ЖЭТФ, 2024, том 166, вып. 6 (12), стр. 781–794

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В ТОЧКЕ БОЛЬШОГО ВЗРЫВА В РЕШЕТОЧНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

С. Н. Вергелес [a,b*]

[a] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

[b] *Московский физико-технический институт, кафедра теоретической физики 141707, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 11 апреля 2024 г.,
после переработки 6 августа 2024 г.
Принята к публикации 9 августа 2024 г.

Решеточная регуляризация теории гравитации дает новые возможности для изучения физики Большого взрыва. Доказано, что в изучаемой здесь 4D-решеточной модели гравитации существует высокотемпературная фаза, которая характеризуется обращением в нуль среднего тензора энергии-импульса материи и коллапсом пространства в точку. Показано также существование низкотемпературной фазы в длинноволновом пределе, геометрические свойства которой и динамика соответствуют известным представлениям: расширение Вселенной сначала идет по экспоненциальному закону, а затем плавно переходит на степенной режим.

DOI: 10.31857/S0044451024120034

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах автора [1–5] изучалась модель дискретной гравитации на симплициальном комплексе. Эта модель включала степени свободы чистой гравитации (тетрады, связность), а также фермионные дираковские поля, минимально связанные с гравитацией. В частности, в работе [5] была описана дискретная симметрия действия $\mathbb{Z}_2$, названная PT-симметрией. Это PT-преобразование меняет знак тетрад на противоположный и взаимно заменяет дираковские поля с их эрмитово-сопряженными, т. е. взаимно переставляет частицы и античастицы.

В настоящей работе делается следующий шаг: мы показываем, что при ультравысоких температурах PT-симметрия не нарушена, но она нарушена при достаточно низких температурах. В высокотемпературной фазе средние значения тензора энергии-импульса материи, так же как тетрад, равны нулю. Напротив, в низкотемпературной фазе эти величины отличны от нуля. Поле тетрады является параметром порядка.

Как известно, в Минимальной стандартной модели (MSM) число фермионных степеней свободы кратно превышает число бозонных степеней свободы (даже с учетом двух гравитонов). Отсюда следует, что полная энергия вакуумных нулевых колебаний отрицательна. Мы предполагаем, что некоторые свойства MSM вблизи точки Большого взрыва могут быть описаны в рамках изучаемой здесь дискретной гравитации. Здесь нас интересует следующий вопрос: может ли продолжение решений континуальных уравнений Эйнштейна в окрестность точки Большого взрыва содержать некоторую информацию о свойствах высокотемпературной фазы в решеточной теории? Для ответа на этот вопрос мы решаем уравнения Эйнштейна в рамках парадигмы Фридмана, но с затравочной космологической постоянной положительного знака. Положительная космологическая постоянная компенсирует огромную отрицательную энергию вакуума. А поскольку мы рассматриваем континуальную теорию как длинноволновый предел дискретной теории гравитации, все величины в уравнениях (плотность вакуумной энергии ε, затравочная космологическая постоянная Λ_0 и т. д.) конечны. Поэтому как сами уравнения Эйнштейна, так и их решения, математически корректны. Более того, полученные решения

* E-mail: vergeles@itp.ac.ru

демонстрируют необходимые общие для космологии свойства: вблизи точки Большого взрыва имеет место экспоненциальный режим расширения Вселенной (фаза инфляции), но затем расширение переходит на степенной режим. Интересно также, что в найденном решении модуль энергии вакуума $|\varepsilon|$ уменьшается при приближении к точке Большого взрыва. Иными словами, тензор энергии-импульса материи в континуальной теории стремится к нулю при приближении к точке Большого взрыва. По нашему мнению, эта тенденция говорит о том, что рассматриваемое континуальное уравнение Эйнштейна действительно моделирует дискретную теорию гравитации в длинноволновом пределе. Однако нужно иметь в виду, что по мере уменьшения абсолютного значения тензора энергии-импульса роль квантовых флуктуаций растет, и классические уравнения Эйнштейна становятся неприменимыми (см. разд. 4).

Статья организована следующим образом.

Для облегчения чтения работы в разд. 2 приводится определение того варианта решеточной теории гравитации, который здесь изучается.

В разд. 3 устанавливается главный результат работы: в изучаемой модели решеточной гравитации дискретная PT-симметрия не нарушена при сверхвысоких температурах. Но при низких температурах имеет место спонтанное нарушение этой симметрии.

В разд. 4 рассматривается решение уравнений Эйнштейна в рамках парадигмы Фридмана. Такое рассмотрение имеет смысл, поскольку решеточная теория переходит в обычную теорию гравитации в длинноволновом пределе. Показано, что решение классических уравнений возможно лишь на некотором удалении от точки Большого взрыва. Причина этого в том, что при приближении к особенности квантовые флуктуации становятся существенными.

Настоящая работа носит модельный характер.

2. ВВЕДЕНИЕ В РЕШЕТОЧНУЮ ТЕОРИЮ ГРАВИТАЦИИ

2.1. Определение решеточной теории

Нам необходимо определить ту модель решеточной гравитации, которая здесь изучается. Более полная информация по этому предмету содержится в работах [1–5].

В этом разделе используется евклидова сигнатура. Пусть γ^a есть эрмитовы 4×4-матрицы Дирака, так что

$$\gamma^a\gamma^b+\gamma^b\gamma^a=2\delta^{ab}, \quad \sigma^{ab}\equiv\frac{1}{4}[\gamma^a,\gamma^b], \quad a=1,2,3,4,$$
$$\gamma^5\equiv\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4=(\gamma^5)^\dagger. \tag{1}$$

Рассмотрим ориентируемый 4-мерный симплициальный комплекс $\mathfrak{K}$. Предположим, что каждый его 4-симплекс принадлежит такому подкомплексу $\mathfrak{K}'\in\mathfrak{K}$, который имеет геометрическую реализацию в $\mathbb{R}^4$, топологически эквивалентную диску без пустот. Вершины обозначаются $a_{\mathcal{V}}$, индексы $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ нумеруют вершины и 4-симплексы $s^4_{\mathcal{W}}$ соответственно. Необходимо использовать локальную нумерацию вершин принадлежащих заданному 4-симплексу: все 5 вершин 4-симплекса $s^4_{\mathcal{W}}$ нумеруются как $a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})i}}$, $i=1,2,3,4,5$. В дальнейшем обозначения с дополнительным нижним индексом $(\mathcal{W})$ указывают на то, что соответствующие величины принадлежат 4-симплексу $s^4_{\mathcal{W}}$. Заметим, что величина, принадлежащая 4-симплексу $s^4_{\mathcal{W}}$, может принадлежать также соседнему 4-симплексу $s^4_{\mathcal{W}'}$, если эти 4-симплексы имеют общие симплексы меньшей размерности. Символ Леви-Чивита с попарно различными индексами

$$\varepsilon_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1}\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2}\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3}\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4}\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5}}=\pm 1$$

в зависимости от того, определяет ли порядок вершин $s^4_{\mathcal{W}}=a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1}}a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2}}a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3}}a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4}}a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5}}$ четную или нечетную ориентацию 4-симплекса $s^4_{\mathcal{W}}$. Элемент компактной группы Spin(4) и элемент алгебры Клиффорда,

$$\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}=\Omega^{-1}_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}=\exp\left(\omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\right)=$$
$$=\exp\left(\frac{1}{2}\sigma^{ab}\omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\right)\in\mathrm{Spin}(4), \quad \sigma^{ab}\equiv\frac{1}{4}[\gamma^a\gamma^b],$$
$$\hat{e}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\equiv e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\gamma^a\equiv-\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{e}_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}\Omega^{-1}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \tag{2}$$
$$|e_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}|<1, \quad |e_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}|\equiv\sqrt{\sum_a(e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2})^2},$$

определены на каждом ориентированном 1-симплексе $a_{\mathcal{V}_1}a_{\mathcal{V}_2}$. Ограниченность тетрады согласно (2) необходима для сходимости функционального интеграла статистической суммы. Этим ограничением, накладываемым на тетраду, настоящая работа отличается от предыдущих работ автора по теории дискретной гравитации. По предположению множество переменных $\{\Omega,\hat{e}\}$ является множеством независимых динамических переменных. Фермионные степени свободы (дираковские спиноры) определены на вершинах комплекса:

$$\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}, \quad \Psi_{\mathcal{V}}. \tag{3}$$

Множество переменных $\{\Psi^\dagger, \Psi\}$ взаимно независимы, причем спиноры $\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}$ и $\Psi_{\mathcal{V}}$ находятся во взаимной инволюции (или антиинволюции) относительно операции эрмитова сопряжения.

