
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

**НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ
УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С УСЛОВИЯМИ
ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ¹⁾**

© 2023 г. А. Ю. Чеботарев^{1,*}

¹ 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН;
690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ,
Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, Россия

*e-mail: cheb@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 10.03.2022 г.
Переработанный вариант 16.09.2022 г.
Принята к публикации 14.11.2022 г.

Рассматривается неоднородная начально-краевая задача для нелинейной параболично-эллиптической системы, моделирующей радиационный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Доказана нелокальная по времени однозначная разрешимость задачи. Библ. 24.

Ключевые слова: квазистационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, неоднородная начально-краевая задача, нелокальная разрешимость.

DOI: 10.31857/S0044466923030055, **EDN:** EBJTRO

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Теоретический анализ моделей радиационно-кондуктивного (сложного) теплообмена представляет интерес для различных приложений, включая, например, процессы лазерной абляции [1]. При изучении процессов сложного теплообмена в средах, компоненты которых имеют большую разницу в коэффициентах преломления, необходимо учитывать эффекты отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления, вносящие, как показано в [2], значительный вклад в распределение температурных полей. При этом будем предполагать, что область, в которой изучается процесс, окружена непрозрачным для излучения материалом, имеющим заданную температуру на границе области.

В [2], [3] представлен вывод стационарной модели сложного теплообмена в рамках P_1 приближения для многокомпонентной трехмерной области и доказана однозначная разрешимость однородной и неоднородной краевых задач. В работе [4] рассмотрена квазистационарная модель сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения, не содержащая внутренних источников.

В данной статье рассматривается начально-краевая задача для уравнений радиационного теплообмена в многокомпонентной среде с внутренними источниками (объемными или поверхностными). Отметим, что анализ неоднородных начально-краевых задач важен для изучения обратных задач и задач оптимального управления сложным теплообменом.

Нелинейные уравнения, моделирующие сложный теплообмен в рамках P_1 приближения и без учета эффектов отражения и преломления на границах подобластей с различными коэффициентами преломления, изучены достаточно полно. Анализ краевых и обратных задач, задач оптимального управления представлен в [5–14]. Отметим также интересные работы [15–23], посвященные анализу полной модели радиационного теплообмена.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00113) и Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8) и соглашение № 075-02-2022-880.

Рассмотрим ограниченную липшицеву область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащую конечное число липшицевых подобластей Ω_j , $j = 1, \dots, p$, замыкания которых не пересекаются и принадлежат Ω . Через $\Omega_0 = \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^p \bar{\Omega}_j\right)$ обозначаем внешнюю подобласть, $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$, $j = 1, \dots, p$.

Нестационарный сложный теплообмен в многокомпонентной среде моделируется в каждой из областей Ω_j , $j = 0, \dots, p$, при $t \in (0, T)$ уравнениями

$$r \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = f, \quad -\alpha \Delta \varphi + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = g. \quad (1)$$

Здесь θ — нормализованная температура и φ — нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные кусочно-постоянные параметры r , a , b , α и β , описывающие свойства среды, определены в [2–4]. Функции f, g описывают тепловые и радиационные источники.

На внешней границе $\Gamma = \partial\Omega$ заданы краевые условия (через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе)

$$a \partial_n \theta + c(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (2)$$

где θ_b — заданная граничная температура, c — коэффициент теплопередачи, $0 < \gamma \leq 1/2$ — параметр, зависящий от коэффициента излучения поверхности.

На внутренних границах $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j = 1, \dots, p$, ставятся следующие условия сопряжения для температуры $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$, полученные в [2] (через ∂_n также обозначаем производную по внешней нормали к $\partial\Omega_j$):

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0 \partial_n \theta_0 = a_j \partial_n \theta_j, \quad (3)$$

$$n_0^2 \alpha_0 \partial_n \varphi_0 = n_j^2 \alpha_j \partial_n \varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0 \partial_n \varphi_0. \quad (4)$$

Здесь $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ — параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах. Отметим, что вывод условий (4) основан на френелевских условиях сопряжения на Γ_j для интенсивности излучения I , не усредненной по направлениям, использовании P_1 приближения для I и интегрировании указанных условий по направлениям входящих лучей для каждой подобласти.

