

# УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

## ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ И ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ. II. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА<sup>1)</sup>

© 2023 г. М. О. Корпусов<sup>1,\*</sup>, Е. А. Овсянников<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup> 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

\*e-mail: korpusov@gmail.com

\*\*e-mail: evg.bud@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.  
Переработанный вариант 04.07.2022 г.  
Принята к публикации 04.07.2022 г.

В статье рассматриваются объемный и поверхностный потенциалы, возникающие в задачах Коши для нелинейных уравнений из теории ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, и изучаются их свойства. Для объемного потенциала выводится некоторая оценка. На ее основе доказываются одна априорная оценка типа Шаудера и оценки типа Шаудера для потенциалов с весом. Библ. 5.

**Ключевые слова:** объемный потенциал, поверхностный потенциал, априорные оценки типа Шаудера.

DOI: 10.31857/S0044466923020102, EDN: VOJJQG

### 1. ОБЪЕМНЫЙ И ПОВЕРХНОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

Стоит отметить, что настоящая статья является логическим продолжением работы [1], в ней продолжаются исследования, начатые ранее в [1].

Рассмотрим следующие объемный и поверхностный потенциалы:

$$U(x, t) = U[\rho](x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (1.1)$$

$$V_k(x, t) = V_k[\mu](x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^k G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t)}{\partial t^k} \mu(y) dy, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (1.2)$$

где

$$G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t) = \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(x - y, t), \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad (1.3)$$

здесь фундаментальное решение  $\mathcal{E}(x, t)$  определено равенством (5.6) в работе [1]. Справедлива следующая

**Теорема 1.** Если  $\rho(x, t) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$  при  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ , то

$$U(x, t) \in \mathcal{C}^{(2)}([0, T]; \mathcal{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$$

<sup>1)</sup>Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и программы стратегического академического лидерства РУДН.

и справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^k U[\rho_1](x, t)}{\partial t^k} - \frac{\partial^k U[\rho_2](x, t)}{\partial t^k} \right|_{2+\alpha} \leq T d_k(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)|_\alpha$$

для любых  $\rho_j(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$  при  $j = 1, 2$ , где  $d_k = d_k(T) > 0$  при  $k = 0, 1, 2$  является монотонно неубывающей, ограниченной на компактах.

**Доказательство.**

**Шаг 1:**  $U(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ . Пусть  $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$  при  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ . Объемный потенциал  $U(x, t)$  можно представить в следующем виде:

$$U(x, t) = \int_0^t H(x, t, \tau) d\tau, \quad H(x, t, \tau) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy. \quad (1.4)$$

Докажем, что функция  $H(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$ . Действительно, пусть

$$(x^j, t^j, \tau^j) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\},$$

причем пусть  $R_1 > 0$  настолько велико, что

$$x^j \in O(0, R_1).$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |H(x^1, t^1, \tau^1) - H(x^2, t^2, \tau^2)| &\leq |H_1(x^1, t^1, \tau^1)| + |H_1(x^2, t^2, \tau^2)| + \\ &+ |H_2(x^1, t^1, \tau^1)| + |H_2(x^2, t^2, \tau^2)| + |H_3(x^1, t^1, \tau^1) - H_3(x^2, t^2, \tau^2)|, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$H_1(x^j, t^j, \tau^j) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x^j, R_\delta)} G_{\beta_1, \beta_2}(x^j, y, t^j - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy,$$

$$H_2(x^j, t^j, \tau^j) = \int_{O(x^j, r_\delta)} G_{\beta_1, \beta_2}(x^j, y, t^j - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy,$$

$$H_3(x^j, t^j, \tau^j) = \int_{O(x^j, R_\delta) \setminus O(x^j, r_\delta)} G_{\beta_1, \beta_2}(x^j, y, t^j - \tau^j) \rho(y, \tau^j) dy, \quad j = 1, 2.$$

Пусть  $\delta > 0$  — произвольное фиксированное. Тогда найдется такое достаточно большое  $R_\delta$ ,  $R_\delta \geq R_0 > 0$ , и достаточно малое  $r_\delta$ ,  $R_0 \geq r_\delta > 0$ , и тогда, в силу оценок (6.7) и (6.9) работы [1], будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |H_1(x^j, t^j, \tau^j)| &\leq \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| (1 + R_1^2)^{\beta_1/2} M_1(T, \varepsilon, R_0) \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x^j, R_\delta)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x^j - y|)}{|x^j - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy \leq M_2(T, \varepsilon, R_0, R_1) \int_{R_\delta}^{+\infty} \rho \exp(-(1 - \varepsilon)\rho) d\rho < \frac{\delta}{3}, \\ |H_2(x^j, t^j, \tau^j)| &\leq (1 + R_1^2)^{\beta_1/2} \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| M_3(T, \varepsilon, R_0) \times \\ &\times \int_{O(x^j, r_\delta)} \frac{1}{|x^j - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy \leq M_4(T, \varepsilon, R_0, R_1) \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \frac{r_\delta^2}{2} < \frac{\delta}{3}. \end{aligned}$$

На этом моменте мы зафиксируем  $R_\delta$  и  $r_\delta$ . Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |H_3(x^1, t^1, \tau^1) - H_3(x^2, t^2, \tau^2)| &\leq \\ &\leq \int_{O(0, R_\delta) \setminus O(0, r_\delta)} \left| \frac{(1 + |x^1|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |z + x^1|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(z, t^1 - \tau^1) - \frac{(1 + |x^2|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |z + x^2|^2)^{\beta_2/2}} \mathcal{E}(z, t^2 - \tau^2) \right| dz < \frac{\delta}{3} \end{aligned} \quad (1.6)$$

при условии, что

$$\left| (x^1, t^1, \tau^1) - (x^2, t^2, \tau^2) \right| < \eta(\delta) \quad (1.7)$$

при достаточно малом  $\eta(\delta) > 0$ . Таким образом, в силу (1.5), (1.6) для любого  $\delta > 0$  найдется такое  $\eta(\delta) > 0$ , что при выполнении неравенства (1.7) будет следовать неравенство

$$\left| H(x^1, t^1, \tau^1) - H(x^2, t^2, \tau^2) \right| < \delta.$$

Таким образом,  $H(x, t, \tau) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$ . Докажем теперь, что  $H(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$ . Действительно, из (1.3) и (1.4) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |H(x, t, \tau)| &\leq \left( \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \right) (I_1 + I_2), \\ I_1 &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \frac{|\mathcal{E}(x - y, t - \tau)|}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \quad I_2 = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{O(x, R_0)} \frac{|\mathcal{E}(x - y, t - \tau)|}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В силу оценки (6.9), см. [1], фундаментального решения  $\mathcal{E}(x, t)$  для  $I_1$  справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} I_1 &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} B_0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{|x - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= B_0 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|z|)}{|z|} \frac{1}{(1 + |x - z|^2)^{\beta_2/2}} dz \leq M_5(T, R_0, \varepsilon) \frac{1}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \leq M_5(T, R_0, \varepsilon), \end{aligned}$$

где мы воспользовались оценкой (10.20) из [1] и тем, что по условию  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ . Для того, чтобы оценить интеграл  $I_2$ , заметим, что при  $\beta_1 \geq 0$  справедлива следующая оценка:

$$(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \leq 2^{\beta_1/4} (1 + |x - y|^2)^{\beta_1/2} (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}. \quad (1.9)$$

С учетом неравенства (1.9) настоящей статьи и оценки (6.7) работы [1] для интеграла  $I_2$  справедлива оценка

$$I_2 \leq M_6(T, R_0, \varepsilon) \int_{O(x, R_0)} \frac{(1 + |x - y|^2)^{\beta_1/2}}{|x - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy \leq M_7(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \quad (1.10)$$

Таким образом, из (1.8)–(1.10) вытекает, что

$$\sup_{(x, \tau, t) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}} |H(x, t, \tau)| < +\infty.$$

Итак,

$$H(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Но тогда из (1.4) получаем, что

$$U(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

**Шаг 2:**  $U_{x_j}(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ . Докажем, что

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (1.11)$$

Сначала докажем, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy. \quad (1.12)$$

Действительно, пусть  $x \in O(0, R_0)$ . Справедливы следующие равенства:

$$H(x, t, \tau) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau) \rho(y, \tau) dy + \int_{O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau) \rho(y, \tau) dy = J_1 + J_2. \quad (1.13)$$

Заметим, что в силу явного вида (1.3) функции  $G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t)$ , а также в силу оценок (6.7) из [1] фундаментального решения и леммы 4.1 из [2] можно доказать поточечное равенство

$$\frac{\partial J_2}{\partial x_j} \int_{O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy. \quad (1.14)$$

Рассмотрим теперь интеграл  $J_1$ . Заметим, что если  $|y| \geq 2R_0$ , то имеет место цепочка неравенств

$$|x - y| \geq |y| - |x| \geq 2R_0 - R_0 = R_0 > 0.$$

Пусть  $x_h = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_3)$ . Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{J_1(x_h, y, t - \tau) - J_1(x, y, t - \tau)}{h} - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \left[ \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x^*, t, t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \right] \rho(y, \tau) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, NR_0)} \left[ \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x^*, t, t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \right] \rho(y, \tau) dy + \\ &+ \int_{O(0, NR_0) \setminus O(0, 2R_0)} \left[ \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x^*, t, t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \right] \rho(y, \tau) dy = J_{31} + J_{32}, \end{aligned}$$

