также стал тот факт, что учитываемое в разных подходах по-разному немассовое поведение реалистичного аргоннского  $NN$ -потенциала AV18 не имеет принципиального

значения. Уравнения Фаддеева в импульсном пространстве и метод гипersферического разложения в конфигурационном пространстве были использованы в работе [10] для получения энергий связи  $^3\text{He}$ ,  $^3\text{H}$ , которые не соответствовали эксперименту всего на 20 кэВ. Несмотря на то, что с момента выхода этой работы прошло более 20 лет, расчеты [10] остаются на высоком уровне согласования с экспериментальными данными, оставляя открытым только вопрос о том, необходимо ли нарушение зарядовой независимости трехнуклонной силы и нет ли необходимости изменять длины  $np$ -взаимодействий, чтобы устранить недостающую до эксперимента разницу в 20 кэВ. В данной работе мы воспроизводим динамику трех тел с помощью интегральных уравнений Фаддеева для компонент  $T$ -матрицы с локальными и нелокальными парными взаимодействиями, принимая во внимание как кулоновское отталкивание между протонами, так и феноменологическую трехнуклонную силу. В отличие от предыдущих работ мы сделали акцент именно на особенностях численного решения уравнений Липпмана–Швингера и Фаддеева, которые, на наш взгляд, должны приниматься во внимание, когда осуществляется поиск тонких физических эффектов, таких как трехнуклонное взаимодействие или поиск зарядово-зависимых компонент  $NN$ -взаимодействия. Восполнению этого имеющегося в литературе недостатка и посвящена данная работа.

Наиболее популярной моделью эффективного взаимодействия трех тел является 2 $\pi$ -Tucson-Melbourne (TM) модель [11], а также ее различные модификации [12, 13], в том числе кирально-симметричный ва-

<sup>1)</sup> Томский государственный университет, физический факультет, Томск, Россия.

<sup>2)</sup> Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

\* E-mail: egorovphys@mail.ru

риант [14]. В действительности, включение трехнуклонных сил в общий гамильтониан системы приводит [7, 15] к зависимости результата расчета энергии связи ядер  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$  от выбора формфактора и соответствующего параметра обрезания  $\Lambda$  в адронной  $\pi NN$ -вершине. Для хорошего согласия с экспериментальными энергиями связи  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$  такие расчеты требуют тонкой настройки трехнуклонного потенциала в зависимости от используемой реалистичной  $NN$ -модели [16].

Корректный учет кулоновского взаимодействия между протонами в ядре  ${}^3\text{He}$  определяет еще одну важную особенность прецизионной динамики трех тел. Как известно из теории двухпотенциального взаимодействия [17], дальнотействующий вклад в  $NN$ -потенциал будет присутствовать не только в виде отдельного чисто кулоновского слагаемого для  $T$ -матрицы, но и в резольвенте для короткодействующей  $T$ -матрицы  $NN$ -взаимодействия. Наибольшую популярность в практических расчетах энергий связи приобрел метод сепарабельного разложения для  $T$ -матрицы в координатном представлении с базисом из кулон-штурмановских функций [18, 19]. Этот метод позволяет обеспечить быструю сходимость по числу базисных функций для сечений таких чувствительных низкоэнергетических процессов, как образование позитрония в реакции  $e^- + H \rightarrow p + (e^- - e^+)$ .

В фазовом пространстве включение кулоновского взаимодействия в короткодействующей системе также обеспечено в двухпотенциальной манере [20] с использованием соответствующих  $T$ -матриц, генерируемых экранированным кулоновским потенциалом и так называемым азимутальным потенциалом. Несмотря на выбор определенных граничных условий для двухчастичных  $t$ -матриц на массовой и полумассовой оболочке, определяемой так называемой областью экранирования, результирующая кулоновская  $t$ -матрица оказывается независимой от этой экранирующей области. Электромагнитная часть реалистичного AV18-потенциала [21] уже включает, в свою очередь, одно- и двухфотонные кулоновские слагаемые, вклад Дарвина–Фолди, поляризацию вакуума и взаимодействие магнитных моментов, каждое из которых имеет соответствующий формфактор.

В данной работе реализован еще один способ расчета трехчастичных энергий связи ядер  ${}^3\text{H}$  и  ${}^3\text{He}$  с использованием трехчастичных уравнений Фаддеева, записанных относительно компонент  $T_1 = T_{23}$ ,  $T_2 = T_{31}$ ,  $T_3 = T_{12}$  трехчастичной  $T$ -матрицы  $T = T_1 + T_2 + T_3$  с явным интегрированием по переменным фазового пространства без вынужденной сепарабелизации вида  $T$ -матрицы. Такой подход был реализован в работе [22], где трехчастичная развальная  $T$ -матрица вводилась в качестве исходного ингредиента для расчета амплитуд упругих процессов и реакций.

В разд. 2 кратко описаны трехчастичные уравнения Фаддеева и их основные ингредиенты, используемые

в данных расчетах. Там же приведены точные расчеты кулоновского взаимодействия двух протонов в рамках двухпотенциального метода [20] и оценен его вклад в трехчастичную динамику на примере использования модельного  $NN$ -потенциала. Здесь мы также кратко сравниваем два численных метода решения уравнения Липпмана–Швингера.

На примере реалистичных  $NN$ -потенциалов (CD Bonn, ESC08c, AV18) в разд. 3 будет показано, что поведение детерминанта Фредгольма однородной системы уравнений Фаддеева для  $T$ -матрицы практически гарантировано обеспечивает попадание в экспериментальные значения энергий связи при подходящем выборе численной сетки. Следует подчеркнуть, что мы не стремимся описать экспериментальные двухнуклонные данные с высокой точностью, используя последние версии реалистичных потенциалов ESC16, CD Bonn-2000 и т.д., для более обоснованного подхода к вопросу описания экспериментальных энергий связи ядер  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$ . Наша цель включает в себя разработку инструмента, способного решать подобные задачи с использованием любых потенциалов, и анализ зависимости результатов от особенностей численного решения интегральных уравнений двух- и трехчастичных систем. В частности, мы показываем, что оба метода решения уравнения Липпмана–Швингера с использованием аппроксимаций Паде и алгебраический метод обращения матриц имеют свои преимущества и могут быть использованы в динамических уравнениях Фаддеева. Энергии связи ядер  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$ , полученные по идентичной вычислительной схеме, также приведены в разд. 3, и оценены кулоновский протон-протонный эффект отталкивания, а также величина трехнуклонной силы в зависимости от параметра обрезания. В Заключении еще раз кратко анализируются результаты проделанной работы.

## 2. ОСНОВНЫЕ ИНГРЕДИЕНТЫ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Формальная теория рассеяния трех неидентичных тел хорошо развита как для парциально-волновых разложений уравнения Фаддеева [23], так и для их прямого интегрирования в фазовом пространстве [22, 24]. Для трех тел разной массы прямое интегрирование уравнений Фаддеева в фазовом пространстве без использования парциально-волнового разложения для трехчастичной  $T$ -матрицы применялось ранее одним из авторов в расчете энергий связи экзотических гиперон-ядерных систем [25]. Там же представлены основные формулы, используемые и в данной работе. Однородное уравнение Фаддеева для трехчастичной  $T$ -матрицы можно записать в виде

$$(1 - tPR_0)T|\Psi\rangle = 0, \quad (1)$$

в котором  $P$  — оператор перестановки номеров частиц,  $t$  — двухчастичная  $t$ -матрица,  $R_0$  — свободная

от взаимодействия функция Грина трех тел. Если перейти от трехчастичного собственного состояния  $|\Psi\rangle$  к некоторому другому  $|\Psi'\rangle \equiv T|\Psi\rangle$ , то однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы  $(1 - tPR_0)$  равен нулю. В этой точке для действительных  $E$  будет расположена энергия связи рассматриваемой трехчастичной системы. Матричные элементы  $P$  и  $t$  можно найти в работе [25], поэтому перейдем сразу к обсуждению тех особенностей, которые возникают у двухчастичных  $t$ -матриц в фазовом пространстве трех нуклонов. В  $\mathbf{p}\mathbf{q}$ -представлении для  $T$ -матрицы, где  $\mathbf{p}$  — импульс во взаимодействующей подсистеме с приведенной массой  $\mu$ ,  $\mathbf{q}$  — спектаторный импульс частицы с приведенной массой  $M$ , двухчастичная  $t$ -матрица имеет вид

$$t\left(\mathbf{p}', \mathbf{p}, E - \frac{q^2}{2M}\right) = t\left(\sqrt{\kappa_1^2 q^2 + \kappa_2^2 q'^2 + 2\kappa_1 \kappa_2 q q' x_{q''}}, p, x_p, x_q, x_{pp'}, E - \frac{q^2}{2M}\right). \quad (2)$$

Здесь  $E$  — кинетическая энергия трех тел, импульсы взаимодействующей подсистемы в in- и out-состояниях обозначены как  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , а переменная интегрирования, возникающая в интеграле (1), обозначена как  $\mathbf{q}''$ . Косинусы полярных углов и азимутальные углы рассматриваемых векторов обозначены как  $x_p, x_q, x_{q''}$  и  $\phi_p, \phi_q, \phi''$  соответственно. Мы видим, что для расчета  $t$ -матрицы импульс  $\mathbf{p}' = \kappa_1 \mathbf{q} + \kappa_2 \mathbf{q}''$ , где  $\kappa_{1,2}$  — зависящие от масс частиц безразмерные константы, должен проектироваться на импульс  $\mathbf{p}$  с некоторым косинусом угла  $x_{pp'}$  между ними. Этот угол имеет сложный явный вид

$$x_{pp'} = \frac{\kappa_1 q y_{pq} + \kappa_2 q'' y_{pq''}}{\sqrt{\kappa_1^2 q^2 + \kappa_2^2 q'^2 + 2\kappa_1 \kappa_2 q q' x_{q''}}}, \quad (3)$$

$$y_{pq} = x_p x_q + \sqrt{1 - x_p^2} \sqrt{1 - x_q^2} \cos(\phi_p - \phi_q),$$

$$y_{pq''} = y_{pq} x_{q''} + \sqrt{1 - x_q^2} \sqrt{1 - y_{pq}^2} \cos(\phi_p - \phi'').$$