Кроме этого задаются начальные условия для температуры,

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (5)$$

Начально-краевая задача (1)–(5), где $f = 0$, $g = 0$ и граничная температура θ_b является ограниченной, рассмотрена в [4]. Изучение уравнений сложного теплообмена с источниками, которые моделируются функциями или интегрируемыми функциями, представляет не только теоретический интерес. Представленные в настоящей статье оценки решений неоднородной начально-краевой задачи предназначены для анализа задач оптимального управления и обратных задач сложного теплообмена. Отметим, что для неоднородной задачи потребовалась техника получения оценок решения, отличная от использованной в [4].

Основной результат работы состоит в получении новых априорных оценок решения начально-краевой задачи (1)–(5) и доказательстве нелокальной по времени разрешимости задачи.

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Через L^s , $1 \leq s \leq \infty$, обозначаем пространства Лебега s — интегрируемых функций и, соответственно, через $H^s = W_2^s$ — пространства Соболева. Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ и

$$W = \{w \in H, w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j), j = 0, \dots, p\}.$$

Пространство H будем отождествлять с сопряженным пространством H' . Тогда $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$. Далее будем использовать следующие обозначения: (f, v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H , если $f, v \in H$;

$$\|v\|^2 = (v, v); \quad (v, w)_j = (v, w)_{L^2(\Omega_j)}, \quad \|v\|_j^2 = (v, v)_j; \quad (v, w)_W = \sum_{j=0}^p (v, w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Через $L^p(0, T; X)$ (соотв. $C([0, T], X)$) обозначаем пространство строго измеримых функций класса L^p (соотв. непрерывных), определенных на $[0, T]$, со значениями в банаховом пространстве X .

Пусть исходные данные удовлетворяют следующим условиям.

- (i) $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $c \geq c_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $c_0, \gamma_0 = \text{const}$;
- (ii) $\{a, b, r, \alpha, \beta, n\}_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, r_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\} > 0$, $b = \sigma \beta n^2$, $\sigma = \text{const} > 0$;
- (iii) $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma \times (0, T))$; $f \in L^2(0, T; V')$, $g \in L^{5/4}(Q)$, $Q = \Omega \times (0, T)$.

Определим операторы $A_1 : V \rightarrow V'$, $A_2 : W \rightarrow W'$ и функции $f_b \in L^2(0, T; V')$, $g_b \in L^2(0, T; W')$, используя следующие равенства, справедливые для $\theta, \eta \in V$, $\phi, w \in W$:

$$(A_1 \theta, \eta) = (a \nabla \theta, \nabla \eta) + \int_{\Gamma} c \theta \eta d\Gamma,$$

$$\frac{1}{\sigma} (A_2 \phi, w) = \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 (\nabla \phi, \nabla w)_j + n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \phi w d\Gamma + n_0^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} (\phi_0 - \phi_j)(w_0 - w_j) d\Gamma,$$

$$(f_b, \eta) = \int_{\Gamma} c \theta_b \eta d\Gamma, \quad (g_b, w) = \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 w d\Gamma.$$

Здесь $\{\phi_j, w_j\} = \{\phi, w\}_{\Omega_j}$.

Скалярное произведение и норму в пространстве V определим, используя оператор A_1 , $(u, v)_V = (A_1 u, v)$, $\|v\|_V^2 = (A_1 v, v)$. Такая норма эквивалентна стандартной норме пространства V . Будем также использовать неравенства непрерывности вложений $V \subset L^6(\Omega)$, $W \subset L^6(\Omega)$:

$$\|v\|_{L^6(\Omega)} \leq K_1 \|v\|_V, \quad v \in V, \quad \|w\|_{L^6(\Omega)} \leq K_2 \|w\|_W, \quad w \in W.$$

Для возрастающей степенной функции используем обозначение $[s]^q = |s|^q \text{sign } s$, $q > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Отметим, что $d[s]^q/dt = q|s|^{q-1}$.

Пусть

$$Y = \{y \in L^2(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^5(\Omega)), ry' \in L^2(0, T; V') + L^{5/4}(0, T; L^{5/4}(\Omega))\}.$$

Здесь $ry' = d(ry)/dt$.