где  $x^* \in |x, x_h|$ . Пусть  $\delta > 0$  — произвольное фиксированное. Несложно заметить, что при достаточно большом  $N \in \mathbb{N}$  имеет место оценка

$$|J_{31}| < \frac{\delta}{2}. \quad (1.15)$$

Фиксируем это  $N \in \mathbb{N}$ . Тогда при достаточно малом  $|h| > 0$  справедлива оценка

$$|J_{32}| < \frac{\delta}{2}. \quad (1.16)$$

Таким образом, из (1.15) и (1.16) вытекает, что

$$J_3 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0$$

и поэтому справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, t, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy. \quad (1.17)$$

Из (1.13), (1.14) и (1.17) получаем поточечное равенство (1.12). Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения на первом шаге. Причем необходимо воспользоваться оценками (6.7) и (6.10) фундаментального решения из статьи [1], а также оценкой (10.20) из [1] одного интеграла. В частности, справедлива следующая оценка:

$$\sup_{(x, \tau, t) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}} \left| \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right| < +\infty. \quad (1.18)$$

Следовательно, мы доказали, что справедливо выражение (1.11). Докажем, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} d\tau. \quad (1.19)$$

Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{U(x_h, t) - U(x, t)}{h} - \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} d\tau = \int_0^t \left[ \frac{H(x_h, t, \tau) - H(x, t, \tau)}{h} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right] d\tau = \\ &= \int_0^t \left[ \frac{\partial H(x^*, t, \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right] d\tau \quad \text{при} \quad x^* \in [x, x_h]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В силу (1.11) приходим к выводу о том, что

$$J_4 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0 \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T].$$

Таким образом, справедливо поточечное равенство (1.19), из которого с учетом (1.11) и (1.18) приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x_j} = \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (1.21)$$

**Шаг 3:**  $U_t(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ .

Докажем, что

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Сначала докажем поточечное равенство

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy. \quad (1.22)$$

Пусть  $x \in O(0, R_0)$  при  $R_0 > 0$ . Тогда справедливо следующее равенство:

$$H(x, t, \tau) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy + \int_{O(0, 2R_0)} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy = P_1(x, t, \tau) + P_2(x, t, \tau).$$

Рассуждая точно так же, как при доказательстве леммы 4.1 из [2], несложно доказать, что

$$\frac{\partial P_2(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy.$$

При  $|y| \geq 2R_0$  и  $|x| < R_0$  справедливо неравенство

$$|x - y| \geq R_0.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{P_1(x, t + h, \tau) - P_1(x, t, \tau)}{h} - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, 2R_0)} \left[ \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right] \rho(y, \tau) dy, \quad t^* \in [t, t + h], \\ H_1 &= \int_{O(x, NR_0) \setminus O(x, 2R_0)} \left[ \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right] \rho(y, \tau) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, NR_0)} \left[ \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right] \rho(y, \tau) dy = H_{11} + H_{12}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Для любого  $\eta > 0$  найдется такое  $N \in \mathbb{N}$ , что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |H_{12}| &\leq M_{11}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, NR_0)} \frac{(1 + |x - y|^2)^{\beta_1/2} \exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2} |x - y|} dy \leq \\ &\leq M_{12}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0, NR_0)} \frac{(1 + |z|^2)^{\beta_1/2} \exp(-(1 - \varepsilon)|z|)}{|z|} dz < \frac{\eta}{3}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались неравенством (1.9), а также оценкой (6.9) из [1]. Фиксируем это  $N \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $\eta > 0$  найдется такое  $\mu = \mu(\eta) > 0$ , что при  $|h| < \eta$  справедлива цепочка неравенств

$$|H_{11}| \leq \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} |\rho(x, t)| \int_{O(x, NR_0) \setminus O(x, \delta)} \left| \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t^* - \tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \right| dy < \frac{\eta}{3}, \quad (1.24)$$

где мы воспользовались явным видом (1.3) функции  $G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)$  и свойством гладкости (6.6) из [1] фундаментального решения  $\mathcal{E}(x, t)$ . Таким образом, из (1.23), (1.24) с учетом (1.23) приходим к выводу о том, что справедливо поточечное равенство (1.22).

Рассуждая точно так же, как на шаге 1, с учетом оценок (6.7) и (6.9) статьи [1], а также оценки интеграла (10. 20) из [1] мы можем доказать, что

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}), \quad (1.25)$$

причем справедлива оценка

$$\sup_{(x,t,\tau) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}} \left| \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right| < +\infty. \quad (1.26)$$

Теперь мы докажем, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (1.27)$$

Докажем поточечное равенство

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau. \quad (1.28)$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U(t + h, x) - U(t, x)}{h} - \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau = \frac{1}{h} \int_0^{t+h} H(x, t + h, \tau) d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t H(x, t, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} H(x, t + h, \tau) d\tau + \int_0^t \left[ \frac{H(x, t + h, \tau) - H(x, t, \tau)}{h} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right] d\tau = U_{11} + U_{12}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Для интеграла  $U_{11}$  справедливо равенство

$$U_{11} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [H(x, t + h, \tau) - H(x, t, \tau)] d\tau + H(x, t, t) = U_{111} + U_{112}.$$

Ранее на шаге 1 было доказано, что  $H(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, t])$  для любого  $t \in [0, T]$ . Поэтому имеет место предельное свойство

$$U_{111} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Заметим, что из явного вида (5.6), см. [1], вытекает, что

$$U_{12} = H(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, 0) \rho(y, t) dy = 0.$$

В силу (1.25) имеют место следующие соотношения:

$$U_{12} = \int_0^t \left[ \frac{\partial H(x, t^*, \tau)}{\partial t} - \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} \right] d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0, \quad (1.30)$$

где  $t^* \in [t, t + h]$ . Таким образом, из (1.29), (1.30) вытекает поточечное равенство (1.28). Осталось воспользоваться свойством гладкости (1.25) и оценкой (1.26) и получить, что справедлива формула (1.27).

**Шаг 4:**  $U_{x_j t}(x, t) = U_{tx_j}(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ .

Из поточечного равенства (1.21), рассуждая точно так же, как на шаге 3, можно доказать, что справедливо поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j} &= \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t \partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau, \\ \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} &\in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}), \end{aligned} \quad (1.31)$$

причем справедливы поточечные равенства

$$\frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial t}.$$

Из поточечного равенства (1.27), рассуждая точно так же, как на шаге 2, можно доказать, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau. \quad (1.32)$$

Теперь, рассуждая точно так же, как на шагах 1–3, с учетом оценок (6.7) и (6.10) статьи [1] можно доказать, что в силу поточечных равенств (1.31) и (1.32) имеем

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j}, \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

и поэтому в силу известного результата математического анализа производные коммутируют

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (1.33)$$

**Шаг 5:**  $U_{tt}(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ .

Используя доказанное на шаге 3 поточечное равенство (1.27), точно так же, как на шаге 3, можно доказать, что справедливо следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau. \quad (1.34)$$

Поскольку по условию  $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$  и с учетом оценок (6.7) и (6.9) статьи [1] из поточечного равенства (1.34) точно так же, как на шаге 1, можно доказать, что

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

**Шаг 6:**  $U_{x_j x_k} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ .

Поскольку  $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ , то с учетом (3.1) и (4.8) справедливо поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} &= \left[ \beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_j} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \end{aligned} \quad (1.35)$$

причем для любых  $R_\delta > r_\delta > 0$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} L_4 &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \left[ \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\ &+ \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y = L_{41} + L_{42} + L_{43} + L_{44} + L_{45}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Точно так же, как на шаге 1, можно доказать, что

$$L_1(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (1.37)$$

Точно так же, как на шаге 2, можно доказать, что

$$L_2(x, t, \tau), L_3(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (1.38)$$

Заметим, что в силу оценок (3.28) и (3.29) при  $x \neq y$  справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}|}{|x - y|} &\leq 3\beta_1, \quad \beta_1 \in [0, 1], \\ \frac{|(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}|}{|x - y|} &\leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2}, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Кроме того, в силу оценок (6.8), (6.11) статьи [1] для функции

$$|x - y| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial y_k}$$

справедливы следующие оценки при любом  $R_0 > 0$ :

$$|x - y| \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial y_k} \right| \leq \frac{A_4(T, R_0, \varepsilon)}{|x - y|^2} \quad \text{при} \quad |x - y| \leq R_0,$$



$$|x - y| \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j \partial y_k} \right| \leq B_4(T, R_0, \varepsilon) \exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|) \quad \text{при} \quad |x - y| > R_0.$$

Кроме того, в силу свойства гладкости (6.6) из [1] фундаментального решения  $\mathcal{E}(x, t)$  имеем

$$|x| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} \in \mathbb{C}^{(m+n)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times [0, +\infty)) \quad \text{для всех} \quad m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1.40)$$

