

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

О ЗАДАЧАХ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СОБОЛЕВСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСТВА

© 2023 г. М. О. Корпусов^{1,*}, Р. С. Шафир^{1,**}¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: romanshafir@mail.ru

Поступила в редакцию 01.08.2021 г.

Переработанный вариант 05.05.2022 г.

Принята к публикации 04.08.2022 г.

Исследуются две задачи Коши для нелинейных соболевских уравнений: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \Delta u = |u|^q$ и

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} u + \Delta u = |u|^q$. Найдены условия, при которых существуют слабые обобщенные локальные во времени решения задач Коши, а также происходит разрушение слабых решений этих же задач Коши. Библ. 15.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость.

DOI: 10.31857/S0044466922120092, EDN: LMBXET

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются две задачи Коши. Первая задача Коши имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \Delta u = |u|^q, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0, T], \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.2)$$

Вторая задача Коши имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} u + \Delta u = |u|^q, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0, T], \quad (1.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.4)$$

В формуле (1.3) под оператором $\Delta_{\perp}$ понимается $\Delta_{\perp} := \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$.

В работе исследуются слабые и слабые обобщенные локальные во времени решения данных задач Коши. Доказывается существование слабых обобщенных решений при $q > 4$. При $1 < q \leq 3$ доказано разрушение слабых решений.

Отметим работу [1], в которой исследовалась задача Коши с той же нелинейностью, но другим дифференциальным оператором, имеющим вид

$$A_{x,t}[u](x, t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} u(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}(x, t).$$

Уравнения (1.1), (1.3) относятся к уравнениям соболевского типа (см. [2]), исследованию которых посвящено большое количество работ. Например, в работах Г.А. Свиридюка, С.А. Загребинной, А.А. Замышляевой [3]–[5] были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально-краевые задачи для различных типов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

Теория потенциала для неклассических уравнений типа Соболева впервые была рассмотрена в работе Б.В. Капитонова [6], а в дальнейшем изучалась в работах С.А. Габова и А.Г. Свешникова [7], [8], а также в работах их учеников (см. работу Ю.Д. Плетнера [9]).

В классической работе [10] С.И. Похожаева и Э. Митидиери методом нелинейной емкости были получены глубокие результаты о роли критических показателей. Также можно отметить работы Е.И. Галахова и О.А. Салиевой [11] и [12].

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [13]–[15] и посвященные получению критических показателей для решений задач Коши для нелинейных уравнений соболевского типа.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Пусть $\{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ — некоторая декартова прямоугольная система координат в пространстве. При рассмотрении анизотропного сегнетоэлектрика вблизи температуры Кюри с анизотропией вдоль оси Oz и с учетом модельной временной дисперсии справедливы следующие уравнения:

$$D_x = \varepsilon_x E_x + \varepsilon_0 \int_0^t (t - \tau) E_x(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

$$D_y = \varepsilon_y E_y + \varepsilon_0 \int_0^t (t - \tau) E_y(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

$$D_z = \varepsilon_z E_z + \varepsilon_0 \int_0^t (t - \tau) E_z(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

причем

$$\max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\} \ll |\varepsilon_z| \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{D} = D_x \mathbf{e}_x + D_y \mathbf{e}_y + D_z \mathbf{e}_z. \quad (2.5)$$

Кроме того, рассмотрим электрическую часть системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = q_0 \int_0^t |\phi|^q(\tau) d\tau, \quad q > 1. \quad (2.7)$$

Из уравнений (2.1)–(2.7) получим дифференциальное следствие

$$\varepsilon_x \phi_{xxtt} + \varepsilon_y \phi_{yytt} + \varepsilon_z \phi_{zztt} + \varepsilon_0 \Delta \phi = 4\pi q_0 |\phi|^q, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.8)$$

С учетом выражения (2.4) приходим к выводу о том, что уравнение (2.8) можно упростить, формально положив

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.$$

Приходим к уравнению

$$\varepsilon_z \phi_{zztt} + \varepsilon_0 \Delta \phi = 4\pi q_0 |\phi|^q. \quad (2.9)$$

Кроме того, мы в работе рассмотрим следующее уравнение:

$$\varepsilon_x \phi_{xxtt} + \varepsilon_y \phi_{yytt} + \varepsilon_0 \Delta \phi = 4\pi q_0 |\phi|^q, \quad (2.10)$$

которое получается из (2.8), если формально положить

$$\varepsilon_z = 0.$$

3. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Под классом функций $u(x, t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ при $\gamma_1 \geq 0$ и $\gamma_2 \geq 0$ мы понимаем такие функции $u(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, что конечна следующая норма:

$$\|u\|_T := \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} (1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2} (1 + x_3^2)^{\gamma_2/2} |u(x, t)| < +\infty. \quad (3.1)$$

Можно доказать, что $\mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ является банаховым пространством относительно нормы (3.1).

Под классом функций $\mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ мы понимаем такие функции $u(x, t)$, что

$$u(x, t), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]). \quad (3.2)$$

Можно доказать, что это пространство банахово относительно нормы

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \left[|u(x, t)| + \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right| \right] < +\infty. \quad (3.3)$$

Под классом функций $\mathbb{C}^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes (0, T])$ мы понимаем такие функции $u(x, t)$, что

$$D_t^k D_x^\alpha u(x, t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes (0, T]), \quad (3.4)$$

$$D_t^k = \partial_t^k, \quad D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (3.5)$$

$$\alpha_j \in \{0, 1, 2\}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 2, \quad k \in \{0, 1, 2\}, \quad (3.6)$$

причем всевозможные смешанные производные вида (3.4) перестановочны.

Под классом функций $\mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ подразумеваем такие функции $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, что

$$D_t^k D_x^\alpha u(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]), \quad (3.7)$$

а также $u(x, T) = u'(x, T) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$, и носитель $\text{supp } u(x, t)$ — компакт в $\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$.

Под классом функций $\mathbb{C}^{2+1}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ мы понимаем такие функции $u(x, t)$, что

$$D_t^k D_x^\alpha u(x, t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]), \quad (3.8)$$

$$D_t^k = \partial_t^k, \quad D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (3.9)$$

$$\alpha_j \in \{0, 1, 2\}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 2, \quad k \in \{0, 1\}, \quad (3.10)$$

причем всевозможные смешанные производные вида (3.8) перестановочны.

Под классом функций $\mathbb{C}_b^{(0,1)}((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ мы понимаем такие функции $u(x, t)$, что

$$u(x, t), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]). \quad (3.11)$$

Можно доказать, что это пространство банахово относительно нормы

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} (1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2} (1 + x_3^2)^{\gamma_2/2} \left(|u(x, t)| + \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right| \right) < +\infty. \quad (3.12)$$

Будем говорить, что пара функций $\{u_0(x), u_1(x)\}$ принадлежит классу H_{x_3} , если $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и найдется такой шар $O(x_0, R) \subset \mathbb{R}^3$ положительного радиуса $R > 0$, что $u_0(x), u_1(x) \in H^2(O(x_0, R))$, и имеет место неравенство

$$\left(\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_3^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_3^2}\right)^2 > 0 \quad \text{для почти всех } x \in O(x_0, R). \quad (3.13)$$

Будем говорить, что пара функций $\{u_0(x), u_1(x)\}$ принадлежит классу $H_{x_1 x_2}$, если $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и найдется такой шар $O(x_0, R) \subset \mathbb{R}^3$ положительного радиуса $R > 0$, что $u_0(x), u_1(x) \in H^2(O(x_0, R))$, и имеет место неравенство

$$(\Delta_{\perp} u_0(x))^2 + (\Delta_{\perp} u_1(x))^2 > 0 \quad \text{для почти всех } x \in O(x_0, R). \quad (3.14)$$

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ОЦЕНКИ

Рассмотрим первый дифференциальный оператор, действие которого определяется равенством

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u(x, t) + \Delta u(x, t), \quad (4.1)$$

где $(x, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4_+ := \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^1_+$.

