ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 5, с. 795–802

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.956

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ[1)]

© 2023 г. А. М. Денисов[1,*]

[1] *119999 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия*

**e-mail: den@cs.msu.ru*

Поступила в редакцию 10.09.2022 г.
Переработанный вариант 10.09.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением рассматривается обратная задача, состоящая в определении граничного условия по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Доказано, что приближенное решение обратной задачи может быть получено на основе использования конечного числа членов разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру. Библ. 11.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение теплопроводности, сингулярное возмущение, обратная задача, приближенное решение.

DOI: 10.31857/S0044466923050095, **EDN:** PKHZWI

В многообразии обратных задач для уравнений в частных производных можно выделить класс, в котором обратные задачи рассматриваются для сингулярно возмущенных уравнений. Методы приближенного решения обратных задач, основанные на замене исходного дифференциального уравнения сингулярно возмущенным, были предложены в [1] и получили затем развитие в [2–6] и ряде других работ. Обратные задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений исследовались в [7–11].

В работе [11] для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением были предложены методы приближенного решения обратных задач, основанные на использовании разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру. Эта статья посвящена применению этого подхода для приближенного решения обратной задачи для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением.

Рассмотрим начально-краевую задачу для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением

$$\varepsilon^2 u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \varepsilon^2 \int\limits_0^t K(t,\tau)u(x,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in Q_{t_0}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{2}$$

$$u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le t_0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4}$$

где $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 < 1$, $Q_{t_0} = \{(x,t) : 0 < x < \pi,\ 0 < t \le t_0\}$.

Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(4) от параметра ε, будем обозначать его через $u(x,t;\varepsilon)$.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект 075-15-2022-284).

Предположим, что функция $\mu \in C^2[0,T]$, $\mu(0)=0$, а $K(t,\tau) \in C(\Delta_{t_0})$, где $\Delta_{t_0} = \{(t,\tau),\ 0 \le \tau \le t \le t_0\}$. Из метода разделения переменных следует формула для решения задачи (1)–(4)

$$u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} T_n(t;\varepsilon) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right), \tag{5}$$

где функции $T_n(t;\varepsilon)$ являются решениями задачи Коши для интегродифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 T_n'(t;\varepsilon) = -\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 T_n(t;\varepsilon) + \varepsilon^2 \int_0^t K(t,\tau) T_n(\tau;\varepsilon) d\tau - \varepsilon^2 \left[\mu'(t) - \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau) d\tau\right], \quad 0 \le t \le t_0, \tag{6}$$

$$T_n(0,\varepsilon) = 0. \tag{7}$$

Интегрируя уравнение (6) с начальным условием (7), получим, что $T_n(t;\varepsilon)$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$T_n(t;\varepsilon) = \int_0^t B(t,\tau;\varepsilon,n) T_n(\tau;\varepsilon) d\tau + \psi(t;\varepsilon,n), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{8}$$

где

$$B(t,\tau;\varepsilon,n) = \int_\tau^t \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4\varepsilon^2}(t-\theta)\right) K(\theta,\tau) d\theta, \tag{9}$$

$$\psi(t;\varepsilon,n) = -\int_0^t \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4\varepsilon^2}(t-\tau)\right) \left[\mu'(\tau) - \int_0^\tau K(\tau,\theta)\mu(\theta) d\theta\right] d\tau. \tag{10}$$

Сформулируем обратную задачу . Пусть функция $K(t,\tau)$ и число ε заданы, а функция $\mu(t)$ неизвестна. Требуется определить $\mu(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(4)

$$u(x_0,t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{11}$$

где x_0 – заданное число, $x_0 \in (0,\pi]$, а $g(t;\varepsilon)$ – заданная функция.

Из формулы (5) и уравнения (8) следует, что можно получить разложение $u(x,t;\varepsilon)$ по малому параметру ε.

Рассмотрим вопрос о возможности построения приближенного решения обратной задачи на основе использования этого разложения.

Так как функция $T_n(t;\varepsilon)$ является решением уравнения (8), то для всех $n = 0,1,2,\ldots$ справедлива оценка

$$\max_{[0,t_0]} \left|T_n(t;\varepsilon)\right| \le c_1 \frac{\varepsilon^2}{(2n+1)^2}.$$

Здесь и далее через c_i обозначаются постоянные, не зависящие от ε и n.

Из предыдущего неравенства и формулы (5) следует, что для $u(x,t;\varepsilon)$ справедливо представление

$$u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) + \varepsilon^2 w_0(x,t;\varepsilon), \tag{12}$$

где

$$\max_{Q_{t_0}} \left|w_0(x,t;\varepsilon)\right| \le c_2.$$

Определив приближенное решение обратной задачи $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$ следующим образом $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon)$ и использовав представление (12), имеем

$$\max_{[0,t_0]}|\mu(t) - \tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)| = \varepsilon^2 \max_{[0,t_0]}|w_0(x_0,t;\varepsilon)| \le c_2\varepsilon^2.$$

Таким образом, при малых значениях ε функцию $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$ можно считать приближенным решением обратной задачи.

