ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2024, том 87, № 6, с. 571–576

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХНУКЛОННОЙ СИСТЕМЫ

 Сергей Бондаренко[1)], Сергей Юрьев[1),*]

Поступила в редакцию 17.04.2024 г.; после доработки 06.06.2024 г.; принята к публикации 10.06.2024 г.

В работе проводится обобщение четырехчастичного интегрального уравнения Фаддеева–Якубовского на релятивистский случай. Полученная система интегральных уравнений решается методом итераций, и находится энергия связи и амплитуды состояний ядра гелия-4. В качестве потенциала NN-взаимодействия используется одноранговый сепарабельный потенциал Ямагучи. В расчетах рассматриваются только состояния с нулевым орбитальным моментом – S-состояния. Результаты расчета сравниваются с нерелятивистскими расчетами и с экспериментальным значением.

DOI: 10.31857/S0044002724060147, **EDN:** HOTQCI

1. ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в применении уравнения Бете–Солпитера для изучения релятивистских двухчастичных систем, в частности, дейтрона при высоких энергиях [1], а также изучение релятивистских эффектов в формализме Бете–Солпитера–Фаддеева (БСФ) для трехнуклонных ядер (гелион и тритон) (энергия связи, амплитуды состояний и электромагнитные формфакторы) [2, 3] ставят вопрос о релятивистском обобщении уравнения Фаддеева–Якубовского (ФЯ) для описания релятивистских четырехнуклонных систем.

Необходимость таких исследований индуцируется в том числе постоянным ростом энергий сталкивающихся в ускорителях частиц и тем самым увеличением количества экспериментальных данных. Это имеет отношение и для ядер гелия-4.

За основу в нашей работе взято нерелятивистское уравнение ФЯ [4] в интегральной форме для компонент полной четырехчастичной t-матрицы. Этот формализм имеет богатую историю и развит на достаточно хорошем уровне с теоретической точки зрения, и успешно применен, в частности, к ядру гелия-4 (см. обзор [5]).

В нашей работе мы проводим обобщение нерелятивистского уравнения ФЯ на релятивистский случай методом, который был успешно применен для случая трех частиц [6]. Далее мы решаем полученную систему интегральных уравнений методом итераций и тем самым находим энергию связи и амплитуды состояний ядра гелия-4. В качестве потенциала NN-взаимодействия мы используем одноранговый сепарабельный потенциал Ямагучи. Использование сепарабельного потенциала позволяет избавиться от одного интегрирования в интегральном уравнении, что существенно облегчает вычисления. В численных расчетах мы ограничиваемся рассмотрением только парного S-состояния, а также схемы связи "3 + 1", оставив рассмотрение схемы "2 + 2" для следующей работы.

2. ФОРМАЛИЗМ

2.1. Релятивистское обобщение уравнения Фаддеева–Якубовского в операторном виде

Уравнение для четырехчастичной релятивистской t-матрицы для связанного состояния четырех частиц в операторном виде может быть записано следующим образом:

$$T = VGT, \tag{1}$$

где V – потенциал взаимодействия четырех частиц, G – четырехчастичный пропагатор.

Как и в нерелятивистском случае это уравнение имеет сингулярное ядро и не может иметь корректного решения. Для того чтобы привести это уравнение к пригодному для решения виду, как и в нерелятивистском случае, необходимо применить к нему процедуру преобразования Фаддеева и Якубовского. В случае парного взаимодействия между частицами системы (в отсутствие трех- и четырехчастичных взаимодействий) ядро взаимодействия может быть записано в виде

$$V = \sum_{(ij)} V_{ij}, \tag{2}$$

где V_{ij} обозначает взаимодействие между частицами i и j двухчастичной подсистемы. В этом случае четырехчастичная t-матрица может быть записана в следующем виде:

$$T = \sum_{(ij)} T^{(ij)}, \tag{3}$$

где

$$T^{(ij)} = V_{ij} G_{ij} T. \tag{4}$$

[1)] Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.
[*] E-mail: yurev@jinr.ru

