ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 1, с. 175–186

ИНФОРМАТИКА

УДК 517.958

КВАНТОВАЯ МАРКОВСКАЯ ДИНАМИКА ПОСЛЕ ВРЕМЕНИ КОРРЕЛЯЦИИ РЕЗЕРВУАРА[1)]

© 2023 г. А. Е. Теретёнков[1,*]

[1] 119991 Москва, ул. Губкина, 8, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

*e-mail: taemsu@mail.ru

Поступила в редакцию 01.06.2022 г.
Переработанный вариант 01.06.2022 г.
Принята к публикации 04.06.2022 г.

Показано, что динамика модели многоуровневой системы, взаимодействующей с несколькими резервуарами при нулевой температуре, переходит в марковский режим после времени корреляции резервуара. При этом учтен не только вклад спектральной плотности резервуара, приводящей к непрерывной корреляционной функции, но и вклад омической спектральной плотности, которая приводит к перенормировке как уравнений, так и начальных условий. Получен явный вид уравнения Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада, описывающий динамику системы после времени корреляции резервуара, а также вид начальных условий для этого уравнения. Они не совпадают с точными начальными условиями как из-за перенормировки, связанной с омическим вкладом, так и за счет короткого начального немарковского периода до времени корреляции резервуара. Библ. 37.

Ключевые слова: открытые квантовые системы, квантовая динамическая полугруппа, перенормировка.

DOI: 10.31857/S004446692301012X, **EDN:** LMNADE

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе развиваются результаты работ [1] и [2], посвященных возникновению марковской динамики на больших временах в некоторых специальных моделях открытых квантовых систем. Физическое содержание [1], [3] состоит в том, что такая марковская динамика возникает не просто на больших временах, а после небольшого периода времени (в [1] оно названо временем Зенона) порядка времени корреляции резервуара. В [1] нам удалось строго формализовать этот факт посредством перерастяжки Боголюбова–ван Хова, суть которой состоит в том, что малый параметр $\lambda \to +0$ вводится не только в константу связи, но и во временной масштаб как $t \to \lambda^{-2}t$. Это позволяет отделить масштаб времени, на котором происходит марковская динамика, от масштаба порядка времени корреляции резервуара, которому соответствует начальный временной промежуток порядка $O(\lambda^2)$ после перерастяжки, на котором локализуются все немарковские эффекты.

Отметим, что предел Боголюбова–ван Хова $\lambda \to +0$ лежит в основе строгого вывода марковских кинетических уравнений вида Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ) [4], [5] в пределе слабой связи [7], [6]. Но нас, подобно [1], [8], [9], интересуют не только предельные уравнения, но и пертурбативные поправки произвольного порядка к ним. Для специальной модели, рассматривавшейся в [2], [10], [11], мы покажем, что в случае выполнения некоторых ограничений на конечность моментов корреляционных функций резервуара можно получить уравнения ГКСЛ с постоянными коэффициентами для редуцированной динамики после времени корреляции с произвольной пертурбативной точностью. Обратим внимание, что существует достаточно обширное обсуждение того, как определять и характеризовать марковость (см., например, [12], [13], [15]–[17] и обзор [18]). В данном случае мы будем подразумевать под марковостью выполнение уравнения ГКСЛ с постоянными коэффициентами, так как для данной модели она обеспечивает выполнение марковских формул (а именно, регрессионной теоремы) также

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 19-11-00320).

для некоторых корреляционных функций, а не только одновременной динамики. Более подробно доводы в пользу такого подхода к марковости можно найти в [1], [13].

В работе обсуждается модель многоуровневой системы, взаимодействующая с несколькими резервуарами, предложенная в [10] и в некоторых специальных случаях исследованная в [1], [2]. Поэтому остановимся отдельно на том, что нового сделано в данной работе по сравнению с [1] и [2]. Важным новым результатом настоящей работы является учет (посредством процедуры регуляризации, развитой в [11]) омического вклада в корреляционную функцию перед дальнейшим использованием теории возмущений Боголюбова—ван Хова. Наличие такого вклада, с одной стороны, обеспечивает для ряда моделей открытых квантовых систем существование классических пределов, совпадающих с общепринятыми [14, подразд. 3.6.2], а с другой стороны, требует предварительной перенормировки. Кроме того, и сам случай произвольных порядков теории возмущений для данной многоуровневой модели даже без учета омического вклада рассматривается здесь впервые. Хотя первые два нетривиальных порядка без учета омических вкладов исследовались в [2].

Основной текст статьи имеет следующую структуру. В разд. 2 дается краткое описание модели, введенной в [10]. В ней также формулируется совокупный результат работ [2], [10], [11] в виде утверждения 1, выражающего динамику редуцированной матрицы плотности в такой модели к интегродифференциальному уравнению (6). Перенормировке, связанной с наличием омического вклада в спектральную плотность, посвящен разд. 3. Результат такой перенормировки описывается утверждением 2. Фактически он сводится к переходу от уравнения (6) к (10) и соответствующей замене начального условия. Основные результаты статьи, посвященные теории возмущений данной модели с перерастяжкой Боголюбова—ван Хова, а также приданию получившейся динамике матрицы плотности вида Горини—Коссаковского—Сударшана—Линдблада, приведены в разд. 4 и 5 соответственно. А именно, утверждение 3 дает пертурбативное описание решения уравнения (6) с учетом перехода в представление взаимодействия, описываемого леммой 1. Так как в физической литературе значительное внимание уделяется именно виду линейных кинетических уравнений за рамками нулевого порядка теории возмущений с перерастяжкой Боголюбова—ван Хова, а не самих решений, то мы также формулируем основной результат данной работы в терминах уравнений, которым удовлетворяет редуцированная матрица плотности. А именно, в теореме 1 мы утверждаем, что в условиях утверждения 3 редуцированная матрица плотности удовлетворяет уравнению ГКСЛ.