Исходный набор из независимых переменных  $p, x_p, \phi_p, q, x_q, \phi_q, q'', x_{q''}, \phi''$  для определения трехчастичной  $T$ -матрицы оказывается избыточным в задаче на собственные значения, поскольку импульс  $q$  всегда можно направить вдоль оси  $OZ$ . Тогда  $x_q = 1$  ( $\phi_q$  становится не важен и может быть принят равным нулю) и формулы (3) видоизменяются с учетом того, что при  $OZ \uparrow \uparrow \mathbf{q}$  теперь  $y_{pq} \equiv x_p$  — это косинус угла наклона импульса  $\mathbf{p}$  в выбранной системе координат. Аналогичное упрощение возникает и для азимутального угла  $\phi_{p'}$  наклона импульса  $\mathbf{p}'$  (т.е. фактически импульса

$\kappa_1 \mathbf{q} + \kappa_2 \mathbf{q}''$ ). Из его формулы

$$\cos(\phi_{p'}) = \left[ \kappa_1 |\mathbf{q}| \sqrt{1 - x_q^2} \cos(\phi_q) + \kappa_2 |\mathbf{q}''| \sqrt{1 - x_{q''}^2} \times \right. \\ \left. \times \cos(\phi'') \right] / \left[ (\kappa_1 \mathbf{q})^2 (1 - x_q^2) + (\kappa_2 \mathbf{q}'')^2 (1 - x_{q''}^2) + \right. \\ \left. + 2\kappa_1 \kappa_2 q q'' x_{q''} (1 - x_q) \right]^{1/2} \quad (4)$$

при  $x_q = 1$  автоматически следует, что  $\cos(\phi_{p'})$  равен косинусу  $\cos(\phi'')$  от переменной азимутального интегрирования  $\phi''$  в (1). Таким образом, азимутальный угол между импульсами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  есть угол  $\phi_{p'} - \phi_p$ , а поскольку угол  $\phi_p$  входит в (3) всегда в виде разности с переменной интегрирования  $\phi''$ , можно, не умаляя общности, положить  $\phi_p = 0$ . Тем самым переменная азимутального интегрирования  $\phi''$  приобретает смысл азимутального угла между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , входящими в двухчастичные  $t$ -матрицы. Похожим образом нивелируется роль косинуса  $x_p$ , поскольку в выражении для угла  $x_{pp'}$  в (3) интегрирование по косинусу  $x_{q''}$  в (1) обеспечивает равномерное покрытие отрезков  $y_{pq''}, x_{pp'} \in [-1; 1]$  вне зависимости от начального значения  $x_p$ . Поэтому угол  $x_p$  может сам принимать любые наперед заданные значения из отрезка  $[-1; 1]$ .

Таким образом, три переменные интегрирования  $q'', x_{q''}, \phi''$  и два модуля  $|\mathbf{p}|$  и  $|\mathbf{q}|$  составляют тот набор независимых переменных, который определяет поведение интегрального ядра трехчастичных уравнений Фаддеева на численной сетке. Для того чтобы сетка абсолютных значений импульсов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  не противоречила ситуации, в которой рассматриваемые состояния рассеяния принадлежат непрерывному спектру, удобно выбрать в качестве модульного значения  $\mathbf{p}$  величину  $q_0$ , связанную с относительными импульсами частиц  $p_{jk}$  (где  $jk$  — номера частиц  $j, k = 1, 2, 3$ ) во взаимодействующей паре формулой

$$p_{jk} = \sqrt{\left| E - \frac{q_0^2}{2M_{i(jk)}} \right|} 2\mu_{jk}. \quad (5)$$

Приведенные массы взаимодействующих  $jk$ -частиц и спектаторной  $i$ -частицы обозначены в (5) как  $\mu_{jk}, M_{i(jk)}$ . Модуль под корнем в (5) отражает тот факт, что в задаче на собственные значения импульсы  $p_{jk}$  — это мнимые части импульса  $\kappa_{jk} = i p_{jk}$ , которые входят в соответствующие выражения для энергий связанных состояний с мнимыми единицами. В нашем случае  $E < 0$  и знак энергии был учтен в (5). Формула (5) помогает правильно адаптировать значения импульсов  $p_{jk}$  для взаимодействующих подсистем разных масс, тогда как значения  $q_0$  могут быть выбраны на той же неравномерной сетке, что и модули  $|\mathbf{q}|$ , как и должно быть, если распространять данный подход на задачи рассеяния, где  $E, q_0$  будут действительными и неотрицательными, а вектор  $\mathbf{q}_0$  будет иметь смысл относительного импульса налетающей на систему частицы. Ограничиваясь поиском только связанных состояний, также следует ожидать, что в двухчастичных

подсистемах энергия  $z < 0$  всегда остается отрицательной

$$z_{jk} = - \left( |E| + \frac{q^2}{2M_{i(jk)}} \right). \quad (6)$$

Модуль в (6) отражает тот факт, что знак минус энергии  $E$  уже был учтен.

### 2.1. Двухчастичные $t$ -матрицы

Обсудим используемую параметризацию для двухчастичных  $t$ -матриц. В расчетах использовалась как сепарабельная параметризация боннского  $NN$ -потенциала для различных зарядовых каналов [26] в парциальных волнах  ${}^1S_0$ ,  ${}^3S_1$ ,  ${}^3D_1$ , так и координатные функции  $V(r)$  локальных  $NN$ -потенциалов [27, 21], которые позволяют явно рассчитать отдельные парциально-волновые компоненты радиальной, спин-спиновой, тензорной, спин-орбитальной и квадратичной спин-орбитальной функций  $V(r)$ . Отметим, что модель ESC08с доступна в виде программного кода, позволяющего автоматически рассчитывать парциально-волновые компоненты функций  $V(r)$  в различных зарядовых каналах, и мы будем опускать здесь и далее некоторые возможные расхождения, связанные с исходной теоретической моделью. Использование сепарабельной параметризации обусловлено тем, что  $t$ -матрицы для таких потенциалов, как известно, получаются аналитически. Использование локальных координатных потенциалов в фазовом пространстве подразумевает переход от координатного представления для функций  $V(r)$  к импульсному представлению к функциям  $V(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i)$  с использованием невозмущенных сферических волн

$$V(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = \int \exp(-i\mathbf{p}_f \mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{p}_i \mathbf{r}) d^3r. \quad (7)$$

Удобно представить левую и правую части (7) в базе шаровых векторов и записать соответствующие равенства для коэффициентов разложения потенциалов в заданных спин-орбитальных состояниях. Для фиксированных полного углового момента системы  $J$ , а также орбитальных волн до ( $L_i$ ) и после ( $L_f$ ) взаимодействия такие коэффициенты для потенциалов в импульсном приближении связаны с парциальными компонентами координатных потенциалов формулой

$$\begin{aligned} V_{L_f L_i}^J(p_f, p_i) &= (4\pi)^2 i^{L_f - L_i} \sum_{M L_f M L_i} C_{L_f M_f S_f M - M_f}^{JM} \times \\ &\times C_{L_i M_i S_i M - M_i}^{JM} \chi_{S_f M - M_f}^* \chi_{S_i M - M_i} \int d^3r Y_{L_f M_f}^*(\hat{r}) \times \\ &\times \hat{A} Y_{L_i M_i}(\hat{r}) j_{L_f}(p_f r) V(|\mathbf{r}|) j_{L_i}(p_i r). \end{aligned} \quad (8)$$

Матричные элементы операторов  $\hat{A}$  находятся отдельно для центральной, спин-спиновой, тензорной, спин-орбитальной и квадратичной спин-орбитальной компонент  $NN$ -потенциала [28].

Спиновые и сферические функции в (8) введены стандартным образом с указанием квантовых чисел и соответствующих угловых переменных  $\hat{r}$ , по которым проводится интегрирование. Отметим, что коэффициенты векторного сложения (Клебша–Гордана) в (8) введены с помощью обозначений  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} \equiv \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle$ . В таком виде парциальные компоненты  $V_{L_f L_i}^J(p_f, p_i)$  входят в сумму

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) &= 4\pi \sum_{J M L_f S_f L_i S_i M_f M_i} C_{L_f M_f S_f M - M_f}^{JM} \times \\ &\times Y_{L_f M_f}(\hat{p}_f) \chi_{S_f M - M_f} V_{L_f L_i}^J(p_f, p_i) C_{L_i M_i S_i M - M_i}^{JM} \times \\ &\times Y_{L_i M_i}^*(\hat{p}_i) \chi_{S_i M - M_i}^*, \end{aligned} \quad (9)$$

определяющую полный  $NN$ -потенциал в импульсном представлении как функцию относительных импульсов частиц  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{p}_f$  до и после взаимодействия соответственно. Двухчастичные  $t$ -матрицы, генерируемые локальными потенциалами, находились с помощью [1/1]-Паде-аппроксиманта, который дает явное выражение для соответствующей матрицы с помощью рациональной функции

$$t = V + \frac{VG_0V}{1 - \frac{VG_0VG_0V}{VG_0V}}. \quad (10)$$

Здесь  $G_0$  — свободная от взаимодействия двухчастичная функция Грина. Прямыми расчетами было показано, что использование более сложного [2/2]-Паде-аппроксиманта

$$\begin{aligned} t &= V + \frac{VG_0V(1 + b_1) + VG_0VG_0V}{1 + b_1 + b_2}, \\ b_1 &= \left[ (VG_0VG_0V)(VG_0VG_0VG_0V) - \right. \\ &\left. - (VG_0V)(VG_0VG_0VG_0VG_0V) \right] / \left[ (VG_0V) \times \right. \\ &\times (VG_0VG_0VG_0V) - (VG_0VG_0V)^2 \Big], \\ b_2 &= \left[ (VG_0VG_0V)(VG_0VG_0VG_0VG_0V) - \right. \\ &\left. - (VG_0VG_0VG_0V)^2 \right] / \left[ (VG_0V)(VG_0VG_0VG_0V) - \right. \\ &\left. - (VG_0VG_0V)^2 \right] \end{aligned} \quad (11)$$

не дает уже заметной разницы в решениях для  $t$ -матрицы. Для удобства записи импульсные метки в (10), (11) были опущены.