Рассмотрим модель с действием

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_g + \mathfrak{A}_\Psi + \mathfrak{A}_{\Lambda_0}. \tag{4}$$

Здесь $\mathfrak{A}_g$ и $\mathfrak{A}_\Psi$ являются действиями чистой гравитации и дираковского поля соответственно:

$$\mathfrak{A}_g = -\frac{1}{5!\cdot 2l_P'^2}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{\sigma}\varepsilon_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})}\times$$
$$\times\operatorname{Tr}\gamma^5\left\{\Omega_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})}\Omega_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})}\Omega_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})}\right\}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{A}_\Psi = \frac{1}{5\cdot 24^2}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{\sigma}\varepsilon_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})}\times$$
$$\times\operatorname{Tr}\gamma^5\left\{\hat{\Theta}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})}\right\}, \tag{6}$$

$$\hat{\Theta}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \equiv \Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\gamma^a = \hat{\Theta}^\dagger_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \quad \Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = \frac{i}{2}\left(\Psi^\dagger_{\mathcal{V}_1}\gamma^a\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\Psi_{\mathcal{V}_2} - \Psi^\dagger_{\mathcal{V}_2}\Omega_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}\gamma^a\Psi_{\mathcal{V}_1}\right). \tag{7}$$

Каждая σ является одной из 5! перестановок вершин $\mathcal{V}_{(\mathcal{W})i} \longrightarrow \sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})i})$. Можно проверить, что (ср. с (2))

$$\hat{\Theta}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \equiv -\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{\Theta}_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}\Omega^{-1}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}. \tag{8}$$

Вклад в решеточное действие от космологической постоянной имеет вид

$$\mathfrak{A}_{\Lambda_0} = -\frac{1}{5!\cdot 12}\frac{\Lambda_0}{l_P'^2}\varepsilon_{abcd}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{\sigma}\varepsilon_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})}\times$$
$$\times e^a_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})}e^b_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})}e^c_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})}e^d_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})}. \tag{9}$$

Статистическая сумма представляется интегралом

$$Z = \prod_{1-\text{simplices}}\int_{|e_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}|<1}\prod_a de^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\int d\mu\{\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\}\times$$
$$\times\prod_{\mathcal{V}}\int d\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}d\Psi_{\mathcal{V}}\exp(\mathfrak{A}). \tag{10}$$

Везде $d\mu\{\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\}$ есть инвариантная мера на группе Spin(4).

Действие (4), а также интеграл (10) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\tilde{\Omega}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = S_{\mathcal{V}_1}\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}S^{-1}_{\mathcal{V}_2}, \quad \tilde{\hat{e}}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = S_{\mathcal{V}_1}\,\hat{e}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\,S^{-1}_{\mathcal{V}_1},$$

$$\tilde{\Psi}_{\mathcal{V}} = S_{\mathcal{V}}\Psi_{\mathcal{V}}, \quad \tilde{\Psi}^\dagger{}_{\mathcal{V}} = \Psi^\dagger_{\mathcal{V}}S^{-1}_{\mathcal{V}}, \tag{11}$$

$$S_{\mathcal{V}} \in \operatorname{Spin}(4).$$

Проверка этого факта облегчается при использовании соотношения (ср. с соотношением для $\hat{e}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$ в (11))

$$\tilde{\hat{\Theta}}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = S_{\mathcal{V}_1}\hat{\Theta}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}S^{-1}_{\mathcal{V}_1}, \tag{12}$$

которое непосредственно следует из (11).

Рассматриваемая решеточная модель инвариантна относительно глобальной дискретной $\mathbb{Z}_2$-симметрии, которая является аналогом комбинированной PT-симметрии. Обозначим оператор этого преобразования как $\hat{\mathcal{U}}_{PT}$. Тогда преобразованные динамические переменные выражаются через исходные переменные следующим образом:

$$\hat{\mathcal{U}}^{-1}_{PT}\Psi_{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{U}}_{PT} = U_{PT}\left(\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}\right)^t,$$
$$\hat{\mathcal{U}}^{-1}_{PT}\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{U}}_{PT} = -\left(\Psi_{\mathcal{V}}\right)^t U^{-1}_{PT},$$

$$U_{PT} = i\gamma^1\gamma^3, \tag{13}$$

$$\hat{\mathcal{U}}_{PT}^{-1} e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \hat{\mathcal{U}}_{PT} = -e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2},$$
$$\hat{\mathcal{U}}_{PT}^{-1} \omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \hat{\mathcal{U}}_{PT} = \omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}.$$

Здесь верхний индекс t обозначает транспонирование дираковских матриц и спиноров. Имеем

$$\begin{aligned} &U_{PT}^{-1}\gamma^a U_{PT} = (\gamma^a)^t, \\ &U_{PT}^{-1}\sigma^{ab} U_{PT} = -(\sigma^{ab})^t. \end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что

$$U_{PT}^{-1}\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} U_{PT} = \left(\Omega_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}\right)^t, \tag{15}$$

$$\hat{\mathcal{U}}_{PT}^{-1} \Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \hat{\mathcal{U}}_{PT} = -\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}. \tag{16}$$

2.2. Длинноволновый предел

Перейдем к длинноволновому пределу, т. е. к пределу медленно изменяющихся при движении вдоль решетки полей. В этом пределе действие (4) трансформируется в хорошо известное континуальное действие гравитации в форме Палатини и дираковского поля, минимально связанного с гравитацией, плюс вклад космологической постоянной. Этот предельный переход имеет смысл вместе с переходом к сигнатуре Минковского. В результате компактная калибровочная группа Spin(4) преобразуется в некомпактную группу Spin(3, 1). Далее в этом разделе все решеточные переменные в случае евклидовой сигнатуры снабжены штрихом. Для полевых переменных в случае сигнатуры Минковского используются старые обозначения.

Для указанной трансформации действия необходимы следующие деформации контуров интегрирования в интеграле (10):

$$\begin{aligned} &{\omega'}^{4\alpha}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = i\omega^{0\alpha}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \quad {\omega'}^{\alpha\beta}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = -\omega^{\alpha\beta}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \\ &{e'}^4_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = e^0_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \quad {e'}^\alpha_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = ie^\alpha_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Переменные $\omega^{ab}_{\mathcal{W}ij}$, $e^a_{\mathcal{W}ij}$ в сигнатуре Минковского являются вещественными и их индексы принимают значения

$$a, b, \ldots = 0, 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3. \tag{18}$$

В ортонормированном базисе (ОНБ) метрический тензор $\eta^{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Дираковские матрицы преобразуются как

$$\begin{gathered} {\gamma'}^4 = \gamma^0, \quad {\gamma'}^\alpha = i\gamma^\alpha, \quad {\gamma'}^5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\ \frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a) = \eta^{ab}, \\ \mathrm{Tr}\gamma^5\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d = 4i\varepsilon_{abcd}, \quad \varepsilon_{0123} = 1. \end{gathered} \tag{19}$$

Таким образом, для спиновых матриц $\sigma^{ab} = (1/4)[\gamma^a, \gamma^b]$ имеем

$${\sigma'}^{4\alpha} = i\sigma^{0\alpha}, \quad {\sigma'}^{\alpha\beta} = -\sigma^{\alpha\beta}. \tag{20}$$

При помощи (17)–(20) находим

$$\begin{aligned} &{\omega'}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = \frac{1}{2}\omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\,\sigma_{ab} \equiv \omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \\ &\hat{e}'_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = \gamma_a e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \equiv \hat{e}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} {\Omega'}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = \exp\left(\frac{1}{2}{\omega'}^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}{\sigma'}^{ab}\right) = \\ = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\sigma_{ab}\right) \equiv \Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \in \mathrm{Spin}(3,1). \end{gathered} \tag{22}$$

При переходе к сигнатуре Минковского дираковские спиноры преобразуются следующим образом:

$$\Psi'_{\mathcal{V}} = \Psi_{\mathcal{V}}, \quad {\Psi'}^\dagger_{\mathcal{V}} = \Psi^\dagger_{\mathcal{V}}\gamma^0 = \overline{\Psi}_{\mathcal{V}}. \tag{23}$$