Поэтому точно так же, как на шаге 1, для функции  $L_{41}(x, t, \tau)$  с учетом (1.39), (1.40), а также оценки (10.47), [1] одного интеграла, можно доказать, что

$$L_{41}(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (1.41)$$

Рассмотрим интегралы  $L_{43}$  и  $L_{44}$ . Для любого  $\delta > 0$  выберем достаточно большим  $R_\delta > R_0$  и достаточно малым  $0 < r_\delta < R_0$  таким образом, что будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |L_{43}| &\leq \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]} M_{13}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{|x - y|} dy \leq \\ &\leq M_{14}(T, R_0, \varepsilon) \int_{R_\delta}^{+\infty} \rho \exp(-(1 - \varepsilon)\rho) d\rho < \frac{\delta}{4}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} |L_{44}| &\leq \left[ \frac{\rho(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2 - \beta_1}} \right]_{\alpha} \int_{O(x, r_\delta)} |x - y|^\alpha \left| \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \right| dy \leq \\ &\leq M_{15}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_{\alpha} \int_{O(x, r_\delta)} \frac{1}{|x - y|^{3 - \alpha}} dy \leq M_{16}(T, R_0, \varepsilon) r_\delta^\alpha < \frac{\delta}{4}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

На этом шаге зафиксируем эти  $R_\delta > R_0 > 0$  и  $0 < r_\delta < R_0$ . Тогда несложно доказать, что интегралы  $L_{42}(x, t, \tau), L_{45}(x, t, \tau) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\})$ . Тем самым, с учетом оценок (1.42) и (1.43) нетрудно доказать (см. шаг 1), что

$$L_{42}(x, t, \tau) + L_{43}(x, t, \tau) + L_{44}(x, t, \tau) + L_{45}(x, t, \tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (1.44)$$

Заметим теперь, что функция  $L_4$  не зависит от выбора чисел  $R_\delta > r_\delta > 0$ . Поэтому возьмем в качестве этих чисел следующие:

$$R_\delta = 2R_0, \quad r_\delta = \frac{R_0}{2}, \quad R_0 > 0;$$

$$\begin{aligned} |L_{42}| &\leq M_{17}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t)| \left[ \int_{O(x, 2R_0) \setminus O(x, R_0)} \frac{\exp(-(1 - \varepsilon)|x - y|)}{|x - y|} dy + \int_{O(x, R_0) \setminus O(x, R_0/2)} \frac{1}{|x - y|^3} dy \right] \leq \\ &\leq M_{18}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t)|, \\ |L_{45}| &\leq M_{19}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3} |\rho(x, t)|. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (1.44) доказано. Следовательно, из (1.41)–(1.44), а также из (1.37), (1.38) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (1.45)$$

Поскольку (1.45) справедливо для всех  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ , то в силу известной теоремы математического анализа справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_k \partial x_j}. \quad (1.46)$$

В силу результата шага 2 справедливо поточечное равенство (1.19)

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial x_j} d\tau.$$

В силу (1.11) и (1.45) точно так же, как на шаге 2 (см. цепочку равенств (1.20)), получим следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_k \partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_k \partial x_j} d\tau,$$

из которого в силу (1.45), как и на предыдущих шагах, приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_k \partial x_j} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$$

и, кроме того, в силу (1.46) справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

**Шаг 7:**  $U_{tx_j x_k}(x, t) = U_{x_j tx_k}(x, t) = U_{x_j x_k t}(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ .

Прежде всего заметим, что справедливо поточечное равенство (1.22)

$$\frac{\partial H(x, t, \tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Заметим, что поскольку  $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ , то в силу равенства (4.9) приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} &= [\beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2}] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial x_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned} \quad (1.47)$$

причем для любых  $R_\delta > r_\delta > 0$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} &(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ &+ \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \left[ \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\ &+ \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial y_k \partial t} \cos(n_y, e_j) dS_y. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Точно так же, как на шаге 6, используя представление (1.47), можно доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} &\in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}), \\ \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} &= \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned} \quad (1.49)$$

На основании результата 4 шага справедливо равенство (1.33), из которого вытекает следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k}.$$

Теперь наша задача доказать, что

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

С этой целью воспользуемся равенствами (1.35) и (1.36). Точно так же, как на шаге 3, можно получить следующие поточечные равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} &= [\beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2}] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial x_j} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial x_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned}$$

причем для любых  $R_\delta > r_\delta > 0$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy &= \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy &+ \\ + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \left[ \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy &+ \\ + \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t \partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y. \end{aligned}$$

Поскольку для фундаментального решения  $\mathcal{E}(x, t)$  справедлива лемма 6.1 из [1], то можно доказать следующие равенства:

$$\frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = [\beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2}] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy,
\end{aligned} \tag{1.50}$$

причем для любых  $R_\delta > r_\delta > 0$  справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\
& = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\
& + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \mathcal{E}(x-y, t-\tau) \left[ \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy + \\
& + \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_k \partial t} \cos(n_y, e_j) dS_y.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Из сравнения равенств (1.47) и (1.48) с равенствами (1.50) и (1.51) приходим к следующим поточечным равенствам:

$$\frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \tag{1.52}$$

В силу результатов, полученных на шаге 6, справедливы следующие выражения:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} = \int_0^t \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} d\tau, \quad \frac{\partial^2 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}).$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 H(x, t, t)}{\partial x_j \partial x_k} + \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} d\tau, \tag{1.53}$$

причем

$$\frac{\partial^2 H(x, t, t)}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

Таким образом, из (1.53) с учетом (1.52) и (1.49) справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^3 H(x, t, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} d\tau = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Кроме того, в силу (1.33) справедливы поточечные равенства

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k}.$$

**Шаг 8:**  $U_{x,tt}(x, t) = U_{tx,t}(x, t) = U_{ttx_j}(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ .

Точно так же, как на шаге 2, используя равенство (1.34), с учетом оценок (6.7) и (6.10) статьи [1] можно получить поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned}$$

С одной стороны, используя оценки (6.7) и (6.10) статьи [1], можно доказать в точности так же, как на шагах 4 и 5, поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned} \quad (1.54)$$

С другой стороны, в силу результата леммы 6.1 из [1] можно доказать поточечное равенство

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \rho(y, \tau) dy d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau,$$

из которого и из (1.54) вытекают равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \right) \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial x_j \partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу результата шага 4 справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial t}. \quad (1.55)$$

Таким образом, из (1.54), (1.55) вытекают поточечные равенства

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial t} = \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (1.56)$$

**Шаг 9:**  $U_{x_j x_k tt}(x, t) = U_{x_j tx_k t}(x, t) = U_{x_j ttx_k}(x, t) = U_{tx_j x_k t}(x, t) = U_{tx_j tx_k}(x, t) = U_{ttx_j x_k}(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ .

Из формулы (1.34), используя оценки (6.7)–(6.11) статьи [1], точно так же, как на шаге 7, можно доказать поточечное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} &= - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau, \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy = \\ &= \left[ \beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} & + \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \\ & (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \left( \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \left( \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, r_\delta)} \left( \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \left[ \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy + \\ & + \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \cos(n_y, e_j) dS_y, \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t-\tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy = [\beta_1 (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_k x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-2}] \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_j \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial x_k \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} & + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \\ & (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \left[ \frac{\rho(y, \tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy + \\ & + \frac{\rho(x, \tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x-y, t-\tau)}{\partial y_k \partial t^2} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad R_\delta > r_\delta > 0, \end{aligned} \quad (1.61)$$

причем из (1.58) и (1.59) получаем, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]), \quad (1.62)$$

а из (1.60) и (1.61) вытекает, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leq \tau \leq t \leq T\}). \quad (1.63)$$

Далее уже стандартным образом из (1.57), (1.62) и (1.63) получаем, что

$$\frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Теперь из поточечного равенства (1.35) точно так же, как на шаге 7, с учетом оценок (6.7)–(6.11) из [1] фундаментального решения  $\mathcal{E}(x, t)$  можно аналогично шагу 5 доказать следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} = - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau,$$

где для первого слагаемого справедливы формулы (1.58) и (1.59), а для второго слагаемого имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy = \left[ \beta_1(1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1 - 2)x_k x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial x_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \\ & (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} ((1 + |x|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, R_\delta) \setminus O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} dy + \\ & + \int_{O(x, r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \left[ \frac{\rho(y, \tau)}{(1 + |y|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} - \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right] dy + \\ & + \frac{\rho(x, \tau)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \int_{\partial O(x, r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x - y, t - \tau)}{\partial t^2 \partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad R_\delta > r_\delta > 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Используя результат леммы 6.1 из [1], можно доказать, что правые части равенств (1.60) и (1.64), (1.61) и (1.65) совпадают. Поэтому сразу же получаем то, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (1.66)$$

Теперь заметим, что в силу равенств (1.56) справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t \partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t}, \\ \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} &= \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t \partial t} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial t \partial x_k}.\end{aligned}\quad (1.67)$$

Таким образом, из (1.66), (1.67) получаем, что справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t \partial t} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial t \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t \partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

Итак, из результатов шагов 1–9 вытекает промежуточная

**Лемма 1.1.** Если  $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$  при  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ , то потенциал  $U(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+\alpha)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ .

**Шаг 10:**  $U(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ .

Из теоремы 8 для каждого  $t \in [0, T]$  и  $\alpha \in (0, 1)$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned}U(x, t) &\in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3), \\ \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t} \rho(y, \tau) dy d\tau \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3).\end{aligned}\quad (1.68)$$

В силу результата леммы 1.1 справедливо следующее равенство:

$$U(x, t_2) - U(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} dt \quad \text{для всех} \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (1.69)$$

Из (1.69) получаем неравенство

$$|U(x, t_2) - U(x, t_1)|_{2+\alpha} \leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} dt \quad \text{для всех} \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \quad (1.70)$$

причем из (3.76) справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} \leq b_1(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha,$$

из которой и из (1.70) получаем неравенство

$$|U(x, t_2) - U(x, t_1)|_{2+\alpha} \leq b_1(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha |t_2 - t_1| \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_2 - t_1| \rightarrow +0.$$

Следовательно,

$$U(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

**Шаг 11:**  $U(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ .

Заметим, что справедливо равенство (1.34), которое можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = W(x, t) + U_2(x, t), \quad (1.71)$$

$$W(x, t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \rho(y, t) dy, \quad (1.72)$$

$$U_2(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^2} \rho(y, \tau) dy d\tau.$$



Заметим, что фактически точно так же, как это было сделано на шагах 1–10, можно доказать, что

$$W(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+\alpha)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (1.73)$$

В силу результата теоремы 9 имеет место оценка следующего вида:

$$\sup_{t \in [0, T]} |W(x, t)|_{2+\alpha} \leq b_2 \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha, \quad (1.74)$$

а в силу результата теоремы 8 справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} |U_2(x, t)|_{2+\alpha} \leq b_3(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha. \quad (1.75)$$

Из оценок (1.74) и (1.75), а также леммы 1.1 с учетом (1.71) получаем, что

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T]. \quad (1.76)$$

Наконец, из результата леммы 1.1 вытекает равенство

$$\frac{\partial U(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t_1)}{\partial t} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial \tau^2} d\tau$$

для всех  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ , из которого с учетом (1.68) и (1.76) получаем неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial U(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t_1)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{2+\alpha} d\tau \leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} |t_2 - t_1| \leq \\ &\leq b_4(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha |t_2 - t_1| \rightarrow +0 \end{aligned}$$

при  $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$ . Следовательно,

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Докажем, что

$$\frac{dU(x, t)}{dt} = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}, \quad (1.77)$$

где символом  $dU/dt$  мы обозначили сильную производную по времени в смысле банахова пространства  $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ . Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left| \frac{U(x, t+h) - U(x, t)}{h} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} &= \left| \frac{U(x, t+h) - U(x, t)}{h} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \left| \frac{U_{x_j}(x, t+h) - U_{x_j}(x, t)}{h} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{U_{x_j x_k}(x, t+h) - U_{x_j x_k}(x, t)}{h} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha \leq \\ &\leq \left| \frac{\partial U(x, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^2 U(x, t^{**})}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \\ &+ \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial^3 U(x, t^{***})}{\partial t \partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha \leq \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial U(x, s)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha = \\ &= \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial U(x, s)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x_j \partial t} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_j \partial t} \right|_0 + \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$+ \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \sup_{s \in [t, t+h]} \left| \frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha = I_1 + I_2 + I_3,$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями, которые справедливы в силу результата леммы 1.1. В силу этой же леммы справедливы предельные свойства

$$I_1 \rightarrow 0, \quad I_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow +0. \quad (1.79)$$

Заметим, что в силу результата леммы 1.1 и теоремы 8 справедливо равенство

$$\frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \int_{[s, t]} \frac{\partial^4 U(x, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial \tau^2} d\tau, \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t}, \quad \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3) \quad \text{для любого} \quad t \in [0, T]. \quad (1.81)$$

Поэтому из (1.80) с учетом (1.81) вытекает оценка

$$\left| \frac{\partial^3 U(x, s)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right|_\alpha \leq \int_{[s, t]} \left| \frac{\partial^4 U(x, \tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial \tau^2} \right|_\alpha d\tau \leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_\alpha |t - s| \leq b_5(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha |t - s|,$$

из которой вытекает, что

$$I_3 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow +0. \quad (1.82)$$

Таким образом, из (1.78) с учетом (1.79) и (1.82) приходим к выводу о том, что

$$\left| \frac{U(x, t+h) - U(x, t)}{h} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow +0.$$

Следовательно, доказано (1.77), и поэтому вместе с результатом шага 10 приходим к выводу, что

$$U(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1).$$

**Шаг 12:**  $U(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ .

Заметим, что справедливо равенство (1.71). При этом в силу оценки (3.77) и соотношения (1.73) имеют место следующие соотношения:

$$W(x, t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T], \quad \alpha \in (0, 1), \\ |W(x, t_2) - W(x, t_1)|_{2+\alpha} \leq b_2(T) |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_\alpha \rightarrow +0 \quad (1.83)$$

при  $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$  для всех  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , и поэтому

$$W(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Теперь рассмотрим потенциал  $U_2(x, t)$ , определенный равенством (1.72). Точно так же, как при доказательстве равенства (1.71) на шаге 5, используя результат леммы 5.1 [1], можно доказать поточечное равенство

$$\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1, \beta_2}(x, y, t - \tau)}{\partial t^3} \rho(y, \tau) dy d\tau.$$

Теперь, используя оценки (6.7)–(6.11) из [1], можно доказать, что

$$\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b^{(2+0)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (1.84)$$

На самом деле можно доказать, что

$$\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b^{(2+1)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]), \quad (1.85)$$

но для наших целей вполне достаточно соотношения (1.84). Кроме того, в силу результата теоремы 8 имеет место соотношение

$$\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T]. \quad (1.86)$$

Итак, с учетом (1.83)–(1.86) получаем из равенства (1.71) выражение

$$\frac{\partial^2 U(x, t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t_1)}{\partial t^2} = W(x, t_2) - W(x, t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} dt, \quad (1.87)$$

причем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 U(x, t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t_1)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} &\leq |W(x, t_2) - W(x, t_1)|_{2+\alpha} + \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} dt, \\ \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} \right|_{2+\alpha} &\leq b_3(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Таким образом, из (1.87), (1.88) вытекает оценка

$$\left| \frac{\partial^2 U(x, t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t_1)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} \leq b_4(T) \left( |\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)|_\alpha + \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_\alpha |t_2 - t_1| \right) \rightarrow +0$$

при  $|t_2 - t_1| \rightarrow +0$  для любых  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ . Следовательно,

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Учитывая, что на предыдущем шаге нами было доказано, что

$$\frac{dU(x, t)}{dt} = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t},$$

то теперь наша задача доказать, что в смысле банахова пространства  $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$  справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}.$$

Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{U_t(x, t+h) - U_t(x, t)}{h} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_{2+\alpha} = \left| \frac{U_t(x, t+h) - U_t(x, t)}{h} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_0 + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \left| \frac{U_{x_j t}(x, t+h) - U_{x_j t}(x, t)}{h} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{U_{x_j x_k t}(x, t+h) - U_{x_j x_k t}(x, t)}{h} - \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_\alpha = \\ &= \left| \frac{\partial^2 U(x, t^*)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^3 U(x, t^{**})}{\partial t \partial x_j \partial t} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial^4 U(x, t^{***})}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_\alpha = \\ &= \left| \frac{\partial^2 U(x, t^*)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \right|_0 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^3 U(x, t^{**})}{\partial x_j \partial t^2} - \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x_j \partial t^2} \right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial^4 U(x, t^{***})}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} - \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \right|_\alpha = \\ &= J_1 + J_2 + J_3, \quad t^*, t^{**}, t^{***} \in [t, t+h], \end{aligned}$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями, поскольку в силу леммы 1.1 имеем  $U(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ . Далее, рассуждая точно так же, как на шаге 11, в силу (1.85), (1.86) и (1.88) можно доказать, что

$$J_1, J_2, J_3 \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow +0.$$

Таким образом, в силу результатов шагов 10–12 справедливо основное утверждение настоящей теоремы

$$U(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Теорема доказана полностью.

Справедлива следующая

**Теорема 2.** Если  $\mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$  при  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ , то для любого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  имеем

$$V_k(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)),$$

где потенциал  $V_k(x, t)$  определен равенством (1.2).

**Доказательство.** Утверждение фактически доказано при доказательстве теоремы 1.

Введем следующие потенциалы:

$$U_0(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \rho_0(y, \tau) dy d\tau, \quad (1.89)$$

$$V_{00}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \mu_0(y) dy,$$

$$V_{01}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t} \mu_1(y) dy, \quad (1.90)$$

где

$$\rho_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha((1 + |x|^2)^{\gamma/2}; \mathbb{R}^3)), \quad (1.91)$$

$$\mu_0(x) \in \mathbb{C}^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3), \quad (1.92)$$

$$\mu_0(x) \in \mathbb{C}^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3)$$

при  $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ . Заметим, что потенциалы (1.89), (1.90) связаны с потенциалами (1.1) и (1.2) следующим образом:

$$U_0(x, t) = \frac{U(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \rho(x, t) = (1 + |x|^2)^{\gamma/2} \rho_0(x, t), \quad (1.93)$$

$$V_{00}(x, t) = \frac{V_0(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \mu_0(x),$$

$$V_{01}(x, t) = \frac{V_1(x, t)}{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \mu(x) = (1 + |x|^2)^{\beta_3/2} \mu_1(x). \quad (1.94)$$

Справедлива следующая

**Теорема 3.** Если выполнены соотношения (1.91), (1.92), то при  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$  справедливы соотношения

$$U_0(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbb{C}_b^{(2+2)}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

$$V_{00}(x, t), V_{01}(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbb{C}_b^{(2+2)}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T]).$$

**Доказательство.** Теорема является следствием равенств (1.93), (1.94) и теорем 1, 2.

Справедлива следующая

**Лемма 1.2.** Если  $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ , то справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial V_{00}[\Delta u_1 - u_1]}{\partial t}(x, 0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} [\Delta u_1(y) - u_1(y)] dy = u_1(x), \quad (1.95)$$

$$V_{01}[\Delta u_0 - u_0](x, 0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} [\Delta u_0(y) - u_0(y)] dy = u_0(x), \quad (1.96)$$

$$U_{00}(x, 0) = \frac{\partial U_{00}}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (1.97)$$

$$V_{00}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial V_{01}}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{для каждого } x \in \mathbb{R}^3.$$

**Доказательство.** Равенства (1.95) и (1.96) являются следствиями теоремы 2 и доказаны, например, в работе [3]. Равенства (1.97) являются следствиями леммы I.5.1.