Отметим, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $y \in Y$. Тогда функция y равна почти всюду некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в H и в смысле скалярных распределений на $(0, T)$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}(ry, y) = 2(ry', y). \quad (6)$$

Данная лемма является слегка модифицированной версией классического утверждения [24, лемма 1.2, с. 209] и доказана в конце статьи.

Для вывода слабой формулировки краевой задачи (1)–(4) умножим уравнения (1) на тестовые функции $\eta \in V$ и $\sigma n^2 \psi \in W$ соответственно, проинтегрируем по частям по областям Ω_j , сложим полученные равенства и применим краевые условия (2) и условия сопряжения (3), (4). В результате получаем следующую формулировку.

Определение. Пара $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0, T; W)$ называется *слабым решением* задачи (1)–(5), если

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b + \sigma n^2 g, \quad t \in (0, T) \quad (7)$$

и при этом $\theta(0) = \theta_0$.

Заметим, что билинейная форма $\{\varphi, \psi\} \rightarrow (A_2\varphi + b\varphi, \psi)$ является непрерывной, симметричной и положительно-определенной в пространстве W . Поэтому из леммы Лакса-Мильграма следует, что для каждого $\eta \in W'$ существует единственное решение $\varphi \in W$ уравнения $A_2\varphi + b\varphi = \eta$ и оператор $(A_2 + bI)^{-1} : W' \rightarrow W$ непрерывен. Таким образом, пара $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0, T; W)$ является решением задачи (7), если и только если функция θ является решением следующей задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \text{где} \quad \varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + \sigma n^2 g + b[\theta]^4). \quad (8)$$

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Определим галёркинские приближения θ_m решения задачи (8) и выведем необходимые для доказательства разрешимости априорные оценки. В пространстве V рассмотрим ортонормированный в H базис $w_1, w_2, \dots$. Пусть

$$\begin{aligned} \theta_k(t) &\in V_k = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_k\}, \quad t \in (0, T), \\ \left(r\theta_k' + A_1\theta_k + b([\theta_k]^4 - \varphi_k) - f_b - f, v \right) &= 0 \quad \forall v \in V_k, \\ \theta_k(0) &= \theta_{0k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\varphi_k = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + \sigma n^2 g + b[\theta_k]^4)$, θ_{0k} – ортогональная проекция в H функции θ_0 на подпространство V_k .

Задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (9) разрешима на малом временном интервале $(0, T_k)$. Оценки, полученные ниже, позволяют продолжить решение на $(0, T)$.

3.1. Априорные оценки галёркинских приближений

Функция φ_k удовлетворяет равенству

$$A_2\varphi_k + b(\varphi_k - [\theta_k]^4) = g_b + \sigma n^2 g. \quad (10)$$

Пусть $\mu_\varepsilon(s) = s - \varepsilon \text{sign } s$, если $|s| > \varepsilon$ и $\mu_\varepsilon(s) = 0$, если $|s| \leq \varepsilon$; $\varepsilon > 0$. Тогда $\psi_\varepsilon(t) = \mu_\varepsilon([\varphi_k(t)]^{1/4})$ принадлежит пространству W . Умножая скалярно (10) на ψ_ε , также как в [3], выводим после предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow +0$, что $\zeta(t) = [\varphi_k(t)]^{5/8} \in W$ и справедливо равенство

$$E(\zeta) + (b(\varphi_k - [\theta_k]^4), [\varphi_k]^{1/4}) = \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 [\zeta]^{2/5} d\Gamma + (\sigma n^2 g, [\zeta]^{2/5}). \quad (11)$$

Здесь

$$E(\zeta) = \frac{16\sigma}{25} \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 \|\nabla \zeta\|_j^2 + \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \zeta^2 d\Gamma + \sigma n^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} ([\zeta_0]^{8/5} - [\zeta_j]^{8/5})([\zeta_0]^{2/5} - [\zeta_j]^{2/5}) d\Gamma.$$

Отметим сразу, что для квадратичной формы E справедлива следующая оценка.