Парциальные фазовые сдвиги  $\delta_L^J(\mathbf{p})$  [в радианах] связаны с парциальными  $t_L^J$ -матрицами

$$\delta_L^J = -\frac{i}{2} \ln \left( 1 - \frac{2ip_i t_L^J(p_i, p_i)}{2\pi(2L+1)P_L(1)} \frac{E_1(W - E_1)}{W} \right), \quad (12)$$

полученными, например, для упругого нейтрон-протонного рассеяния. Здесь в (12)  $W$  — полная энергия системы нейтрон–протон,  $E_1$  — энергия



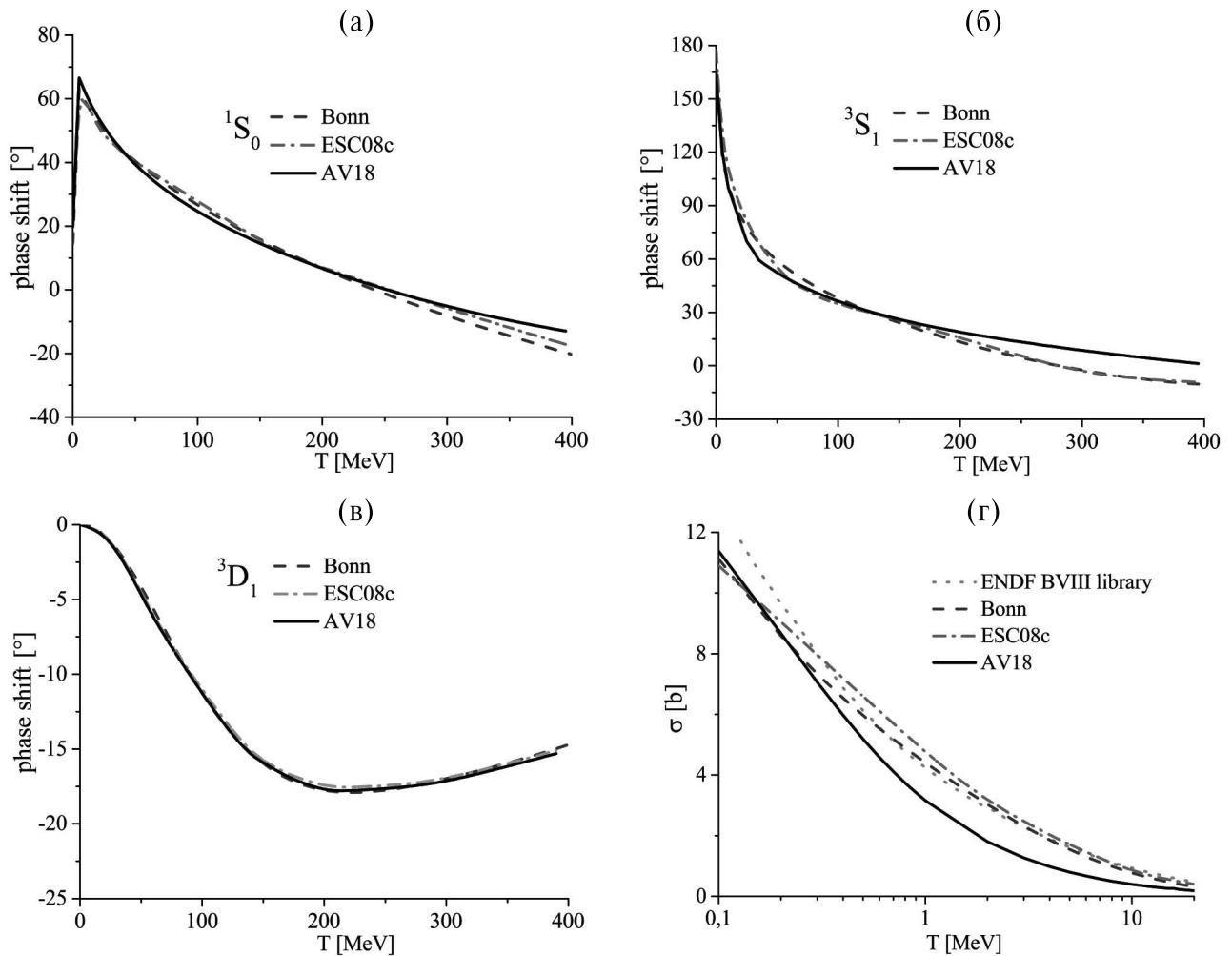


Рис. 1. а–в — Фазовые сдвиги  $np$ -рассеяния, рассчитанные с сепарабельным CD Bonn и локальными ESC08c, AV18 потенциалами; г — полное сечение  $np$ -рассеяния в сравнении с данными библиотеки ENDF-BVIII [29].

одной из частиц,  $P_L(1)$  — полином Лежандра при единичном значении аргумента. На рис. 1 представлены расчеты наиболее важных фазовых сдвигов на примере нейтрон-протонного рассеяния, полученные на основе используемых реалистичных  $NN$ -потенциалов [26, 27]. Для сравнения на рис. 1г даны полные сечения соответствующего процесса рассеяния в сравнении с данными библиотеки оцененных ядерных данных ENDF-BVIII [29]. Как видим, согласие между различными реалистичными моделями в описании фазовых сдвигов достаточно хорошее, что также удовлетворительно отражается на выбранной стратегии счета  $t$ -матриц по заданным локальным  $V(r)$  потенциалам.

## 2.2. Кулоновское взаимодействие

Несмотря на то, что многие локальные потенциалы параметризуются с учетом кулоновского взаимодействия для заряженных частиц, слишком велика разница между характерным для ядерных реакций и процессов масштаб энергий и той областью энергий,

где кулоновское взаимодействие будет играть решающую роль. Одновременно с этим поведение  $t$ -матриц в интегральном ядре (1) определяет немассовые эффекты, вклад которых, в частности, для кулоновского взаимодействия означает интерпретацию кулоновской  $t$ -матрицы в той области трехчастичного фазового пространства, в которой ее вклад будет, возможно, сравним со вкладом короткодействующего потенциала в той же самой точке. В двухпотенциальном подходе, который мы используем для корректной вставки кулоновского взаимодействия в трехчастичный формализм, кулоновский потенциал  $V_C(r)$  заменяется суммой экранированного и азимутального  $V^\Phi$  потенциалов

$$V_C(r) \equiv \frac{2k\eta(k)}{r} = V_R(r) + (V_C(r) - V_R(r)) \equiv V_R(r) + V^\Phi(r), \quad (13)$$

$$V_R(r) = V_C(r) \exp(-\lambda r).$$

В (13)  $\eta(k)$  — кулоновский параметр,  $\eta(k) = \mu Z_1 Z_2 e^2 / k$ ,  $k$  — относительный импульс вза-

имедействующих частиц с зарядами  $Z_1 Z_2$ ;  $e^2 \approx 1.43997$  [МэВ Фм] – квадрат элементарного заряда. Импульс  $k$  всегда определяется на массовой поверхности, поэтому формально он отличается от относительного импульса взаимодействующих в трехчастичном фазовом пространстве частиц. Параметр  $\lambda$  обычно выбирается в форме  $\lambda = k/\hbar c \cdot \exp(-C/\eta(k))$ , где  $[\hbar c] = [\text{МэВ Фм}]$  и  $C$  – некоторая константа. Обоснование такой формулы для  $\lambda$  можно получить из секулярного уравнения для энергий связи  $E_x$  атома водорода

$$1 + (2\pi)^{-3} \int (2\mu_{e-p} p'^2 dp'' d\Omega_{p''}) \left/ \left[ (p^2 - 2pp'' \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos(\theta_{pp''}) + p'^2 + \lambda^2) \left( -|E_x| - \frac{p'^2}{2\mu_{e-p}} \right) \right] \right. = 0, \quad (14)$$

где  $E_x = p^2/2\mu_{e-p}$ , а  $\mu_{e-p}$  – приведенная масса электрона и протона. Из (14) легко можно получить спектр атома водорода при различных  $C$  для каждого уровня. Например, первые два уровня (–13.59 эВ, –3.39 эВ) хорошо описываются с использованием констант  $C = 5.25$  и  $C = 11.9$  соответственно. Для задач рассеяния константы  $C$  должны выбираться, в первую очередь, исходя из достаточно быстрого асимптотического затухания  $V_R(r)$  при отсутствии численных осцилляций, которые могут возникать от азимутального потенциала  $V^\Phi$ . Азимутальный потенциал посредством обычного уравнения Липпмана–Швингера генерирует  $t$ -матрицу  $T^\Phi$ . Можно показать, что экранированный потенциал генерирует  $t^{R\Phi}$ -матрицу

$$t^{R\Phi}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = V_R(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) + \\ + \int \frac{V_R(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}'') + K_R(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')}{E_k - E_{p''} + i\varepsilon} t^{R\Phi}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}_i) d^3 p''. \quad (15)$$

В (15) добавка к потенциалу в интегральном ядре происходит от зависящей от  $T^\Phi$  резольвенты и имеет вид

$$K_R(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \frac{2\mu}{(2\pi)^3} \int \left[ p^2 V_R(\mathbf{p}', \mathbf{p}_i) T^\Phi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}'') - \right. \\ \left. - p'''^2 V_R(\mathbf{p}', \mathbf{p}''') T^\Phi(\mathbf{p}''', \mathbf{p}'') \right] / (p'''^2 - k^2) d\Omega_{p'''} dp'''. \quad (16)$$

Формула (16) есть главное значение (далее обозначим все такие интегралы символом  $\mathcal{P}$  над резольвентой  $G_0^{\mathcal{P}}$ ) подынтегральной функции  $V_R(\mathbf{p}', \mathbf{p}''') T^\Phi(\mathbf{p}''', \mathbf{p}'')$  по отношению к простому полюсу  $p''' \equiv k$ . Здесь мы примем такие граничные условия на функцию  $T^\Phi$ , которые обеспечивают ее обращение в нуль как на массовой поверхности, так и на любой из полумассовых поверхностей. Как показано в работе [20], такие условия, действительно, можно потребовать за счет подходящего подбора параметра  $\lambda$  и константы  $C$ . Полная

кулоновская  $t$ -матрица будет иметь вид

$$T^C(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = T^\Phi(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) + t^{R\Phi}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) + \\ + \int d^3 p'' t^{R\Phi}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') G_0^{\mathcal{P}} T^\Phi(\mathbf{p}'', \mathbf{p}_i) + \int d^3 p'' T^\Phi(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}'') \times \\ \times G_0^{\mathcal{P}} t^{R\Phi}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}_i) + \iint d^3 p'' d^3 p''' T^\Phi(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}'') \times \\ \times G_0^{\mathcal{P}} t^{R\Phi}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}''') G_0^{\mathcal{P}} T^\Phi(\mathbf{p}'', \mathbf{p}_i). \quad (17)$$