Найдем фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$, т.е. найдем решение следующего уравнения в смысле пространства обобщенных функций:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) = \delta(t)\delta(x). \quad (4.2)$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (4.2) и получим уравнение, понимаемое в смысле обобщенных функций:

$$p^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \bar{\mathcal{E}}(x, p) + \Delta \bar{\mathcal{E}}(x, p) = \delta(x). \quad (4.3)$$

Одним из решений данного уравнения является функция

$$\bar{\mathcal{E}}(x, p) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}}}. \quad (4.4)$$

Применим обратное преобразование Лапласа и получим следующий вид фундаментального решения:

$$\mathcal{E}(x, t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} J_0(\beta(x)t), \quad \beta(x) := \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (4.5)$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Для функции Бесселя справедлива оценка

$$|J_0(y)| \leq \frac{c_0}{\sqrt{|y|}} \quad \text{для всех } y \neq 0, \quad (4.6)$$

где $c_0 > 0$ — некоторая постоянная. Тогда для функции $\mathcal{E}(x, t)$ справедлива следующая цепочка оценок:

$$|\mathcal{E}(x, t)| \leq \frac{c_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/4} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/4} \sqrt{t}} \leq \frac{c_1}{|x_3|^{1/2} (x_1^2 + x_2^2)^{1/4} \sqrt{t}} \quad (4.7)$$

при $x_3 \neq 0, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad t > 0, \quad c_1 = \frac{c_0}{4\pi} > 0.$

Кроме того, при $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ и $t \geq 0$ функция $\mathcal{E}(x, t)$ дифференцируема по переменной t , причем

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_1^2 + x_2^2} J_1(\beta(x)t) \quad \text{при} \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad t \geq 0. \quad (4.8)$$

При получении формулы (4.8) было использовано соотношение

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x). \quad (4.9)$$

Для функции Бесселя $J_1(x)$ справедлива оценка, аналогичная оценке (4.6) для функции $J_0(x)$, поэтому из (4.6), (4.8) получаем оценку

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial t} \right| \leq c_2 \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/4}}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/4} \sqrt{t}} \quad \text{при} \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad t > 0, \quad (4.10)$$

где $c_2 > 0$ — некоторая постоянная.

Из оценок (4.7), (4.10) следует, что

$$\mathcal{E}(x, t), \quad \frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial t} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4_+). \quad (4.11)$$

Теперь рассмотрим второй дифференциальный оператор, действие которого определяется равенством

$$\mathfrak{L}_{x,t}[u](x, t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} u(x, t) + \Delta u(x, t), \quad (4.12)$$

где $(x, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4_+ := \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^1_+$.

Найдем фундаментальное решение оператора $\mathfrak{L}_{x,t}$, т.е. найдем решение следующего уравнения в смысле пространства обобщенных функций:

$$\mathfrak{L}_{x,t}[\mathcal{E}_1](x, t) = \delta(t)\delta(x). \quad (4.13)$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (4.13) и получим следующее уравнение, понимаемое в смысле обобщенных функций:

$$(p^2 + 1) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \overline{\mathcal{E}_1}(x, p) + (p^2 + 1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \overline{\mathcal{E}_1}(x, p) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \overline{\mathcal{E}_1}(x, p) = \delta(x). \quad (4.14)$$

Одним из решений данного уравнения является функция

$$\overline{\mathcal{E}_1}(x, p) = -\frac{1}{4\pi|x_3|} \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}\right)}}. \quad (4.15)$$

Применим обратное преобразование Лапласа и получим следующий вид фундаментального решения:

$$\mathcal{E}_1(x, t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi|x_3|} \int_0^t J_0(\beta(x)\tau) J_0(t - \tau) d\tau, \quad \beta(x) := \sqrt{1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}}, \quad (4.16)$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Снова воспользуемся оценкой (4.6) для функции Бесселя J_0 и получим оценку для фундаментального решения $\mathcal{E}_1(x, t)$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_1(x, t)| &\leq \frac{c_1}{|x_3|^{1/2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/4}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{t - \tau}} d\tau \\ \text{при} \quad x_3 &\neq 0, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad t > 0, \quad c_1 > 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Заметим, что

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}} d\tau = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{1-s}} ds < +\infty \quad \text{при всех} \quad t : 0 \leq t < +\infty, \quad (4.18)$$

поэтому оценку (4.17) можно переписать следующим образом:

$$|\mathcal{E}_1(x, t)| \leq \frac{c_2}{|x_3|^{1/2} (x_1^2 + x_2^2)^{1/4}} \quad (4.19)$$

при $x_3 \neq 0, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad t > 0, \quad c_2 > 0.$

Также заметим, что при $x_3 \neq 0$ и $t \geq 0$ функция $\mathcal{E}_1(x, t)$ дифференцируема по переменной t , и справедливо равенство

$$\frac{\partial \mathcal{E}_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi|x_3|} \int_0^t J_0(\beta(x)\tau) J_1(t-\tau) d\tau - \frac{1}{4\pi|x_3|} J_0(\beta(x)t) \quad \text{при} \quad x_3 \neq 0, \quad t \geq 0. \quad (4.20)$$

С помощью оценки (4.6) для функции Бесселя J_0 и аналогичной оценке для функции Бесселя J_1 нетрудно получить оценку

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}_1(x, t)}{\partial t} \right| \leq \frac{c_0}{|x_3|^{1/2} (x_1^2 + x_2^2)^{1/4}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \quad \text{при} \quad x_3 \neq 0, \quad t > 0, \quad c_0 > 0. \quad (4.21)$$

Из оценок (4.19), (4.21) следует, что $\mathcal{E}_1(x, t), \frac{\partial \mathcal{E}_1(x, t)}{\partial t} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4_+)$.

В дальнейшем нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. При $\gamma_1 > 2$ и $\gamma_2 > 1$ найдется такая постоянная $M_1 = M_1(\gamma_1, \gamma_2) > 0$, что будет выполнено неравенство

$$I := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathcal{E}(x-y, t-\tau)|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2} (1+y_3^2)^{\gamma_2/2}} dy d\tau \leq \frac{M_1 \sqrt{t}}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4} (1+x_3^2)^{1/4}} \quad (4.22)$$

при $(x, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$.

Доказательство. Применим оценку (4.7) для оценки интеграла I . Тогда получим

$$I \leq c_1 I_t I_x, \quad (4.23)$$

где $c_1 > 0$, а интегралы I_t, I_x определяются, как

$$I_t := \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 2\sqrt{t}, \quad (4.24)$$

$$I_x := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dy_1 dy_2 dy_3}{|x_3 - y_3|^{1/2} [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/4} (1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2} (1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}. \quad (4.25)$$

Для оценки интеграла I_x нужно перейти в цилиндрическую систему координат и воспользоваться [1, леммы 1, 2]. В результате получим, что

$$I_x \leq \frac{K_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}} \frac{K_2}{(1+x_3^2)^{1/4}}, \quad K_1, K_2 > 0, \quad (4.26)$$

причем, постоянные K_1, K_2 не зависят от x .