Переход к длинноволновому пределу возможен для таких конфигураций полей, которые достаточно медленно изменяются при переходах от симплекса к симплексу, т. е. при небольших или значительных перемещения по решетке. Это правило касается любых решеток. В нашей теории именно на этапе перехода к длинноволновому пределу возникает необходимость введения локальных координат. Локальные координаты — это маркеры вершин решетки. Рассмотрим некоторый 4D-подкомплекс $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{K}$ с тривиальной топологией четырехмерного диска и геометрической реализацией в $\mathbb{R}^4$. Таким образом, каждая вершина подкомплекса приобретает координаты x^μ, являющиеся координатами образа вершины в $\mathbb{R}^4$:

$$x^\mu_{\mathcal{V}} \equiv x^\mu(a_{\mathcal{V}}), \qquad \mu = (0, 1, 2, 3) = (0, i). \tag{24}$$

На этом этапе координаты являются безразмерными. Рассмотрим некоторый симплекс $s^4_{\mathcal{W}} \in \mathfrak{K}'$. Обозначим все пять вершин этого 4-симплекса как $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ и $\mathcal{V}_m \neq \mathcal{V}_i$. Свойства геометрической реализации таковы, что четыре бесконечно малых вектора

$$dx^\mu_{\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i} \equiv x^\mu_{\mathcal{V}_i} - x^\mu_{\mathcal{V}_m} = -dx^\mu_{\mathcal{V}_i\mathcal{V}_m} \in \mathbb{R}^4, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{25}$$

линейно независимы.

В работах [1–5] доказано, что в $\mathbb{R}^4$ существуют 1-формы $\omega_\mu(x)$ и $\hat{e}_\mu(x)$ такие, что справедливы равенства

$$\omega_\mu\left(\frac{1}{2}\left(x_{\mathcal{V}_m} + x_{\mathcal{V}_i}\right)\right) dx^\mu_{\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i} = \omega_{\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i}, \tag{26}$$

$$\hat{e}_\mu\left(\frac{1}{2}\left(x_{\mathcal{V}_m}+x_{\mathcal{V}_i}\right)\right)dx^\mu_{\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i}=\hat{e}_{\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i}. \tag{27}$$

Далее предполагается, что 1-формы гладко зависят от точек в $\mathbb{R}^4$, являющихся образами вершин комплекса. В длинноволновом пределе элементы $\Omega_{\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i}$ близки к единице и с точностью до $O\big((dx)^2\big)$ включительно имеет место формула

$$\Omega_{\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i}\Omega_{\mathcal{V}_i\mathcal{V}_j}\Omega_{\mathcal{V}_j\mathcal{V}_m}= \\ =\exp\left[\frac{1}{2}\,\mathfrak{R}_{\mu\nu}(x_{\mathcal{V}_m})dx^\mu_{(\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i)}dx^\nu_{(\mathcal{V}_m\mathcal{V}_j)}\right], \tag{28}$$

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu}=\partial_\mu\omega_\nu-\partial_\nu\omega_\mu+[\omega_\mu,\,\omega_\nu\,]. \tag{29}$$

Выпишем длинноволновый предел действия (4):

$$\mathfrak{A}'_g\longrightarrow i\,\mathfrak{A}_g,\quad \mathfrak{A}_g=-\frac{1}{4\,l_P^2}\varepsilon_{abcd}\int\mathfrak{R}^{ab}\wedge e^c\wedge e^d, \\ \mathfrak{R}^{ab}=\mathfrak{R}^{ab}_{\mu\nu}\,dx^\mu\wedge dx^\nu, \tag{30}$$

$$\mathfrak{A}'_\Psi\longrightarrow i\,\mathfrak{A}_\Psi,\quad \mathfrak{A}_\Psi=\frac{1}{6}\varepsilon_{abcd}\int\Theta^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d, \\ \Theta^a=\frac{i}{2}\left[\overline{\Psi}\gamma^a\mathcal{D}_\mu\,\Psi-\left(\overline{\mathcal{D}_\mu\,\Psi}\right)\gamma^a\Psi\right]dx^\mu, \\ \mathcal{D}_\mu=\left(\partial_\mu+\omega_\mu\right), \tag{31}$$

$$\mathfrak{A}'_{\Lambda_0}\longrightarrow i\,\mathfrak{A}_{\Lambda_0},\quad \mathfrak{A}_{\Lambda_0}=-\frac{2\Lambda_0}{l_P^2}\int e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3. \tag{32}$$

Все остальные слагаемые при таком переходе будут содержать дополнительные множители в положительной степени $l_P/\lambda\longrightarrow 0$, поэтому они опускаются. Здесь λ — характерная длина волн физической подсистемы. Эта ситуация типична при переходе к длинноволновому пределу в любой решеточной теории.

Действие (30)–(32) является действием Гильберта–Эйнштейна, минимально связанным с дираковским полем и записанным в форме Палатини. Оно инвариантно относительно диффеоморфизмов. Этот факт не случаен, так как в (24) сам способ введения координат таков, что уже на этом этапе видна независимость действия от произвола введения координат. Мы говорим "почти произвольно", так как и диффеоморфизмы — это не произвольные замены координат, а локально взаимно однозначные и дифференцируемые нужное число раз.

Для ясности укажем на тот факт, что на решетке все переменные и константы безразмерны и порядка единицы. В частности, безразмерна константа $l'_P\sim 1$ в (5) и (9), а также дифференциалы $dx^\mu_{\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i}$ в (25). При переходе к размерным величинам мы полагаем

$$dx^\mu_{\mathcal{V}_m\mathcal{V}_i}=dx^\mu/l_P\sim 1, \tag{33}$$

где дифференциал dx^μ измеряется в сантиметрах и $l_P\sim 10^{-32}$ см (см. (53)). Из (33) видно, что шаг нерегулярной решетки имеет размер порядка l_P. И при этом все слагаемые действия безразмерны, но переменные величины и константы приобретают размерность. Например, в слагаемом (32) космологическая постоянная $\Lambda_0\sim l_P^{-2}$.

В сигнатуре Минковского PT-симметрия действия определяется формулами (13), (14), (16) с той лишь разницей, что в этих формулах следует сделать замену $\Psi^\dagger\longrightarrow\overline{\Psi}$.

3. СВЕРХВЫСОКИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В РЕШЕТОЧНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Рассмотрим состояние решеточной теории при сверхвысоких температурах. Как известно, статистическая сумма $\mathrm{Tr}\exp(-\beta\mathcal{H})$ в квантовой теории отличается от амплитуды перехода за конечное время Δt, представленной в форме функционального интеграла, переходом к мнимому времени $\Delta t=-i\beta$, $\beta=1/T$, и взятием следа. Мы должны изучить некоторые свойства статистической суммы (10) в случае сверхвысоких температур, т. е. $\beta\longrightarrow 0$.

В приложении к изучаемой здесь решеточной теории это означает следующее.

Пусть 4D-решетка имеет две 3D-подрешетки Σ_1 и Σ_2, которые образуют ее границу. Для простоты мы предполагаем, что между Σ_1 и Σ_2 имеется $N<\infty$ 4D-решеточных слоев, каждый толщиной в одно ребро. Подрешетки Σ_1 и Σ_2 считаются тождественными, т. е. между всеми элементами этих подрешеток имеется взаимно однозначное соответствие. Последнее свойство дает возможность вычислить статистическую сумму.

Обозначим через $\Phi_{1\xi}$ и $\Phi_{2\xi}$ голоморфные функции фермионных переменных с вещественными коэффициентами, определенные соответственно на Σ_1 и Σ_2. Чтобы вычислить след по фермионным переменным, необходимо использовать полный набор голоморфных волновых функций

$$\Phi_{1\xi}\equiv\Phi_{1\xi}\{\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}\}$$

и их эрмитово-сопряженных функций

$$\Phi^\dagger_{2\xi}\equiv\Big(\Phi_{2\xi}\{\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}\}\Big)^\dagger=\Phi_{2\xi}\{\Psi_{\mathcal{V}}\}.$$

Индекс ξ перечисляет независимые ортонормированные функции из их полного набора. Функционал

$$\Phi^{\dagger}_{2\xi}\exp(\beta\,\mathfrak{A})\Phi_{1\xi} \tag{34}$$

должен быть помещен под интеграл (10) и должна быть вычислена сумма по ξ. В интеграле (10) на отождествленных между собою 1-симплексах, принадлежащих Σ_1 и Σ_2, должны быть отождествлены переменные $\{\Omega\}$ и $\{e^a\}$.