Рассмотрим вариант построения приближенного решения обратной задачи, использующий более высокие члены разложения $u(x,t;\varepsilon)$ по малому параметру.

Введем функцию $f_1(x) = x^2/2 - \pi x$.

Теорема 1. *Пусть функции $K(t,\tau)$, $\mu(t)$ удовлетворяют следующим условиям*:

$$K(t,\tau), K_t(t,\tau) \in C(\Delta_{t_0}), \quad \|K\|_{C(\Delta_{t_0})} t_0 |f_1(x_0)| \varepsilon_0^2 < 1, \tag{13}$$

$\mu \in C^2[0,t_0]$, $\mu(0) = \mu'(0) = 0$, $\mu(t_0) = m_0$, *где m_0 — заданное число. Тогда, если функция $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ является решением задачи*

$$\varepsilon^2 f_1(x_0)\tilde{\mu}_1'(t;\varepsilon) + \tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) - \varepsilon^2 f_1(x_0)\int_0^t K(t,\tau)\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{14}$$

$$\tilde{\mu}_1(t_0;\varepsilon) = m_0, \tag{15}$$

то

$$\max_{[0,t_0]}|\mu(t) - \tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)| \le c_3\varepsilon^4. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим функции $T_n(t;\varepsilon)$, являющиеся решением интегрального уравнения (8). Используя резольвенту $R(t,\tau;\varepsilon,n)$ ядра $B(t,\tau;\varepsilon,n)$, имеем

$$T_n(t;\varepsilon) = \psi(t;\varepsilon,n) + \int_0^t R(t,\tau;\varepsilon,n)\psi(\tau;\varepsilon,n)d\tau, \quad 0 \le t \le t_0. \tag{17}$$

Итегрируя по частям интеграл в формуле (9), получим следующую оценку:

$$\max_{\Delta_{t_0}}|B(t,\tau;\varepsilon,n)| \le c_4\frac{\varepsilon^2}{(2n+1)^2},$$

из которой следует, что

$$\max_{\Delta_{t_0}}|R(t,\tau;\varepsilon,n)| \le c_5\frac{\varepsilon^2}{(2n+1)^2}. \tag{18}$$

Преобразуя формулу (10), имеем

$$\psi(t;\varepsilon,n) = -\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2}\left[\mu'(t) - \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right] + w_1(t;\varepsilon,n), \tag{19}$$

где

$$w_1(t;\varepsilon,n) = \frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4\varepsilon^2}(t-\tau)\right)\left[\mu''(\tau) - K(\tau,\tau)\mu(\tau) - \int_0^\tau K_\tau(\tau,\theta)\mu(\theta)d\theta\right]d\tau, \tag{20}$$

а

$$\max_{[0,t_0]}|w_1(t;\varepsilon,n)| \le c_6\frac{\varepsilon^4}{(2n+1)^4}. \tag{21}$$

Из формул (17), (19), (20) и оценок (18), (21) следует, что

$$T_n(t;\varepsilon) = -\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2}\left[\mu'(t) - \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right] + w_2(t;\varepsilon,n), \tag{22}$$

где

$$\max_{[0,t_0]}|w_2(t;\varepsilon,n)| \le c_7\frac{\varepsilon^4}{(2n+1)^4}. \tag{23}$$

Использовав формулы (5), (22), оценку (23) и равенство

$$f_1(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi(2n+1)^3}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right),$$

получим, что для $u(x,t;\varepsilon)$ справедливо представление

$$u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) + \varepsilon^2 f_1(x)\left[\mu'(t) - \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right] + \varepsilon^4 w_3(x,t;\varepsilon), \tag{24}$$

где $\max\limits_{Q_{t_0}}|w_3(x,t;\varepsilon)| \le c_8$.

Положив в равенстве (24) $x = x_0$ и использовав условие (11), имеем

$$\mu(t) + \varepsilon^2 f_1(x_0)\left[\mu'(t) - \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right] = g(t;\varepsilon) - \varepsilon^4 w_3(x_0,t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le t_0. \tag{25}$$

Пусть $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ – решение задачи (14), (15). Рассмотрим функцию $z(t;\varepsilon) = \tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) - \mu(t)$. Из уравнения (14), равенства (25) и условия (15) получаем, что $z(t;\varepsilon)$ является решением задачи

$$z'(t;\varepsilon) + (\varepsilon^2 f_1(x_0))^{-1}z(t;\varepsilon) - \int_0^t K(t,\tau)z(\tau;\varepsilon)d\tau = \varepsilon^2(f_1(x_0))^{-1}w_3(x_0,t,\varepsilon), \quad 0 \le t \le t_0, \quad z(t_0,\varepsilon) = 0.$$

Следовательно, $z(t;\varepsilon)$ является решением интегрального уравнения

$$z(t;\varepsilon) = -\int_t^{t_0}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\varepsilon^2 f_1(x_0)}\right)\int_0^{\tau}K(\tau,\theta)z(\theta;\varepsilon)d\theta d\tau - \varepsilon^2(f_1(x_0))^{-1}\int_t^{t_0}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\varepsilon^2 f_1(x_0)}\right)w_3(x_0,\tau;\varepsilon)d\tau.$$

Используя это уравнение, условие (13) и оценку для функции $w_3(x_0,t;\varepsilon)$, имеем

$$\max_{[0,t_0]}|z(t;\varepsilon)| \le c_3\varepsilon^4.$$

Следовательно, справедлива оценка (16) и теорема 1 доказана.