2. МОДЕЛЬ МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С РЕЗЕРВУАРАМИ

Исследуем модель, которая рассматривалась в [2], [10], [11], поэтому приведем только ее формулировку и основные результаты, необходимые для данной работы.

Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathcal{H} \equiv (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^N) \otimes \bigotimes_{i=1}^{N} \mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R})),$$

где $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^N$ есть $(N+1)$-мерное гильбертово пространство с выделенным 1-мерным подпространством. Здесь $\mathbb{C}^N$ соответствует возбужденным состояниям системы, а выделенное подпространство соответствует основному состоянию. Обозначим через $|i\rangle$, $i = 0,1,\ldots,N$, некоторый фиксированный ортонормированный базис пространства $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^N$, где $|0\rangle$ соответствует выделенному подпространству. $\mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$ — бозонные фоковские пространства, соответствующие резервуарам. Пусть $|\Omega\rangle$ — совместное вакуумное состояние этих резервуаров. Также введем операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям: $[b_i(k), b_j^\dagger(k')] = \delta_{ij}\delta(k-k')$, $[b_i(k), b_j(k')] = 0$, $b_i(k)|\Omega\rangle = 0$, где $i, j = 1,\ldots,N$. Тот факт, что число резервуаров равно числу возбужденных уровней, связан с тем, что с физической точки зрения предполагается, что возбужденные уровни локализованы в разных точках пространства, достаточно далеких, чтобы резервуары, с которыми они связаны, можно было считать полностью независимыми.

Рассмотрим гамильтониан системы, такой, что он обнуляется на основном состоянии. А именно,

$$\hat{H}_S = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i| + \sum_{i\neq j} J_{ij} |i\rangle\langle j| = 0 \oplus H_S, \quad i,j = 1,\ldots,N, \tag{1}$$

где $H_S \in \mathbb{C}^{N\times N}$ и $0 \oplus H_S$ представляет собой блочную матрицу с диагональными блоками 1×1 и $N \times N$ и только $N \times N$ является ненулевым и равным H_S, т.е.

$$0 \oplus H_S \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_S \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем, что здесь не предполагается, что $|i\rangle$ являются собственными для $\hat{H}_S$. С физической точки зрения базис из векторов $|i\rangle$ является локальным базисом [19].

Гамильтонианы резервуаров описываются гамильтонианами свободных бозонных полей с одинаковым дисперсионным соотношением $\omega(k)$. Таким образом, суммарный гамильтониан резервуаров имеет вид

$$\hat{H}_B = \sum_{i=1}^{N} \int \omega(k) b_i^\dagger(k) b_i(k) dk. \tag{2}$$

Взаимодействие системы и резервуаров описывается гамильтонианом дипольного взаимодействия в приближении вращающейся волны

$$\hat{H}_I = \sum_i \int \left(g^*(k) |0\rangle\langle i| \otimes b_{k,i}^\dagger + g(k) |i\rangle\langle 0| \otimes b_{k,i} \right) dk. \tag{3}$$

Мы рассматриваем унитарную эволюцию матрицы плотности

$$\rho(t) = e^{-i\hat{H}t} \rho(0) e^{i\hat{H}t}$$

с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}_S \otimes I + I \otimes \hat{H}_B + \hat{H}_I$ и факторизованными начальными условиями

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes |\Omega\rangle\langle\Omega|. \tag{4}$$

Нас интересует динамика редуцированной матрицы плотности

$$\rho_{SI}(t) \equiv \mathrm{Tr}_B\, \rho_I(t).$$

Данная модель и ее частные случаи широко используются как тестовые модели для многих подходов к открытым квантовым системам [20]–[23], [25]–[29]. Отметим, однако, что мы не обсуждаем здесь справедливость приближения вращающейся волны, заложенную в эту модель уже на этапе постановки задачи. Но при использовании полученных здесь результатов для описания реальных физических систем область применения приближения вращающейся волны безусловно необходимо учитывать и для этого существует широкий набор специфических методов [30]–[32], выходящий за рамки данного исследования.

Суммируем результаты [10, следствие 1], [11, теорема 1] и [2, следствие 6] в представлении Шрёдингера в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть интеграл (корреляционная функция резервуара)*

$$G(t) \equiv \int |g(k)|^2 e^{-i\omega(k)t} dk$$

сходится для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и определяет непрерывную функцию, тогда динамика редуцированной матрицы плотности может быть представлена в блочном виде

$$\rho_S(t) = \begin{pmatrix} (\rho_S(0))_{gg} + \mathrm{Tr}((\rho_S(0))_{ee} - V(t)(\rho_S(0))_{ee} V^+(t)) & (\rho_S(0))_{ge} V^+(t) \\ V(t)(\rho_S(0))_{eg} & V(t)(\rho_S(0))_{ee} V^+(t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $V(t) \in \mathbb{C}^{N\times N}$ – решение интегродифференциального уравнения,

$$\frac{d}{dt} V(t) = -iH_S V(t) - \int_0^t ds G(t-s) V(s) \tag{6}$$

с начальным условием $V(0) = I$, *а* e *соответствует возбужденным состояниям,* g *— основному.*

3. ОМИЧЕСКАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ И ПЕРЕНОРМИРОВКА

Часто в физических задачах считаются заданными не форм-факторы $g(k)$ и дисперсионные соотношения $\omega(k)$ и не корреляционная функция резервуара $G(t)$, а спектральная плотность резервуара, связанная с $G(t)$ посредством преобразования Фурье:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{J}(\omega), \quad \mathcal{J}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\omega t} dt.$$