Подставляя (3) в правую часть (4) и проводя преобразования, получаем следующее уравнение на компоненты $T^{(ij)}$:

$$T^{(ij)} = T_{ij}G_{ij} \sum_{(i'j')\neq(ij)} T^{(i'j')}, \tag{5}$$

где T_{ij} – двухчастичная t-матрица, удовлетворяющая уравнению Бете–Солпитера:

$$T_{ij} = V_{ij} + V_{ij}G_{ij}T_{ij}. \tag{6}$$

Уравнение (5) все еще достаточно сингулярно, чтобы иметь корректное решение, поэтому, используя метод, предложенный Якубовским [4], $T^{(ij)}$ может быть представлена в следующем виде:

$$T^{(ij)} = T^{(ijk,l)} + T^{(ijl,k)} + T^{(ij,lk)}, \tag{7}$$

где:

$$T^{(ijk,l)} = T_{ij}G_{ij}\big(T^{(ki)} + T^{(jk)}\big), \tag{8}$$

$$T^{(ijl,k)} = T_{ij}G_{ij}\big(T^{(li)} + T^{(jl)}\big), \tag{9}$$

$$T^{(ij,lk)} = T_{ij}G_{ij}T^{(lk)}. \tag{10}$$

Первые два члена в (7) отвечают схеме сложения “3 + 1”, т.е. когда взаимодействие частиц системы происходит сначала между двумя частицами, далее к ней подключается третья, и с получившейся трехчастичной подсистемой взаимодействует четвертая частица. Последний член отвечает типу сложения “2 + 2”, т.е. когда взаимодействие частиц системы происходит сначала между двумя частицами, в двух двухчастичных подсистемах, а далее происходит взаимодействие между этими подсистемами.

Так как $V_{ij} = V_{ji}$ и как следствие $T_{ij} = T_{ji}$, то имеет место следующее свойство: $T^{(ijk,l)} = T^{(jik,l)}$ и $T^{(ij,kl)} = T^{(ji,kl)} = T^{(ij,lk)} = T^{(ji,lk)}$.

Подставляя (7) в (8) и (10), можно получить систему уравнений на компоненты полной четырехчастичной t-матрицы $T^{(ijk,l)}$ и $T^{(ij,kl)}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} &T^{(ijk,l)} = \\ &= M_{ij,ij}G_{ij}\Big(T^{(kjl,i)} + T^{(ikl,j)} + T^{(jk,il)} + T^{(ki,jl)}\Big) + \\ &+ M_{ij,jk}G_{jk}\Big(T^{(jil,k)} + T^{(ikl,j)} + T^{(ki,jl)} + T^{(ij,kl)}\Big) + \\ &+ M_{ij,ki}G_{ki}\Big(T^{(jil,k)} + T^{(kjl,i)} + T^{(ij,kl)} + T^{(jk,il)}\Big), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} T_{(ij,kl)} = N_{ij,ij}G_{ij}\Big(T^{(lkj,i)} + T^{(kli,j)}\Big) + \\ + N_{ij,kl}G_{kl}\Big(T^{(jil,k)} + T^{(ijk,l)}\Big), \end{aligned}$$

где M и N удовлетворяют уравнению Фаддеевского типа – неоднородному уравнению Бете–Солпитера–Фаддеева [6]:

$$M_{\alpha,\beta} = T_\alpha\delta_{\alpha,\beta} + T_\alpha G_\alpha \sum_{\gamma\neq\alpha} M_{\gamma,\beta}, \tag{12}$$

где $\alpha,\beta,\gamma = ij, jk, ki$

$$N_{\alpha,\beta} = T_\alpha\delta_{\alpha,\beta} + T_\alpha G_\alpha \sum_{\gamma\neq\alpha} N_{\gamma,\beta}, \tag{13}$$

где $\alpha,\beta,\gamma = ij, kl$.

Системы из связанных уравнений (11)–(13) и есть релятивистское обобщение уравнения Фаддеева–Якубовского.