Нас интересует случай $\beta \ll 1$. Докажем, что дискретная PT-симметрия (13)–(16) не нарушена при сверхвысоких температурах.

Имеет место следующее

Утверждение. В некой конечной окрестности точки $\beta = 0$ свободная энергия статистической суммы (10), за исключением слагаемого вида $-(C_1\,\mathfrak{M}+4\,\mathfrak{N}\,\nu_\Psi)\ln\beta$ (см. (42)), является голоморфной функцией переменной β. Все симметрии действия (4), включая дискретную PT-симметрию, сохранены. □

Приведем некоторые аргументы в пользу Утверждения. Рассмотрим высокотемпературное разложение статистической суммы в 2D-модели Изинга, которая есть сумма по всем замкнутым путям с самопересечениями на решетке. Пусть решетка содержит $\mathfrak{L} \longrightarrow \infty$ ребер и на ней зафиксирован путь (возможно, несколько не пересекающихся путей) суммарно из $\mathfrak{l}$ ребер. Заметим, что $\mathfrak{l}$ — четное число и $\mathfrak{l} \geq 4$. При вычислении статистической суммы удобно выделить множитель $(\operatorname{ch}\beta)^{\mathfrak{L}}$, который не дает особенность в свободной энергии. Тогда каждому ребру пути следует приписать вес $\operatorname{th}\beta$. Пусть $g_{\mathfrak{l}}$ есть число таких замкнутых путей. Имеем строгое неравенство

$$g_{\mathfrak{l}} < \frac{\mathfrak{L}!}{\mathfrak{l}!(\mathfrak{L}-\mathfrak{l})!}, \tag{35}$$

так как число в правой части неравенства (35) включает в себя также и число всех незамкнутых путей веса $(\operatorname{th}\beta)^{\mathfrak{l}}$. Поэтому статистическая сумма Изинга Z

$$\begin{aligned} \frac{Z}{(\operatorname{ch}\beta)^{\mathfrak{L}}} &= 1+\sum_{\mathfrak{l}} g_{\mathfrak{l}}(\operatorname{th}\beta)^{\mathfrak{l}} < \\ &< \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{L}} \frac{\mathfrak{L}!}{\mathfrak{l}!(\mathfrak{L}-\mathfrak{l})!}(\operatorname{th}\beta)^{\mathfrak{l}} = \\ &= (1+\operatorname{th}\beta)^{\mathfrak{L}} \equiv Z_M. \end{aligned} \tag{36}$$

Отсюда видно, что удельная свободная энергия на одно ребро,

$$f_M = -\ln Z_M/\,\mathfrak{L} = -\ln(1+\operatorname{th}\beta),$$

является голоморфной функцией в конечной окрестности точки $\beta = 0$ и в случае $\mathfrak{L} \longrightarrow \infty$. Это наблюдение является следствием того, что величина Z_M по сути является локальной при малых β, т. е. эффективно Z_M есть произведение локальных голоморфных функций. Иными словами, дальний порядок отсутствует при малых β. Но если из суммы Z_M устранить незамкнутые контуры, то дальнего порядка не возникнет. Однако размер окрестности голоморфности может измениться. Это значит, что предел $f = -\ln Z/\,\mathfrak{L}$ при $\mathfrak{L} \longrightarrow \infty$ существует. Действительно, величина в левой части (36) может быть представлена как

$$Z/(\operatorname{ch}\beta)^{\mathfrak{L}} = [1+\rho(\operatorname{th}\beta)]^{\mathfrak{L}}, \tag{37}$$

причем голоморфная функция $\rho(\operatorname{th}\beta) \to 0$ при $\beta \to 0$. Поэтому и

$$f = -\ln\operatorname{ch}\beta - \ln[1+\rho(\operatorname{th}\beta)] \tag{38}$$

является голоморфной функцией в некоторой конечной окрестности точки $\beta = 0$.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в случае статистической суммы (10), хотя этот случай качественно сложнее. Как фермионные, так и бозонные интегралы в (10) хорошо определены. Рассмотрим качественно результаты этих интегрирований.

Пусть $\mathfrak{N} \longrightarrow \infty$ и ν_Ψ обозначают числа вершин комплекса и дираковских полей соответственно. Интегрирование в (10) по дираковскому полю дает фактор под оставшимися интегралами вида

$$\beta^{4\mathfrak{N}\nu_\Psi}\mathfrak{P}\{\Omega, e^a\}, \tag{39}$$

где $\mathfrak{P}\{\Omega, e^a\}$ есть калибровочно инвариантный однородный полином переменных Ω и e^a степеней $4\mathfrak{N}\nu_\Psi$ и $12\mathfrak{N}\nu_\Psi$ соответственно.

Далее рассмотрим интегралы по бозонным переменным. Сначала рассмотрим интегрирование по переменным Ω.

Рассмотрим в полиноме $\mathfrak{P}\{\Omega, e^a\}$ слагаемое, являющееся нечетным относительно переменной $\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$. Интеграл $\int d\mu\{\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\}\ldots$ от тензорного произведения нечетного числа элементов $\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$ равен нулю. Разложим экспоненту по слагаемым, содержащим элемент $\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$. Предположим, что в результате конечного числа таких шагов (для конечного подкомплекса) мы будем иметь тензорное произведение четного числа элементов $\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$ на каждом 1-симплексе $a_{\mathcal{V}_1}a_{\mathcal{V}_2}$. Поэтому в результате интегрирования по калибровочной группе первое ненулевое слагаемое получит дополнительный фактор $\beta^{C\,\mathfrak{M}}$, где $\mathfrak{M} \to \infty$ есть число 1-симплексов комплекса и $0 \le C \sim 1$. Все остальные слагаемые этого разложения в результате интегрирования по калибровочной группе дают дополнительное калибровочно инвариантное слагаемое $\mathfrak{F}\{e^a; \beta\}$ в статистическую сумму. Это слагаемое является функционалом переменных $\{e^a\}$ и хорошо сходящейся голоморфной функцией параметра β в окрестности нуля, причем

$$\frac{\mathfrak{F}\{e^a; \beta\}}{\beta^{C\,\mathfrak{M}+4\,\mathfrak{N}\,\nu_\Psi}} \to 0 \quad \text{при} \quad \beta \to 0.$$

Имеется всего два типа инвариантов относительно действия калибровочной группы (11) и связанных с вершиной $a_\mathcal{V}$:

$$e^a_{\mathcal{V}\mathcal{V}_1} e^a_{\mathcal{V}\mathcal{V}_2}, \tag{40}$$

$$\varepsilon_{abcd} e^a_{\mathcal{V}\mathcal{V}_1} e^b_{\mathcal{V}\mathcal{V}_2} e^c_{\mathcal{V}\mathcal{V}_3} e^d_{\mathcal{V}\mathcal{V}_4}. \tag{41}$$

В (40) вершины $a_{\mathcal{V}_1}$ и $a_{\mathcal{V}_2}$ необязательно разные, и в (41) 1-симплексы $(a_\mathcal{V} a_{\mathcal{V}_1})$, $(a_\mathcal{V} a_{\mathcal{V}_2})$, $(a_\mathcal{V} a_{\mathcal{V}_3})$, $(a_\mathcal{V} a_{\mathcal{V}_4})$ необязательно принадлежат одному 4-симплексу.

Коротко рассмотрим интеграл по переменным $\{e^a\}$. Заметим, что если под интегралом содержится выражение (40) в первой степени и с разными $a_{\mathcal{V}_1}$ и $a_{\mathcal{V}_2}$ и оно не пересекается с другими аналогичными выражениями, то интеграл тождественно равен нулю. Аналогичное утверждение справедливо в отношении выражения (41). Следовательно, выражения (40) и (41) должны быть под интегралом в таких степенях и комбинациях, чтобы переменная $e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$ на каждом 1-симплексе $(a_{\mathcal{V}_1} a_{\mathcal{V}_2})$ была в четной (возможно, нулевой) степени. Возможно, что для этого разложение в (34) по вкладу в действие от $\beta\,\mathfrak{A}_{\Lambda_0}$ (см. (9)) необходимо.