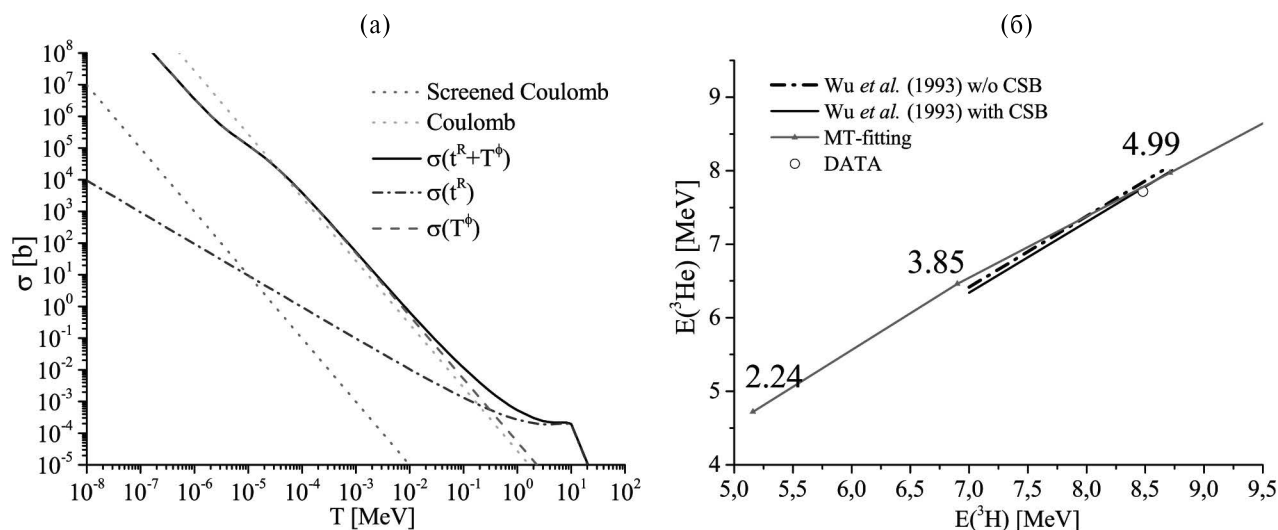
В силу граничных условий  $T^\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = T^\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = T^\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = 0$ , где импульсы  $\mathbf{k} = \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$ , а  $\mathbf{q}$  – некоторая переменная интегрирования, можно показать, что третье, четвертое и пятое слагаемые в (17) равны нулю на массовой поверхности. Далее, двухпотенциальный метод приводит к достаточно громоздкому виду для короткодействующей  $t$ -матрицы, точно учитывающей кулоновское взаимодействие. Из 37 слагаемых на массовой поверхности в силу граничных условий останутся не нулевыми только пять, и короткодействующая  $t$ -матрица  $t_{NN}^C$  с точным учетом кулоновского взаимодействия будет иметь вид

$$t_{NN}^C = (1 + t^{R\Phi} G_0) t^{sR} (1 + G_0 t^{R\Phi}) + T^C, \\ t^{sR} = V + V (1 + G_0 T^C) t^{sR}. \quad (18)$$

Потенциалы и функции Грина в (18) относятся к ранее введенным величинам нуклон-нуклонного сектора. Мы видим, что наряду с явным присутствием кулоновской  $t$ -матрицы в (18) возмущающий вклад дальнего действия сводится к добавке к потенциалу в интегральном ядре уравнения Липпмана–Швингера для короткодействующей  $t$ -матрицы  $t^{sR}$ .

Несмотря на точный характер выписанных выше уравнений (15)–(18) прямые численные расчеты многократных интегралов в трехчастичном фазовом пространстве весьма ресурсозатратны. Поэтому в трехчастичных расчетах с учетом кулоновского взаимодействия мы ограничились явным видом формулы (18) для короткодействующей  $t$ -матрицы, возмущенной кулоновским взаимодействием и зависящей от точного вида  $T^C$ , который мы примем в рамках сделанного допущения в такой же короткой форме, как и в двухчастичных расчетах.

На рис. 2а изображен вклад кулоновского  $pp$ -рассеяния в широкой области энергий, рассчитываемый по формуле (17), когда  $T^C = T^\Phi + t^{R\Phi}$ . Для сравнения на том же рисунке представлены расчеты полного сечения с использованием обычной и экранированной с параметром  $C = 0.001$  кулоновских амплитуд для  $pp$ -рассеяния. Мы видим, что оба вклада от кулоновских амплитуд сильно отличаются друг от друга, что отражает сильную чувствительность подобных расчетов к параметру экранирования. Иная ситуация возникает в двухпотенциальном подходе, когда оба слагаемых потенциала (13) генерируют такие



**Рис. 2.** *a* – Полное сечение кулоновского  $pp$ -рассеяния, рассчитанное отдельно для компонент  $t^R$ ,  $T^\phi$ , а также их суммы. На графике также представлен вклад от экранированной и неэкранированной кулоновских амплитуд. *б* – График  $E(^3\text{He}) - E(^3\text{H})$  для модельного МТ-потенциала (19), рассмотренного в данной работе. Цифрами на графике отмечены энергии связи дейтрона. Короткие штрихпунктирная и сплошная кривая отражают расчеты работы [7] с учетом и без учета эффектов CSB. Экспериментальная точка из [30].

две  $t$ -матрицы  $t^{R\phi}$ ,  $T^\phi$ , суммарный вклад которых в полное сечение практически не зависит от выбора  $C$ . Следует отметить, что подходящий выбор параметра  $C$  опирается как на соблюдение граничных условий для  $T^\phi$  [20], так и на отсутствие численных осцилляций в непосредственных расчетах  $t$ -матриц. Значение  $C = 0.001$  обеспечивает для данной задачи протон-протонного рассеяния близость соответствующих вкладов от  $T^\phi + t^{R\phi}$  к вкладу от обычной кулоновской амплитуды только в области от 10 эВ–100 кэВ. Отметим, что решение полного уравнения Липпмана–Швингера для потенциала (13) относительно  $t$ -матрицы не может совпадать с приближением  $t = V$ , где  $V$  – Фурье-образ кулоновского потенциала, совпадающий с точностью до фазы с кулоновской амплитудой. Оценка величины кулоновского вклада, рассчитываемого в рамках представленного выше двухпотенциального подхода, применяемого для расчета энергий связи ядер  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ , осуществлялась на примере модельного азимутально-симметричного  $NN$ -потенциала вида

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = 2\pi V_R / \left[ (p'^2 + p^2 + \mu_R^2 - 2p'p x_{p'} x_p)^2 - 4p'^2 p^2 (1 - x_{p'}^2)(1 - x_p^2) \right]^{1/2}, \quad (19)$$

который является разновидностью широко известного МТ-потенциала. Косинусы углов наклона импульсов  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  в произвольной системе координат в (19) обозначены как  $x_p$  и  $x_{p'}$  соответственно. Параметры потенциала (19)  $V_R = -0.73$  [МэВ $^{-1}$ ],  $\mu_R = 31.1$  [МэВ] подбирались, исходя из удовлетворительного описания энергии связи дейтрона (полу-

чено значение  $E_b = 2.23$  МэВ) и полного сечения  $np$ -рассеяния в области кинетических энергий налетающей частицы  $T = 0.1$ –20 МэВ. Вклады кулоновского взаимодействия оценивались по тем различиям в энергии связи ядер  $^3\text{H}$  и  $^3\text{He}$ , которые возникали при включении в динамику кулоновского взаимодействия, рассчитываемого по выше приведенным формулам. По наличию такого кулоновского вклада в трехчастичной  $T$ -матрице, а также по небольшому различию в массах частиц, из которых состоят ядра  $^3\text{H}$  и  $^3\text{He}$ , определялся итоговый вклад кулоновского взаимодействия. Соответствующие энергии связи ядер  $^3\text{H}$  и  $^3\text{He}$ , получаемые с вариацией параметра  $V_R$ , представлены на рис. 2б. Цифрами на рисунке отмечены энергии связи дейтрона, которые соответствуют расчетным точкам на графике. Из сравнения с достаточно прецизионными расчетами энергий связи работы [7] можно сделать вывод о том, что учет кулоновского взаимодействия по предложенной выше схеме позволяет до некоторой степени учесть особенности зарядово-зависимого взаимодействия между протонами в ядре  $^3\text{He}$ . Более точные оценки вклада кулоновского взаимодействия в энергию связи с реалистичными  $NN$ -потенциалами, в действительности, окажутся заметно меньшего порядка, что отражено ниже в табл. 1.

### 2.3. Особенности численного счета

Последнее и, возможно, самое важное для практических расчетов, что необходимо обсудить, это зависимость результата расчета двухчастичных  $t$ -матриц от способа решения уравнения Липпмана–Швингера. Известно, что только для сепарабель-

**Таблица 1.** Энергии связи [МэВ] основных состояний трехнуклонных систем  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ , рассчитанные в данной работе с использованием сепарабельной Bonn [26], локальных ESC08c [27] и AV18 [11] моделей  $NN$ -взаимодействий (в последних трех столбцах приведены оценочные расчеты вклада трехнуклонной силы [13] с параметром обрезания  $\Lambda = 4.784m_\pi$  [3]; приведена также оценка энергии связи ядра  $^3\text{He}$  без/с учета(-ом) кулоновского взаимодействия; эксперимент из работы [30])

System	Data	Bonn	ESC08c	AV18	Bonn + 3N	ESC08c + 3N	AV18 + 3N
$^3\text{H}$	8.48	8.07	8.04	8.255	8.80	8.25	8.27
$^3\text{He}$	7.718	7.48	7.647	7.350	11.00/11.78	7.69/7.65	7.406/7.404