Нас будет интересовать влияние омической спектральной плотности:

$$\mathcal{J}_{\text{Ohmic}}(\omega) = \eta\omega, \quad \eta > 0. \tag{7}$$

Так как преобразование Фурье данной функции существует только в смысле обобщенных функций, то утверждение 1 не может быть применено непосредственно. Поэтому необходимо сформулировать ту или иную процедуру регуляризации, приблизив данную функцию такими спектральными плотностями, что соответствующие корреляционные функции уже удовлетворяют утверждению 1. Сразу подчеркнем, что для того, чтобы в результате решение (6) имело нетривиальный конечный предел, параметр регуляризации необходимо также добавить в гамильтониан системы. Данная добавка называться контр-членом [14, подразд. 3.6.1]. При этом исходный гамильтониан не будет иметь конечного предела, однако та часть его, которая не зависит от параметра регуляризации, даст вклад в предельное уравнение. Такой гамильтониан называется перенормированным, а такая процедура регуляризации называется перенормировкой. Кроме того, естественно задаться вопросом о зависимости результата от конкретной регуляризации. И уже для двухуровневых моделей системы [24] было показано, что результат существенно зависит от конкретной регуляризации. Поэтому выражение (7) даже на физическом уровне строгости не может считаться вполне строгим, так как различные физически осмысленные регуляризации данного выражения приводят к различным результатам.

Поэтому, подобно [11], остановимся на конкретной регуляризации. А именно, рассмотрим семейство спектральных плотностей с экспоненциальным обрезанием

$$\mathcal{J}_{\Omega}(\omega) = \eta\omega e^{-\frac{|\omega|}{\Omega}},$$

параметризованных частотой обрезания Ω. В пределе $\Omega \to +\infty$ такая спектральная плотность $\mathcal{J}_{\Omega}(\omega)$ поточечно стремится к $\mathcal{J}_{\text{Ohmic}}(\omega)$. Соответствующая корреляционная функция имеет вид

$$G_{\Omega}(t) = -i\eta \frac{2t\Omega^3}{\pi(1 + (\Omega t)^2)}. \tag{8}$$

В качестве H_S также рассмотрим семейство

$$H_S(\Omega) = H_S^{(r)} + \frac{\eta\Omega}{\pi}, \tag{9}$$

где $H_S^{(r)}$ — перенормированный гамильтониан, не зависящий от Ω, а $\frac{\eta\Omega}{\pi}$ играет роль контр-члена. Подчеркнем, что несмотря на то, что в (9) этот контр-член выглядит как простое добавление константы к гамильтониану (и поэтому может показаться, что он не должен на что-либо влиять), но с учетом формулы (1) в полном гамильтониане $\hat{H}_S(\Omega)$ контр-член сдвигает на константу только возбужденные уровни, но не основное состояние. Так как $\Omega \to +\infty$, то с физической точки зрения такая ситуация соответствует тому, что энергии перехода из основного состояния в возбужденное много больше, чем энергии перехода между возбужденными состояниями.

Утверждение 2. *Пусть* $V_{\Omega}(t)$ *— решение* (6) *с начальным условием* $V_{\Omega}(0) = I$, *где* $G(t) = G_{\Omega}(t) + G_{\text{c}}(t)$, $G_{\Omega}(t)$ *определяется по формуле* (8) *и зависит от* Ω *как от параметра,* $G_{\text{c}}(t)$ *— непрерывная функция,* $H_S = H_S(\Omega)$ *определяется формулой* (9). *Пусть предел* $\lim_{\Omega \to +\infty} V_{\Omega}(t) = V^{(r)}(t)$

существует для произвольного $t > 0$ *и определяет бесконечно дифференцируемую функцию на полуоси* $(0,+\infty)$*, тогда* $V^{(r)}(t)$ *является решением уравнения*

$$\frac{d}{dt}V^{(r)}(t) = -i\frac{1}{1+i\frac{\eta}{2}}H_S^{(r)}V^{(r)}(t) - \int_0^t ds\frac{1}{1+i\frac{\eta}{2}}G_c(t-s)V^{(r)}(s) \tag{10}$$

с начальным условием $V^{(r)}(0) = \frac{1}{1+i\frac{\eta}{2}}I$.

Доказательство данного утверждения является прямым обобщением [11, Утверждение 2], так как фактически матрица $V^{(r)}(t)$ просто составлена из векторов, динамика каждого из которых описывается [11, Утверждение 2].

Перейдем в представление взаимодействия с перенормированным гамильтонианом $\hat{H}_S^{(r)}$, который связан с $H_S^{(r)}$ по формуле (1), так как именно такое представление нам будет удобно в последующих разделах статьи. Для этого сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть*

$$\rho_{SI}(t) \equiv e^{i\hat{H}_S^{(r)}t}\rho_S(t)e^{-i\hat{H}_S^{(r)}t}$$

и

$$V_I^{(r)}(t) \equiv e^{iH_S^{(r)}t}V^{(r)}(t).$$

Тогда $V_I^{(r)}(t)$ *удовлетворяет интегродифференциальному уравнению*

$$\frac{d}{dt}V_I^{(r)}(t) = -\frac{\frac{\eta}{2}}{1+i\frac{\eta}{2}}H_S^{(r)}V_I^{(r)}(t) - \int_0^t ds\frac{1}{1+i\frac{\eta}{2}}G_c(t-s)e^{iH_S^{(r)}(t-s)}V_I^{(r)}(s) \tag{11}$$

с начальным условием $V_I^{(r)}(0) = V^{(r)}(0) = \frac{1}{1+i\frac{\eta}{2}}I$*, а* $\rho_{SI}(t)$ *может быть определено по формуле* (5)*, где вместо* $V(t)$ *стоит* $V_I^{(r)}(t)$.