Из формул (4.23), (4.24), (4.26) и следует доказательство леммы.

Лемма 2. При $\gamma_1 > 2$ и $\gamma_2 > 1$ найдутся такие постоянные $M_1 = M_1(\gamma_1, \gamma_2) > 0$, $M_2 = M_2(\gamma_1, \gamma_2) > 0$, что будут выполнены неравенства

$$I_1 := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathcal{E}_1(x-y, t-\tau)|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}} dy d\tau \leq \frac{M_1 t}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}} \quad (4.27)$$

при $(x, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$,

$$I_2 := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left| \frac{\partial \mathcal{E}_1(x-y, t-\tau)}{\partial t} \right|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}} dy d\tau \leq \frac{M_2(t+t^{1/2})}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}} \quad (4.28)$$

при $(x, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$.

Доказательство. Для доказательства этой леммы достаточно воспользоваться оценками (4.19), (4.21).

5. СВОЙСТВА ОБЪЕМНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим объемный потенциал

$$U_0[\rho](x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t-\tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (5.1)$$

где

$$K_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t) := \frac{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}} \mathcal{E}(x-y, t), \quad (5.2)$$

а фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, t)$ определяется формулой (4.5).

Лемма 3. При $\gamma_1 > 2$ и $\gamma_2 > 1$ оператор

$$U_0 : \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]) \rightarrow \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]), \quad (5.3)$$

причем справедливо предельное свойство

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |U_0(x, t)| = 0. \quad (5.4)$$

Доказательство. Шаг 1. Сначала нужно доказать, что $U_0 : \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Пусть $(x^1, t^1), (x^2, t^2) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$. Пусть также для удобства $t^2 > t^1$. Оценим разностное отношение

$$\begin{aligned} \left| U_0(x^2, t^2) - U_0(x^1, t^1) \right| &= \left| \int_0^{t^2} \int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1, \gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t^1} \int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1, \gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau \right| \leq I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где

$$I_1 := \int_{t^1}^{t^2} \int_{\mathbb{R}^3} |K_{\gamma_1, \gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau)| |\rho(y, \tau)| dy d\tau, \quad (5.6)$$

$$I_2 := \int_0^{t^1} \int_{\mathbb{R}^3} |K_{\gamma_1, \gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) - K_{\gamma_1, \gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)| |\rho(y, \tau)| dy d\tau. \quad (5.7)$$

Введем следующие обозначения: $x^1 := (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, $x^2 := (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, $x_0^1 := (x_1^1, x_2^1)$, $x_0^2 := (x_1^2, x_2^2)$, $x_0^{1,2}$ — середина отрезка, соединяющего точки $x_0^1, x_0^2 \in \mathbb{R}^2$, $\Delta K := K_{\gamma_1, \gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) - K_{\gamma_1, \gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)$.

Обозначим открытый шар с центром в точке x в $\mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$O(x, r) := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < r^2, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}. \quad (5.8)$$

Далее выберем числа $R, \varepsilon > 0$: $R > d(x_0^1, x_0^2)/2 + \varepsilon$, $\varepsilon < d(x_0^1, x_0^2)/2$, где $d(x_0^1, x_0^2)$ — это расстояние между точками $x_0^1, x_0^2 \in \mathbb{R}^2$. Также нам потребуется множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Omega := O(x_0^{1,2}, R) \setminus (O(x_0^1, \varepsilon) \cup O(x_0^2, \varepsilon)). \quad (5.9)$$

С учетом всех перечисленных выше обозначений и с учетом выбранных R, ε для интеграла I_2 справедлива оценка

$$I_2 \leq I_{21} + I_{22} + I_{23}, \quad (5.10)$$

где

$$I_{21} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1} dy_3 \int_{O(x_0^1, \varepsilon) \cup O(x_0^2, \varepsilon)} |\Delta K| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2, \quad (5.11)$$

$$I_{22} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1} dy_3 \int_{\Omega} |\Delta K| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2, \quad (5.12)$$

$$I_{23} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus O(x_0^{1,2}, R)} |\Delta K| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2. \quad (5.13)$$

Интеграл I_{22} можно представить следующим образом:

$$I_{22} = I_{221} + I_{222}, \quad (5.14)$$

где

$$I_{221} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{-R_3}^{R_3} dy_3 \int_{\Omega} |\Delta K| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2, \quad (5.15)$$

$$I_{222} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-R_3, R_3]} dy_3 \int_{\Omega} |\Delta K| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2, \quad R_3 > 0. \quad (5.16)$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. В силу оценки (4.22) ясно, что найдутся достаточно малое $\varepsilon > 0$ и достаточно большие $R > 0$, $R_3 > 0$, что будут выполнены следующие неравенства:

$$I_{21} < \frac{\delta}{4}, \quad I_{23} < \frac{\delta}{4}, \quad I_{222} < \frac{\delta}{8}. \quad (5.17)$$

Для фиксированных выше ε, R, R_3 найдется достаточно малое $\eta > 0$ такое, что если выполнено неравенство

$$|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|^2 < \eta^2, \quad (5.18)$$

то справедливы и неравенства

$$I_1 < \frac{\delta}{4}, \quad I_{221} < \frac{\delta}{8}, \quad (5.19)$$

при оценке интеграла I_{221} мы воспользовались непрерывностью подынтегральной функции на множестве $\Omega \times [-R_3, R_3]$.

В результате мы получили, что для любого $\delta > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что при выполнении неравенства (5.18) имеет место неравенство

$$|U_0(x^2, t^2) - U_0(x^1, t^1)| < \delta, \quad (5.20)$$

которое и означает, что $U_0(x, t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Шаг 2. Теперь установим, что $U_0: \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]) \rightarrow \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Пусть $\rho(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$. Тогда для $U_0[\rho](x, t)$ справедлива оценка

$$|U_0[\rho](x, t)| \leq \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |K_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)| dy d\tau \leq M_1 \sqrt{t} \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)|, \quad M_1 > 0, \quad (5.21)$$

для получения которой мы воспользовались оценкой (4.22). Из оценки (5.21) сразу же вытекает предельное свойство (5.4). Также из оценки (5.21) следует, что

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |U_0[\rho](x, t)| \leq M_1 \sqrt{T} \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)| < +\infty. \quad (5.22)$$

Из оценки (5.22) и следует, что $U_0: \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]) \rightarrow \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$. Лемма 3 доказана.

Теперь рассмотрим другой объемный потенциал:

$$V_0[\rho](x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (5.23)$$

где

$$G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t) := \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4} (1 + x_3^2)^{1/4}}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^{\gamma_1/2} (1 + y_3^2)^{\gamma_2/2}} \mathcal{E}_1(x - y, t), \quad (5.24)$$

а фундаментальное решение $\mathcal{E}_1(x, t)$ определяется формулой (4.16).

Лемма 4. При $\gamma_1 > 2$ и $\gamma_2 > 1$ оператор

$$V_0: \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]) \rightarrow \mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]), \quad (5.25)$$

причем справедливы предельные свойства

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |V_0(x, t)| = 0, \quad (5.26)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial V_0(x, t)}{\partial t} \right| = 0. \quad (5.27)$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем сначала, что $V_0: \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Пусть $(x^1, t^1), (x^2, t^2) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$. Пусть также для удобства $t^2 > t^1$.