ных потенциалов уравнение Липпмана—Швингера может быть решено аналитически. В других случаях используются Паде-аппроксимации, а также парциально-волновое разложение в сочетании с алгебраическим методом обращения комплексных матриц. Вычитательная процедура Нойеса—Ковальского менее популярна, но также применима для решения уравнений Липпмана—Швингера, и вместе с аппроксимантами Паде может быть легко обобщена на случай зависящих от углов потенциалов, что позволяет использовать оба этих метода с прямым интегрированием по направлениям импульсов в фазовом пространстве без традиционного парциально-волнового разложения. Паде-аппроксиманты также были успешно применены для решения уравнения Фаддеева в непрерывном энергетическом спектре в задаче Nd-рассеяния [22] с обходом известных логарифмических особенностей при помощи многомерной сплайн-интерполяции. Менее очевидным, но более простым способом решения уравнения Липпмана—Швингера для произвольного потенциала является прямое алгебраическое решение путем инвертирования комплексной матрицы коэффициентов, умножаемой затем на вектор-столбец, состоящий из двухчастичных потенциалов, действующих в системе. Этот метод решения формально применим к решению любого линейного интегрального уравнения. Если обозначить потенциал двух тел  $V(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) \equiv V(p_f, \Omega_f, p_i, \Omega_i)$  — телесные углы, связанные с векторами  $\mathbf{p}_f$ ,  $\mathbf{p}_i$  соответственно, тогда решение для матрицы  $t$  будет выглядеть следующим образом:

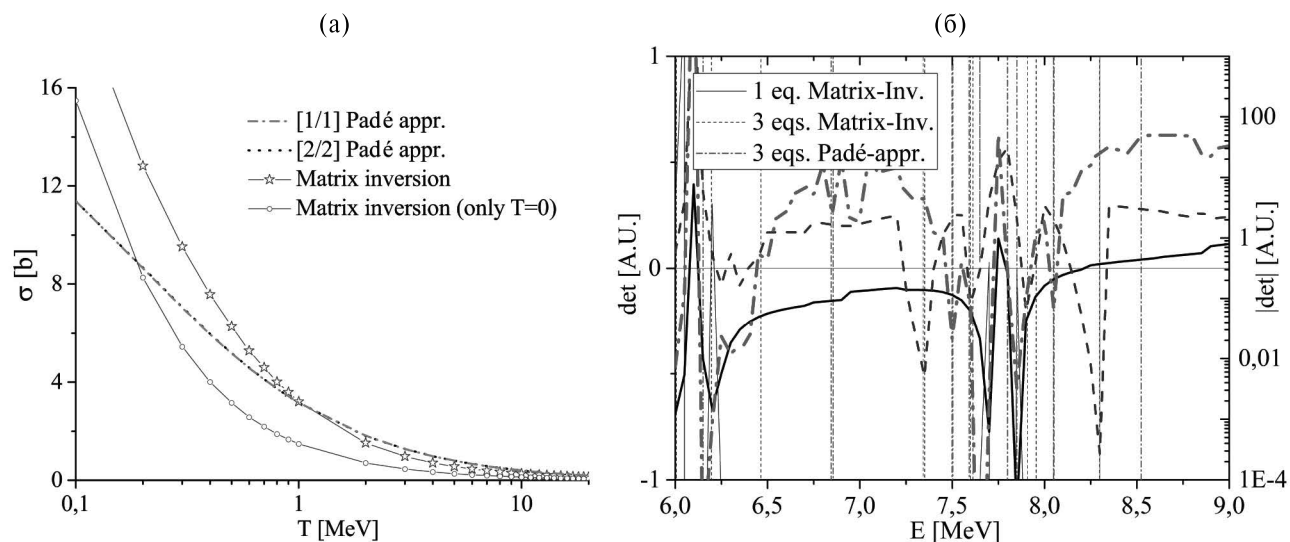
$$\begin{aligned}
 t(q, \Omega_q, p_i, \Omega_i) &= \\
 &= \sum_{p_f \Omega_f} A^{(-1)}(q, \Omega_q, p_f, \Omega_f) V(p_f, \Omega_f, p_i, \Omega_i) = \\
 &= \sum_{p_f \Omega_f} \frac{V(p_f, \Omega_q, p_i, \Omega_i)}{\delta_{p_f q} - V(p_f, \Omega_q, q, \Omega_q) G_0(q) \omega_q \Upsilon_q}, \quad (20) \\
 &A(p_f, \Omega_f, q, \Omega_q) = \\
 &= \delta_{p_f q} \delta_{\Omega_f \Omega_q} - V(p_f, \Omega_f, q, \Omega_q) G_0(q) \omega_q \Upsilon_q.
 \end{aligned}$$

Суммирование в (20) выполняется по абсолютным значениям  $p_f$  и соответствующим вектору  $\mathbf{p}_f$  значениям телесного угла  $\Omega_f$ . Переход от интегрирования к суммированию по квадратурной формуле с гауссовым распределением узлов сетки выполняется с весовыми коэффициентами  $\omega_q$ ,  $\Upsilon_q$ , соответствующими абсолютным значениям импульса  $q$  и телесному уг-

лу  $\Omega_q$ . Второе равенство в (20), полученное путем умножения числителя и знаменателя на  $\delta_{\Omega_f \Omega_q}$ , позволяет сократить поиск и последующую инверсию шестимерной матрицы  $A$  до четырехмерной. Из числового вектора-столбца  $t(q, \Omega_q, p_i, \Omega_i)$ , полученного по формуле (20), затем выделяется одна составляющая точка с координатами  $p_f, \Omega_f, p_i, \Omega_i$ , которая и будет соответствовать искомой  $t$ -матрице, находящейся на массовой оболочке.

На рис. 3а показано полное сечение нейтрон-протонного рассеяния, полученное на основе различных двухчастичных  $t$ -матриц, генерируемых одним и тем же потенциалом  $v_{18}$  (модель AV18) [21]. Для последующих вычислений представляет интерес сравнить вклады Паде-аппроксимантов  $[1/1]$  и  $[2/2]$ , а также представить результат алгебраического обращения матрицы коэффициентов (20) уравнения Липпмана—Швингера. В результате этого анализа мы можем заключить, что Паде-аппроксиманты для  $t$ -матрицы имеют довольно хорошую сходимость. Расчеты полных сечений, полученные на основе Паде-аппроксимаций и по формуле (20), отличаются друг от друга для потенциала AV18 [21] особенно в области низких кинетических энергий  $T$ . Длины упругого нейтрон-протонного рассеяния, полученные двумя способами с помощью Паде-аппроксимаций и инверсии матрицы коэффициентов, также незначительно различаются как для синглетного  $^1S_0 - 23.3/-20.6$  Фм, так и для триплетного  $^3S_1 6.55/9.47$  Фм рассеяния соответственно. Следует подчеркнуть, что наша цель не состоит в точном описании экспериментальных данных вместе с точным воспроизведением всех тонкостей параметризации используемых потенциалов. Вместо этого мы приводим расчеты в двухчастичных секторах в состоянии, близком к экспериментальным данным, выделяя все особенности численного расчета с последующим учетом этих особенностей в динамике трех тел. Среди таких особенностей, обнаруженных в секторе с двумя телами, мы выделяем разницу между расчетами по формуле (20) с обращением матрицы коэффициентов и с использованием Паде-аппроксимантов в области низких энергий. Разница в области низких энергий в полных сечениях, полученных двумя методами, в основном обусловлена сходством расположения узлов сетки для импульсов  $p_f$  и  $q$  при вычислении значения  $V(p_f, \Omega_q, q, \Omega_q) G_0(q) \omega_q \Upsilon_q$ . Чем ближе эти сетки похожи друг на друга, тем больший вклад может





**Рис. 3.** *a* – Полное сечение нейтрон-протонного рассеяния, рассчитанное на основе двух численных методов: Паде-аппроксимации ([1/1] (10), [2/2] (11)) и инверсии матрицы коэффициентов (20) для реалистичного AV18-потенциала [21]. Отмечен отдельно вклад с изоспином  $T = 0$ . *б* – Определитель Фредгольма (тонкие кривые в произвольных единицах измерения) как функция энергии трех тел. Три уравнения (3 eqs.) на рисунке обозначают исходную однородную систему уравнений Фаддеева (1), в то время как одно уравнение (1 eq.) является приближением, в котором учтена только одна нейтрон-протонная двухчастичная  $t$ -матрица. Абсолютные значения определителя Фредгольма (толстые кривые) привязаны к правой оси. Видно, что положения корней зависят от численных методов, применяемых для поиска двухчастичной  $t$ -матрицы. Узлы численной сетки были выбраны в единой манере для обоих методов.

внести интегральное значение и тем выше амплитуда численного эффекта сетки. При сохранении количества узлов сетки в радиальных направлениях  $p_f$  и  $q$  такой числовой эффект может быть подавлен, а прогностическая способность формулы (20) в области низких энергий может быть улучшена с помощью адаптивных числовых сеток, простейшим примером которых является умножение переменной интегрирования  $q$  в интеграле  $V(p_f, \Omega_q, q, \Omega_q) G_0(q) \omega_q \Upsilon_q$  на число, близкое к единице.

Неожиданным результатом расчета энергий связи систем из трех тел в рамках разработанной процедуры прямого численного решения уравнения Фаддеева стало обнаружение нескольких корней уравнения (1) уже при физических энергиях  $\text{Re}(E) > 0$ . Только для одного уравнения Фаддеева (система трех фермионов  $NNN$ ) численное решение алгебраического уравнения (1) на сетке узлов  $45 \times 45$  для модулей импульсов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  также приводит к двум соседним корням в области 7.70 и 7.85 МэВ. Увеличение числа уравнений Фаддеева до трех путем учета различных масс протонов и нейтронов на примере ядра  ${}^3\text{He}$  приводит не только к ожидаемым энергетическим сдвигам в энергиях связи [3, 10], но и к увеличению числа корней рассматриваемой алгебраической системы уравнений с матрицей порядка  $135 \times 135$ . Новые корни находятся в областях 7.35, 7.60, 7.90 и 8.30 МэВ. В обоих расчетах двухчастичные  $t$ -матрицы были получены на основе формулы (20). Интересно отметить, что корень в области 8.30 МэВ появляется при решении систе-