Лемма 2 (см. [3]). *Существует $K > 0$ такое, что*

$$K \|w\|^2 \leq E(w) \quad \forall w \in W.$$

Полагая $v = \theta_k$ в (9) и складывая это равенство с (11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta_k, \theta_k) + \|\theta_k\|_V^2 + E(\zeta) + (b([\theta_k]^4 - \varphi_k), \theta_k - [\varphi_k]^{1/4}) = \\ = (f_b + f, \theta_k) + \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 [\zeta]^{2/5} d\Gamma + (\sigma n^2 g, [\zeta]^{2/5}). \end{aligned} \quad (12)$$

Воспользуемся следующими неравенствами для оценки правой части (12):

$$\begin{aligned} (f_b + f, \theta_k) &\leq \frac{1}{2} \|f_b + f\|_{V'}^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k\|_V^2, \\ \theta_b^4 [\zeta]^{2/5} &\leq \frac{1}{5} (\epsilon^5 \zeta^2 + 4\epsilon^{-5/4} |\theta_b|^5), \quad g[\zeta]^{2/5} \leq \frac{1}{5} (\epsilon^5 \zeta^2 + 4\epsilon^{-5/4} |g|^{5/4}). \end{aligned}$$

Тогда при достаточно малом $\epsilon > 0$ из (12), с учетом леммы 1, следует оценка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r\theta_k, \theta_k) + \|\theta_k\|_V^2 + K \|\zeta\|^2 + (b([\theta_k]^4 - \varphi_k), \theta_k - [\varphi_k]^{1/4}) + \\ + \frac{16\sigma}{25} \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 \|\nabla \zeta\|_j^2 \leq \|f_b + f\|_{V'}^2 + C \left(\int_{\Gamma} |\theta_b|^5 d\Gamma + \int_{\Omega} |g|^{5/4} dx \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и далее через $C > 0$ обозначаем постоянные, не зависящие от k .

Проинтегрировав по времени неравенство (13), получаем оценки

$$\|\theta_k(t)\| \leq C, \quad \int_0^T \|\theta_k(s)\|_V^2 ds \leq C, \quad \int_0^T \|\zeta\|_W^2 ds \leq C, \quad \int_0^T ([\theta_k]^4 - \varphi_k, \theta_k - [\varphi_k]^{1/4}) ds \leq C. \quad (14)$$

Из последней оценки в (14) следует, что

$$\int_0^T \left(\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\varphi_k\|_{L^{5/4}(\Omega)}^{5/4} \right) ds \leq C + \int_0^T ([\theta_k]^4, [\varphi_k]^{1/4}) ds + \int_0^T (\varphi_k, \theta_k) ds.$$

Поскольку

$$|[\theta_k]^4 \cdot [\varphi_k]^{1/4}| = |\theta_k|^4 |\zeta|^{2/5} \leq \frac{4\epsilon^{5/4}}{5} |\theta_k|^5 + \frac{1}{5\epsilon} |\zeta|^2, \quad |\varphi_k \theta_k| = |\theta_k| |\zeta|^{8/5} \leq \frac{\epsilon^5}{5} |\theta_k|^5 + \frac{4}{5\epsilon^{5/4}} |\zeta|^2,$$

то, выбрав $\epsilon > 0$ достаточно малым, получаем

$$\int_0^T \left(\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\varphi_k\|_{L^{5/4}(\Omega)}^{5/4} \right) ds \leq C. \quad (15)$$

Далее, используя неравенства вложения $V \subset L^6(\Omega)$, $W \subset L^6(\Omega)$, оценим нелинейность:

$$\|[\theta_k]^4\|_{V'} \leq \sup_{\|v\|_V=1} \|[\theta_k]^4\|_{L^{6/5}(\Omega)} \|v\|_{L^6(\Omega)} \leq K_1 \left(\int_{\Omega} |\theta|^{24/5} dx \right)^{5/6}.$$

Тогда

$$\int_0^T \|[\theta_k]^4\|_{V'}^{5/4} dt \leq K_1^{5/4} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\theta_k|^{24/5} dx \right)^{25/24} dt \leq K_1^{5/4} |\Omega|^{1/24} \int_Q |\theta_k|^5 dx dt \leq C \quad (16)$$