2.2. Релятивистское обобщение уравнения Фаддеева–Якубовского в интегральном виде

Релятивистское обобщение системы уравнений Фаддеева–Якубовского для связанного состояния четырех частиц в интегральном виде, полученное на основании операторного уравнения (11), может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} T^{(ijk,l)}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \int \frac{dk_1'}{(2\pi)^4}\frac{dk_2'}{(2\pi)^4}\frac{dk_3'}{(2\pi)^4}\frac{dk_4'}{(2\pi)^4}\times \\ \times M_{ij,ij}(k_1,k_2,k_3,k_4;k_1',k_2',k_3',k_4',K^2)\times \\ \times G_{ij}(k_i',k_j')T^{(kjl,i)}(k_1',k_2',k_3',k_4') + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{(ijk,l)}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \int \frac{dk_1'}{(2\pi)^4}\frac{dk_2'}{(2\pi)^4}\frac{dk_3'}{(2\pi)^4}\frac{dk_4'}{(2\pi)^4}\times \\ \times N_{ij,ij}(k_1,k_2,k_3,k_4;k_1',k_2',k_3',k_4',K^2)\times \\ \times G_{ij}(k_i',k_j')T^{(lkj,i)}(k_1',k_2',k_3',k_4') + \ldots, \end{aligned} \tag{14}$$

где $G_{ij}(k_i',k_j') = S(k_i')S(k_j')$, $S(k_j')$ – функция Грина свободного нуклона. В работе для простоты используется скалярный пропагатор для нуклона.

Вместо импульсов k_1,k_2,k_3,k_4 удобно использовать импульсы Якоби (для частиц с равной массой), для схемы сложения “3 + 1”:

$$k_{ij} = \frac{1}{2}(k_i - k_j), \tag{15}$$

$$p_{ij,k} = \frac{1}{3}(k_i + k_j) - \frac{2}{3}k_k, \tag{16}$$

$$q_{ijk,l} = \frac{1}{4}(k_i + k_j + k_k) - \frac{3}{4}k_l, \tag{17}$$

и для схемы сложения “2 + 2”:

$$k_{ij} = \frac{1}{2}(k_i - k_j), \tag{18}$$

$$k_{kl} = \frac{1}{2}(k_k - k_l), \tag{19}$$

$$s_{ij,kl} = \frac{1}{2}(k_i + k_j - k_k - k_l), \tag{20}$$

$$K = k_i + k_j + k_k + k_l. \tag{21}$$

В этом случае можно записать:

$$\begin{aligned} &M_{ij,ij}(k_1,k_2,k_3,k_4;k_1',k_2',k_3',k_4') = \\ &= M_{ij,ij}(k_{ij},p_{ij,k},q_{ijk,l};k_{ij}',p_{ij,k}',q_{ijk,l}') = \\ &= M_{ij,ij}(k_{ij},p_{ij,k};k_{ij}',p_{ij,k}')\delta(q_{ijk,l} - q_{ijk,l}') \end{aligned} \tag{22}$$

и

$$
\begin{aligned}
N_{ij,ij}(k_1,k_2,k_3,k_4;k'_1,k'_2,k'_3,k'_4) = \\
N_{ij,ij}(k_{ij},k_{kl},s_{ij,kl};k'_{ij},k'_{kl},s'_{ij,kl}) = \\
= N_{ij,ij}(k_{ij},k_{kl};k'_{ij},k'_{kl})\delta(s_{ij,kl}-s'_{ij,kl})
\end{aligned} \tag{23}
$$

Выражая импульсы Якоби с различными индексами друг через друга и подставляя в уравнение (14), а также используя (22) и (23), получаем следующую систему уравнений, описывающую четырехчастичную связанную систему в релятивистском случае:

$$
\begin{aligned}
T_M(k,p,q) = \int \frac{dk'}{(2\pi)^4}\frac{dq'}{(2\pi)^4} S(K/4-q')S\Big(k'+q/2+ \\
+\frac{1}{2}q'+K/4\Big)\Big[M(k,p;\mathcal{K},\mathcal{P})T_M\Big(k',q+\frac{1}{3}q',q'\Big)+ \\
+M(k,p;\mathcal{K}_1,\mathcal{P}_1)T_N\Big(k',q-\frac{1}{2}q',q'\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_N(k,\kappa,s) = \int \frac{dk'}{(2\pi)^4}\frac{dq'}{(2\pi)^4} S(K/4-q')S(K4+q'+s), \\
N\Big(k,\kappa;\frac{1}{2}s+q',k'\Big)T_M\Big(k',-s-\frac{2}{3}q',q'\Big),
\end{aligned} \tag{24}
$$