4. ПЕРЕРАСТЯЖКА БОГОЛЮБОВА–ВАН ХОВА

Подобно [1], [2], нас будет интересовать поведение данной модели в пределе Боголюбова–ван Хова и асимптотическое разложение по малому параметру вблизи него. Если ввести малый параметр, отвечающий за малость константы связи в исходном гамильтониане (3), заменив $g(k) \to \lambda g(k)$, то это приведет к замене $G(t) \to \lambda^2 G(t)$ в (6). Таким образом, в уравнении (11) необходимо сделать замены $G_c(t) \to \lambda^2 G_c(t)$, $\eta \to \lambda^2\eta$. В итоге (11) примет вид

$$\frac{d}{dt}V_{I,\lambda}(t) = -\frac{\lambda^2\frac{\eta}{2}}{1+i\lambda^2\frac{\eta}{2}}H_S^{(r)}V_{I,\lambda}(t) - \int_0^t ds\frac{\lambda^2}{1+i\lambda^2\frac{\eta}{2}}G_c(t-s)e^{iH_S^{(r)}(t-s)}V_{I,\lambda}(s). \tag{12}$$

Сделаем перерастяжку Боголюбова–ван Хова, определив функцию

$$W_\lambda(t) \equiv V_{I,\lambda}(\lambda^{-2}t).$$

Тогда с учетом (12) имеем

$$\frac{d}{dt}W_\lambda(t) = -\frac{\frac{\eta}{2}}{1 + i\lambda^2\frac{\eta}{2}}H_S^{(r)}W_\lambda(t) - \int_0^t ds\frac{1}{1 + i\lambda^2\frac{\eta}{2}}\frac{1}{\lambda^2}G_c\left(\frac{t-s}{\lambda^2}\right)e^{iH_S^{(r)}\left(\frac{t-s}{\lambda^2}\right)}W_\lambda(s). \tag{13}$$

Начальное условие с учетом замены $\eta \to \lambda^2\eta$ примет вид

$$W_\lambda(0) = \frac{1}{1 + i\lambda^2\frac{\eta}{2}}I. \tag{14}$$

Далее мы будем исследовать асимптотическое поведение $W_\lambda(t)$ при $\lambda \to +0$. Поэтому подчеркнем, что наша схема регуляризации, когда мы сначала устремили $\Omega \to +\infty$, а затем делаем разложение по малому параметру, является лишь одной из возможных. Хотя для моделей, подобной нашей, такой подход является распространенным [24], можно было бы рассматривать и случай частоты обрезки, явно зависящий от малого параметра λ, и тогда последовательное устремление $\Omega \to +\infty$, а затем $\lambda \to +0$ было бы возможно, только если $\Omega \to +\infty$ быстрее всякой степени λ (так как только такими членами мы пренебрежем в нашем последующем разложении по λ в общем случае).

Обозначим преобразования Лапласа $W_\lambda(t)$ и $G(t)$ как

$$\tilde{W}_\lambda(p) = \int_0^{+\infty} dte^{-pt}W_\lambda(t), \quad \tilde{G}(p) = \int_0^{+\infty} dte^{-pt}G(t).$$

Лемма 2. *Преобразование Лапласа функции $W_\lambda(t)$ имеет вид*

$$\tilde{W}_\lambda(p) = \frac{1}{\left(1 + i\lambda^2\frac{\eta}{2}\right)p + \frac{\eta}{2}H_S^{(r)} + \tilde{G}_c(-iH_S^{(r)} + \lambda^2 p)}. \tag{15}$$

Замечание 1. Выражение (15) необходимо понимать как функцию эрмитовой матрицы $H_S^{(r)} = (H_S^{(r)})^\dagger$, которая определяется стандартным образом. А именно, если диагонализовать

$$H_S^{(r)} = U\operatorname{diag}\{E_\alpha^{(r)}\}U^+, \quad \alpha = 1,\ldots,N,$$

посредством унитарной матрицы U, то

$$\frac{1}{\left(1 + i\lambda^2\frac{\eta}{2}\right)p + \frac{\eta}{2}H_S^{(r)} + \tilde{G}_c(-iH_S^{(r)} + \lambda^2 p)} \equiv U\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\left(1 + i\lambda^2\frac{\eta}{2}\right)p + \frac{\eta}{2}E_\alpha^{(r)} + \tilde{G}_c(-iE_\alpha^{(r)} + \lambda^2 p)}\right\}U^\dagger.$$

Доказательство. В первую очередь вычислим преобразование Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{1}{\lambda^2}G\left(\frac{t}{\lambda^2}\right)e^{iH_S^{(r)}\left(\frac{t}{\lambda^2}\right)}dt = U\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-pt}G\left(\frac{t}{\lambda^2}\right)e^{iE_\alpha^{(r)}\frac{t}{\lambda^2}}dt\right\}U^\dagger =$$
$$= U\operatorname{diag}\left\{\tilde{G}(-iE_\alpha^{(r)} + \lambda^2 p)\right\}U^\dagger = \tilde{G}(-iH_S^{(r)} + \lambda^2 p).$$

Тогда преобразование Лапласа уравнения (13) имеет вид

$$p\tilde{W}_\lambda(p) - W_\lambda(0) = -\frac{1}{1 + i\lambda^2\frac{\eta}{2}}\left(\frac{\eta}{2}H_S^{(r)} + \tilde{G}_c(-iH_S^{(r)} + \lambda^2 p)\right)\tilde{W}_\lambda(p).$$

Откуда, с учетом начального условия (14), имеем

$$\tilde{W}_\lambda(p) = \frac{1}{p + \dfrac{1}{1 + i\lambda^2 \dfrac{\eta}{2}}\left(\dfrac{\eta}{2} H_S^{(r)} + \tilde{G}_c(-iH_S^{(r)} + \lambda^2 p)\right)} \frac{1}{1 + i\lambda^2 \dfrac{\eta}{2}} I,$$

что эквивалентно (15).