Действие (4) локально, т. е. оно состоит из слагаемых (локальных операторов), каждое из которых определено на ближайших элементах решетки. Назовем один из таких операторов A, другой — B, и будем считать, что операторы A и B разнесены на значительное расстояние вдоль решетки. Рассмотрим коррелятор $\langle AB \rangle$. Чтобы этот коррелятор был отличен от нуля, необходимо разлагать экспоненту по этим операторам так, чтобы между операторами A и B оказалось достаточное количество смежных локальных операторов. Но такое разложение даст параметр $\beta \ll 1$ в достаточно высокой степени, по меньшей мере пропорциональной числу 1-симплексов между A и B, и с коэффициентом порядка единицы. Поэтому статистическая сумма в высокотемпературной фазе носит локальный характер.

Сделаем вывод из проведенного рассмотрения. При сверхвысокой температуре ($\beta = 1/T \longrightarrow 0$) интеграл статистической суммы (10) является голоморфной функцией в окрестности точки $\beta = 0$ и имеет форму (ср. с (37))

$$Z = \text{const}\beta^{C_1\,\mathfrak{M}+4\,\mathfrak{N}\,\nu_\Psi}(1+\mathfrak{f}(\beta))^{C_2\,\mathfrak{M}}, \tag{42}$$

$$\mathfrak{f}(\beta) \to 0 \quad \text{при} \quad \beta \to 0,$$

$$C_1 \sim C_2 \sim 1.$$

Отсюда следует справедливость Утверждения. В свою очередь, из Утверждения следует, что в высокотемпературной фазе не нарушены никакие симметрии, включая и дискретную PT-симметрию.

Исходя из справедливости Утверждения, займемся вычислением средних некоторых операторов.

Дискретное PT-преобразование (13)–(16) не изменяет меру и подынтегральное выражение (за исключением, возможно, усредняемой величины), но меняет местами начальное и конечное состояния:

$$\left(\Phi^\dagger_{2\xi}\right)' \equiv \Phi^\dagger_{2\xi}\hat{\mathcal{U}}^\dagger_{PT} = \Phi_{2\xi}\{U_{PT}(\Psi^\dagger_\mathcal{V})^t\},$$

$$\Phi'_{1\xi} \equiv \hat{\mathcal{U}}_{PT}\Phi_{1\xi} = \Phi_{1\xi}\{-\Psi^t_\mathcal{V} U^{-1}_{PT}\}, \tag{43}$$

$$\left(\Phi^\dagger_{2\xi}\right)'\Phi'_{1\xi} = \Phi_{1\xi}\{\Psi^t_\mathcal{V} U^{-1}_{PT}\}\Phi_{2\xi}\{U_{PT}(\Psi^\dagger_\mathcal{V})^t\}.$$

Здесь штрих над символом волновой функции означает, что она PT-преобразована. Из последнего равенства видно, что начальная и конечная волновые функции переставляются местами в результате PT-преобразования, и при этом их скалярное произведение сохраняется. Это означает, что оператор $\hat{\mathcal{U}}_{PT}$ является антиунитарным.

Согласно общему правилу, интеграл не изменяется при замене переменных интегрирования. В нашем случае представляет интерес интеграл по фермионным и тетрадным переменным и сумма по фермионным состояниям ξ. Интеграл по переменным связности $\{\Omega\}$ следует исключить. В противном случае дальнейшее рассуждение потеряет смысл. Рассмотрим два интеграла.

Первый случай:

$$Z\{\Omega\} = \sum_\xi \int_e \int_{\Psi^\dagger\Psi} \Phi^\dagger_{2\xi}\exp(\beta\,\mathfrak{A})\Phi_{1\xi} \xrightarrow{PT} Z\{\Omega\}.$$

Второй случай:

$$\langle\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle_{e,\Psi} = N\sum_\xi \int\limits_e \int\limits_{\Psi^\dagger\Psi} \Phi^\dagger_{2\xi}\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\exp(\beta\,\mathfrak{A})\Phi_{1\xi} \xrightarrow{PT} -\langle\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle_{e,\Psi}.$$

Второй случай рассмотрим подробнее. Имеем цепочку равенств:

$$\begin{gathered}\langle\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle_{e,\Psi} = N\sum_\xi \int\limits_e \int\limits_{\Psi^\dagger\Psi} \Phi^\dagger_{2\xi}\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\exp(\beta\,\mathfrak{A})\Phi_{1\xi} = \\ = N\sum_\xi \int\limits_e \int\limits_{\Psi^\dagger\Psi} \left(\Phi^\dagger_{2\xi}\right)'\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\exp(\beta\,\mathfrak{A})\Phi'_{1\xi} = \\ = N\sum_\xi \int\limits_e \int\limits_{\Psi^\dagger\Psi} \Phi^\dagger_{1\xi}\left\{\hat{\mathcal{U}}^{-1}_{PT}\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\exp(\beta\,\mathfrak{A})\hat{\mathcal{U}}_{PT}\right\}^\dagger\Phi_{2\xi} = \\ = -N\sum_\xi \int\limits_e \int\limits_{\Psi^\dagger\Psi} \Phi^\dagger_{1\xi}\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\exp(\beta\,\mathfrak{A})\Phi_{2\xi} = \\ = -\langle\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle_{e,\Psi}. \end{gathered} \tag{44}$$

Здесь $N\{\Omega\}$ — нормировочная константа, интеграл вычисляется лишь по переменным тетрад и дираковского поля, но не по переменным связности. Если бы интегрирование включало также интеграл по переменным $\{\Omega\}$, то любая калибровочно неинвариантная величина, как $\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$, обращалась бы в нуль тождественно. Но интеграл (44) содержателен, так как в нем калибровка фиксирована. В (44) первое равенство является определением среднего значения, второе равенство является следствием Утверждения, третье и четвертое равенства являются следствиями равенств (43) и (16) соответственно.

Из цепочки равенств (44) вытекает главный вывод настоящей работы:

$$\langle\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle_{e,\Psi} \equiv \langle\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle_{\text{Gauge Fix}} = 0. \tag{45}$$

Вакуумное среднее величины $\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$ в длинноволновом пределе в сигнатуре Минковского при нулевой температуре было вычислено в [6]:

$$\langle 0|\Theta^a_\mu|0\rangle = \frac{2}{\pi^2 l_P^4}e^a_\mu \neq 0,$$

$$\Theta^a_\mu = \frac{i}{2}\left[\overline{\Psi}\gamma^a\mathcal{D}_\mu\,\Psi - \left(\overline{\mathcal{D}_\mu\,\Psi}\right)\gamma^a\Psi\right], \tag{46}$$

$$\mathcal{D}_\mu = \left(\partial_\mu + \omega_\mu\right).$$

Сравнение уравнений (45) и (46) показывает, что в решеточной теории гравитации, связанной с дираковским полем, имеется фазовый переход по температуре.

Фазовый переход из фазы с нулевым значением среднего величины Θ^a_μ в фазу с ненулевым значением этой величины и физическое значение этого перехода рассматривался в работе [7]. Работа [8] также может быть интересна в этой связи.

4. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА И ИХ РЕШЕНИЯ

Здесь мы используем стандартную пространственно-плоскую метрику Робертсона–Уокера:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^\alpha)^2, \quad \alpha = 1,2,3, \tag{47}$$

$H = \dot{a}/a$ и $a(t)$ — параметр Хаббла и космический масштабный фактор. Мы полагаем $c = 1$. В формулах с восстановленной размерностью делаются соответствующие замечания.

Прежде всего покажем, что в конце фазы инфляции и далее квантовые вакуумные флуктуации несущественны при рассмотрении динамики макроскопических областей пространства и содержащейся в них материи.

Наш подход предполагает, что все физические величины определены с учетом вакуумных нулевых колебаний квантованных полей. В частности, плотность энергии и давление вакуума включают энергию и давление вакуума. Известно, что имеют место следующие одновременные коммутационные соотношения для компонент тензора энергии-импульса в пространстве Минковского [9]:

$$\begin{gathered}\left[T^{00}(\mathbf{x}), T^{00}(\mathbf{y})\right] = \\ = -i\hbar\left(T^{0k}(\mathbf{x}) + T^{0k}(\mathbf{y})\right)\partial_k\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ + \text{Schwinger Terms}, \end{gathered}\tag{48}$$

и так далее. Швингеровы члены являются высшими производными от δ-функций и они здесь не интересны. Такие же коммутационные соотношения имеют место в искривленном пространстве, если они записаны вблизи центра нормальных координат Римана.