где

$$
\mathcal{K} = -\frac{1}{2}k'-\frac{1}{4}q-\frac{3}{4}q', \quad \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}-\frac{3}{4}q,
$$
$$
\mathcal{P} = k'-\frac{1}{6}q-\frac{1}{2}q', \quad \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}+\frac{1}{2}q.
$$

M удовлетворяет следующему уравнению:

$$
\begin{aligned}
M(k,p;k',p') = 2(2\pi)^4 t(k,k',Z_{qp})\delta(p-p')+ \\
+\int \frac{d4p''}{(2\pi)^4} S\Big(\frac{1}{4}K+\frac{1}{3}q-p''\Big)S\Big(\frac{1}{4}K+\frac{1}{3}q+p+p''\Big)\times \\
\times 2t(k,\frac{1}{2}p+p'',Z_{qp})M(p+\frac{1}{2}p'',p'';k',p'),
\end{aligned} \tag{25}
$$

где t – двухчастичная t-матрица и $Z_{qp} = \frac{1}{2}K+\frac{2}{3}q+p$.

N удовлетворяет следующему уравнению:

$$
\begin{aligned}
N(k,\kappa;k',\kappa') = (2\pi)^4 2t(k,k',Z_s)\big[\delta(\kappa-\kappa')+\delta(\kappa+\kappa')\big]+ \\
+\int \frac{d4k''}{(2\pi)^4} S\Big(\frac{1}{4}K+\frac{1}{2}s-k''\Big)S\Big(\frac{1}{4}K+\frac{1}{2}s+k''\Big)\times \\
\times t(k,k'',Z_s)N(\kappa,k'';k',\kappa'),
\end{aligned} \tag{26}
$$

где $Z_s = \frac{1}{2}K+s$.

2.3. Уравнение в случае сепарабельного потенциала

В настоящей работе используется потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия в сепарабельном виде:

$$
\nu(k,k') = \lambda g(k)g(k'), \tag{27}
$$

где $g(k)$ – так называемый формфактор потенциала. Используется сепарабельный потенциал первого ранга с формфактором Ямагучи:

$$
g(k) = 1/(k^2-\beta^2+i0) \tag{28}
$$

с параметрами потенциала λ и β, подбираемыми таким образом, чтобы вычисленные двухчастичные наблюдаемые совпадали с соответствующими экспериментальными данными.

В этом случае двухчастичная t-матрица тоже имеет сепарабельный вид:

$$
t\,(k,k',Z_{qp}) = \tau\,(Z_{qp})\,g\,(k)\,g\,(k')\,. \tag{29}
$$

Подставляя двухчастичную t-матрицу в сепарабельном виде в уравнения (25) и (26) для M и N, получаем, что M и N будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
M\,(k,p;k',p') = 2\tau\,(Z_{qp})\,g\,(k)\,g\,(k')\,\big[(2\pi)^4\delta\,(p-p')+ \\
+\tau\,(Z_{qp'})\,X\,(p,p')\big],
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
N\,(k,\kappa;k',\kappa') = 2\tau\,(Z_s)\,g\,(k)\,g\,(k')\,\Big[(2\pi)^4\big[\delta\,(\kappa-\kappa')+ \\
+\delta\,(\kappa+\kappa')\big]+\tau\,(Z_s)\,Y\,(\kappa,\kappa')\Big],
\end{aligned} \tag{31}
$$

где X и Y удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$
X\,(p,p') = U\,(p,p') + \int \frac{d^4p''}{(2\pi)^4} U\,(p,p'')\,\tau\,(Z_{qp''})\,X\,(p'',p')\,, \tag{32}
$$

$$
Y\,(\kappa,\kappa') = W\,(\kappa,\kappa') + \int \frac{d^4\kappa''}{(2\pi)^4} W\,(\kappa,\kappa'')\,\tau\,(Z_s)\,Y\,(\kappa'',\kappa')\,, \tag{33}
$$

и U и W имеют вид

$$
\begin{aligned}
U(p,p') = S\Big(\frac{1}{4}K+\frac{1}{3}q-p'\Big)S\Big(\frac{1}{4}K+\frac{1}{3}q+p+p'\Big)\times \\
\times g\,\Big(\frac{1}{2}p+p'\Big)\,2g\,\Big(p+\frac{1}{2}p'\Big),
\end{aligned} \tag{34}
$$

$$
W(\kappa,\kappa') = S\Big(\frac{1}{4}K+\frac{1}{2}s-\kappa'\Big)S\Big(\frac{1}{4}K+\frac{1}{2}s+\kappa'\Big)g(\kappa)g(\kappa'). \tag{35}
$$