Оценим разностное отношение

$$\begin{aligned} |V_0(x^2, t^2) - V_0(x^1, t^1)| &= \left| \int_0^{t^2} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1, \gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t^1} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1, \gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau \right| \leq I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где

$$I_1 := \int_{t^1}^{t^2} \int_{\mathbb{R}^3} |G_{\gamma_1, \gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau)| |\rho(y, \tau)| dy d\tau, \quad (5.29)$$

$$I_2 := \int_0^{t^1} \int_{\mathbb{R}^3} |G_{\gamma_1, \gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) - G_{\gamma_1, \gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)| \rho(y, \tau) dy d\tau. \quad (5.30)$$

Введем следующие обозначения: $x^1 := (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, $x^2 := (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, $x_3^{1,2}$ – середина отрезка, соединяющего точки $x_3^1, x_3^2 \in \mathbb{R}^1$, $\Delta G := G_{\gamma_1, \gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) - G_{\gamma_1, \gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)$. Далее выберем числа $R, \varepsilon > 0$: $R > d(x_3^1, x_3^2)/2 + \varepsilon$, $\varepsilon < d(x_3^1, x_3^2)/2$, где $d(x_3^1, x_3^2)$ – это расстояние между точками $x_3^1, x_3^2 \in \mathbb{R}^1$. Также нам потребуются два множества $U_\varepsilon, U_R \subset \mathbb{R}^1$:

$$U_\varepsilon := [x_3^1 - \varepsilon, x_3^1 + \varepsilon] \cup [x_3^2 - \varepsilon, x_3^2 + \varepsilon], \quad (5.31)$$

$$U_R := [x_3^{1,2} - R, x_3^{1,2} + R]. \quad (5.32)$$

С учетом всех перечисленных выше обозначений и с учетом выбранных R, ε для интеграла I_2 следует оценка

$$I_2 \leq I_{21} + I_{22} + I_{23}, \quad (5.33)$$

где

$$I_{21} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{U_\varepsilon} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta G| \rho(y, \tau) dy_1 dy_2, \quad (5.34)$$

$$I_{22} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta G| \rho(y, \tau) dy_1 dy_2, \quad (5.35)$$

$$I_{23} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1 \setminus U_R} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta G| \rho(y, \tau) dy_1 dy_2. \quad (5.36)$$

Представим интеграл I_{22} следующим образом:

$$I_{22} = I_{221} + I_{222}, \quad (5.37)$$

где

$$I_{221} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 \int_{O(0, R_{12})} |\Delta G| \rho(y, \tau) dy_1 dy_2, \quad (5.38)$$

$$I_{222} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus O(0, R_{12})} |\Delta G| \rho(y, \tau) dy_1 dy_2, \quad R_{12} > 0. \quad (5.39)$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Тогда в силу оценки (4.27) найдутся достаточно малое $\varepsilon > 0$ и достаточно большие $R > 0$, $R_{12} > 0$, что будут выполнены неравенства

$$I_{21} < \frac{\delta}{4}, \quad I_{23} < \frac{\delta}{4}, \quad I_{222} < \frac{\delta}{8}. \quad (5.40)$$

Для фиксированных выше ε , R , R_{12} найдется достаточно малое $\eta > 0$ такое, что если выполнено неравенство

$$|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|^2 < \eta^2, \quad (5.41)$$

то справедливы и неравенства

$$I_1 < \frac{\delta}{4}, \quad I_{221} < \frac{\delta}{8}, \quad (5.42)$$

где при оценке интеграла I_{221} была использована непрерывность подынтегральной функции на соответствующем множестве.

В результате мы получаем, что для любого $\delta > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что при выполнении неравенства (5.41) имеет место неравенство

$$|V_0(x^2, t^2) - V_0(x^1, t^1)| < \delta, \quad (5.43)$$

которое и означает, что $V_0(x, t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Шаг 2. Теперь установим, что $V_0 : \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]) \rightarrow \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Пусть $\rho(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$. Тогда для $V_0[\rho](x, t)$ справедлива оценка

$$|V_0[\rho](x, t)| \leq \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)| dy d\tau \leq M_1 t \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)|, \quad M_1 > 0, \quad (5.44)$$

для получения которой мы воспользовались оценкой (4.27). Из оценки (5.44) сразу же вытекает предельное свойство (5.26). Также из оценки (5.44) следует, что

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |V_0[\rho](x, t)| \leq M_1 T \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)| < +\infty. \quad (5.45)$$

Из оценки (5.45) следует, что $V_0 : \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]) \rightarrow \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Шаг 3. Докажем теперь, что если $\rho(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, то $V_0(x, t) \in C^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$. Пусть $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$, $x = (x^1, x^2, x^3)$. Будем считать, что $\Delta t > 0$, тогда мы вычислим правую производную. Случай же $\Delta t < 0$ рассматривается аналогичным образом, отличие будет состоять лишь в том, что там не возникнет выражения типа I_1 (см. формулу (5.47)):

$$\left| \frac{V_0(x, t + \Delta t) - V_0(x, t)}{\Delta t} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau \right| \leq I_1 + I_2, \quad (5.46)$$

где

$$I_1 := \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau + \Delta t) \rho(y, \tau) dy d\tau \right|, \quad (5.47)$$

$$I_2 := \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau + \Delta t) - G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)}{\Delta t} - \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right) \rho(y, \tau) dy d\tau \right|. \quad (5.48)$$

Поскольку $\rho(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, то существует константа $c_0 > 0$: $c_0 = \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)| < +\infty$.

Введем удобные для дальнейшего обозначения: $U_\varepsilon := [x^3 - \varepsilon, x^3 + \varepsilon]$, $U_R := [x^3 - R, x^3 + R]$, $0 < \varepsilon < R$. Учтем это и оценим сначала интеграл I_1 :

$$I_1 \leq \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{\mathbb{R}^3} |G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, \Delta t - s)| dy ds = I_{11} + I_{12} + I_{13}, \quad (5.49)$$

где

$$I_{11} := \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} ds \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{U_\varepsilon} dy_3 |G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, \Delta t - s)|, \quad (5.50)$$

$$I_{12} := \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} ds \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 |G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, \Delta t - s)|, \quad (5.51)$$

$$I_{13} := \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} ds \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{\mathbb{R}^1 \setminus U_R} dy_3 |G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, \Delta t - s)|. \quad (5.52)$$

Интеграл I_{12} представим следующим образом:

$$I_{12} = I_{121} + I_{122}, \quad (5.53)$$

где

$$I_{121} := \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} ds \int_{O(0, R_{12})} dy_1 dy_2 \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 |G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, \Delta t - s)|, \quad (5.54)$$

$$I_{122} := \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} ds \int_{\mathbb{R}^2 \setminus O(0, R_{12})} dy_1 dy_2 \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 |G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, \Delta t - s)|, \quad (5.55)$$

где $O(0, R_{12})$ — это открытый шар радиуса R_{12} с центром в нуле в $\mathbb{R}^2$.