Наконец, справедлива следующая

**Теорема 4.** Если  $\rho_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ ,  $\mu_0(x), \mu_1(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$  при  $\alpha \in (0, 1)$ , то

$$\mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x, t) = \rho_0(x, t), \quad (1.98)$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x, t) = \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x, t) = 0 \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T],$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x, t) = \Delta_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_j^2}. \quad (1.99)$$

**Доказательство.** Пусть  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  — скобки двойственности между пространством основных функций  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$  и пространством обобщенных функций  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ , а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скобки двойственности между пространством основных функций  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  и пространством обобщенных функций  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ . Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle\langle U_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle \langle\langle \mathcal{E}(x, t) * \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle, \quad \langle\langle V_{00}(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathcal{E}(x, t) * \delta(t) \mu_0(x), \phi(x, t) \rangle\rangle, \\ \langle\langle V_{01}(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathcal{E}'(x, t) * \delta(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle \mathcal{E}(x, t) * \delta'(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle \quad \text{для любой } \phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T)). \end{aligned}$$

Используя известные результаты теории обобщенных функций, можно доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) * \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \\ = \langle\langle \delta(x, t) * \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle \langle\langle \rho_0(x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle, \end{aligned} \quad (1.100)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) * \delta(t) \mu_0(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \\ = \langle\langle \delta(x, t) * \delta(t) \mu_0(x), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \delta(t) \mu_0(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \langle \mu_0(x), \phi(x, 0) \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x, t), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x, t) * \delta'(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = \\ = \langle\langle \delta(x, t) * \delta'(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle &= \langle\langle \delta'(t) \mu_1(x), \phi(x, t) \rangle\rangle = -\langle \mu_1(x), \phi'(x, 0) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.101)$$

для любой функции  $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ . В силу результатов теорем 1 и 3 из равенств (1.100), (1.101) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} [\mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x, t) - \rho_0(x, t)] \phi(x, t) dx dt &= 0, \\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x, t) \phi(x, t) dx dt &= 0, \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x, t) \phi(x, t) dx dt = 0 \end{aligned}$$

для любых  $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ . В силу основной леммы вариационного исчисления приходим к равенствам (1.98), (1.99).

Пусть

$$L(x, t) = U_0[\rho_0](x, t) + V_{00}[\Delta_x u_1(x) - u_1(x)](x, t) + V_{01}[\Delta_x u_0(x) - u_0(x)](x, t).$$

Справедлива следующая основная

**Теорема 5.** Если  $\rho_0(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}^\alpha((1 + |x|^2)^{\gamma/2}; \mathbb{R}^3))$ , при  $\alpha \in (0, 1)$  и

$$\Delta_x u_0(x) - u_0(x) \in \mathbb{C}^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3), \quad (1.102)$$

$$\Delta_x u_1(x) - u_1(x) \in \mathbb{C}^\alpha((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3) \quad (1.103)$$

при  $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ , то справедливо соотношение

$$L(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbb{C}_b^{(2+2)}((1 + |x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[L](x, t) = \rho_0(x, t) \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T],$$

$$L(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial L(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

**Доказательство.** Доказательство основано на теоремах 2, 4 и лемме 1.2.

**Замечание 1.** Заметим, что мы имеем следующие достаточные условия на функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  такие, чтобы были выполнены соотношения (1.102), (1.103):

$$u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3), \quad u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3)$$

при  $\beta_2 \geq 0, \beta_3 \geq 0$  и  $\alpha \in (0, 1)$ . Действительно, пусть, например,  $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}((1 + |x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3)$ . Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \Delta u_0(x) &= \Delta((1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)) - u_0(x) \Delta(1 + |x|^2)^{\beta_2/2} - \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} \frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j} \Delta((1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)) - \\ &\quad - (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x) \frac{\Delta(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} - 2 \sum_{j=1}^3 (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} \frac{\frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} = \\ &= \Delta((1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)) + (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x) \frac{\Delta(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} - \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial[(1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x)]}{\partial x_j} \frac{\frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}} + 2 \sum_{j=1}^3 (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} u_0(x) \frac{\left(\frac{\partial(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}\right)^2}{(1 + |x|^2)^{\beta_2}} \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

## 2. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТИПА ШАУДЕРА

Если  $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ , то справедлива следующая третья формула Грина (см. формулу (9.1) теоремы 3 статьи [1]):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) \mathfrak{M}_{\xi, \tau}[u](\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \mathcal{E}(x - \xi, t) [\Delta_\xi u_1(\xi) - u_1(\xi)] + \frac{\partial \mathcal{E}(x - \xi, t)}{\partial t} [\Delta_\xi u_0(\xi) - u_0(\xi)] \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из результатов шагов 10–12 теоремы 1 для объемного потенциала и теоремы 2 для поверхностных потенциалов из равенства (2.1) вытекает следующая априорная оценка типа Шаудера:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[ \left| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u(x, t) \right|_{2+\alpha} + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u'(x, t) \right|_{2+\alpha} + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} u''(x, t) \right|_{2+\alpha} \right] \leq \\ \leq a(T) \left[ \sup_{t \in [0, T]} \left| (1 + |x|^2)^{\gamma/2} \mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t) \right|_{\alpha} + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_2/2} [\Delta_x u_0(x) - u_0(x)] \right|_{\alpha} + \left| (1 + |x|^2)^{\beta_3/2} [\Delta_x u_1(x) - u_1(x)] \right|_{\alpha} \right],$$

где  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\min\{\gamma, \beta_2, \beta_3\} \geq \beta_1 \geq 0$ .

### 3. ОЦЕНКИ ТИПА ШАУДЕРА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ С ВЕСОМ

В этом разделе мы воспользуемся методами исследований из работы [2] (см. также работу [4]). Рассмотрим следующий потенциал с весом:

$$u(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy,$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \left[ \beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{ij} + \beta_1 (\beta_1 - 2) x_i x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy + \\ &+ \beta_1 x_i (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial x_j} f(y) dy + \beta_1 x_j (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial x_i} f(y) dy + \\ &+ (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Прежде всего нам нужно получить вспомогательные оценки. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} F(x_1 - y, t) - (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} F(x_2 - y, t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left[ (1 + |x_s|^2)^{\beta_1/2} F(x_s - y, t) \right] ds = \\ &= \{x_s = s x_1 + (1 - s) x_2\} = \int_0^1 \sum_{j=1}^3 \beta_1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2-1} x_{sj} (x_{1j} - x_{2j}) F(x_s - y, t) ds + \\ &+ \int_0^1 (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F(x_s - y, t)}{\partial x_{sj}} (x_{1j} - x_{2j}) ds = K_1 + K_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Заметим, что справедлива оценка

$$(1 + |x_s|^2)^{1/2} \leq \sqrt{2} (1 + |x_s - y|^2)^{1/2} (1 + |y|^2)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Для оценки  $K_1$  нужно рассмотреть два случая:  $\beta_1 \in [0, 1]$  и  $\beta_1 > 1$ . Пусть  $\beta_1 \in [0, 1]$ . Тогда справедлива оценка

$$|K_1| \leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| \int_0^1 |F(x_s - y, t)| ds, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Пусть теперь  $\beta_1 > 1$ . С учетом (3.3) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |K_1| &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s|^2)^{(\beta_1-1)/2} |F(x_s - y, t)| ds \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |F(x_s - y, t)| ds, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned}$$

Для  $K_2$  с учетом (3.3) справедлива следующая оценка:

$$|K_2| \leq 2^{\beta_1/2} 3(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} |x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} |D_x F(x_s - y, t)| ds. \quad (3.5)$$

Таким образом, из (3.2) и (3.4), (3.5) вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \left| (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} F(x_1 - y, t) - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} F(x_2 - y, t) \right| \leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| \int_0^1 ds |F(x_s - y, t)| \times \\ & \times \begin{cases} 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2}, & \text{если } \beta_1 > 1; \\ 1, & \text{если } \beta_1 \in [0, 1]; \end{cases} + \\ & + 2^{\beta_1/2} 3(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} |x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} |D_x F(x_s - y, t)| ds, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $x_s = sx_1 + (1-s)x_2$ ,  $s \in [0, 1]$ .

Заметим, что имеет место

**Теорема 6.** Если  $\mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$  при  $\alpha \in (0, 1)$ , и  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ , то

$$|u_4(x, t)|_\alpha \leq D(T) |\mu|_\alpha \quad \text{для всех } t \in [0, T],$$

где  $D = D(T) > 0$  — монотонно неубывающая функция, ограниченная на компактах.