мы уравнений Фаддеева с реалистичным аргоннским  $NN$ -потенциалом [21] для обеих систем  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$  с точным учетом изотопической структуры парных  $t$ -матриц. Чтобы более точно определить корни алгебраической системы уравнений Фаддеева, которые соответствовали бы рассматриваемым физическим состояниям, мы также рассмотрим поведение модуля детерминанта Фредгольма с шагом 50 кэВ. На рис. 3б показана зависимость определителя Фредгольма и его модуля (правая шкала) однородной алгебраической системы уравнений Фаддеева для ядра  ${}^3\text{He}$ . Использование двухчастичных матриц  $t$ , полученных из Паде-аппроксимаций в уравнениях Фаддеева, также характеризуется несколькими корнями, в которых определитель Фредгольма обращается в нуль. Следует, однако, отметить, что положение корней изменилось по сравнению с вычислением  $t$ -матриц по формуле (20). Схематически изменение положения корней можно отметить следующим образом:  $7.35 \rightarrow 7.50$ ,  $7.60 \rightarrow 7.60$ ,  $7.90 \rightarrow 7.85$  и  $8.30 \rightarrow 8.05$  МэВ в рассматриваемом диапазоне энергий  $6.0 < E < 9.0$  МэВ. При этом, несмотря на наличие нескольких корней алгебраической системы уравнений, формально соответствующих связанным состояниям, только значение 7.60 МэВ, максимально близкое к экспериментальной энергии связи 7.718 МэВ, остается практически неизменным для обоих методов вычисления  $t$ -матриц по формулам (10), (20). Однако этому корню соответствует не самый глубокий минимум абсолютного значения определителя Фредгольма, что не

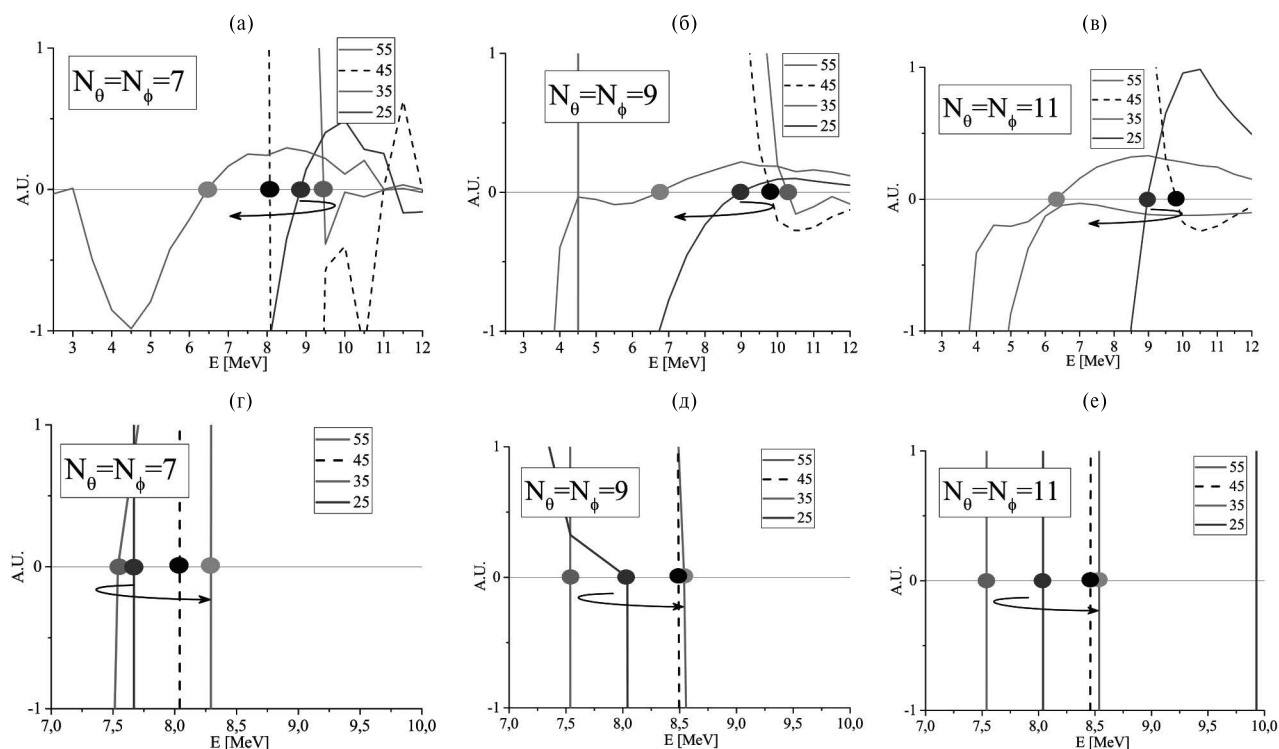
позволяет выбрать его в качестве энергии связи рассматриваемой системы. Поскольку система  ${}^3\text{He}$  имеет только одно известное основное состояние ( $T_{{}^3\text{He}} = 1/2$ ,  $J^P = 1/2^+$ ), некоторые корни рис. 3 проистекают из особенностей числовой аппроксимации, используемой двухчастичной  $NN$ -модели в трехчастичном фазовом пространстве, и сдвиг энергии между корнями (до  $\sim 250$  кэВ), связанный с использованием различных методов решения уравнений Липмана–Швингера, должен быть связан с численной неопределенностью этих вычислений. Использование корня 7.60 МэВ в качестве энергии основного состояния  ${}^3\text{He}$  сразу привело бы нас к противоречию с результатами работ [3, 10], в которых предполагается, что недостающий вклад  $NNN$ -сил в энергию связи ядер  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$  составляет более 400 кэВ. На основе проведенных расчетов нами был сформулирован критерий, по которому смена знака определителя Фредгольма в некоторой точке наряду с наличием локального минимума модуля определителя Фредгольма в окрестности этой точки позволяет идентифицировать эту точку как энергию связи рассматриваемой системы (основного или возбужденного состояния). Такой критерий, к сожалению, не позволяет отсеивать те состояния, которые могут генерироваться тем или иным потенциалом ввиду неидеальности самой параметризации нуклон-нуклонной модели, а также некоторыми особенностями численной аппроксимации интегральных уравнений. Поскольку в этой статье мы не ставим своей целью любой ценой описать экспериментальные энергии связи с потенциалом AV18 [21], для удобства дальнейших исследований мы примем корень 7.35 МэВ, характеризующийся глубоким локальным минимумом модуля определителя Фредгольма, полученный матричным методом с использованием формулы (20), в качестве энергии основного состояния системы  ${}^3\text{He}$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

В любых численных расчетах особую роль играет стабильность результата расчета по отношению к изменению параметров численной сетки. При расчете определителя Фредгольма уравнения (1) ранг соответствующей матрицы растет как  $(3N)^2$ , где  $N$  — число узлов радиальной сетки по одной из переменных  $q$ ,  $q_0$ . Каждый из элементов  $N \times N$  матрицы — это быстроменяющаяся функция, поэтому переходы от одной к другой точке сеточного пространства могут сопровождаться сильным изменением определителя матрицы. Тем не менее, следует ожидать, что в точке, где определитель Фредгольма меняет знак, его абсолютная величина также должна быть меньше, чем в соседних точках, в противном случае подобные смены знака вызваны самой численной аппроксимацией быстроменяющихся функций. Для исследования поведения определителя Фредгольма в зависимости от пара-

метров численной сетки использовались реалистичные боннский [26] и локальный ESC08с [27] потенциалы. Число узлов неравномерной радиальной сетки, расположенных вдоль луча  $[0, +\infty)$ , менялись в значениях: 25, 35, 45 и 55, тогда как числа узлов равномерной угловой сетки фиксировались одинаковыми по полярному и азимутальному направлениям  $N_\theta = N_\phi$  и принимались равными 7, 9 и 11. Результаты расчета определителя уравнения (1) с данными потенциалами представлены на рис. 4. Следствием плавного изменения параметров численных сеток стал факт плавного перемещения соответствующих корней уравнения (1), в которых определитель Фредгольма обращается в нуль. Расчеты с боннским потенциалом [26] показывают, что корни уравнения (1) с ростом числа радиальных узлов сетки перемещаются плавно в сторону больших энергий связи системы, а затем в сторону меньших энергий. Для локального ESC08с [27] потенциала с ростом числа узлов радиальной сетки корни (1) перемещаются сначала в сторону меньших энергий связи, а затем в сторону больших энергий. Таким образом, для обоих различных по своей природе потенциалов особенности численных расчетов, в целом, одинаковые, и демонстрируют возможность подбора таких параметров сетки, при которых полученные корни уравнения (1) будут максимально близки к требуемому экспериментальному значению с заданной наперед точностью. Отметим, что на рис. 4 видно некоторое насыщение энергии связи, видимое с ростом числа угловых узлов сетки  $N_{\theta,\phi} \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11$ , которое имеет место для обоих рассмотренных потенциалов. Для дальнейших расчетов нами выбраны менее ресурсоемкие значения сетки (45 точек по радиальным направлениям, 7 — по угловым), с использованием которых получаются близкие к экспериментальным значениям энергии связи ядер  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$  без учета кулоновского и трехчастичного  $NNN$ -взаимодействий.

Обсудим кратко влияние изотопической компоненты  $T = 1$  в парном  $NN$ -потенциале AV18 [21] на спектр состояний рассматриваемых ядер. Мы уже видели, что сами по себе прямые вычисления энергий связи основных состояний ядер  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$ , учитывающие только  $T = 0$   $NN$ -компоненту, приводят к нескольким корням, обращающим в нуль уравнение (1). Некоторые из этих корней близки к экспериментальным энергиям связи, в то время как другие следует рассматривать как особенности численной аппроксимации двухчастичных  $NN$ -моделей в трехчастичном фазовом пространстве. Если изотопический вклад состояний  $T = 1$  в рассеяние  $pp$ ,  $np$  и  $nn$  значителен и включен в реалистичные потенциалы типа AV18 [21], то для основных состояний ядер смесь различных изотопических вкладов может быть связана только с электромагнитным взаимодействием внутри ядер и должна быть чрезвычайно мала. Очевидно, что такую особенность измене-



**Рис. 4.** Определитель Фредгольма (система  ${}^3\text{H}$  без трехчастичных сил) для различных наборов численных сеток с числом узлов по радиальным направлениям: 25, 35, 45, 55 и числом точек по угловым направлениям  $N_\theta = N_\phi = 7, 9, 11$ . а–в – Расчеты с сепарабельным CD Bonn-потенциалом [26]. г–е – Расчеты с локальным ESC08c-потенциалом [27]. Стрелками отмечены движения соответствующих корней однородных уравнений Фаддеева в зависимости от роста числа радиальных узлов численных сеток.