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Из формул (5.24), (4.27) следует, что найдутся достаточно малое $\varepsilon > 0$ и достаточно большие $R > 0$, $R_{12} > 0$, что будут выполнены неравенства

$$I_{11} < \frac{\delta}{8}, \quad I_{13} < \frac{\delta}{8}, \quad I_{122} < \frac{\delta}{8}. \quad (5.56)$$

Для фиксированных выше ε , R , R_{12} найдется достаточно малое $\eta > 0$ такое, что если будет выполнено неравенство $\Delta t < \eta$, то будет справедливо и неравенство $I_{121} < \delta/8$. Для доказательства этой оценки для интеграла I_{121} достаточно воспользоваться формулой среднего значения, а затем учесть непрерывность подынтегральной функции в точке $t = 0$. В результате мы приходим к тому, что

$$I_1 < \frac{\delta}{2}. \quad (5.57)$$

Интеграл I_2 можно оценить следующим образом:

$$I_2 \leq c_0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right| dy d\tau, \quad \text{где } t^* \in [t - \tau, t - \tau + \Delta t]. \quad (5.58)$$

Представим интеграл I_2 в виде

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23}, \quad (5.59)$$

где

$$I_{21} := c_0 \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{U_\varepsilon} dy_3 \left| \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right|, \quad (5.60)$$

$$I_{22} := c_0 \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 \left| \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right|, \quad (5.61)$$

$$I_{23} := c_0 \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{\mathbb{R}^1 \setminus U_R} dy_3 \left| \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right|. \quad (5.62)$$

Далее достаточно воспользоваться оценкой (4.28) и повторить рассуждения шага 1 из доказательства данной леммы. Мы придем к тому, что

$$I_2 < \frac{\delta}{2}, \quad (5.63)$$

как только $\Delta t < \eta$.

В результате получаем, что для любого $\delta > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что как только $|\Delta t| < \eta$, то выполнено неравенство

$$\left| \frac{V_0(x, t + \Delta t) - V_0(x, t)}{\Delta t} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau \right| < \delta, \quad (5.64)$$

которое и означает, что $V_0(x, t) \in \mathbb{C}^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Шаг 4. Докажем, наконец, ограниченность производной $\partial V_0(x, t)/\partial t$. Пусть

$$c_0 := \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |\rho(x, t)| < +\infty.$$

Воспользуемся оценкой (4.28)

$$\left| \frac{\partial V_0(x, t)}{\partial t} \right| \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) \right| dy d\tau \leq c_0 M_2(t + t^{1/2}) \leq c_1(T + T^{1/2}), \quad (5.65)$$

$$c_1 > 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T].$$

Выполнение предельного свойства (5.27) сразу же следует из оценки (5.65). Также из оценки (5.65) следует, что

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} \left| \frac{\partial V_0(x, t)}{\partial t} \right| \leq c_1(T + T^{1/2}) < +\infty, \quad (5.66)$$

поэтому $V_0(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, как только $\rho(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$. Лемма 4 доказана.

6. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ДВУХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим первое нелинейное интегральное уравнение:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) (|u|^q(y, \tau) + f(y, \tau)) dy d\tau, \quad (6.1)$$

где функция $\mathcal{E}(x, t)$ определяется формулой (4.5), а функция $f(x, t)$ будет определена далее.

Сделаем в интегральном уравнении (6.1) замену:

$$v(x, t) := (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4} (1 + x_3^2)^{1/4} u(x, t), \quad (6.2)$$

$$f_0(x, t) := (1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2} (1 + x_3^2)^{\gamma_2/2} f(x, t). \quad (6.3)$$

Тогда мы получим следующее интегральное уравнение:

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_{q/2, q/2}(x, y, t - \tau) |v|^q(y, \tau) dy d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau) f_0(y, \tau) dy d\tau, \quad (6.4)$$

где ядро интегрального уравнения определяется равенством

$$K_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau) = \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4} (1 + x_3^2)^{1/4}}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^{\gamma_1/2} (1 + y_3^2)^{\gamma_2/2}} \mathcal{E}(x - y, t - \tau). \quad (6.5)$$

Перепишем интегральное уравнение (6.4) в виде

$$v(x, t) = U_{q/2, q/2}[|v|^q](x, t) + U_{\gamma_1, \gamma_2}[f_0](x, t), \quad (6.6)$$

где оператор U_{γ_1, γ_2} определяется равенством

$$U_{\gamma_1, \gamma_2}[\rho](x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau. \quad (6.7)$$

Свойства объемного потенциала U_{γ_1, γ_2} изучались в разд. 5. Далее, воспользовавшись техникой, аналогичной технике, примененной при доказательстве теоремы 4 работы [1], можно установить следующий результат.

Теорема 1. Если $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, то для всех $f_0(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что для каждого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (6.4) в банаховом пространстве $v(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|v\|_T = +\infty, \quad \|v\|_T = \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |v(x, t)|. \quad (6.8)$$

Непосредственным следствием данной теоремы является теорема 2.

Теорема 2. Если $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, то для всех $f(x, t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что для каждого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (6.1) в банаховом пространстве $u(x, t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|u\|_T = +\infty, \quad \|u\|_T = \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4} |u(x, t)|. \quad (6.9)$$

Рассмотрим второе нелинейное интегральное уравнение:

$$u(x, t) = F(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}_1(x - y, t - \tau) (|u|^q(y, \tau) - \rho(y, \tau)) dy d\tau, \quad (6.10)$$

где функция $\mathcal{E}_1(x, t)$ определяется формулой (4.16), а функции $F(x, t)$, $\rho(x, t)$ будут определены далее. Сделаем в интегральном уравнении (6.10) замену:

$$v(x, t) := (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4} u(x, t), \quad (6.11)$$

$$\rho_0(x, t) := (1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2} \rho(x, t). \quad (6.12)$$

Тогда мы приходим к следующему интегральному уравнению:

$$v(x, t) = F_0(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{q/2, q/2}(x, y, t - \tau) |v|^q(y, \tau) dy d\tau - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau, \quad (6.13)$$

где $F_0(x, t) = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4} F(x, t)$, а ядро интегрального уравнения определено равенством

$$G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau) = \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + y_3^2)^{\gamma_2/2}} \mathcal{E}_1(x - y, t - \tau). \quad (6.14)$$

Перепишем интегральное уравнение (6.13) в операторном виде

$$v(x, t) = F_0(x, t) + V_{q/2, q/2}[|v|^q](x, t) - V_{\gamma_1, \gamma_2}[\rho_0](x, t), \quad (6.15)$$

где оператор V_{γ_1, γ_2} определяется равенством

$$V_{\gamma_1, \gamma_2}[\rho](x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1, \gamma_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau. \quad (6.16)$$

Свойства объемного потенциала V_{γ_1, γ_2} изучались в разд. 5. Далее, воспользовавшись техникой, примененной при доказательстве теоремы 4 работы [1], можно установить следующий результат.

Теорема 3. Если $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, то для всяких $\rho_0(x, t), F_0(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что для каждого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (6.13) в банаховом пространстве $v(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|v\|_T = +\infty, \quad \|v\|_T = \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} |v(x, t)|. \quad (6.17)$$

Непосредственным следствием теоремы 3 является теорема 4.

Теорема 4. Если $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, то для всех $F(x, t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, $\rho(x, t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что для каждого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (6.10) в банаховом пространстве $u(x, t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|u\|_T = +\infty, \quad \|u\|_T = \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]} (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4} |u(x, t)|. \quad (6.18)$$

7. СЛАБЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХ ЗАДАЧ КОШИ

Рассмотрим первую задачу Коши:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t) = |u|^q + f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0, T], \quad (7.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (7.2)$$

где оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определяется равенством

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u(x, t) + \Delta u(x, t). \quad (7.3)$$

Дадим определение слабого локального во времени решения задачи Коши (7.1), (7.2), для которого далее будем изучать явление разрушения, а также дадим определение слабого обобщенного локального во времени решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями, для которого будем далее исследовать разрешимость.