Обозначим l_P порядок размеров шага решетки, который назовем планковским масштабом. Тогда $\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \sim l_P^{-3}$. При помощи (48) и известного правила мы находим порядок квантовых флуктуаций плотности энергии на длинах волн порядка $\lambda \gg l_P$:

$$\Delta\varepsilon \sim \sqrt{\frac{\hbar|\varepsilon|}{l_P^3\lambda}}, \quad \frac{\Delta\varepsilon}{|\varepsilon|} \sim \sqrt{\frac{\hbar}{l_P^3\lambda|\varepsilon|}}. \tag{49}$$

В настоящую эпоху, а также в значительной части фазы инфляции температура вакуума $T_{vac} \sim \hbar H$ (см. разд. 5) весьма мала по сравнению с максимальной (по модулю) энергией частиц в дираковском море $|\epsilon| \sim \hbar/l_P$. Поэтому плотность вакуумной энергии $|\varepsilon| \sim \hbar/l_P^4$, и мы получаем оценку

$$\begin{gathered}\Delta\varepsilon/|\varepsilon| \sim \sqrt{l_P/\lambda} \sim 10^{-16} \\ \text{для} \quad \lambda \sim 1\,\text{см}, \quad l_P \sim 10^{-32}\,\text{см}.\end{gathered} \tag{50}$$

Заметим, что при условии справедливости длинноволнового предела имеет смысл полагать $\lambda/a \sim \mathrm{const}_1$, $l_P/a \sim \mathrm{const}_2$, и поэтому $l_P/\lambda \sim \mathrm{const}$. Следовательно, оценка (50) остается справедливой в очень широком диапазоне, включая значительную часть фазы инфляции. В этом же диапазоне оказывается оправданным использование классических уравнений Эйнштейна для описания макроскопической динамики. Однако при приближении к точке Большого взрыва температура вакуума становится слишком большой. В результате этого плотность энергии $|\varepsilon|$ быстро уменьшается по абсолютной величине вследствие заселения фермионами уровней положительной энергии. Оценки (49) и (50) становятся неправильными, и в ситуации $\Delta\varepsilon/|\varepsilon| \sim 1$ классические уравнения неприменимы. Динамика становится полностью квантовой. Более детальное изучение границы перехода от классического описания к квантовому не входит в задачи настоящей работы.

Продемонстрируем тенденцию стремления средней энергии к нулю при росте температуры на простом примере. Рассмотрим одну ферми-частицу, которая может быть лишь в двух состояниях с энергиями $\pm\epsilon$. Пусть частица помещена в термостат с нулевым химическим потенциалом и такой температурой, что $\epsilon/T \longrightarrow 0$. Тогда $\varepsilon = \langle\epsilon\rangle \longrightarrow 0$.

4.1. Решение уравнений Эйнштейна с затравочной космологической постоянной

Мы полагаем, что тензор энергии-импульса идеальной релятивистской жидкости подходит для решения поставленной задачи:

$$T_b^a = (\varepsilon + p)U^a U_b - p\delta_b^a. \tag{51}$$

Мы работаем в ортонормальном базисе, в котором метрический тензор

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

В правой части уравнения (51) символы ε и p обозначают соответственно плотность энергии и давление, и эти величины включают свои вакуумные значения. Так как фермионные поля, в отличие от бозонных, дают отрицательный вклад в энергию вакуума и согласно стандартной модели фермионных полей кратно больше бозонных, то мы полагаем $\varepsilon < 0$. Кроме того, решеточная регуляризация означает, что $|\varepsilon|, |p| < \infty$. U^a является средней 4-скоростью макроскопической области решетки. В нашем случае $U^a = (1, 0, 0, 0)$. Для компенсации вакуумной энергии в уравнения Эйнштейна вводится конечная положительная космологическая постоянная Λ_0:

$$\mathfrak{R}_b^a - \frac{1}{2}\delta_b^a\,\mathfrak{R} = 8\pi G\, T_b^a + \Lambda_0\delta_b^a. \tag{52}$$

В решеточной теории космологическая постоянная вводится естественным образом (см. (9)). Мы полагаем, что космологическая постоянная (восстановленной размерности)

$$\Lambda_0 = \mathrm{const} \sim l_P^{-2}, \tag{53}$$

$$l_P \sim \sqrt{\frac{8\pi G\hbar}{c^3}} \sim 10^{-32}\,\text{см}.$$

Заметим, что затравочная космологическая постоянная на решетке, как и все прочие константы и переменные, является безразмерной и порядка единицы. Для метрики мы используем анзац (47). Чтобы не перегружать формулы, введем обозначения

$$8\pi G\,\varepsilon = \tilde{\varepsilon}, \quad 8\pi G\, p = \tilde{p}. \tag{54}$$

Все компоненты уравнений Эйнштейна сводятся к двум независимым:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda_0 + \tilde{\varepsilon}, \quad 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda_0 - \tilde{p}. \tag{55}$$

Уравнение $\nabla_a T_b^a = 0$ является следствием уравнений (55), и поэтому оно излишне. При помощи параметра Хаббла $H(t)$ уравнения (55) переписываются следующим образом:

$$2\dot{H} + (\tilde{\varepsilon} + \tilde{p}) = 0, \quad 3H^2 - (\Lambda_0 + \tilde{\varepsilon}) = 0. \tag{56}$$

Таким образом, мы имеем три неизвестных функции $\{\tilde{\varepsilon}(t), \tilde{p}(t), H(t)\}$ и два уравнения (56). Недостающее уравнение есть уравнение состояния, связывающее плотность энергии и давление. В отношении уравнения состояния релятивистской материи известны следующие факты: (i) в случае реальной пылевидной материи $p = 0$; (ii) в случае реальной ультрарелятивистской материи $p = \varepsilon/3$; (iii) в случае плотности энергии и давления вакуума в пространстве де Ситтера $p = -\varepsilon$. Во всех трех случаях плотность энергии и давление связаны линейно. Кроме того, эти величины имеют одинаковую размерность. Поэтому для плотности энергии и давления, включающих вакуумные значения, мы принимаем следующую гипотезу линейной связи:

$$\tilde{p} = \varkappa\Lambda_0 + (\varkappa - 1)\tilde{\varepsilon} \longleftrightarrow \tilde{\varepsilon} + \tilde{p} = \varkappa(\tilde{\varepsilon} + \Lambda_0). \tag{57}$$

Это уравнение является линейным и неоднородным с неизвестной безразмерной функцией $\varkappa(t)$, асимптотики которой далее определяются исходя из известной динамики. Система уравнений (56) и (57) имеет следующее решение:

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}\varkappa H^2 \longrightarrow$$
$$H(t) = H_0\left(1 + \frac{3}{2}H_0\int\limits_{t_0}^{t}\varkappa(t')dt'\right)^{-1}, \tag{58}$$

$$\tilde{\varepsilon}(t) = -\Lambda_0 + 3H_0^2\left(1 + \frac{3}{2}H_0\int\limits_{t_0}^{t}\varkappa(t')dt'\right)^{-2}, \tag{59}$$

$$\tilde{p}(t) = \Lambda_0 + 3\big(\varkappa(t) - 1\big)H_0^2\left(1 + \frac{3}{2}H_0\int\limits_{t_0}^{t}\varkappa(t')dt'\right)^{-2}. \tag{60}$$

Здесь H_0 — константа интегрирования, играющая роль параметра Хаббла в начале фазы инфляции и $t_0 > 0$.

Из решений (58)–(60) видно, что случаю (i) соответствует значение $\varkappa(t) = 1$, случаю (ii) — значение $\varkappa(t) = 4/3$, случаю (iii) — значение $\varkappa(t) = 0$.

Укажем некоторые свойства решения (58)–(60). Приводимые ниже оценки весьма грубы, они носят модельный характер. Примем следующие оценки для продолжительности фазы инфляции t_{inf} и для константы H_0:

$$t_{inf} \cong 10^{-37}\text{с}, \quad H_0 \cong 10^{39}\text{с}^{-1}. \tag{61}$$

Отсюда $H_0 t_{inf} \cong 100$.

Оценки значения параметра Хаббла сильно расходятся в различных источниках. Мы приняли значение $H \sim 1.7 \cdot 10^{15}$ ГэВ, что эквивалентно значению (61) [10]. В работе [11] дана оценка значения параметра Хаббла в конце фазы инфляции: $\sqrt{G}H < 10^{-5}$. Это значение соответствует $H \sim 10^{38}\,\text{см}^{-1}$, что близко к значению (61).