ния суммарного изоспина сталкивающихся протонов и нейтронов невозможно выделить из обычных экспериментальных данных по упругому рассеянию. В то же время простое включение модельной двухчастичной  $t$ -матрицы, соответствующей изоспину  $T = 1$ , в систему уравнений Фаддеева позволяет расширить изучаемый спектр возможных состояний трехчастичных систем, которые теоретически могут наблюдаться в процессах, сопровождающихся передачей ненулевого изоспина ядрам  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$ . На рис. 5 показан определитель Фредгольма для рассматриваемых ядер, рассчитанный с учетом изотопической компоненты  $T = 1$  в парном потенциале AV18 [21]. Как и ожидалось, включение дополнительной компоненты в двухчастичных  $t$ -матрицах привело к заметному изменению расчетного спектра ядерных состояний. Для ядра  ${}^3\text{He}$  в областях 6.95 и 7.78 МэВ появляются два новых состояния, которых не было при учете только  $T = 0$  компоненты. Для ядра  ${}^3\text{H}$  также появляется пара новых состояний в области 6.8 МэВ, а состояние в области 8.30 МэВ, наоборот, исчезает, как и в случае с  ${}^3\text{He}$ . Эти рассчитанные спектры не могут быть связаны только с основными состояниями рассматриваемых ядер. Они имеют более сложную структуру, порожденную процессами, сопровождающимися обычной интерференцией амплитуд сильновзаимодействующих двух тел в состояниях с изоспинами

$T = 0$  и  $T = 1$ , которой нет места в основном состоянии ядер  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$ .

Целью дальнейших расчетов с реалистичными потенциалами является проверка кулоновского вклада для  ${}^3\text{He}$  и мажорантная оценка вклада трехнуклонных сил в энергиях связи зеркальных ядер  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$ . Вклад трехнуклонной силы оценивался на основе нерелятивистской параметризации [12] (уравнение (6)) с введением адронных формфакторов  $K(\mathbf{p}^2, \Lambda)$ ,  $K(\mathbf{p}'^2, \Lambda)$ , в  $\pi NN$ -вершине, которые также зависят от относительных импульсов  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  во взаимодействующих  $NN$ -парах в in- и out-состояниях соответственно. Фактически, этот подход, использующий изотопически различные вклады от взаимодействий  $pp$ ,  $np$  и  $nn$  с одним и тем же формфактором  $K$ , позволяет только оценивать вклад трехнуклонного взаимодействия. Мы проведем такую оценку для формфакторов  $K$  в монополярной форме. В качестве параметра обрезания  $\Lambda$  мы выберем значение  $\Lambda = 4.784m_\pi$  из работы [3], где  $m_\pi$  — масса пиона. Результат поиска энергий связи ядер  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$  в рамках разработанного подхода с прямым численным интегрированием уравнений Фаддеева показан на рис. 6. Расчеты были выполнены с использованием двухчастичных матриц  $t$ , генерируемых зависящими от заряда потенциалами AV18 [21], используя точные решения уравнения Липмана–Швингера, представленные выше в матрич-



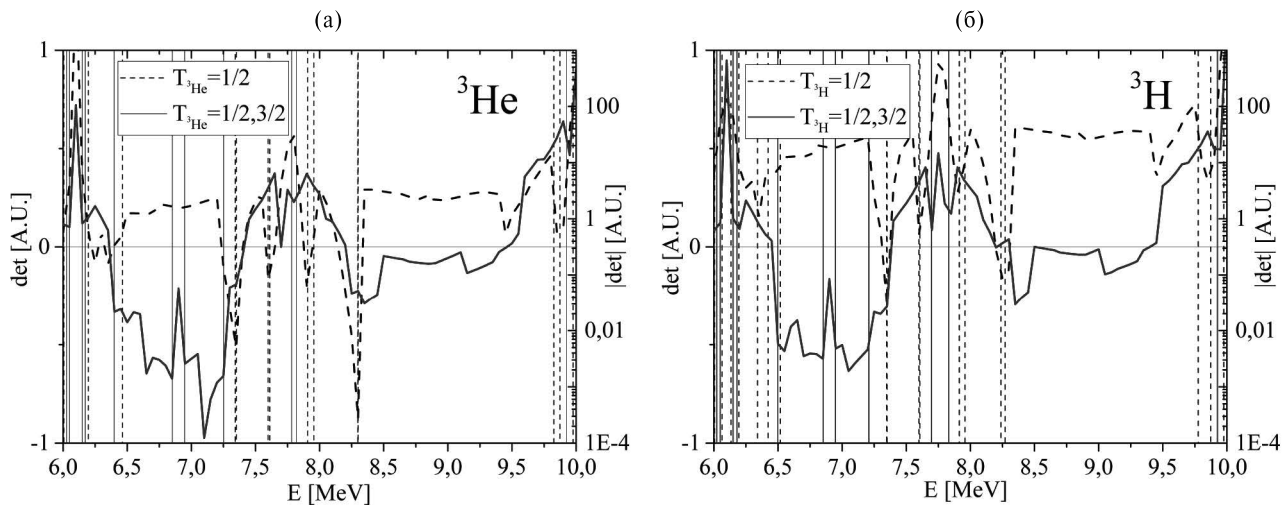


Рис. 5. Определитель Фредгольма как функция энергии трехчастичного рассеяния  $E$  для ядер  ${}^3\text{He}$  (а) и  ${}^3\text{H}$  (б), полученный с учетом изотопической  $T = 1$  компоненты в парных потенциалах AV18 [21], что приводит к появлению изотопической  $T = 3/2$ -компоненты в спектре состояний рассматриваемых ядер. Толстые кривые обозначают модуль определителя Фредгольма и отсчитываются на правой оси.

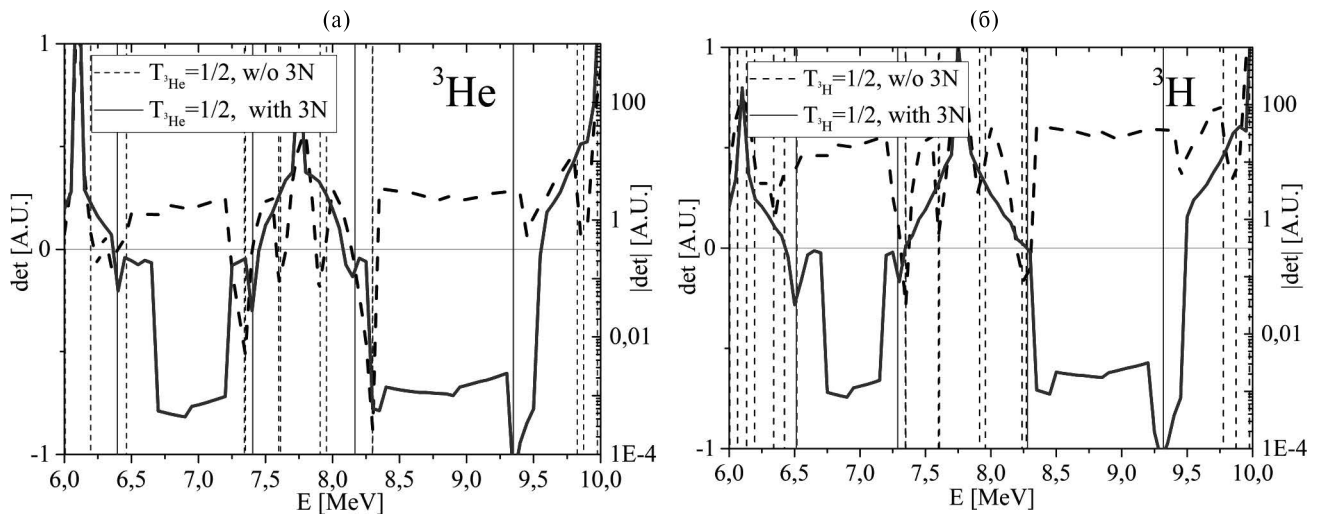


Рис. 6. Определитель Фредгольма как функция энергии трехчастичного рассеяния  $E$  для ядер  ${}^3\text{He}$  (а) и  ${}^3\text{H}$  (б), полученный с учетом трехнуклонной силы (3N) [12] в каждой двухчастичной  $t$ -матрице, генерируемой AV18-потенциалом [21]. Толстые кривые обозначают модуль определителя Фредгольма и отсчитываются на правой оси.

ном методе в соответствии с формулой (20). Из рис. 6 мы видим, что вклады трехнуклонных сил снова изменяют расположение корней алгебраической системы уравнений Фаддеева: корни в области  $E \approx 7.5$ –8 МэВ исчезают, и появляется ярко выраженный корень в области  $E \approx 9.35$  МэВ, чего не наблюдалось во всех предыдущих расчетах для обоих ядер  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$ . Мы оцениваем вклад трехнуклонных сил в энергию связи рассматриваемых ядер по небольшому смещению двух оставшихся корней в областях  $E \approx 7.35$  МэВ для  ${}^3\text{He}$  и  $E \approx 8.25$  МэВ для  ${}^3\text{H}$ . Эффект трехнуклонных взаимодействий, рассчитанный в рамках простой модели [12] с тем же параметром обрезания  $\Lambda$ , который использовался при описании экспериментальных данных в работе [3], оказывается на уровне 15–54 кэВ, что

более чем на порядок меньше, чем было предсказано в работах [3, 10]. Следует также отметить не только разницу во вклады трехнуклонных сил из расчетов, представленных в табл. 1, но и сильную зарядовую зависимость недостающих и плохо изученных  $NNN$ -сил от типа рассматриваемой системы ( ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$ ). Для ядра  ${}^3\text{H}$  вклад сил  $NNN$  должен составлять порядка 225 кэВ, а для системы  ${}^3\text{He}$  наши расчеты предсказывают вклад сил  $NNN$  уже на уровне 368 кэВ, что заметно отличается от результатов работ [3, 10], где получены значения 823 кэВ ( ${}^3\text{He}$ ) и 856 кэВ ( ${}^3\text{H}$ ) соответственно. Мы акцентируем внимание скорее не на фактическое отличие вклада  $NNN$ -сил от ранее предсказанного, а на его сильную зарядовую зависимость порядка 143 кэВ, что заметно выше, чем 33 кэВ для аналогичной



зависимости  $NNN$ , следующей из результатов работ [3, 10]. Это является основным результатом настоящей работы, полученным с использованием другого метода решения уравнений Фаддеева, который ранее не использовался для этого класса задач.