Сформулируем результаты [1, Приложение B] в виде следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть для функции $\tilde{f}(p)$ верно асимптотическое разложение*

$$\tilde{f}(p) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_k p^k + O(p^{n+1}), \quad p \to 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и функция

$$\tilde{x}_\lambda(p) = \frac{1}{p + \tilde{f}(\lambda^2 p)} \tag{16}$$

является преобразованием Лалпаса функции $x_\lambda(t)$, т.е.

$$\tilde{x}_\lambda(p) = \int_0^\infty e^{-pt} x_\lambda(t).$$

Тогда при каждом фиксированном $t > 0$ и $\lambda \to +0$

$$x_\lambda(t) = r_{2n,\lambda} e^{\tilde{p}_{2n,\lambda} t} + O(\lambda^{2n+2}), \tag{17}$$

где $\tilde{p}_{2n,\lambda}$ определяется как полином по λ степени $2n$ такой, что

$$\tilde{p}_\lambda = \tilde{p}_{2n,\lambda} + O(\lambda^{2n+2}),$$

где $\tilde{p}_\lambda$ – решение уравнения

$$\tilde{p}_\lambda + \tilde{f}(\lambda^2 \tilde{p}_\lambda) = 0, \tag{18}$$

а $r_{2n,\lambda}$ – полином по λ степени $2n$ такой, что

$$r_{2n,\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda^2 \tilde{f}'(\lambda^2 \tilde{p}_{2n,\lambda})} + O(\lambda^{2n+2}). \tag{19}$$

Замечание 2. Если функция $\tilde{f}(p)$ разложима в ряд Маклорена при $p \to 0$, то (17) будет выполнено для сколь угодно большого n. По аналогии с [1, Разд. 3] это можно формально (в том смысле, что запись ниже является лишь символической и ее строгий смысл раскрывается в предыдущей лемме) записать как

$$x_\lambda(t)\big|_{\text{pert}} = r_\lambda e^{\tilde{p}_\lambda t}, \tag{20}$$

где $\tilde{p}_\lambda$ – “решение” (18), а r_λ опять-таки формально определяется как

$$r_\lambda = \frac{1}{1 + \lambda^2 \tilde{f}'(\lambda^2 \tilde{p}_\lambda)}.$$

Здесь обозначение $x_\lambda(t)\big|_{\text{pert}}$ – “пертурбативная” часть $x_\lambda(t)$ подчеркивает тот факт, что даже в случае существования пределов $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{p}_{2n,\lambda}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{2n,\lambda}$ при некотором $\lambda > 0$ данное выражение не совпадает с $x_\lambda(t)$, а отличается от него на “непертурбативные члены”, т.е. члены, стремящиеся к нулю быстрее всякой степени λ. Кроме того, в общем случае пределы $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{p}_{2n,\lambda}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{2n,\lambda}$ могут и не существовать ни для какого $\lambda > 0$. Поэтому формула (20) является лишь формальной, и ее строгий смысл раскрывается именно леммой 3 при произвольных n.

Замечание 3. Отметим, что простая экспоненциальная зависимость асимптотического выражения (17) от времени возникает ценой того, что данная зависимость является именно поточечной, а не равномерной по времени. Она не выполнена для малых времен $t = O(\lambda^2)$. В частности, поэтому $x_\lambda(0)$, вообще говоря, не совпадает с $r_{2n,\lambda}$ и асимптотика (17) при $t = 0$ не верна.

Утверждение 3. *Пусть функция* $|G_c(t)|$ *имеет конечные моменты*

$$\int_0^\infty t^k |G_c(t)| dt < \infty \tag{21}$$

для $k = 0,1,\ldots,n+1$*, тогда при* $t > 0$ *и* $\lambda \to +0$ *имеет место следующее асимптотическое равенство*:

$$W_\lambda(t) = r_{2n,\lambda}(H_S^{(r)}) e^{\tilde{p}_{2n,\lambda}(H_S^{(r)})t} + O(\lambda^{2n+2}),$$

где $\tilde{p}_{2n,\lambda}(E)$ *определяется как полином по* λ *степени* $2n$ *такой, что (переменная* $E \in \mathbb{R}$ *и предполагается здесь и ниже во всех асимптотических выражениях фиксированной)*

$$\tilde{p}_{2n,\lambda}(E) = \tilde{p}_\lambda(E) + O(\lambda^{2n+2}),$$

где $\tilde{p}_\lambda(E)$ *является решением уравнения*

$$\left(1 + i\lambda^2 \frac{\eta}{2}\right)\tilde{p}_\lambda(E) + \frac{\eta}{2}E + \tilde{G}_c(-iE + \lambda^2 \tilde{p}_\lambda(E)) = 0, \tag{22}$$

а $r_{2n,\lambda}(E)$ *— полином по* λ *степени* $2n$ *такой, что*

$$r_{2n,\lambda}(E) = \frac{1}{1 + i\lambda^2 \dfrac{\eta}{2} + \lambda^2 \tilde{G}_{c'}(-iE + \lambda^2 \tilde{p}_{2n,\lambda}(E))} + O(\lambda^{2n+2}). \tag{23}$$