и, аналогично,

$$\int_0^T \|[\theta_k]^4\|_{W'}^{5/4} dt \leq K_2^{5/4} |\Omega|^{1/24} \int_Q |\theta_k|^5 dx dt \leq C.$$

Учтем, что $\varphi_k = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + \sigma n^2 g + b[\theta_k]^4)$ и оператор $(A_2 + bI)^{-1} : W' \rightarrow W$ непрерывен. Следовательно, из полученной оценки вытекает, что

$$\int_0^T \|\varphi_k\|_W^{5/4} dt \leq C. \quad (17)$$

Получим оценку равномерной непрерывности последовательности θ_k в $L^2(0, T; H)$. Рассмотрим (9) в момент времени s , положим $v = \theta_k(s) - \theta_k(t)$ и проинтегрируем по s от t до $t+h$, затем по t от 0 до $T-h$. Тогда

$$\frac{1}{2} \int_0^{T-h} (r(\theta_k(t+h) - \theta_k(t), \theta_k(t+h) - \theta_k(t))) dt = \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} p_k(t, s) ds dt. \quad (18)$$

Здесь

$$p_k(t, s) = (A_1 \theta_k(s) + b([\theta_k(s)]^4 - \varphi_k(s)) - f_b(s) - f(s), \theta_k(t) - \theta_k(s)).$$

Воспользуемся неравенствами

$$\begin{aligned} (A_1 \theta_k(s), \theta_k(t) - \theta_k(s)) &\leq \frac{1}{2} \|\theta_k(s)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k(t)\|_V^2, \\ (b([\theta_k(s)]^4, \theta_k(t) - \theta_k(s)) &\leq \max b([\theta_k(s)]^4, \theta_k(t) - \theta_k(s)) \leq \max b \left(\frac{4}{5} \int_{\Omega} |\theta_k(s)|^5 dx + \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_k(t)|^5 dx \right), \\ |(b(\varphi_k(s), \theta_k(t) - \theta_k(s)))| &\leq \max b \left(\frac{8}{5} \int_{\Omega} |\varphi_k(s)|^{5/4} dx + \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_k(s)|^5 dx + \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_k(t)|^5 dx \right), \\ |(f_b(s) + f(s), \theta_k(t) - \theta_k(s))| &\leq \|f_b(s) + f(s)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k(s)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k(t)\|_V^2. \end{aligned}$$

Эти неравенства позволяют оценить правую часть (18), причем для оценки интегралов от функций, зависящих от s , достаточно поменять порядок интегрирования. В результате получаем оценку

$$\int_0^{T-h} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\|_V^2 dt \leq C_1 h, \quad (19)$$

где $C_1 > 0$ не зависит от k, h .

Полученные оценки (14)–(19) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции θ, φ такие, что

$$\begin{aligned} \theta_k &\rightarrow \theta \quad \text{слабо в } L^2(0, T; V), L^5(Q), \quad \text{сильно в } L^2(0, T; H), \\ \varphi_k &\rightarrow \varphi \quad \text{слабо в } L^{5/4}(0, T; W), L^{5/4}(Q). \end{aligned} \quad (20)$$

Результатов о сходимости (20) достаточно для предельного перехода при $k \rightarrow \infty$ в системе (9) и доказательства того, что предельные функции $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0, T; W)$ и выполняются равенства (8). При этом предельный переход в нелинейных членах гарантируется неравенством

$$\|\theta_k - \theta\|_{L^4(Q)}^4 \leq \|\theta_k - \theta\|_{L^2(Q)}^{2/3} \|\theta_k - \theta\|_{L^5(Q)}^{10/3}.$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует слабое решение задачи (1)–(5).

Замечание 1. Из определений пространств Y и W и вложений $Y \subset C([0, T]; H)$, $W \subset L^{5/4}(\Omega)$ следует, что если $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0, T; W)$ – слабое решение задачи (1)–(5), то $\theta \in C([0, T]; H) \cap L^5(Q)$, $\varphi \in L^{5/4}(Q)$.

4. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Пусть $\{\theta_{1,2}, \varphi_{1,2}\} \in Y \cap L^5(Q) \times L^{5/4}(0, T; W) \cap L^{5/4}(Q)$ — слабые решения задачи (1)–(5), $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Тогда справедливы равенства

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4) = b\varphi, \quad A_2\varphi + b\varphi = b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4), \quad t \in (0, T), \quad \theta(0) = 0.$$

Умножая скалярно первое уравнение на $\theta(t)$, второе на $\varphi(t)$ и учитывая неравенства

$$([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4)(\theta_1 - \theta_2) \geq 0, \quad |[\theta_1]^4 - [\theta_2]^4| \leq 2(|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3)|\theta|,$$

получаем оценки

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta, \theta) + \|\theta\|_V^2 \leq (b\varphi, \theta) \leq \max b \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|_{L^{6/5}(\Omega)} \leq \max b |\Omega|^{1/3} \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|, \quad (21)$$

$$(A_2\varphi, \varphi) + (b\varphi, \varphi) \leq 2 \max b \int_{\Omega} (|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3) |\theta| |\varphi| dx. \quad (22)$$

Левую часть (22) оценим снизу, используя непрерывность вложения $W \subset L^6(\Omega)$, а правую сверху, используя неравенство Гёльдера. Тогда

$$K_3 \|\varphi\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq 2 \max b \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \left(\left(\int_{\Omega} |\theta_1|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} + \left(\int_{\Omega} |\theta_2|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} \right).$$

Здесь $K_3 = \min\{\alpha n^2, b\}/K_2$. Заметим, что

$$\left(\int_{\Omega} |\theta_{1,2}|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} \leq \|\theta_{1,2}\|_{L^5(\Omega)}^3 \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{1/5}.$$

Поэтому

$$K_3 \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \leq 2 \max b \left(\|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{1/5}.$$

Подставляя полученное неравенство для φ в правую часть (21), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta, \theta) + \|\theta\|_V^2 \leq K_4 \left(\|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{6/5}. \quad (23)$$

Здесь $K_4 = 2(\max b)^2 |\Omega|^{1/3} / K_3$. Правую часть (23) оценим, используя неравенство Юнга с параметром $\varepsilon > 0$,

$$\left(\|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{6/5} \leq \frac{4\varepsilon^{5/2}}{5} \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^2 + \frac{3\varepsilon^{-5/3}}{5} \left(\|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^5 \right) \|\theta\|^2.$$

Учитывая непрерывность вложения $V \subset L^6(\Omega)$, выводим из (23) при достаточно малом ε оценку

$$\min r \|\theta(t)\|^2 \leq K_5 \int_0^t \left(\|\theta_1(s)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2(s)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right) \|\theta(s)\|^2 ds,$$

где $K_5 > 0$ зависит только от K_4, ε . Функция $s \rightarrow \left(\|\theta_1(s)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2(s)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right)$ интегрируема на $(0, T)$ и поэтому из неравенства Гронуолла следует $\theta = 0$, что означает единственность решения.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1)–(5).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1

Определим регуляризацию функции $y \in Y$,

$$y_m(t) = \int_0^t y(s) \rho((t-s)m) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

где $\rho \in D(\mathbb{R})$, $\int \rho(s)ds = 1$, $\rho(t) = \rho(-t)$, $\text{supp } \rho \subset [-1, 1]$; $y_m \in C^\infty([0, T], V)$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Тогда

$$y_m \rightarrow y \quad \text{в } L^2_{\text{loc}}((0, T); V) \quad \text{и в } L^5_{\text{loc}}((0, T); L^5(\Omega)).$$

По условию $ry' = f_1 + f_2$, $f_1 \in L^2(0, T; V')$, $f_2 \in L^{5/4}(0, T; L^{5/4}(\Omega))$. Определим регуляризации

$$f_{1m}(t) = \int_0^T f_1(s) \rho((t-s)m) ds, \quad f_{2m}(t) = \int_0^T f_2(s) \rho((t-s)m) ds,$$

$$f_{1m} \rightarrow f_1 \quad \text{в } L^2_{\text{loc}}((0, T); V'), \quad f_{2m} \rightarrow f_2 \quad \text{в } L^{5/4}_{\text{loc}}((0, T); L^{5/4}(\Omega)).$$