Определение 1. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) называется функция $u(x, t) \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, которая удовлетворяет интегральному равенству

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \phi(x, t) + \Delta \phi(x, t) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0(x) \frac{\partial \phi_{x_3 x_3}}{\partial t}(x, 0) - u_1(x) \phi_{x_3 x_3}(x, 0) \right] dx = \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^q \phi(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f(x, t) \phi(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (7.4)$$

для произвольной функции $\phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$. Кроме того, $u_0(x), u_1(x) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$, $f(x, t) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Определение 2. Слабым обобщенным локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) с нулевыми начальными условиями называется функция $u(x, t) \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, которая удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \phi(x, t) + \Delta \phi(x, t) \right] dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^q \phi(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f(x, t) \phi(x, t) dx dt \quad (7.5)$$

для произвольной функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (0, T))$. При этом $f(x, t) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Теорема 5. Пусть $u(x, t)$ — это решение нелинейного интегрального уравнения (6.1) в банаховом пространстве $\mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, причем $f(x, t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, где $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$. Тогда функция $u(x, t)$ является слабым обобщенным локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) с нулевыми начальными условиями в смысле определения 2.

Доказательство. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (0, T))$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (0, T))$. Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (6.1). Тогда в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (0, T))$ справедливо равенство

$$u(x, t) = \mathcal{E}(x, t) * \left[|u(x, t)|^q + f(x, t) \right]. \quad (7.6)$$

Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_{x,t}[u](x, t), \phi(x, t) \rangle &= \langle \mathcal{M}_{x,t}[\mathcal{E}(x, t) * (|u(x, t)|^q + f(x, t))], \phi(x, t) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{M}_{x,t}[\mathcal{E}(x, t)] * (|u(x, t)|^q + f(x, t)), \phi(x, t) \rangle = \langle \delta(x, t) * (|u(x, t)|^q + f(x, t)), \phi(x, t) \rangle = \\ &= \langle |u(x, t)|^q + f(x, t), \phi(x, t) \rangle = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^q \phi(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f(x, t) \phi(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь нами была использована формула дифференцирования свертки обобщенных функций

$$D(f * g) = D(f) * g, \quad (7.8)$$

где D — дифференциальный оператор. Также было учтено, что

$$\mathcal{M}_{x,t}[\mathcal{E}(x, t)] = \delta(x, t) \quad (7.9)$$

в смысле равенства обобщенных функций в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (0, T))$.

С другой стороны,

$$\langle \mathcal{M}_{x,t}[u](x, t), \phi(x, t) \rangle = \langle u(x, t), \mathcal{M}_{x,t}[\phi](x, t) \rangle = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \phi(x, t) + \Delta \phi(x, t) \right] dx dt. \quad (7.10)$$

Из равенств (7.7), (7.10) и следует утверждение теоремы.

Теперь получим результат, касающийся разрушения слабых локальных во времени решений задачи Коши (7.1), (7.2).

Теорема 6. Пусть $1 < q \leq 3$ и $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H_{x_3}$. Пусть выполнены неравенства

$$|u_0(x)| \leq \frac{A_0}{(1 + |x|^2)^{\alpha/2}}, \quad |u_1(x)| \leq \frac{A_1}{(1 + |x|^2)^{\beta/2}} \quad \text{при} \quad \alpha > 1, \quad \beta > 1. \quad (7.11)$$

Пусть, кроме того, функция f , входящая в уравнение (7.4), тождественно равна нулю.

Тогда не существует слабого локального во времени решения задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 1 ни для какого $T > 0$.

Доказательство. Пусть функция $u(x, t)$ является слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 1. Введем следующее обозначение: $L_{x_3} := \partial^2 / \partial x_3^2$. Также введем обозначения для интегралов из равенства (7.4):

$$I_1 := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_{x_3} \phi(x, t) dx dt, \quad I_2 := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \Delta \phi(x, t) dx dt, \quad (7.12)$$

$$I_3 := \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) \frac{\partial}{\partial t} L_{x_3} \phi(x, 0) dx, \quad I_4 := \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) L_{x_3} \phi(x, 0) dx, \quad (7.13)$$

$$I := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^q \phi(x, t) dx dt. \quad (7.14)$$

Тогда равенство (7.4) можно переписать в виде

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = I. \quad (7.15)$$

Выберем пробную функцию $\phi(x, t)$ специальным образом:

$$\phi(x, t) = \phi_1(t)\phi_2(x), \quad (7.16)$$

$$\phi_1(t) := \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda, \quad \phi_2(x) := \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \lambda > 2q', \quad q' = \frac{q}{q-1}, \quad q > 1, \quad (7.17)$$

$$\phi_0(s) := \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq s \leq 1, \\ 0, & \text{если } s \geq 2, \end{cases} \quad \phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, +\infty), \quad (7.18)$$

причем дополнительно потребуем, чтобы функция $\phi_0(s)$ была монотонно невозрастающей.

Оценим сначала интегралы, связанные с начальными условиями:

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) L_{x_3} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) L_{x_3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \phi_2(x) \right) \Big|_{t=0} dx \right| = \\ &= \frac{\lambda}{T} \left| \int_{R \leq |x| \leq \sqrt{2}R} u_0(x) L_{x_3} \phi_2(x) dx \right| = \frac{\lambda}{T} R \left| \int_{1 \leq |y| \leq \sqrt{2}} u_0(Ry) L_{y_3} \phi_0(|y|^2) dy \right| \leq \frac{A_1}{R^{\alpha-1}} \rightarrow +0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) L_{x_3} \phi(x, 0) dx \right| = \left| \int_{R \leq |x| \leq \sqrt{2}R} u_1(x) L_{x_3} \phi_2(x) dx \right| = R \left| \int_{1 \leq |y| \leq \sqrt{2}} u_1(Ry) L_{y_3} \phi_0(|y|^2) dy \right| \leq \\ &\leq \frac{A_2}{R^{\beta-1}} \rightarrow +0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Далее оценим интегралы I_1, I_2 , связанные с дифференциальным оператором:

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_{x_3} \phi(x, t) dx dt \right| \leq \\ &\leq \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \int_0^T \int_{0 \leq |x| \leq \sqrt{2}R} |u(x, t) (\phi(x, t))^{1/q}| \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-2} \frac{|L_{x_3} \phi_2(x)|}{(\phi(x, t))^{1/q}} dx dt \leq c_1(R) I_R^{1/q}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где

$$I_R := \int_0^T \int_{0 \leq |x| \leq \sqrt{2}R} \phi(x, t) |u(x, t)|^q dx dt, \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} c_1(R) &:= \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \left[\int_0^T \int_{0 \leq |x| \leq \sqrt{2}R} \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-2} \frac{|L_{x_3} \phi_2(x)|}{(\phi(x, t))^{1/q}} \right)^{q'} dx dt \right]^{1/q'} = \\ &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \left[\int_0^T \int_{0 \leq |x| \leq \sqrt{2}R} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-2q'} \frac{|L_{x_3} \phi_2(x)|^{q'}}{(\phi_2(x))^{q'/q}} dx dt \right]^{1/q'} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \left(\frac{T}{\lambda-2q'+1} \right)^{1/q'} c_0 R^{(3-2q')/q'}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где

$$c_0 := \left(\int_{1 \leq |y| \leq \sqrt{2}} \frac{|L_{y_3} \phi_0(|y|^2)|^{q'}}{(\phi_0(|y|^2))^{q'/q}} dy \right)^{1/q'}, \quad (7.24)$$

$$|I_2| = \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \Delta \phi(x, t) dx dt \right| \leq \int_0^T \int_{R \leq |x| \leq \sqrt{2}R} |u(x, t) (\phi(x, t))^{1/q}| \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \frac{|\Delta \phi_2(x)|}{(\phi(x, t))^{1/q}} dx dt \leq c_2(R) I_R^{1/q}, \quad (7.25)$$