Возьмем $\varkappa(t_0) \cong 1/150$ и предположим, что в течение времени t_{inf} функция $\varkappa$ изменяется несущественно. Это предположение означает (см. первое из уравнений (58)), что в фазе инфляции $|\dot{H}| \ll H^2$. Последнее неравенство является необходимым условием инфляции [12]. Тогда в промежутке времени $t_0 < t < t_0 + t_{inf}$ решения (58)–(60) принимают вид

$$H(t) \cong H_0, \quad \tilde{\varepsilon}(t) \cong -\tilde{p} \cong -\Lambda_0 + 3H_0^2. \tag{62}$$

Таким образом, в течение инфляции масштабный фактор $a(t)$ увеличивается в $\exp(H_0 t_{inf}) \approx \exp 100 \approx 10^{43}$ раз.

Предположим, что когда $t > t_0 + t_{inf}$, функция $\varkappa(t)$ становится равной $\varkappa = 4/3$. В этом случае решения (58)–(60) трансформируются в решения, расширяющиеся по степенному закону:

$$H(t) \cong \frac{1}{2t}, \quad \tilde{\varepsilon}(t) \cong -\Lambda_0 + \frac{3}{4t^2}, \quad \tilde{p} \cong \Lambda_0 + \frac{1}{4t^2}. \tag{63}$$

Решение (63) показывает, что масштабный фактор и плотность реальной материи изменяются в соответствии с хорошо известным законом, так же как и правильное уравнение состояния в случае ультрарелятивистской материи:

$$a(t) \propto \sqrt{t}, \quad \rho_{real} = \frac{3}{32\pi G t^2}, \quad p_{real} = \frac{1}{3}\varepsilon_{real}. \tag{64}$$

Здесь размерность восстановлена.

Из равенств (59) и (60) видно, что по мере приближения к точке Большого взрыва величины $|\tilde{\varepsilon}|$ и $\tilde{p}$ уменьшаются и становятся равными

$$\tilde{\varepsilon} = -(\Lambda_0 - 3H_0^2),$$

$$\tilde{p} = \Lambda_0 - 3(1 - \varkappa(t_0))H_0^2$$

при $t = t_0$. Если предположить, что при $t \longrightarrow 0$ функция $\varkappa \longrightarrow 0$ и $3H_0^2 \longrightarrow \Lambda_0$, тогда тензор энергии-импульса стремится к нулю в точке Большого взрыва. Однако выше было показано, что такое продолжение классического решения в непосредственную окрестность точки Большого взрыва невозможно вследствие развития квантовых флуктуаций. Тем не менее тенденция стремления к нулю тензора энергии-импульса в классическом решении по мере приближения к точке Большого взрыва показывает согласованность представленных квантового и классического подходов.

Оценим температуру T_c фазового перехода, нарушающего PT-симметрию. Для этого воспользуемся результатом Воловика [13–16], вычислившим точно локальную температуру «вакуума» в пространстве де Ситтера:

$$T_{vac} = \frac{\hbar H}{\pi}. \tag{65}$$

Хотя в изучаемой теории параметр Хаббла, в отличие от случая пространства де Ситтера, не является постоянным, здесь мы примем формулу (65) для оценки температуры.

Было показано, что в точке фазового перехода классические уравнения Эйнштейна (56) не имеют силы. Однако мы их используем лишь для проведения качественной оценки. Так как в точке фазового перехода среднее тензора энергии-импульса фермионов равно нулю ($\varepsilon = 0$), то согласно второму уравнению (56) имеем $H_c \sim \sqrt{\Lambda_0}$. Отсюда и при помощи (65), (53) получаем оценку

$$T_c \sim \frac{\hbar c}{l_P} \sim 10^{18}\,\text{ГэВ}, \quad \text{или} \quad T_c \sim 10^{31}\,\text{К}. \tag{66}$$

Температуру фазового перехода можно оценить также как энергию дираковского подвала, заключенную в планковский объем

$$V_P \sim l_P^3: \; T_c \sim (\hbar c/l_P^4) l_P^3 \sim \hbar c/l_P.$$

Эта температура по порядку величины совпадает с температурой Великого объединения.

Оценим также значение температуры в кельвинах в начале фазы инфляции, когда по некоторым оценкам $H_0 \sim 10^{39}\,\text{с}^{-1}$. Тогда

$$T_0 \sim \frac{\hbar H_0}{k} \sim 10^{28}\,\text{К}. \tag{67}$$

Оценка температуры (67) соответствует известным оценкам температуры в начальной фазе инфляции.

4.2. Короткий обзор проблемы расходящейся космологической постоянной

Проблема космологической постоянной заключается в том, что плотность энергии квантовых нулевых колебаний в вакууме расходится как четвертая степень параметра обрезания в импульсном пространстве, и в настоящее время нет общепринятого решения, как скомпенсировать эту огромную плотность энергии.

Нам представляется, что выше в этом разделе представлено возможное решение проблемы, которое корректно в том случае, когда пространство-время имеет свойство зернистости (решетка) на самых малых масштабах. Действительно, введение конечной затравочной космологической постоянной приводит к осмысленному решению уравнений Эйнштейна: в начальной фазе мы имеем экспоненциальное расширение Вселенной (режим инфляции), которое переходит в известное расширение по степенному закону в режиме ультрарелятивистской материи.

Нам представляется уместным дать здесь весьма короткий и не полный обзор попыток решить эту проблему в рамках традиционной квантовой теории поля.

В фундаментальном обзоре [17] были сделаны следующие утверждения относительно расходящейся энергии вакуума. (i) В плоском пространстве-времени Минковского эти расходимости, вообще говоря, имеют место, но в случае суперсимметричных теорий они полностью сокращаются. (ii) В искривленном пространстве-времени даже в случае супергравитации космологическая постоянная расходится. (iii) Теория суперструн также не спасает ситуацию.

Из более поздних и специализированных работ отметим работы [18–23]. В этих работах усилия направлены на решение проблемы космологической постоянной путем микроскопического анализа. Вычислялись вероятности следующих процессов. Пусть имеется массивная частица в пространстве де Ситтера. Такая частица рождает аналогичные частицы в течение достаточно продолжительного времени. Эта проблема изучалась как для свободных, так и для взаимодействующих полей. Аналогичный процесс имеет место в плоском пространстве-времени для массивных заряженных частиц в постоянном и однородном электрическом поле: рождаются пары частица-античастица, которые уменьшают начальное электрическое поле. В случае пространства де Ситтера идея заключается в том, что рождение пар также ведет к уменьшению космологической постоянной со временем. К сожалению, в цитированных работах не изучалось обратное влияние квантованных материальных полей на геометрию пространства-времени. Возможно, дальнейшие усилия в этом направлении приведут к решению проблемы космологической постоянной.

В работе [24] вычислялось среднее тензора энергии-импульса квантованного скалярного поля в случае анизотропной и меняющейся во времени классической метрики. Регуляризация проводилась следующим образом: из полученной величины вычиталось среднее тензора энергии-импульса, вычисленное в случае стационарного вакуума.

Авторы работы [25] изучают такие модели теории поля, которые, не являясь суперсимметричными, имеют одинаковое число бозонных и фермионных степеней свободы. В этом случае расходимости высшей четвертой степени сокращаются в квантовом среднем тензора энергии-импульса. Показано, каким условиям должны удовлетворять перенормированные массы полей для сокращения оставшихся расходимостей. Этот подход можно назвать методом тонкой настройки теории, в результате которой бесконечная энергия вакуума исчезает.

Работа [26] представляется нам интересной и комплиментарной к настоящей работе, так как в ней также вводится затравочная космологическая постоянная. Сокращение вакуумной энергии является динамическим эффектом, а не результатом тонкой настройки.

Другой интересный подход к решению проблемы, использующий термодинамическую идеологию, представлен в работе [27] (см. там также ссылки на работы F. R. Klinkhamer and G. E. Volovik). Главная идея заключается в следующем. Предположим, что система приходит в состояние термодинамического равновесия и рассмотрим большой термодинамический потенциал Ω, отнесенный к пространственному объему V:

$$\Omega(\beta, \mu, V) = -P(T, \mu)V. \tag{68}$$

В случае термодинамического равновесия Вселенной (если оно существует), давление в правой части равенства (68) стремится к нулю, так как у Вселенной нет вообще внешнего давления. Но эффективный тензор энергии-импульса материи формируется потенциалом (68). Поэтому эффективная плотность энергии материи, включающая энергию вакуума, оценивается как $\varepsilon \sim \Omega/V \longrightarrow 0$.