Доказательство. Применим лемму 3 к функции

$$f(p,E) = i\frac{\eta}{2}p + \frac{\eta}{2}E + \tilde{G}_c(-iE + p)$$

при фиксированном E. Условие (21) обеспечивает сходимость интегралов

$$\int_0^\infty t^k G_c(t) e^{iEt} dt < \infty. \tag{24}$$

С другой стороны,

$$\frac{d^k}{dp^k}\tilde{G}_c(-iE + p) = (-1)^k \int_0^\infty t^k G_c(t) e^{iEt} dt.$$

Тогда разложение $f(p,E)$ в ряд Маклорена по p с остаточным членом в форме Пеано обеспечивает выполнение условий леммы 3 для этой функции. В результате по лемме 3 для функции $x_\lambda(t;E)$, преобразование Лапласа которой имеет вид

$$\tilde{x}_\lambda(p;E) = \frac{1}{p + f(\lambda^2 p, E)},$$

получим асимптотику при $\lambda \to +0$

$$x_\lambda(t;E) = r_{2n,\lambda}(E) e^{\tilde{p}_{2n,\lambda}(E)t} + O(\lambda^{2n+2}), \tag{25}$$

где с учетом $\dfrac{d}{dp}f(p,E) = i\dfrac{\eta}{2} + \tilde{G}_{c'}(-iE + p)$ по формулам (18) и (19) приходим к (22) и (23) соответственно.

По лемме 2 имеем

$$\tilde{W}_\lambda(p) = U \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\left(1 + i\lambda^2 \frac{\eta}{2}\right) p + \frac{\eta}{2} E_\alpha^{(r)} + \tilde{G}_c(-iE_\alpha^{(r)} + \lambda^2 p)}\right\} U^\dagger = U \operatorname{diag}\left\{\tilde{x}_\lambda(p; E_\alpha^{(r)})\right\} U^\dagger.$$

Применяя асимптотическое равенство (25), имеем

$$W_\lambda(t) = U \operatorname{diag}\left\{r_{2n,\lambda}(E_\alpha^{(r)}) e^{\tilde{p}_{2n,\lambda}(E_\alpha^{(r)})t} + O(\lambda^{2n+2})\right\} U^\dagger = r_{2n,\lambda}(H_S^{(r)}) e^{\tilde{p}_{2n,\lambda}(H_S^{(r)})t} + O(\lambda^{2n+2}).$$

Замечание 4. В случае если конечны моменты (24) произвольных порядков, то можно формально записать

$$W_\lambda(t)\big|_{\text{pert}} = \frac{1}{1 + i\lambda^2 \frac{\eta}{2} + \lambda^2 \tilde{G}_{c'}(-iH_S^{(r)} + \lambda^2 \tilde{p}_\lambda(H_S^{(r)}))} e^{\tilde{p}_\lambda(H_S^{(r)})t}, \tag{26}$$

с теми же оговорками о строгом смысле данной записи, что и (20).

Замечание 5. В частности, утверждение 3 позволяет получить выражение для $W_\lambda(t)$ в пределе Боголюбова–ван Хова, а именно

$$W_0(t) = e^{\tilde{p}_0(H_S^{(r)})t},$$

где

$$\tilde{p}_0(E) = -\left(\frac{\eta}{2} E + \tilde{G}_c(-iE)\right).$$

Обратим внимание на то, что перенормировка начального условия (14), возникшая как следствие устремления частоты обрезки к бесконечности, в пределе Боголюбова–ван Хова исчезает.

5. УРАВНЕНИЕ ГОРИНИ–КОССАКОВСКОГО–СУДАРШАНА–ЛИНДБЛАДА ПОСЛЕ ВРЕМЕНИ КОРРЕЛЯЦИИ РЕЗЕРВУАРА

Используя [25, Утверждение 5], можно придать указанной выше динамике вид ГКСЛ, что может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть матрица плотности $\rho_M(t)$ имеет вид (5), где вместо $V(t)$ стоит $r_{2n,\lambda}(H_S^{(r)}) e^{\tilde{p}_{2n,\lambda}(H_S^{(r)})t}$ в случае, когда $-2\operatorname{Re}\tilde{p}_{2n,\lambda}(H_S^{(r)})$ неотрицательно определен. Тогда $\rho_M(t)$ удовлетворяет следующему уравнению, которое имеет вид ГКСЛ*:

$$\frac{d}{dt}\rho_M(t) = -i[\hat{H}_M, \rho_M(t)] + \sum_{\alpha=1}^{K}\left(\hat{L}_\alpha \rho_M(t) \hat{L}_\alpha^\dagger - \frac{1}{2}\hat{L}_\alpha^\dagger \hat{L}_\alpha \rho_M(t) - \frac{1}{2}\rho_M(t) \hat{L}_\alpha^\dagger \hat{L}_\alpha\right), \tag{27}$$

где

$$\hat{L}_\alpha = |0\rangle\langle\hat{f}_\alpha|, \quad |\hat{f}_\alpha\rangle = 0 \oplus |f_\alpha\rangle, \quad \hat{H}_M = 0 \oplus H_M,$$

а H_M и $|f_\alpha\rangle$, в свою очередь, определяются формулами

$$-\operatorname{Im}\tilde{p}_{2n,\lambda}(H_S^{(r)}) = H_M, \quad -2\operatorname{Re}\tilde{p}_{2n,\lambda}(H_S^{(r)}) = \sum_{\alpha=1}^{K} |f_\alpha\rangle\langle f_\alpha|.$$

Замечание 6. Используя спектральное разложение

$$H_S^{(r)} = \sum_{\alpha=1}^{N} E_\alpha^{(r)} |\alpha\rangle\langle\alpha|,$$

H_M и $|f_\alpha\rangle$ можно представить более явно как

$$H_M = -\sum_{\alpha=1}^{N} \operatorname{Im}\tilde{p}_{2n,\lambda}(E_\alpha^{(r)}) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad |f_\alpha\rangle = \sqrt{-2\operatorname{Re}\tilde{p}_{2n,\lambda}(E_\alpha^{(r)})}\,|\alpha\rangle.$$

Замечание 7. В случае, когда $-2\,\mathrm{Re}\,\tilde{p}_{2n,\lambda}(E_\alpha^{(r)}) < 0$ для некоторого α, будет нарушаться положительность матрицы плотности на больших временах и мы исключим из рассмотрения такой случай, как нефизичный.