В данных выражениях M, N, X, Y, U и W зависят от q, s и K как от параметров, поэтому эта зависимость не отражена в них явно. Подставляя M в виде (30) и N в виде (31) в уравнение (24), получаем следующие выражения для T_M и T_N:

$$
T_M\,(k,p,q) = g\,(k)\,Q\,(p,q)\,, \tag{36}
$$
$$
T_N\,(k,\kappa,s) = g\,(k)\,R\,(\kappa,s)\,. \tag{37}
$$

При этом Q и R удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$
\begin{aligned}
Q(p,q) = \tau(Z_{qp})\int \frac{dq'}{(2\pi)^4}\Big[X\Big(p,\frac{1}{3}q+q'\Big)Q\Big(q+\frac{1}{3}q',q'\Big)+ \\
+X\Big(p,-\frac{2}{3}q+q'\Big)R\Big(q-\frac{1}{2}q',q'\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{38}
$$

$$R(\kappa, s) = 2\tau(Z_s)\int \frac{dq'}{(2\pi)^4} Y\left(\kappa, \frac{1}{2}s + q'\right) Q\left(-s - \frac{2}{3}q', q'\right).$$

Ядра интегральных уравнений (38), (32) и (33) имеют полюса и разрезы из нуклонных пропагаторов S, формфакторов потенциала g, а также функции τ, которые не позволяют применить к ним стандартные методы решения интегральных уравнений. Но в случае связанного состояния четырех частиц от этих сингулярностей можно избавиться, применяя процедуру поворота Вика таким же образом, как это было сделано в случае решения задачи для релятивистской системы трех частиц [6].

Далее, для того чтобы привести уравнение к виду, пригодному для решения, необходимо провести парциальное разложение, чтобы выделить амплитуды, относящиеся к состояниям с определенными орбитальными моментами. В данной работе рассматриваются только состояния с нулевыми орбитальными моментами, а именно, состояния $^1S_0$ и $^3S_1$.

С учетом этого система (38) будет иметь следующий вид:

$$Q_i(p, q) = \tau_i(Z_{qp}) \sum_j \int \frac{dq'}{(2\pi)^4} \left[X_{ij}\left(p, \frac{1}{3}q + q'\right) \times \right.$$
$$\left. \times Q_j\left(q + \frac{1}{3}q', q'\right) + X_{ij}\left(p, -\frac{2}{3}q + q'\right) R_j\left(q - \frac{1}{2}q', q'\right)\right], \quad (39)$$

$$R_i(\kappa, s) = 2\tau_i(Z_s) \int \frac{dq'}{(2\pi)^4} Y_{ii}\left(\kappa, \frac{1}{2}s + q'\right) \times$$
$$\times Q_i\left(-s - \frac{2}{3}q', q'\right).$$

При этом X_{ij} и Y_{ii} удовлетворяют следующим системам интегральных уравнений:

$$X_{ij}(p, p') = U_{ij}(p, p') +$$
$$+ \sum_k \int \frac{d^4p''}{(2\pi)^4} U_{ik}(p, p'') \tau_k(Z_{qp''}) X_{kj}(p'', p'), \quad (40)$$

$$Y_{ii}(\kappa, \kappa') = W_{ii}(\kappa, \kappa') +$$
$$+ \int \frac{d^4\kappa''}{(2\pi)^4} W_{ii}(\kappa, \kappa'') \tau_i(Z_s) Y_{ii}(\kappa'', \kappa'), \quad (41)$$

где U_{ij} и W_{ii} имеют вид

$$U_{ij}(p, p') = C_{ij} S\left(\frac{1}{4}K + \frac{1}{3}q - p'\right) S\left(\frac{1}{4}K + \frac{1}{3}q + p + p'\right) \times$$
$$\times g_i\left(\frac{1}{2}p + p'\right) 2g_i\left(p + \frac{1}{2}p'\right), \quad (42)$$

$$W_{ii}(\kappa, \kappa') = S\left(\frac{1}{4}K + \frac{1}{2}s - \kappa'\right) \times$$
$$\times S\left(\frac{1}{4}K + \frac{1}{2}s + \kappa'\right) g_i(\kappa) g_i(\kappa'), \quad (43)$$

а C_{ij} — матрица спин-изоспиновых коэффициентов пересвязки, описывающая спин-изоспиновую структуру системы трех частиц [5, 7].