Заметим, что для $\varphi \in D(0, T)$, $\text{supp } \varphi \subset (1/m, T - 1/m)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T ry'_m(t) \varphi(t) dt &= \int_0^T \int_0^T ry(s) \frac{d}{dt} \rho((t-s)m) ds \varphi(t) dt = - \int_0^T \int_0^T ry(s) \frac{d}{ds} \rho((t-s)m) ds \varphi(t) dt = \\ &= \int_0^T \int_0^T (f_1(s) + f_2(s)) \rho((t-s)m) ds \varphi(t) dt = \int_0^T (f_{1m}(t) + f_{2m}(t)) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому $ry'_m = f_{1m} + f_{2m}$. Следовательно,

$$(ry'_m, y_m) = (f_{1m} + f_{2m}, y_m) \rightarrow (f_1, y) + (f_2, y) = (ry', y) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(0, T).$$

Кроме того, $(ry_m, y_m) \rightarrow (ry, y)$ в $L^1_{\text{loc}}(0, T)$. Поэтому мы можем перейти к пределу в равенстве

$$\frac{d}{dt} (ry_m, y_m) = 2(ry'_m, y_m)$$

в смысле теории распределений; в пределе получим (6).

Так как функция $t \rightarrow (ry', y)$ интегрируема на $(0, T)$, равенство (6) показывает, что $y \in L^\infty(0, T; H)$. Поэтому [24, Лемма 1.4, с. 211]

$$\forall v \in H \quad \text{функция} \quad t \rightarrow (ry(t), v) \quad \text{непрерывна.} \quad (24)$$

Далее, для $t, t_0 \in [0, T]$ используем равенство

$$\|\sqrt{r}(y(t) - y(t_0))\|^2 = (ry(t), y(t)) + (ry(t_0), y(t_0)) - 2(ry(t), y(t_0)).$$

Если $t \rightarrow t_0$, $(ry(t), y(t)) \rightarrow (ry(t_0), y(t_0))$. Действительно,

$$(ry(t), y(t)) = (ry(t_0), y(t_0)) + 2 \int_{t_0}^t (ry'(s), y(s)) ds,$$

а в силу (24), $(ry(t), y(t_0)) \rightarrow (ry(t_0), y(t_0))$. Поэтому $\|\sqrt{r}(y(t) - y(t_0))\|^2 \rightarrow 0$. Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковтанык А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. № 2. С. 194–199.
2. Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Diffusion approximation of the radiative-convective heat transfer model with Fresnel matching conditions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. № 57. С. 290–298.
3. Чеботарев А.Ю. Неоднородная краевая задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 12. С. 1660–1665.
4. Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E. Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 507. 125745.

5. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1 -system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
6. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
7. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.
8. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
9. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.
10. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.
11. *Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
12. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51. № 6. P. 2511–2519.
13. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
14. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
15. *Amosov A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies // Russian J. of Math. Phys. 2016. V. 23. № 3. P. 309–334.
16. *Amosov A.A.* Unique Solvability of Stationary Radiative – Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies // J. of Math. Sc. 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.
17. *Amosov A.A.* Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation // J. Math. Sci. 2018. V. 233. № 6. P. 777–806.
18. *Amosov A.A., Krymov N.E.* On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems // J. of Math. Sc. 2020. V. 244. P. 357–377.
19. *Amosov A.A.* Asymptotic Behavior of a Solution to the Radiative Transfer Equation in a Multilayered Medium with Diffuse Reflection and Refraction Conditions // J Math Sci. 2020. V. 244. P. 541–575.
20. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. V. 44. № 13. P. 10703–10733.
21. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a semitransparent body with absolutely black inclusions // Z. Angew. Math. Phys. 2021. V. 72. Article number: 104.
22. *Amosov A.A.* Unique solvability of the stationary complex heat transfer problem in a system of gray bodies with semitransparent inclusions // J. Math. Sci. (United States). 2021. V. 255. Issue 4. P. 353–388.
23. *Amosov A.* Nonstationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions // Mathematics. 2021. V. 9. № 13. P. 1471.
24. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.