Замечание 8. Отметим, что начальное условие для $\rho_M(t)$, вообще говоря, не будет совпадать с начальным условием $\rho_S(0)$, а именно, подобно (5), его *можно представить в блочном виде:*

$$\rho_M(0) = \begin{pmatrix} (\rho_S(0))_{gg} + \mathrm{Tr}((\rho_S(0))_{ee} - r_{2n,\lambda}(H_S^{(r)})(\rho_S(0))_{ee}r_{2n,\lambda}^{+}(H_S^{(r)})) & (\rho_S(0))_{ge}r_{2n,\lambda}^{+}(H_S^{(r)}) \\ r_{2n,\lambda}(H_S^{(r)})(\rho_S(0))_{eg} & r_{2n,\lambda}(H_S^{(r)})(\rho_S(0))_{ee}r_{2n,\lambda}^{+}(H_S^{(r)}) \end{pmatrix}.$$

Оно также, в общем случае, не будет совпадать с начальным условием, которое возникает после перенормировки, описанной в разд. 3, и может быть вычислено по аналогичной формуле, в которой вместо $r_{2n,\lambda}$ стоит $W_\lambda(0)$, определенное формулой (14). С математической точки зрения это связано с явлением начального (пограничного) слоя, известного в сингулярной теории возмущений (см. [35, Параграф 3], [36, Разд. 7.2], [37, Разд. 1.3]). А именно, в $\rho_M(t)$ для сколь угодно большого n не будут учтены члены, которые при фиксированном (уже после перерастяжки Боголюбова—ван Хова) времени t убывают быстрее всякой степени λ. Но эта асимптотика не является равномерной по времени, она не верна для небольшого начального интервала времен, длина которого имеет порядок $O(\lambda^2)$. И члены, не учтенные в $\rho_M(t)$, могут стать не малыми в этом интервале; в частности, их нужно учитывать и при постановке начального условия. Это приводит к дополнительной перенормировке начальных условий для $\rho_M(t)$. С физической точки зрения длина этого малого интервала времени характеризуется временем корреляции резервуара. Поэтому мы говорим, что марковская динамика, задаваемая уравнением (27), возникает после времени корреляции резервуара.

Однако, как уже было сказано в предыдущем разделе, в пределе Боголюбова—ван Хова перенормировка начальных условий, возникшая как в результате учета омической спектральной плотности, так и в результате непосредственной неравномерности марковской по времени асимптотики, исчезают. Возможно, именно поэтому перенормировки начальных состояний, связанные с учетом омической спектральной плотности, ранее мало обсуждались в литературе.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были получены уравнения ГКСЛ, которые описывают динамику многоуровневой системы, взаимодействующей с несколькими резервуарами при нулевой температуре после времени корреляции резервуара. При этом был учтен вклад омической спектральной плотности, а также спектральной плотности, приводящей к непрерывной корреляционной функции резервуара. Асимптотическая точность, с которой выполнены марковские уравнения, определяется количеством конечных моментов модуля этой корреляционной функции. Как учет омической спектральной плотности, так и переход в марковский режим после времени корреляции приводят к перенормировке начальных условий. Были получены явные выражения для данной перенормировки.

В частности, было показано, что в пределе Боголюбова—ван Хова, т.е. в нулевом порядке теории возмущений с перерастяжкой Боголюбова—ван Хова, данные перенормировки исчезают. Этот эффект интересен в связи с тем, что, с одной стороны, в современной теории открытых квантовых систем активно обсуждаются поправки к уравнениям, возникающим в пределе слабой связи [8], [9], [24], [33], с другой стороны, основные работы в этой области до последнего времени фокусировались именно на выводе асимптотических поправок к самим уравнениям, но не к начальным условиям этих уравнений. Кроме того, результаты работы [34] позволяют смотреть на перенормированные начальные условия как на начальные условия, которые учитывают наличие корреляции между системой и резервуаром в начальный момент. В частности, есть основания полагать, что именно такие коррелированные состояния больше соответствуют реальной физике моделируемых систем, а не постулированные здесь факторизованные начальные условия. Отметим, что и в таком подходе полученные нами перенормировки важны, так как если в случае факторизованных начальных состояний в качестве начального состояния можно выбрать произвольную матрицу плотности, то множество начальных состояний, учитывающих начальную корреляцию, как раз описывается полученными перенормировками.