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ, РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Системы интегральных уравнений в данной работе решаются методом итераций, а сами интегралы вычисляются, используя квадратурный метод, т.е. интеграл заменяется суммой (гауссовы квадратуры).

На первом этапе при определенном значении полной энергии системы $s\,(K = (\sqrt{s}, 0))$ итерационным методом решается система уравнений (40) для функции X на сетке по переменным p_0, q_0, q_0', p, q, q' и $y = \cos\vartheta_{qq'}$. Далее решается система уравнений (39) для функции Q, в ядро которого входит функция X, найденная путем решения системы (40). При этом на каждой итерации необходимо знать значение функции в точке $q + \frac{1}{3}q'$, которая находится вне узлов сетки квадратурного разложения. Для того чтобы найти это значение, на каждой итерации производится интерполяция. Сходимость итерационной процедуры отражена на рис. 1, который иллюстрирует зависимость отношения двух последовательных итераций от номера итерации для уравнения (39). Данный рисунок показывает, что на первых итерациях отношение двух последующих итераций меняется хаотично, на шестой итерации начинается процесс быстрой сходимости к единице (при искомом значении энергии связи или к другому числу при произвольно взятой энергии) и на десятой итерации уже визуально не отличим от единицы. Номер итерации, на которой итерационную процедуру необходимо останавливать, зависит от того, какая точность вычислений должна быть достигнута. В расчетах данной статьи в качестве решения исполь-

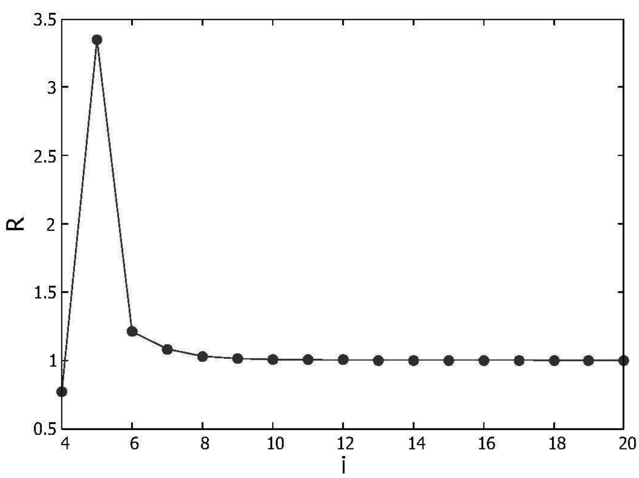

Рис. 1. Релятивистский случай четырех частиц. Сходимость итерационной процедуры — значение отношения последующих итераций $R = Q_i(p, q; s) / Q_{i+1}(p, q; s)$ в зависимости от номера итерации i.

зовались функции, полученные на двадцатой итерации.

Система однородных интегральных уравнений (39) является интегральным уравнением с параметром s и имеет решение не при всех значениях этого параметра, а лишь при тех, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{i\to\infty} \frac{Q_i\,(p,q;s)}{Q_{i+1}\,(p,q;s)} = 1, \tag{44}$$

где i — номер итерации. Это условие используется для поиска энергии связи системы четырех частиц [6] — варьируя энергию системы необходимо добиться выполнения данного условия. Результат отражен на рис. 2.

Из рисунка видно, что имеется только одно пересечение графика с нулем. Таким образом, при энергиях ниже энергии связи тритона наблюдается только одно основное связанное состояние. Для поиска энергии возбужденных связанных состояний необходимо изменить метод решения системы интегральных уравнений. По этой причине в данной работе рассматривается только основное состояние.

Для расчета интегралов на лучах от $[0, \pm\infty)$ использовалось преобразование переменных интегрирования вида $y = Cx/(1-x)$, где переменная х принимает значения [0, 1], а C выбирается таким образом, чтобы интеграл имел оптимальную сходимость.