В работе [28] подвергается критике использование метрики (47) по причине сильных флуктуаций всех полей на планковских масштабах частот и длин волн. Это заключение делается на основе изучения корреляторов компонент тензора энергии-импульса квантованных материальных полей. Вычисление показывает, что даже в случае свободных квантованных полей вакуумные средние компонент тензора энергии-импульса и их флуктуации — одного порядка и они расходятся как четвертая степень параметра обрезания. Однако корреляторы между длинноволновыми и коротковолновыми степенями свободы стремятся к нулю. Поэтому длинноволновая динамика может рассматриваться независимо от флуктуаций на планковском масштабе. Поэтому использование метрики (47) законно в случае описания низкочастотной физики. Однако это допущение становится неправильным при уменьшении масштабного фактора, росте температуры и уменьшении среднего значения плотности энергии (см. разд. 3).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работах [29–32] и [5] было предложено равенство

$$\left\langle e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \right\rangle = \kappa^{(0)}_{(\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2)} \left\langle \Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \right\rangle, \tag{69}$$

которое имеет место как в решеточной теории гравитации, идентичной изучаемой здесь, так и в непрерывной теории. Соотношение (69) подтверждается также тем фактом, что величины в нем под знаком среднего преобразуются одинаково под действием всех симметрий теории, включая дискретную PT-симметрию. Соотношение (46), полученное прямым вычислением в континуальном пределе при нулевой температуре, является еще одним аргументом в пользу справедливости соотношения (69).

Следовательно, если гипотеза (69) верна, тогда в высокотемпературной фазе вследствие (45) и левая часть уравнения (69) исчезает:

$$\left\langle e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \right\rangle_{\text{Gauge Fix}} = 0. \tag{70}$$

Этот результат получается и непосредственно, тем же путем, каким был получен результат (45). Последнее равенство означает, что в изучаемой модели решеточной теории гравитации пространство коллапсирует в точку в высокотемпературной фазе.

Однако в длинноволновом пределе при низкой температуре тензор энергии-импульса дираковского поля отличен от нуля (46), квантованное поле тетрады слабо флуктуирует и его среднее не равно нулю.

Изложенное выше означает, что в изучаемой решеточной теории гравитации имеется фазовый переход по температуре (возможно, более одного). В высокотемпературной фазе пространство сворачивается в точку, среднее от тензора энергии-импульса равно нулю и дискретная PT-симметрия не нарушена. Наоборот, в низкотемпературной фазе эти величины не равны нулю и PT-симметрия нарушена. Роль параметра порядка играет среднее $\langle e^a_\mu \rangle$, становящееся ненулевым в низкотемпературной фазе. В низкотемпературной фазе начинается процесс экспоненциального расширения пространства, переходя на степенной закон расширения. В процессе фазового перехода из высокотемпературной фазы в низкотемпературную могут образоваться домены с противоположными значениями средних $\langle e^a_\mu \rangle$ и $\langle \Theta^a_\mu \rangle$. Доменная стенка между такими доменами изучалась в работе [6].

Благодарности. Автор благодарит Г. Е. Воловика за стимулирование интереса к изучению термодинамических свойств физики вакуума и выражает признательность Е. Т. Ахмедову за многочисленные полезные обсуждения работы.

Финансирование. Работа выполнена по Государственной программе 0033-2019-0005.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Vergeles, *One More Variant of Discrete Gravity Having «Naive» Continuum Limit*, Nucl. Phys. B **735**, 172 (2006).

2. S. Vergeles, *Wilson Fermion Doubling Phenomenon on an Irregular Lattice: Similarity and Difference with the Case of a Regular Lattice*, Phys. Rev. D **92**, 025053 (2015).

3. S. Vergeles, *Fermion Zero Mode Associated with Instantonlike Self-Dual Solution to Lattice Euclidean Gravity*, Phys. Rev. D **96**, 054512 (2017).

4. S. Vergeles, *A Note on the Possible Existence of an Instanton-Like Self-Dual Solution to Lattice Euclidean Gravity*, J. High Energy Phys. **2017**, 1 (2017).

5. S. Vergeles, *A Note on the Vacuum Structure of Lattice Euclidean Quantum Gravity: «Birth» of Macroscopic Space-Time and Pt-Symmetry Breaking*, Class. Quant. Gravity **38**, 085022 (2021).

6. S. Vergeles, *Domain Wall Between the Dirac Sea and the «Anti-Dirac Sea»*, Class. Quant. Gravity **39**, 038001 (2021).

7. G. Volovik, *Gravity from Symmetry Breaking Phase Transition*, J. Low Temp. Phys. **207**, 127 (2022).

8. G. Volovik, *Superfluid 3he-B and Gravity*, Physica B: Cond. Matt. **162**, 222 (1990).

9. J. Schwinger, *Particles, Sources, and Fields*, Vol. 1, CRC Press (2018).

10. A. Linde, *Recent Progress in Inflationary Cosmology*, arXiv: astro-ph/9601004.

11. A. Starobinsky, *The Future of the Universe and the Future of Our Civilization*, World Scientific (2000), p. 71.

12. H. Motohashi, A. A. Starobinsky, and J. Yokoyama, *Inflation with a Constant Rate of Roll*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2015** (09), 018 (2015).

13. G. Volovik, *On De Sitter Radiation via Quantum Tunneling*, Int. J. Mod. Phys. D **18**, 1227 (2009).

14. G. Volovik, *De Sitter Local Thermodynamics in F(R) Gravity*, JETP Lett. **119**, 564 (2024).

15. G. Volovik, *Thermodynamics and Decay of De Sitter Vacuum*, Symmetry **16**, 763 (2024).

16. G. Volovik, *Sommerfeld Law in Quantum Vacuum*, arXiv:2307.00860.

17. S. Weinberg, *The Cosmological Constant Problem*, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

18. D. Krotov and A. M. Polyakov, *Infrared Sensitivity of Unstable Vacua*, Nucl. Phys. B **849**, 410 (2011).

19. A. Polyakov, *Infrared Instability of the De Sitter Space*, arXiv:1209.4135.

20. E. Akhmedov, *Lecture Notes on Interacting Quantum Fields in De Sitter Space*, Int. J. Mod. Phys. D **23**, 1430001 (2014).

21. E. Akhmedov, U. Moschella, and F. Popov, *Characters of Different Secular Effects in Various Patches of De Sitter Space*, Phys. Rev. D **99**, 086009 (2019).

22. E. Akhmedov, *Curved Space Equilibration Versus Flat Space Thermalization: A Short Review*, Mod. Phys. Lett. A **36**, 2130020 (2021).

23. A. Y. Kamenshchik, A. A. Starobinsky, and T. Vardanyan, *Massive Scalar Field in De Sitter Spacetime: A Two-Loop Calculation and a Comparison with the Stochastic Approach*, European Phys. J. C **82**, 1 (2022).

24. Y. B. Zel'Dovich and A. Starobinsky, *Particle Production and Vacuum Polarization in an Anisotropic Gravitational Field*, Sov.J. Exp. Theor. Phys. **34**, 1159 (1972).

25. A. Y. Kamenshchik, A. A. Starobinsky, A. Tronconi, T. Vardanyan, and G. Venturi, *Pauli–Zeldovich Cancellation of the Vacuum Energy Divergences, Auxiliary Fields and Supersymmetry*, European Phys. J. C **78**, 1 (2018).

26. S. Appleby and E. V. Linder, *The Well-Tempered Cosmological Constant: Fugue in B*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2020** (12), 037 (2020).

27. F. Klinkhamer and G. Volovik, *Big Bang as a Topological Quantum Phase Transition*, Phys. Rev. D **105**, 084066 (2022).

28. Q. Wang, Z. Zhu, and W. G. Unruh, *How the Huge Energy of Quantum Vacuum Gravitates to Drive the Slow Accelerating Expansion of the Universe*, Phys. Rev. D **95**, 103504 (2017).

29. D. Diakonov, *Towards Lattice-Regularized Quantum Gravity*, arXiv:1109.0091.

30. A. A. Vladimirov and D. Diakonov, *Phase Transitions in Spinor Quantum Gravity on a Lattice*, Phys. Rev. D **86**, 104019 (2012).

31. A. A. Vladimirov and D. Diakonov, *Diffeomorphism-Invariant Lattice Actions*, Phys. of Particles and Nuclei **45**, 800 (2014).

32. G. Volovik, *Dimensionless Physics*, JETP **132**, 727 (2021).