Автор хотел бы поблагодарить рецензента за ценные замечания, которые позволили существенно улучшить качество данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Teretenkov A.E.* Non-perturbative effects in corrections to quantum master equations arising in Bogolubov—van Hove limit // J. Phys. A: Math. Theor. 2021. V. 54. № 26. P. 265302—265302.
2. *Teretenkov A.E.* Long-time Markovianity of multi-level systems in the rotating wave approximation // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. № 10. P. 2455—2465.
3. *Petrosky T., Barsegov V.* Quantum decoherence, Zeno process, and time symmetry breaking // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. № 4. P. 046102.
4. *Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E.C.G.* Completely positive dynamical semigroups of N-level systems // J. Math. Phys. 1976. V. 17. № 5. P. 821—825.
5. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semigroups // Comm. in Math. Phys. 1976. V. 48. № 2. P. 119—130.
6. *Accardi L., Lu Y.G., Volovich I.* Quantum theory and its stochastic limit. Berlin: Springer, 2002.
7. *Davies E.B.* Markovian master equations // Commun. Math. Phys. 1974. V. 39. № 2. P. 91—110.
8. *Pechen A.N., Volovich I.V.* Quantum multipole noise and generalized quantum stochastic equations // Quant. Prob. Rel. Top. 2002. V. 5. № 4. P. 441—464.
9. *Pechen A.N.* On an asymptotic expansion in quantum theory // Math. Notes. 2004. V. 75. № 3. P. 426—429.
10. *Teretenkov A.E.* Non-Markovian Evolution of Multi-level System Interacting with Several Reservoirs. Exact and Approximate // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. № 10. P. 1587—1605.
11. *Teretenkov A.E.* Exact Non-Markovian Evolution with Several Reservoirs, // Physics of Particles and Nuclei. 2020. V. 51. № 4. P. 479—484.
12. *Breuer H.-P., Laine E.M., Piilo J.* Measure for the degree of non-Markovian behavior of quantum processes in open systems // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. № 21. P. 210401.
13. *Gullo N.L., Sinayskiy I., Busch T., Petruccione F.* Non-Markovianity criteria for open system dynamics // arXiv:1401.1126, 2014.
14. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The theory of open quantum systems. Oxford: Oxford University Press, 2002.
15. *Rivas A., Huelga S.F., Plenio M.B.* Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection // Rep. Progr. in Phys. 2014. V. 77. № 9. P. 094001.
16. *Bae J., Chruscinski D.* Operational characterization of divisibility of dynamical maps // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 117. № 5. P. 050403.
17. *Haikka P., Cresser J.D., Maniscalco S.* Comparing different non-Markovianity measures in a driven qubit system // Phys. Rev. A. 2011. V. 83. № 1. P. 012112.
18. *Li L., Hall M.J.W., Wiseman H.M.* Concepts of quantum non-Markovianity: A hierarchy // Phys. Rep. 2018. V. 759. P. 1—51.
19. *Trushechkin A.S., Volovich I.V.* Perturbative treatment of inter-site couplings in the local description of open quantum networks // EPL. 2016. V. 113. № 3. P. 30005.
20. *Friedrichs K.O.* On the perturbation of continuous spectra // Comm. on Pure and Applied Math. 1948. V. 1. № 4. P. 361—406.
21. *Garraway B.M., Knight P.L.* Cavity modified quantum beats // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. № 4. P. 3592.
22. *Garraway B.M.* Nonperturbative decay of an atomic system in a cavity // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. № 3. P. 2290.
23. *Garraway B.M.* Decay of an atom coupled strongly to a reservoir // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. № 6. P. 4636.
24. *Jang S., Cao J., Silbey R.J.* Fourth-order quantum master equation and its Markovian bath limit // J. Chem. Phys. 2002. V. 116. № 7. P. 2705—2717.
25. *Терeтёнков А.Е.* Метод псевдомод и вибронные немарковские эффекты в светособирающих комплексах // Труды МИАН. 2019 Т. 306. С. 258—272.
26. *Dalton B.J., Barnett S.M., Garraway B.M.* Theory of pseudomodes in quantum optical processes // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. № 5. P. 053813.
27. *Garraway B.M., Dalton B.J.* Theory of non-Markovian decay of a cascade atom in high-Q cavities and photonic band gap materials // J. Phys. B: Atomic, Mol. Opt. Phys. 2006. V. 39. № 15. P. S767.
28. *Luchnikov I.A., Vintskevich S.V., Ouerdane H., Filippov S.N.* Simulation complexity of open quantum dynamics: Connection with tensor networks // Phys. Rev. Lett. 2019. V. 122. № 16. P. 160401.
29. *Burgarth D., Facchi P., Ligabo M., Lonigro D.* Hidden non-Markovianity in open quantum systems // Phys. Rev. A. 2021. V. 103. № 1. P. 012203.

30. *Fleming C., Cummings N.I., Anastopoulos C., Hu B.L.* The rotating-wave approximation: consistency and applicability from an open quantum system analysis // J. Phys. 2010. V. 43. № 40. P. 405304.
31. *Tang N., Xu T.-T., Zeng H.-S.* Comparison between non-Markovian dynamics with and without rotating wave approximation // Chinese Phys. B. 2013. V. 22. № 3. P. 030304.
32. *Trubilko A.I., Basharov A.M.* Theory of relaxation and pumping of quantum oscillator non-resonantly coupled with the other oscillator // Phys. Scr. 2020. V. 95. № 4. P. 045106.
33. *Trushechkin A.S.* Higher-order corrections to the Redfield equation with respect to the system-bath coupling based on the hierarchical equations of motion // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. № 10. P. 1606–1618.
34. *Трушечкин А.С.* Вывод квантового кинетического уравнения Редфилда и поправок к нему по методу Боголюбова // Труды МИАН. 2021. Т. 313. С. 263–274.
35. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
36. *Bender C.M., Orszag S.A.* Advanced mathematical methods for scientists and engineers. New York: McGraw-Hill, 1978.
37. *Lagerstrom P.A.* Matched asymptotic expansions: ideas and techniques. Vol. 76. New York: Springer, 1988.