Так как в нашей задаче интегралы вычисляются квадратурным методом, то очевидно, что чем больше точек сетки используется, тем более точным будет результат вычисления. С другой стороны, при увеличении числа точек сетки квадратурного разложения на 1 время счета увеличивается приблизительно в 2 раза. Рис. 3 иллюстрирует зависимость полученного значения для энергии связи от количества точек сетки

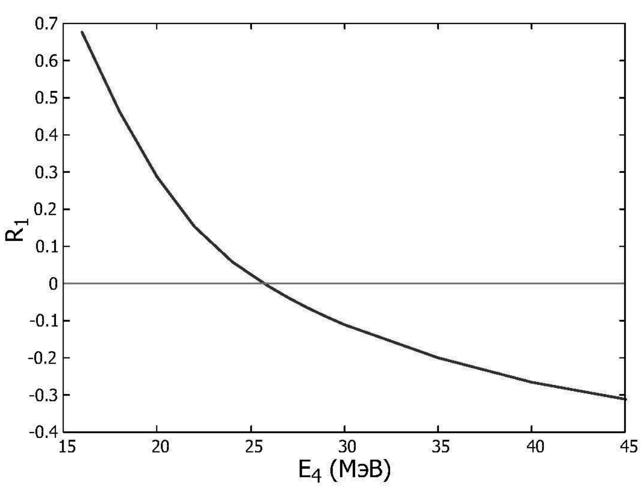

Рис. 2. Значение, к которому сходится функция $R_1 = Q_{20}\,(p,q;s)\,/Q_{19}\,(p,q;s) - 1$ на двадцатой итерации, где уже достигнута высокая степень асимптотического насыщения в зависимости от энергии четырехчастичной системы. Значение “0” соответствует связанному состоянию.

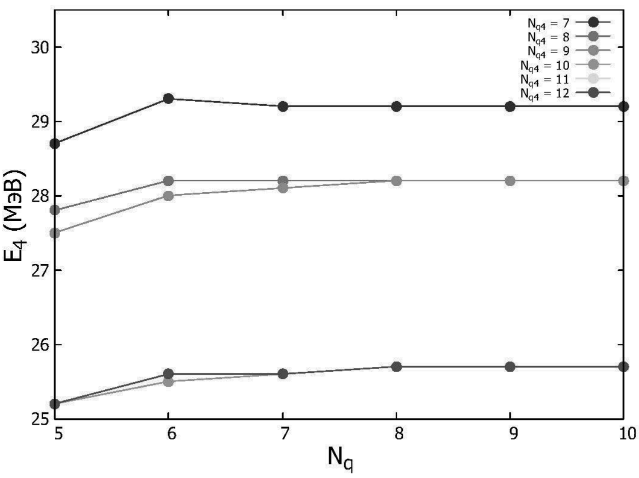

Рис. 3. Значение энергии связи ядра гелия-4 E_4 в релятивистском случае в зависимости от количества точек по q и q_4 в квадратурном разложении интегралов интегрального уравнения.

по импульсу q, при этом каждая линия соответствует количеству точек сетки по переменной интегрирования q_4. Из этого графика видно, что для вычисления энергии связи с точностью до 1 МэВ минимальной рабочей сеткой является $(N_{q_4}, N_q) = (10, 8)$.

В данной работе вычисление энергии связи производится с точностью до 1 МэВ, так как использование сепарабельного потенциала первого ранга делает более точные расчеты бессмысленными. К тому же было сделано довольно грубое, но уместное на данном этапе исследования предположение опустить члены уравнения, соответствующие типу построения связанного состояния из составляющих “2 + 2”.

Основной результат работы — результат вычисления энергии связи ядра гелия-4, иллюстрирует табл. 1 (округленные до 1 МэВ). Эксперимент дает 28.3 МэВ для энергии связи гелия-4. Из таблицы видно, что в случае, когда мы рассматриваем состояния $^1S_0$ и $^3S_1$, результат вычислений ближе к экспериментальным данным, чем в случае рассмотрения только одного $^3S_1$-состояния. Такой результат не является неожиданным, так как и в случае рассмотрения трехчастичной задачи наблюдается такое же различие. Так же видно различие между расчетом с использованием релятивистского обобщения уравнения ФЯ и расчетом с использованием оригинального квантовомеханического уравнения ФЯ. Это различие составляет порядка 9 МэВ. То, что в случае рассмотрения состояний $^1S_0$ и $^3S_1$ для релятивистского случая было получено значение, очень близкое к экспериментальному значению, является случайным, так как результат рассмотрения задачи трех частиц показывает, что использование одноранговых потенциалов нуклон-нуклонного взаимодействия дает разброс энергии связи в несколько МэВ. Более точные резуль-