**Доказательство.**

**Шаг 1:** Пусть  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$  такие точки, что

$$\rho := |x_1 - x_2| < 1, \quad x_0 := \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad R_0 > 1.$$

Тогда очевидно, что

$$x_1, x_2 \in \overline{O(x_0, \rho)} \subset O(x_0, R_0).$$

Заметим, что для потенциала

$$u_4(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) f(y) dy,$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1],$$

в силу (4.11), в котором положим  $z = x_0$  и  $R = 2R_0$ , справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} u_4(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) dy + \\ & + \int_{O(x_0, 2R_0)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [f(y) - f(x)] dy + \\ & + (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad x \in O(x_0, 2R_0). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Введем обозначение

$$F_2(x, y, t) := (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial y_i \partial y_j}. \quad (3.8)$$

С учетом представления (3.7) и обозначения (3.8) справедливо следующее равенство (см. лемму 4.4 в работе [2]):

$$u_4(x_1, t) - u_4(x_2, t) = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6, \quad (3.9)$$



$$I_0 := \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} [F_2(x_1, y, t) - F_2(x_2, y, t)] f(y) dy, \quad (3.10)$$

$$I_1 := (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \right] \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad (3.11)$$

$$I_2 := \left[ (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) \right] \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dS_y,$$

$$I_3 := \int_{O(x_0, \rho)} F_2(x_2, y, t) (f(x_2) - f(y)) dy, \quad (3.12)$$

$$I_4 := \int_{O(x_0, \rho)} F_2(x_1, y, t) (f(y) - f(x_1)) dy, \quad (3.13)$$

$$I_5 := (f(x_2) - f(x_1)) \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} F_2(x_2, y, t) dy, \quad (3.14)$$

$$I_6 := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} (F_2(x_2, y, t) - F_2(x_1, y, t)) (f(x_1) - f(y)) dy. \quad (3.15)$$

**Шаг 2:**  $I_0$ . Заметим, что при  $|y - x_0| \geq 2R_0$  справедливы неравенства

$$|x_s - y| \geq |y - x_0| - |x_s - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{1}{2}|y - x_0| = \frac{1}{2}|y - x_0| \geq R_0 > 0, \quad (3.16)$$

$$|x_s - y| \leq |x_s - x_0| + |y - x_0| \leq \frac{1}{2}|y - x_0| + |y - x_0| = \frac{3}{2}|y - x_0|. \quad (3.17)$$

Рассмотрим сначала случай  $\beta_1 \in [0, 1]$ . Тогда с учетом (3.6) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |F_2(x_1, y, t) - F_2(x_2, y, t)| &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right| ds + \\ &+ 2^{\beta_1/2} 3(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} |x_1 - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} \left| D_x \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right| ds \leq \\ &\leq D_1(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \int_0^1 \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |x_s - y|}{|x_s - y|} ds + \\ &+ D_2(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |x_s - y|}{|x_s - y|} ds \leq \\ &\leq D_3(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \frac{\exp(-(1 - \varepsilon))(1/2) |y - x_0|}{|y - x_0|} + \\ &+ D_4(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} (1 + |y - x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |y - x_0|}{|y - x_0|}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $x_s = sx_1 + (1 - s)x_2$  и мы воспользовались оценками (6.11), (10.20) статьи [1]. Теперь получим оценку, аналогичную (3.18) в случае  $\beta_1 > 1$ . Из тех же соображений вытекает следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |F_2(x_1, y, t) - F_2(x_2, y, t)| &\leq D_5(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \times \\ &\times (1 + |y - x_0|^2)^{(\beta_1 - 1)/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |y - x_0|}{|y - x_0|} + D_4(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} \times \\ &\times (1 + |y - x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1 - \varepsilon)) |y - x_0|}{|y - x_0|}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Поэтому из (3.18) и (3.10) получаем при  $\beta_1 \in [0, 1]$  следующую оценку:

$$\begin{aligned} |I_0| &\leq D_3(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| |f(x)|_0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon))(1/2)|y-x_0|}{|y-x_0|} dy + \\ &+ D_4(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left| f(x)(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \right|_0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1+|y-x_0|^2)^{\beta_1/2} \times \\ &\times \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon))|y-x_0|}{|y-x_0|} dy \leq D_6(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из (3.19) и (3.10) получаем при  $\beta_1 > 1$  следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |I_0| &\leq D_5(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left| f(x)(1+|x|^2)^{(\beta_1-1)/2} \right|_0 \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1+|y-x_0|^2)^{(\beta_1-1)/2} \frac{\exp(-(1-\varepsilon))(1/2)|y-x_0|}{|y-x_0|} dy + \\ &+ D_4(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left| f(x)(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \right|_0 \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, 2R_0)} (1+|y-x_0|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon))|y-x_0|}{|y-x_0|} dy \leq D_7(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Таким образом, из (3.20) и (3.21) вытекает единообразная оценка

$$|I_0| \leq D_8(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|. \quad (3.22)$$

**Шаг 3:**  $I_1$ . Справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} = \int_0^1 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial x_{sk} \partial x_j} [x_{1k} - x_{2k}] ds,$$

из которого при  $|y - x_0| = 2R_0$  с учетом неравенств (3.16) и (3.17) вытекает цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \right| &\leq 3|x_1 - x_2| \int_0^1 \left| D_x \frac{\partial \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial y_j} \right| ds \leq \\ &\leq D_9(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \int_0^1 \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|x_s - y|)}{|x_s - y|} ds \leq \\ &\leq D_{10}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y - x_0|)}{|y - x_0|}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

С учетом (3.23) из (3.11) получаем искомую оценку

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left| (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right|_0 D_{10}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y - x_0|)}{|y - x_0|} dS_y \leq D_{11}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|. \end{aligned} \quad (3.24)$$

**Шаг 4:**  $I_2$ . Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq D_{12}(T, R_0, \varepsilon) \left[ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right]_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y - x_0|)}{|y - x_0|} dS_y \leq \\ &\leq D_{13}(T, R_0, \varepsilon) \left[ \frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right]_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \leq D_{14}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, \end{aligned} \quad (3.25)$$

поскольку по условию  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ .

**Шаг 5:**  $I_3$  и  $I_4$ . Получим оценку на интеграл  $I_3$ , поскольку оценка для интеграла  $I_4$  получается заменой  $x_2 \leftrightarrow x_1$ . Выражение (3.12) для интеграла  $I_3$  можно переписать в следующем виде:

$$I_3 = \int_{O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \left[ (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) \right] dy + \\ + \int_{O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) \left[ (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right] dy =: I_{31} + I_{32}.$$

Заметим, что если  $|y - x_0| \leq \rho$ , то

$$|y - x_2| \leq |y - x_0| + |x_2 - x_0| \leq \rho + \frac{\rho}{2} = \frac{3\rho}{2}. \quad (3.26)$$

Поэтому для  $I_{31}$  справедлива следующая оценка:

$$|I_{31}| \leq D_{15}(T, R_0, \varepsilon) \left[ \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right]_{\alpha} \int_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{1}{|y - x_2|^{3-\alpha}} dy \leq D_{16}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}. \quad (3.27)$$

Заметим, что в силу (3.6) справедливы следующие оценки:

$$\left| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 |y - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1], \quad (3.28)$$

$$\left| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |y - x_2| \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \leq \\ \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |y - x_2|, \quad \beta_1 > 1, \quad (3.29)$$

где мы воспользовались следующими соотношениями:

$$|x_s - y| = |sy + (1-s)x_2 - y| = (1-s)|y - x_2| \leq |y - x_2|, \quad s \in [0, 1].$$

Сначала получим оценку для  $I_{32}$  при  $\beta_1 \in [0, 1]$ . Действительно, с учетом (3.26) и (3.28) справедливы следующие неравенства:

$$|I_{32}| \leq D_{17}(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 \int_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{1}{|y - x_2|} dy \leq D_{18}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \quad (3.30)$$

Теперь получим оценку для  $I_{32}$  при  $\beta_1 > 1$ . Действительно, с учетом (3.26) и (3.29) справедливы следующие неравенства:

$$|I_{32}| \leq D_{19}(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 \times \\ \times \int_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{(1 + |y - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2}}{|y - x_2|^2} dy \leq D_{20}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1. \quad (3.31)$$

Таким образом, из (3.27), (3.30) и (3.31) вытекает следующая оценка:

$$|I_3| \leq D_{21}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}. \quad (3.32)$$

В точности таким же образом для  $I_4$  (см. формулу (3.13)) получаем следующую оценку:

$$|I_4| \leq D_{21}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_{\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}. \quad (3.33)$$

**Шаг 6:**  $I_5$ . Выражение (3.14) можно переписать в следующем виде:

$$I_5 = \left[ (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) \right] \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy + \\ + \left[ (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right] f(x_1) \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy =: I_{51} + I_{52}. \quad (3.34)$$

Прежде всего рассмотрим интеграл

$$J := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy.$$

Для  $J$  справедливо равенство

$$J = \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dy - \int_{\partial O(x_0, \rho)} \frac{\partial \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dy := J_1 + J_2. \quad (3.35)$$

Заметим, что при  $|y - x_0| = 2R_0$  справедливы неравенства

$$|y - x_2| \geq |y - x_0| - |x_2 - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \geq |y - x_0| - \frac{1}{4}|y - x_0| = \frac{3}{4}|y - x_0|. \quad (3.36)$$

В силу (3.36) получаем следующую оценку для  $J_1$ :

$$|J_1| \leq D_{22}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\partial O(x_0, 2R_0)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)(3/4)|y - x_0|)}{|y - x_0|} dS_y \leq D_{23}(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \quad (3.37)$$