Учет кулоновского взаимодействия только для протон-протонных взаимодействий в моделях Bonn и ESC08с по вышеприведенной двухпотенциальной манере с ограничением только двумя членами в кулоновской  $t$ -матрице  $T^C(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i)$  (17) отражен в последних трех столбцах табл. 1. Для локального потенциала ESC08с дополнительный вклад кулоновского взаимодействия в энергию связи  ${}^3\text{He}$  остается на уровне 40 кэВ. Что касается потенциала AV18, где электромагнитное взаимодействие уже включено в модель, все электромагнитные протон-протонные эффекты имеют величину порядка 2 кэВ, что также меньше, чем было предсказано в работе [10]. Поскольку вклад  $NNN$ -сил с использованием  $t$ -матриц, генерируемых сепарабельным потенциалом, оказывается сам по себе высоким при неизменных остальных параметрах модели, появление дополнительного кулоновского взаимодействия также приводит к сильной интерференции этих вкладов, что еще увеличивает энергию связи  ${}^3\text{He}$ . Сильное подавление  $NNN$ -силы, которое может быть достигнуто путем выбора  $\Lambda = 4 \times 4.784 m_\pi$  в расчетах с боннским потенциалом [26], приводит к энергии связи  ${}^3\text{He}$  7.653 МэВ, что даже ниже, чем экспериментальное значение. Таким образом, мы имеем двоякую ситуацию: с одной стороны, выбор параметров сетки позволяет нам плавно смещать корни уравнения (1) в область, близкую к экспериментальным значениям, а с другой стороны, мы находим возможным контролировать величину вклада силы  $NNN$  для последующих прецизионных расчетов с описанием известных экспериментальных данных. На этом основании мы еще раз приходим к выводу, что невозможно одновременно описать экспериментальные энергии связи  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$ , выбрав один и тот же параметр обрезания  $\Lambda$  в рамках простой модели трехнуклонных взаимодействий, которая искусственно введена в систему точных трехчастичных уравнений Фаддеева. Чтобы устранить зависимость вклада  $NNN$ -силы от параметра обрезания, соответствующая модель не должна быть чувствительна к параметру обрезания в адронных формфакторах. Как следует из результатов данной работы, модель  $NNN$  также должна содержать явно зависящие от заряда нуклона слагаемые, для того чтобы обеспечить одновременное описание энергии связи зеркальных ядер  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прошло более 20 лет с тех пор, как были проведены последние точные расчеты энергий связи  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$  и был установлен значительный вклад  $NNN$ -сил

в энергии связи на уровне 820–850 кэВ. В этой статье мы представили другой метод поиска энергий связи систем из трех тел, основанный на прямом решении однородных систем интегральных уравнений Фаддеева с различными двухчастичными потенциалами. Подробно изучена зависимость вычислений определителя Фредгольма однородных алгебраических уравнений Фаддеева от параметров числовых сеток и от метода получения двухчастичной  $t$ -матрицы. Прямые расчеты показывают возможность выбора таких параметров сетки интегрирования, которые приводят к значениям энергии связи систем, близким к экспериментальным данным. Расчеты с реалистичным потенциалом AV18 показали существование нескольких корней однородной системы уравнений Фаддеева, которые формально соответствуют энергиям связи физических систем  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$ , но только два корня в областях 7.35 и 8.25 МэВ характеризуются самыми низкими абсолютными значениями детерминанта Фредгольма и практически не меняют своего положения при включении трехнуклонного взаимодействия. В данной работе мы не ставили своей целью воспроизвести экспериментальные энергии связи ядер  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$  с определенным выбором потенциалов и технологии счета, и также не использовали более современные версии реалистичных потенциалов ESC16, CD Bonn-2000. Вместо этого мы продемонстрировали работоспособность метода прямого численного интегрирования уравнений Фаддеева без традиционного разложения по парциальным волнам с различными потенциалами в фазовом пространстве и с использованием некоторых ранних версий представленных потенциалов. Основываясь на проведенных исследованиях, мы выяснили, что недостающее  $NNN$ -взаимодействие должно характеризоваться сильными зарядово-зависимыми слагаемыми, для того чтобы объяснить перекося в недостающих вкладах в энергии связи ядер  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$  на уровне 143 кэВ, который заметно больше, чем 33 кэВ, следующих из более ранних микроскопических расчетов. Абсолютная величина трехнуклонных взаимодействий в этом случае, как показывают наши расчеты, должна быть меньше, чем следовало из более ранних работ. Это утверждение было проверено с использованием потенциалов Bonn, ESC08с и AV18 с подробным описанием особенностей численного подсчета и сравнением различных способов нахождения двухчастичных  $t$ -матриц.

Проведенное исследование показывает, что даже для простейших систем из трех тел существует некоторая варибельность в описании одних и тех же энергий связи, связанная с особенностями численного решения однородных уравнений Фаддеева. По этой причине учет таких тонких эффектов, как  $NNN$ -взаимодействие, должен сопровождаться вычлениением и уменьшением вклада сеточных эффектов.

Работа выполнена в рамках проекта FSWM-2020-0033 Министерства образования и науки России (The

reported study was done under the Project FSWM-2020-0033 of Russian Ministry of Science and Education).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, and J. J. de Swart, *Phys. Rev. C* **49**, 2950 (1994).
2. Ch. Elster, W. Schadow, A. Nogga, and W. Glockle, *Few-Body Syst.* **27**, 83 (1999).
3. A. Nogga, H. Kamada, and W. Glockle, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 944 (2000).
4. R. Machleidt, *Phys. Rev. C* **63**, 024001 (2001).
5. E. Epelbaum, A. Nogga, W. Glockle, H. Kamada, Ulf-G. Meißner, and H. Witała, *Phys. Rev. C* **66**, 064001 (2002).
6. I. Filikhin, V. M. Suslov, and B. Vlahovic, *Int. J. Mod. Phys. E* **25**, 1650042 (2016).
7. Y. Wu, S. Ishikawa, and T. Sasakawa, *Few-Body Syst.* **15**, 145 (1993).
8. J. L. Friar, G. L. Payne, V. G. J. Stoks, and J. J. de Swart, *Phys. Lett. B* **311**, 4 (1993).
9. C. R. Chen, G. L. Payne, J. L. Friar, and B. F. Gibson, *Phys. Rev. C* **31**, 2266 (1985).
10. A. Nogga, A. Kievsky, H. Kamada, W. Glockle, L. E. Marcucci, S. Rosati, and M. Viviani, *Phys. Rev. C* **67**, 034004 (2003).
11. S. A. Coon, M. D. Scadron, P. C. McNamee, B. R. Barrett, D. W. E. Blatt, and B. H. J. McKellar, *Nucl. Phys. A* **317**, 242 (1979).
12. M. R. Robilotta and H. T. Coelho, *Nucl. Phys. A* **460**, 645 (1986).
13. S. A. Coon and M. T. Peña, *Phys. Rev. C* **48**, 2559 (1993).
14. J. L. Friar, D. Huber, and U. van Kolck, *Phys. Rev. C* **59**, 53 (1999).
15. C. R. Chen, G. L. Payne, J. L. Friar, and B. F. Gibson, *Phys. Rev.* **33**, 1740 (1986).
16. A. Nogga, D. Huber, H. Kamada, and W. Glockle, *Phys. Lett. B* **409**, 19 (1997).
17. M. L. Golberger and K. M. Watson, *Collision Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1964).
18. Z. Papp and W. Plessas, *Phys. Rev. C* **54**, 50 (1996).
19. Z. Papp, C. Y. Hu, Z. T. Hlousek, B. Konya, and S. L. Yakovlev, *Phys. Rev. A* **63** 062721 (2001).
20. Sh. Oryu, *Phys. Rev. C* **73**, 054001 (2006); *Phys. Rev. C* **76**, 069901 (Erratum) (2007).
21. R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, and R. Schiavilla, *Phys. Rev. C* **51**, 38 (1995).
22. H. Liu, Ch. Elster, and W. Glockle, *Phys. Rev. C* **72**, 054003 (2005).
23. M. Stingl and A. S. Rinat, *Nucl. Phys. A* **154**, 613 (1970).
24. W. Glockle, *The Quantum Mechanical Few-Body Problem* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983), Chapt. No. 3.
25. M. V. Egorov, *Phys. At. Nucl.* **86**, 277 (2023).
26. J. Haidenbauer, Y. Koike, and W. Plessas, *Phys. Rev. C* **33**, 439 (1986).
27. Th. A. Rijken, M. M. Nagels, and Y. Yamamoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **185**, 14 (2010); [http://nn-online.org/ESC08c NN code](http://nn-online.org/ESC08c%20NN%20code)
28. Th. A. Rijken, arXiv: 1409.5593v1 [nucl-th].
29. National Nuclear Data Center On-Line Data Service for the ENDSF database, <https://www-nds.iaea.org>
30. J. E. Purcell, J. H. Kelley, E. Kwan, C. G. Sheu, and H. R. Weller, *Nucl. Phys. A* **848**, 1 (2010).

## BINDING ENERGIES OF $^3\text{H}$ , $^3\text{He}$ NUCLEI IN THREE-BODY FADDEEV EQUATIONS WITH DIRECT INTEGRATION

A. Gapchenko<sup>1)</sup>, O. Goleva<sup>1)</sup>, M. Egorov<sup>1),2)</sup>

<sup>1)</sup> Tomsk State University, Physics Faculty, Tomsk, Russia

<sup>2)</sup> Joint Institute for Nuclear Research, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Dubna, Russia

The paper presents a new method for searching for binding energies of three-body systems based on the numerical solution of a system of homogeneous Faddeev equations with respect to the matrix  $T$  with direct numerical integration without the traditional partial wave decomposition. In this paper, we tried to demonstrate on the simplest systems with three point nucleons the features of the numerical solution of homogeneous Faddeev equations, two-body  $t$ -matrices in which both local and non-local potentials are generated. The characteristic behavior of the binding energies of three bodies has been established depending on the change in the number of nodes of the radial grid of relative momenta. The paper compares the method of Pade approximants and the algebraic method of matrix inversion in the numerical solution of the Lippmann–Schwinger equations. It is shown that both methods can be used in problems of searching for binding energies of systems of three bodies. In the chosen numerical scheme, the influence of Coulomb repulsion and the three-body  $NNN$  force on the binding energies of the systems under consideration is estimated. It is shown that the missing  $NNN$  interaction must be charge-dependent in order to explain the skew in the missing contributions to the binding energies of the  $^3\text{He}$ ,  $^3\text{H}$  nuclei under consideration at the level of 143 keV.