где интеграл I_R определяется равенством (7.22):

$$c_2(R) := \left[\int_0^T \int_{R \leq |x| \leq \sqrt{2}R} \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \frac{|\Delta \phi_2(x)|}{(\phi(x, t))^{1/q}} \right)^{q'} dx dt \right]^{1/q'} = \left(\frac{T}{\lambda + 1} \right)^{1/q'} c_1 R^{(3-2q')/q'}, \quad (7.26)$$

где

$$c_1 := \left(\int_{1 \leq |y| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta \phi_0(|y|^2)|^{q'}}{(\phi_0(|y|^2))^{q'/q}} dy \right)^{1/q'}. \quad (7.27)$$

В [10] доказано существование таких монотонно невозрастающих функций $\phi_0(s)$, для которых будут конечны емкости $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$.

Сначала мы рассмотрим случай $1 < q < 3$. Тогда $3 - 2q' < 0$.

Заметим, что имеет место следующая оценка:

$$I_R \leq I := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, t) |u(x, t)|^q dx dt. \quad (7.28)$$

Из (7.15) с учетом оценок (7.21), (7.25) вытекает оценка

$$I \leq c_1(R) I_R^{1/q} + c_2(R) I_R^{1/q} + |I_3| + |I_4|. \quad (7.29)$$

Воспользуемся трехпараметрическим неравенством Юнга

$$ab \leq \varepsilon a^q + \frac{b^{q'}}{q'(q\varepsilon)^{q'/q}}, \quad a, b \geq 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (7.30)$$

Из (7.28), (7.29) и (7.30) получаем неравенство

$$(1 - 2\varepsilon)I \leq \frac{1}{q'(q\varepsilon)^{q'/q}} (c_1^{q'}(R) + c_2^{q'}(R)) + |I_3| + |I_4|. \quad (7.31)$$

Положим в неравенстве (7.31) $\varepsilon = 1/4$. Тогда получим следующее неравенство:

$$I \leq 2 \left(\frac{1}{q'} \left(\frac{4}{q} \right)^{q'/q} (c_1^{q'}(R) + c_2^{q'}(R)) + |I_3| + |I_4| \right) \leq k, \quad (7.32)$$

где постоянная $k > 0$ не зависит от R .

Положим $R = N \in \mathbb{N}$. Заметим, что последовательность функций

$$\chi_N(x, t) := \phi(x, t) |u(x, t)|^q = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \phi_0 \left(\frac{|x|^2}{N^2} \right) |u(x, t)|^q \quad (7.33)$$

удовлетворяет неравенству

$$\chi_N(x, t) \leq \chi_{N+1}(x, t) \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]. \quad (7.34)$$

Воспользуемся теоремой Беппо Леви и получим, что, с одной стороны,

$$I = I(N) := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \chi_N(x, t) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x, t)|^q dx dt \quad \text{при } N \rightarrow +\infty. \quad (7.35)$$

С другой стороны, из неравенства (7.32), а также оценок (7.19), (7.20), (7.23), (7.26) следует, что

$$I = I(N) \rightarrow +0 \quad \text{при } N \rightarrow +\infty. \quad (7.36)$$

Таким образом, при условии $1 < q < 3$ получаем, что

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x, t)|^q dx dt = 0 \Leftrightarrow u(x, t) = 0 \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]. \quad (7.37)$$

Критический случай $q = 3$ нужно рассмотреть отдельно. Если $q = 3$, то $3 - 2q' = 0$, поэтому емкости $c_1(R)$, $c_2(R)$ уже не стремятся к нулю при $R \rightarrow +\infty$ (но являются ограниченными). Воспользуемся неравенством (7.32), которое справедливо и для случая $q = 3$. Тогда, снова применив теорему Беппо Леви (снова положив $R = N \in \mathbb{N}$), мы придем к тому, что

$$I = I(N) \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x, t)|^q dx dt < +\infty \quad \text{при } N \rightarrow +\infty. \quad (7.38)$$

А из (7.38) сразу же получаем, что

$$0 \leq I_R = \int_0^T \int_{R \leq |x| \leq \sqrt{2}R} \phi(x, t) |u(x, t)|^q dx dt \leq \int_0^T \int_{R \leq |x| \leq \sqrt{2}R} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x, t)|^q dx dt \rightarrow +0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \quad (7.39)$$

Но тогда из оценок (7.19), (7.20), (7.29) (7.39) следует, что

$$I \rightarrow +0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \quad (7.40)$$

Из (7.38), (7.40) получаем, что

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x, t)|^q dx dt = 0 \Leftrightarrow u(x, t) = 0 \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]. \quad (7.41)$$

В результате мы приходим к тому, что при $1 < q \leq 3$ единственным слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) является функция $u(x, t)$, равная нулю почти всюду, поэтому из (7.4) получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0(x) L_{x_3} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) - u_1(x) L_{x_3} \phi(x, 0) \right] dx = 0 \quad (7.42)$$

для произвольной функции $\phi(x, t) \in \mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$.

Пусть

$$\phi(x, t) = \psi_0(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda, \quad \lambda > 1, \quad \psi_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3). \quad (7.43)$$

Тогда из (7.42) и (7.43) приходим к следующему равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\lambda}{T} u_0(x) + u_1(x) \right] L_{x_3} \psi_0(x) dx = 0 \quad (7.44)$$

для всех $\psi_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и любого $T > 0$. Так как пара функций $\{u_0(x), u_1(x)\}$ принадлежит классу функций H_{x_3} , то найдется такой шар $O(x_0, R)$ радиуса $R > 0$, что $u_0(x), u_1(x) \in H^2(O(x_0, R))$ и

$$(L_{x_3} u_0(x))^2 + (L_{x_3} u_1(x))^2 > 0 \quad \text{для почти всех } x \in O(x_0, R). \quad (7.45)$$

Выберем $\psi_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(O(x_0, R))$. Тогда из (7.44) получим равенство

$$\int_{O(x_0, R)} \left[\frac{\lambda}{T} L_{x_3} u_0(x) + L_{x_3} u_1(x) \right] \psi_0(x) dx = 0 \quad (7.46)$$

для каждой $\psi_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(O(x_0, R))$. Но тогда, согласно основной лемме вариационного исчисления, мы приходим к тому, что

$$\frac{\lambda}{T} L_{x_3} u_0(x) + L_{x_3} u_1(x) = 0 \quad (7.47)$$

для почти всех $x \in O(x_0, R)$. Продифференцируем равенство (7.47) по параметру λ . Тогда получаем, что

$$L_{x_3} u_0(x) = 0, \quad \text{а значит, и} \quad L_{x_3} u_1(x) = 0, \quad (7.48)$$

что противоречит условию (7.45). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вторую задачу Коши:

$$\mathfrak{L}_{x,t}[u](x,t) = |u|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T], \quad (7.49)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (7.50)$$

где оператор $\mathfrak{L}_{x,t}$ определяется равенством

$$\mathfrak{L}_{x,t}[u](x,t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} u(x,t) + \Delta u(x,t). \quad (7.51)$$

Определение 3. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.49), (7.50) называется функция $u(x,t) \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, которая удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} \phi(x,t) + \Delta \phi(x,t) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0(x) \Delta_{\perp} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) - u_1(x) \Delta_{\perp} \phi(x,0) \right] dx = \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u|^q \phi(x,t) dx dt \end{aligned} \quad (7.52)$$

для всех $\phi(x,t) \in \mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Кроме того, $u_0(x), u_1(x) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$.