Таблица 1. Энергия связи гелия-4

Состояние	Нерелятивистский расчет	Релятивистский расчет
$^3S_1$	47 МэВ	59 МэВ
$^1S_0, {}^3S_1$	19 МэВ	26 МэВ

таты могут быть получены с использованием мультиранговых сепарабельных потенциалов.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено обобщение уравнения Фаддеева—Якубовского, применяемого для изучения нерелятивистских квантово-механических четырехчастичных систем на релятивистский случай. Полученное уравнение было применено для вычисления энергии связи ядра гелия-4. В качестве потенциала NN-взаимодействия использовался одноранговый сепарабельный потенциал Ямагучи. Решение системы интегральных уравнений проводилось методом итераций, в результате чего была найдена энергия связи ядра гелия-4 и амплитуды его $^1S_0$- и $^3S_1$-состояний, которые в дальнейшем могут быть использованы для расчета зарядового формфактора этого ядра. Полученный результат был сравнен с нерелятивистским расчетом и с экспериментальными данными. На основании результата исследования можно заключить, что получены реалистичные результаты, находящиеся в пределах разброса результатов различных нерелятивистских расчетов. На основании этого можно заключить, что при дальнейшем развитии и усовершенствовании рассматриваемого формализма можно будет получить результаты, более приближенные к экспериментальным данным, как это было при релятивистском исследовании систем трех нуклонов [2, 3].

В рамках дальнейшего развития рассматриваемого формализма планируется учесть в уравнении компоненты, соответствующие типу построения связанного состояния из составляющих “2 + 2”. Модифицируя метод решения системы интегральных уравнений, мы также сможем получить значение энергии связи для возбужденных состояний ядра гелия-4. Так как потенциал Ямагучи является довольно простым, и результаты, полученные с его помощью, не претендуют на высокую точность, то в дальнейшем мы планируем использовать мультиранговые потенциалы NN-взаимодействия нуклонов. После этого так же будет уместным провести более точный расчет и, следовательно, необходимо будет увеличить число точек в квадратурном разложении интегралов уравнения. Так же планируется использовать полученные при решении интегральных уравнений амплитуды состояния ядра для расчета формфакторов с их дальнейшим анализом, в том числе путем сравнения с нерелятивистскими расчетами и с экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. G. Bondarenko, V. V. Burov, A. V. Molochkov, G. I. Smirnov, and H. Toki, Prog. Part. Nucl. Phys. **48**, 449 (2002); nucl-th/0203069.
2. S. Bondarenko, V. Burov, and S. Yurev, Nucl. Phys. A **1004**, 122065 (2020); arXiv: 2010.15540.
3. S. Bondarenko, V. Burov, and S. Yurev, Nucl. Phys. A **1014**, 122251 (2021); arXiv: 2102.06061.
4. O. A. Yakubovsky, Sov. J. Nucl. Phys. **5**, 937 (1967).
5. В. Ф. Харченко, ЭЧАЯ 10, 884 (1979) [Phys. Part. Nucl. **10**, 349 (1979)].
6. G. Rupp and J. A. Tjon, Phys. Rev. C **37**, 1729 (1988).
7. B. F. Gibson and D. R. Lehman, Phys. Rev. C **14**, 685 (1976); Phys. Rev. C 15, 2257 (Erratum) (1977).

RELATIVISTIC EQUATION FOR A FOUR-NUCLEON SYSTEM

Serge Bondarenko[1], Sergei Yurev[1]

[1] Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

The paper generalizes the four-particle integral Faddeev—Yakubovsky equation to the relativistic case. The obtained system of integral equations is solved by the iteration method and the binding energy and amplitudes of states of the helium-4 nucleus are found. The rank-one separable Yamaguchi potential is used as the NN interaction potential. In the calculations the only states with zero orbital momentum are considered — S states. The results of the calculation are compared with non-relativistic calculations and experimental value.