С учетом (3.36) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|J_2| \leq D_{24}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\partial O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_2|^2} dS_y \leq D_{25}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\partial O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^2} dS_y = D_{26}(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \quad (3.38)$$

Таким образом, из (3.35) с учетом (3.37) и (3.38) вытекает оценка

$$|J| \leq D_{27}(T, R_0, \varepsilon) < +\infty. \quad (3.39)$$

Теперь мы получим оценку для  $I_{51}$ , определенного равенством (3.34). Действительно, с учетом оценки (3.39) справедлива следующая оценка:

$$|I_{51}| \leq D_{27}(T, R_0, \varepsilon) \left[ \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right]_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \leq D_{28}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \quad (3.40)$$

Для оценки  $I_{52}$ , определенного равенством (3.34), необходимо опять отдельно рассмотреть случаи  $\beta_1 \in [0, 1]$  и  $\beta_1 > 1$ . Справедливы следующие оценки:

$$\left| (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1], \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \left| (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} \right| &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} \int_0^1 (1 + |x_s - x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \leq \\ &\leq 3\beta_1 |x_1 - x_2| 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x_1 - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2}, \quad \beta_1 > 1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Пусть сначала  $\beta_1 \in [0, 1]$ . Тогда с учетом (3.41) и (3.39) получаем оценку

$$|I_{52}| \leq D_{29}(T, R_0, \varepsilon) |f(x)|_0 |x_1 - x_2| \leq D_{30}(T, R_0, \varepsilon) |\mu(x)|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \quad (3.43)$$

Пусть теперь  $\beta_1 > 1$ . Тогда с учетом (3.42) и (3.39) получаем оценку

$$|I_{52}| \leq D_{31}(T, R_0, \varepsilon) \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_\alpha |x_1 - x_2| \leq D_{32}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1. \quad (3.44)$$

Таким образом, из (3.34), (3.40), (3.43) и (3.44) вытекает искомая оценка

$$|I_5| \leq D_{33}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \quad (3.45)$$

**Шаг 7:**  $I_6$ . Интеграл  $I_6$ , определенный равенством (3.15), можно представить в следующем виде:

$$I_6 = I_{61} + I_{62} + I_{63}, \quad (3.46)$$

$$I_{61} := \left[ (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [f(x_1) - f(y)] dy,$$

$$I_{62} := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right] \left[ (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) \right] dy, \quad (3.47)$$

$$I_{63} := \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right] \left[ (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] f(y) dy. \quad (3.48)$$

Заметим, что  $|y - x_0| \geq \rho$  и справедливы неравенства

$$|x_1 - y| \leq |y - x_0| + |x_1 - x_0| \leq |y - x_0| + \frac{\rho}{2} \leq \frac{3}{2}|y - x_0|, \quad (3.49)$$

$$|x_2 - y| \geq |y - x_0| - |x_2 - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \geq \frac{1}{2}|y - x_0|. \quad (3.50)$$

Для того чтобы оценить интеграл  $I_{61}$ , нужно рассмотреть опять два случая:  $\beta_1 \in [0, 1]$  и  $\beta_1 > 1$ . Рассмотрим сначала случай  $\beta_1 \in [0, 1]$ . Тогда с учетом (3.49) и (3.50) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |I_{61}| &\leq D_{34}(T, R_0, \epsilon) |x_2 - x_1| [f(x)]_\alpha \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{|x_1 - y|^\alpha}{|x_2 - y|^3} dy \leq D_{35}(T, R_0, \epsilon) |x_2 - x_1| [f(x)]_\alpha \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^{3-\alpha}} dy \leq D_{36}(T, R_0, \epsilon) |\mu(x)|_\alpha |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Теперь рассмотрим случай  $\beta_1 > 1$ . Справедливо равенство

$$\begin{aligned} I_{61} &:= \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \left[ (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] f(x_1) dy - \\ &- \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \left[ (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right] f(y) dy := I_{611} + I_{612}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Сначала получим оценку для интеграла  $I_{611}$ . С этой целью заметим, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left| (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right| &\leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| (1 + |x_2 - x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} \leq \\ &\leq 3\beta_1 2^{\beta_1-1} |x_1 - x_2| (1 + |x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Таким образом, из (3.52) с учетом (3.53) и (3.50) получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_{611}| &\leq D_{37}(T, R_0, \epsilon) \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq D_{37}(T, R_0, \epsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Теперь получим оценку для интеграла  $I_{612}$ . С этой целью заметим, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right| &\leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} \int_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \leq \\ &\leq 3\beta_1 2^{\beta_1-1} (1 + (1/2 + 2R_0)^2)^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - x_2| (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Таким образом, из (3.52) с учетом (3.50) и (3.55) получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_{612}| &\leq D_{38}(T, R_0, \epsilon) \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 |x_1 - x_2| \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq \\ &\leq D_{39}(T, R_0, \epsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Таким образом, из (3.51), (3.52), (3.54) и (3.56) приходим к оценке

$$|I_{61}| \leq D_{40}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2| \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_1 \in [0, 1]; \\ 1 + |\ln |x_1 - x_2||, & \text{если } \beta_1 > 1. \end{cases} \quad (3.57)$$

Для того чтобы оценить интегралы  $I_{62}$  и  $I_{63}$ , определенные равенствами (3.47) и (3.48), нам нужно сделать предварительные оценки. Справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} = \int_0^1 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 \mathcal{E}(x_s - y, t)}{\partial x_{sk} \partial y_i \partial y_j} [x_{2k} - x_{1k}] ds,$$

из которого при  $2R_0 \geq |y - x_0| \geq \rho$  вытекает стандартным образом следующая оценка:

$$\left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_1 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \right| \leq D_{41}(T, R_0, \varepsilon) \frac{1}{|y - x_0|^4} |x_1 - x_2|. \quad (3.58)$$

Из (3.47) с учетом (3.58) вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} |I_{62}| &\leq D_{42}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left[ \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}} \right]_\alpha \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{|y - x_1|^\alpha}{|y - x_0|^4} dy \leq \\ &\leq D_{43}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| |\mu|_\alpha \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^{4-\alpha}} dy \leq D_{44}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где мы воспользовались неравенством

$$|y - x_1| \leq \frac{3}{2} |y - x_0|.$$

Для того чтобы оценить интеграл  $I_{63}$ , нужно опять рассмотреть два случая:  $\beta_1 \in [0, 1]$  и  $\beta_1 > 1$ . В случае  $\beta_1 \in [0, 1]$  из (3.48) и (3.59) вытекает оценка

$$\begin{aligned} |I_{63}| &\leq D_{45}(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 |x_1 - x_2| \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{|y - x_1|}{|y - x_0|^4} dy \leq D_{46}(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 |x_1 - x_2| \times \\ &\times \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq D_{47}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Рассмотрим теперь случай  $\beta_1 > 1$ . Поскольку

$$|x_1 - y| \leq |x_1 - x_0| + |y - x_0| \leq \frac{1}{2} + 2R_0,$$

то справедлива оценка

$$\left| (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} \right| \leq 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} \left( 1 + (1/2 + 2R_0)^2 \right)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |x_1 - y|. \quad (3.61)$$

Из (3.48) с учетом (3.58) и (3.61) получим оценку

$$\begin{aligned} |I_{63}| &\leq D_{48}(T, R_0, \varepsilon) |x_1 - x_2| \left| \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}} \right|_0 \int_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0, \rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3} dy \leq \\ &\leq D_{49}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Таким образом, из (3.46), (3.57), (3.59), (3.60) и (3.62) получаем оценку

$$|I_6| \leq D_{50}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha \left( |x_1 - x_2| [1 + |\ln |x_1 - x_2||] + |x_1 - x_2|^\alpha \right). \quad (3.63)$$

Итак, из (3.9) с учетом (3.22), (3.24), (3.25), (3.32), (3.33), (3.45) и (3.63) получаем оценку

$$|u_4(x_1, t) - u_4(x_2, t)| \leq D_{51}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (3.64)$$

при  $|x_1 - x_2| < 1$ .

**Шаг 8:**  $|u_4|_0$ . Теперь наша задача оценить  $|u_4|_0$ . В силу равенства (4.8) справедливо следующее выражение для произвольного  $\delta > 0$ :

$$\begin{aligned} u_4(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) f(y) dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, \delta)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\ & + \int_{O(x, \delta)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \mathcal{E}(x-y, t) [(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x)] dy + \\ & + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(x, \delta)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dS_y = J_2 + J_{11} + J_{12} + J_{13}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Оценим интеграл  $J_2$ . Сначала предположим, что  $\beta_1 \in [0, 1]$ . Тогда выполнено неравенство

$$|(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}| \leq 3\beta_1 |x-y|. \quad (3.66)$$

Если же  $\beta_1 > 1$ , то справедливо неравенство

$$|(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}| \leq 3\beta_1 |x-y| 2^{(\beta_1-1)/2} (1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}. \quad (3.67)$$

С учетом оценок (3.66) и (3.67) мы приходим к следующей цепочке соотношений:

$$|J_2| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy \right| \leq \int_{O(x, R_0)} \frac{D_{52}(T, R_0, \varepsilon)}{|x-y|^2} |f(y)| dy + \quad (3.68)$$

$$+ D_{53}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \exp(-(1-\varepsilon)|x-y|) |f(y)| dy \leq D_{54}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad \beta_1 \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} |J_2| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy \right| \leq \\ &\leq D_{55}(T, R_0, \varepsilon) \int_{O(x, R_0)} \frac{(1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2}}{|x-y|^2} (1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |f(y)| dy + \\ &+ D_{56}(T, R_0, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \exp(-(1-\varepsilon)|x-y|) (1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2} \times \\ &\times (1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |f(y)| dy \leq D_{57}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad \beta_1 > 1, \end{aligned} \quad (3.69)$$

поскольку по условию  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ .

Справедливы следующие оценки:

$$|J_{11}| \leq D_{58}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x, R_0)} \frac{1}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1+1)/2}} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)}{|x-y|} dy \leq D_{59}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad (3.70)$$

$$|J_{12}| \leq D_{60}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha \int_{O(x, R_0)} \frac{1}{|x-y|^{3-\alpha}} dy \leq D_{61}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0, \quad |J_{13}| \leq D_{62}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0. \quad (3.71)$$

Из (3.65) с учетом оценок (3.70), (3.71) приходим к оценке

$$|J_1| \leq D_{63}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha. \quad (3.72)$$

Таким образом, из (3.68), (3.69) и (3.72) вытекает следующая оценка:

$$|u_4|_0 \leq D_{64}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha, \quad t \in [0, T]. \quad (3.73)$$

**Шаг 9:** Заметим, что если  $|x_1 - x_2| \geq 1$ , то в силу (3.73) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |u_4(x_1, t) - u_4(x_2, t)|_0 &\leq 2|u_4(x, t)|_0 \leq 2|u_4(x, t)|_0 |x_1 - x_2|^\alpha \leq \\ &\leq D_{65}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \quad \text{при} \quad |x_1 - x_2| \geq 1. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Таким образом, из (3.64), (3.74) мы получаем искомую оценку

$$|u_4(x, t)|_\alpha \leq D(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha, \quad \mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad t \in [0, T], \quad \alpha \in (0, 1).$$

Справедлива следующая

**Лемма 3.1.** Если  $\mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$  при  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$ , то справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |u_1(x, t)|_\alpha &\leq a(T) |\mu|_0 \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T], \\ |u_2(x, t)|_\alpha &\leq a(T) |\mu|_\alpha \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T], \\ |u_3(x, t)|_\alpha &\leq a(T) |\mu|_\alpha \quad \text{для каждого} \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Аналогичное утверждение доказано в [5].

Несложно доказывается следующая

**Лемма 3.2.** Пусть  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$  и  $\mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$  при  $\alpha \in (0, 1)$ . Тогда справедливы следующие оценки:

$$|u(x, t)|_0 \leq d_1(T) |\mu|_0, \quad \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right|_0 \leq d_2(T) |\mu|_0, \quad j = 1, 2, 3,$$

для всех  $t \in [0, T]$ , где

$$u(x, t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy.$$

Из результатов теоремы 6 и лемм 3.1, 3.2 вытекает следующая основная

**Теорема 7.** Для любой функции  $\mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$  при  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$  справедлива оценка типа Шаудера

$$\begin{aligned} |u(x, t)|_{2+\alpha} &\leq d(T) |\mu|_\alpha, \quad t \in [0, T], \\ u(x, t) &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y, t) \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned} \quad (3.75)$$

а функция  $d = d(T) > 0$  является монотонно неубывающей и ограниченной на компактах.

Отметим, что в силу свойств гладкости фундаментального решения  $\mathcal{E}(x, t)$ , определенного равенством (5.6) [1], справедлива

**Теорема 8.** Для любой функции  $\mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$  при  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$  справедлива оценка типа Шаудера

$$\begin{aligned} |u_k(x, t)|_{2+\alpha} &\leq d_k(T) |\mu|_\alpha, \quad t \in [0, T], \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ u_k(x, t) &= (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^k \mathcal{E}(x - y, t)}{\partial t^k} \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \end{aligned} \quad (3.76)$$

а функция  $d_k = d_k(T) > 0$  является монотонно неубывающей и ограниченной на компактах.

Наконец, рассмотрим следующий потенциал с весом

$$h(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \exp(-|x - y|)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2} 4\pi|x - y|} \mu(y) dy.$$



Для него справедлива следующая

**Теорема 9.** Для любой функции  $\mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$  при  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0$  справедлива оценка типа Шаудера

$$|h(x)|_{2+\alpha} \leq d|\mu|_\alpha, \quad d > 0.$$

#### 4. ГЛАДКОСТЬ ВЕСОВОГО ПОТЕНЦИАЛА

В этом разделе мы воспользуемся методами исследований из работы [2].

Пусть  $\eta(s) \in \mathbb{C}_b^{(1)}[0, +\infty)$  – функция следующего вида:

$$0 \leq \eta(s) \leq 1, \quad 0 \leq \eta'(s) \leq 2,$$

причем

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq s \leq 1; \\ 1, & \text{если } s \geq 2, \end{cases} \quad \eta_\epsilon := \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right).$$

Теперь определим следующие функции:

$$\begin{aligned} u(x, t) := & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) f(y) dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\ & + \int_{O(z, R)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \mathcal{E}(x-y, t) [(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x)] dy + \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad O(x, 2\epsilon) \subset O(z, R),$$

$$w(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t) f(y) dy, \quad v(x, t) := \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_j} = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} f(y) dy, \quad (4.2)$$

$$v_\epsilon(x, t) := - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} f(y) dy, \quad (4.3)$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1].$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\epsilon(x, t)}{\partial x_i} &= (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \eta_\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial x_j} \right) f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \eta_\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \right) [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \eta_\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \right) (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \eta_\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \right) [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \eta_\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \right) (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{O(z,R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \eta_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \right) \left[ (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy + \\
& + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z,R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \eta_\varepsilon \cos(n_y, e_i) dy.
\end{aligned}$$

Пусть  $0 < 2\varepsilon < R$ . Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned}
u(x,t) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\varepsilon(x,t)}{\partial x_i} &= K_1 + K_2 + K_3 + K_4, \\
K_1 &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( [1 - \eta_\varepsilon] \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \right) [(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y) dy, \\
K_2 &:= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z,R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( [1 - \eta_\varepsilon] \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \right) (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy, \\
K_3 &:= \int_{O(z,R)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( [1 - \eta_\varepsilon] \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} \right) \left[ (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy, \\
K_4 &:= (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z,R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_j} [1 - \eta_\varepsilon] \cos(n_y, e_i) dy.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Поскольку  $2\varepsilon < R$ , то сразу же имеем

$$K_2 = K_4 = 0. \tag{4.5}$$

Теперь нужно рассмотреть интегралы  $K_1$  и  $K_3$  отдельно при  $\beta_1 \in [0, 1]$  и  $\beta_1 > 1$ . Несложно доказать (см., например, [2] и [5]), что оба интеграла стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Итак, из (4.4), (4.5) вытекает, что

$$\sup_{x \in O(0,R)} \left| u(x,t) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\varepsilon(x,t)}{\partial x_i} \right| \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0 \tag{4.6}$$

для любого  $R > 0$ . При этом из (4.2) и (4.3) вытекает, что

$$\sup_{x \in O(0,R)} \left| v_\varepsilon(x,t) - \frac{\partial w(x,t)}{\partial x_j} \right| \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0 \tag{4.7}$$

для любого  $R > 0$ . Из (4.6) и (4.7) вытекает, что

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = u(x,t) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, T], \tag{4.8}$$

где  $w(x,t)$  определена равенством (4.2), а  $u(x,t)$  — равенством (4.1). Заметим, что в силу оценок (6.7)–(6.12) из [1] и свойств гладкости (6.6) из [1] фундаментального решения  $\mathcal{E}(x,t)$  справедливо следующее равенство:

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 w_k(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = u_k(x,t) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, T], \tag{4.9}$$

где

$$\begin{aligned}
w_k(x,t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{k+\mathcal{E}} \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial t^k} f(y) dy, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\
u_k(x,t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{2+k+\mathcal{E}} \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) f(y) dy +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) dy + \\
& + \int_{O(z, R)} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} \mathcal{E}(x-y, t) \left[ (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \right] dy + \\
& + (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial^{1+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j \partial t^k} \cos(n_y, e_i) dS_y, \\
& f(x) = \frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \mu(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0, 1).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Заметим, что представление (4.1) удобно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) dy + \\
& + \int_{O(z, R)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j} [f(y) - f(x)] dy + \\
& + (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j} \cos(n_y, e_i) dS_y, \quad x \in O(z, R),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

а представление (4.10) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_k(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z, R)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} f(y) dy + \\
& + \int_{O(z, R)} (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^{2+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial t^k} [f(y) - f(x)] dy + \\
& + (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int_{\partial O(z, R)} \frac{\partial^{1+k} \mathcal{E}(x-y, t)}{\partial y_j \partial t^k} \cos(n_y, e_i) dS_y, \quad x \in O(z, R), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 10. С. 1639–1661.
2. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. С. 464.
3. Корпусов М.О., Яблочкин Д.К. Теория потенциала и оценка Шаудера в гёльдеровских пространствах для 3 + 1-мерного уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 8. С. 1289–1314.
4. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. С. 288.
5. Korpusov M.O., Matveeva A.K. On critical exponents for weak solutions to the Cauchy problem for one nonlinear equation with gradient nonlinearity // MMAS. 2022. V. 46. № 2. P. 1574–1630.