Определение 4. Слабым обобщенным локальным во времени решением задачи Коши (7.49), (7.50) называется функция $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, которая удовлетворяет в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (0,T))$ равенству

$$\langle \mathfrak{L}_{x,t}[u](x,t), \phi(x,t) \rangle = \langle |u|^q, \phi(x,t) \rangle \quad (7.53)$$

для произвольной функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (0,T))$, а также удовлетворяет начальным условиям (7.50) поточечно, причем $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 7. Пусть функция $u(x,t)$ — это решение нелинейного интегрального уравнения (6.10) в банаховом пространстве $\mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Пусть показатель $q > 4$. В уравнении (6.10) в качестве функций $F(x,t)$, $\rho(x,t)$ берутся следующие функции:

$$F(x,t) := u_0(x)\chi(t) + u_1(x)\eta(t), \quad (7.54)$$

$$\rho(x,t) := \chi(t)\Delta u_0(x) + \chi''(t)\Delta_{\perp} u_0(x) + \eta(t)\Delta u_1(x) + \eta''(t)\Delta_{\perp} u_1(x), \quad (7.55)$$

$$\chi(t), \eta(t) \in \mathbb{C}^2([0,T]), \quad \chi(0) = 1, \quad \chi'(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 1, \quad (7.56)$$

$$u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]), \quad (7.57)$$

$$\Delta_{\perp} u_0(x), \Delta u_0(x), \Delta_{\perp} u_1(x), \Delta u_1(x) \in \mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3), \quad \gamma_1 > 2, \quad \gamma_2 > 1. \quad (7.58)$$

Тогда функция $u(x,t)$ является слабым обобщенным локальным во времени решением задачи Коши (7.49), (7.50) в смысле определения 4.

Доказательство. Шаг 1. Пусть $u(x,t)$ — это решение интегрального уравнения (6.10). Проверим, что эта функция удовлетворяет начальным условиям (7.50):

$$u(x,0) = f(x,0) = u_0(x)\chi(0) + u_1(x)\eta(0) = u_0(x), \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{0 \mathbb{R}^3}^t \mathcal{E}_1(x - y, t - \tau) (|u|^q(y, \tau) - \rho(y, \tau)) dy d\tau \Big|_{t=0} = \\ &= u_0(x) \chi'(0) + u_1(x) \eta'(0) = u_1(x). \end{aligned} \quad (7.60)$$

Шаг 2. Проверим выполнение равенства (7.53).

Заметим, что в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (0, T))$ справедливо равенство

$$u(x, t) = F(x, t) + \mathcal{E}_1(x, t) * [|u(x, t)|^q - \rho(x, t)]. \quad (7.61)$$

Но тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{x,t}[u](x, t), \phi(x, t) \rangle &= \langle \mathcal{L}_{x,t}[F](x, t), \phi(x, t) \rangle + \langle \mathcal{L}_{x,t}[\mathcal{E}_1(x, t) * (|u(x, t)|^q - \rho(x, t))], \phi(x, t) \rangle = \\ &= \langle \chi(t) \Delta u_0(x) + \chi''(t) \Delta_\perp u_0(x) + \eta(t) \Delta u_1(x) + \eta''(t) \Delta_\perp u_1(x), \phi(x, t) \rangle + \\ &\quad + \langle \mathcal{L}_{x,t}[\mathcal{E}_1(x, t)] * (|u(x, t)|^q - \rho(x, t)), \phi(x, t) \rangle = \\ &= \langle \rho(x, t), \phi(x, t) \rangle + \langle (|u(x, t)|^q - \rho(x, t)), \phi(x, t) \rangle = \langle |u(x, t)|^q, \phi(x, t) \rangle, \end{aligned} \quad (7.62)$$

где мы учли, что, во-первых,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x,t}[F](x, t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_\perp + \Delta \right) (u_0(x) \chi(t) + u_1(x) \eta(t)) = \\ &= \Delta_\perp u_0(x) \chi''(t) + \Delta u_0(x) \chi(t) + \Delta_\perp u_1(x) \eta''(t) + \Delta u_1(x) \eta(t), \end{aligned} \quad (7.63)$$

причем все производные здесь понимаются в классическом смысле.

Во-вторых, нами была использована формула дифференцирования свертки обобщенных функций

$$D(f * g) = D(f) * g, \quad (7.64)$$

где D — дифференциальный оператор. В-третьих, было учтено, что

$$\mathcal{L}_{x,t}[\mathcal{E}_1(x, t)] = \delta(x, t). \quad (7.65)$$

И, в-четвертых, — что $f(x, t) * \delta(x, t) = f(x, t)$ для всякой обобщенной функции $f(x, t)$. Теорема доказана.

В следующей теореме сформулирован результат о разрушении слабых локальных во времени решений задачи Коши (7.49), (7.50).

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 6, надо только заменить оператор $L_{x_3} = \partial^2 / \partial x_3^2$ на оператор $L_{x_1 x_2} := \Delta_\perp$.

Теорема 8. Пусть $1 < q \leq 3$ и $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H_{x_1 x_2}$. Пусть выполнены неравенства

$$|u_0(x)| \leq \frac{A_0}{(1 + |x|^2)^{\alpha/2}}, \quad |u_1(x)| \leq \frac{A_1}{(1 + |x|^2)^{\beta/2}} \quad \text{при} \quad \alpha > 1, \quad \beta > 1. \quad (7.66)$$

Тогда не существует слабого локального во времени решения задачи Коши (7.49), (7.50) в смысле определения 3 ни для какого $T > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корпусов М.О., Шафир Р.С. О разрушении слабых решений задачи Коши для 3 + 1-мерного уравнения дрейфовых волн в плазме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 1. С. 124–158.
2. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations // De Gruyter Series in Nonlin. Anal. Appl. 2011. V. 15. P. 648.
3. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
4. Загребина С.А. Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)–радиальным оператором // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. № 2. С. 39–48.

5. *Zamyshlyayeva A.A., Sviridyuk G.A.* Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. 2016. V. 8. № 4. P. 5–16.
6. *Капитонов Б.В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109(151). № 4(8). С. 607–628.
7. *Габов С.А., Свешиников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. С. 344.
8. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998. С. 448.
9. *Плетнер Ю.Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
10. *Похожаев С.И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.
11. *Galakhov E.I.* Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. № 1. P. 256–277.
12. *Галахов Е.И., Салиева О.А.* Об отсутствии неотрицательных монотонных решений для некоторых коэрцитивных неравенств в полупространстве // СФМН. 2017. Т. 63. № 4. С. 573–585.
13. *Корпусов М.О.* Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. № 5. С. 103–162.
14. *Корпусов М.О.* О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова–Заболотской // ТМФ. 2018. Т. 194. № 3. С. 403–417.
15. *Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Panin A.A.* Instantaneous blow-up versus local solvability of solutions to the Cauchy problem for the equation of a semiconductor in a magnetic field // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 17. P. 8070–8099.