Замечание 1. Очевидно, что при замене начального условия (15) на $\tilde{\mu}_1(0;\varepsilon) = 0$ решение уравнения (14) с этим условием не будет приближенным решением обратной задачи.

Покажем, что при дополнительных предположениях можно получить приближенное решение обратной задачи с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^6)$.

Введем функцию

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{64}{\pi(2n+1)^5}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) = \frac{x^4}{24} - \frac{\pi x^3}{6} + \frac{\pi^3 x}{3}.$$

Рассмотрим следующую задачу для функции $y(t;\varepsilon)$:

$$\begin{gathered}\varepsilon^4 f_2(x_0)y''(t;\varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(x_0)y'(t;\varepsilon) + y(t;\varepsilon) = H(t;\varepsilon) + \\ + \varepsilon^4 f_2(x_0)\left[2K(t,t)y(t;\varepsilon) + \int_0^t \left(K_t(t,\tau) - K_\tau(t,\tau) - \int_\tau^t K(t,\theta)K(\theta,\tau)d\theta\right)y(\tau;\varepsilon)d\tau\right] + \\ + \varepsilon^2 f_1(x_0)\int_0^t K(t,\tau)y(\tau;\varepsilon)d\tau, \quad 0 \le t \le t_0,\end{gathered} \tag{26}$$

$$y(t_0;\varepsilon) = y_0, \quad y'(t_0;\varepsilon) = y_1, \tag{27}$$

где $H(t;\varepsilon)$ – заданная функция, а y_0 и y_1 – заданные числа.

Введем числа

$$a = -\frac{f_1(x_0)}{2f_2(x_0)} > 0, \quad b = \sqrt{\frac{4f_2(x_0) - (f_1(x_0))^2}{4(f_2(x_0))^2}}.$$

Лемма. *Если выполнены следующие условия*: $K \in C^1(\Delta_{t_0})$, $H \in C[0,t_0]$,

$$\frac{\varepsilon_0^2}{abf_2(x_0)}\left[\|K\|_{C(\Delta_{t_0})}(|f_1(x_0)|t_0 + 2\varepsilon^2 f_2(x_0))\right] + \frac{\varepsilon_0^4}{ab}\left[\left(\|K_t\|_{C(\Delta_{t_0})} + \|K_\tau\|_{C(\Delta_{t_0})}\right)t_0 + \|K\|^2_{C(\Delta_{t_0})}t_0^2/2\right] < 1, \tag{28}$$

то существует единственная функция $y \in C^2[0,t_0]$, *являющаяся решением задачи* (26), (27).

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для функции $v(t;\varepsilon)$

$$\varepsilon^4 f_2(x_0)v''(t;\varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(x_0)v'(t;\varepsilon) + v(t;\varepsilon) = Q(t), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{29}$$

$$v(t_0,\varepsilon) = y_0, \quad v'(t_0,\varepsilon) = y_1. \tag{30}$$

Так как $f_1(x_0) < 0$, $f_2(x_0) > 0$ и $4f_2(x_0) - (f_1(x_0))^2 > 0$, то корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \frac{f_1(x_0)}{\varepsilon^2 f_2(x_0)}\lambda + \frac{1}{\varepsilon^4 f_2(x_0)} = 0$$

равны $\lambda_{1,2} = a/(\varepsilon^2) \pm ib/(\varepsilon^2)$.

Решение задачи (29), (30) определяется формулой

$$\begin{gathered}v(t;\varepsilon) = y_0 \exp\left(\frac{a}{\varepsilon^2}(t-t_0)\right)\cos\left(\frac{b}{\varepsilon^2}(t-t_0)\right) + \frac{y_1\varepsilon^2 - ay_0}{b}E(t-t_0;\varepsilon) - \\ - \frac{1}{\varepsilon^2 f_2(x_0)b}\int_t^{t_0} E(t-\tau;\varepsilon)Q(\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le t_0,\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$E(t-\tau;\varepsilon) = \exp\left(\frac{a}{\varepsilon^2}(t-\tau)\right)\sin\left(\frac{b}{\varepsilon^2}(t-\tau)\right).$$

Пусть функция $y(t;\varepsilon)$ является решением задачи (26), (27). Используя формулу (31), получим, что $y(t;\varepsilon)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{gathered}y(t;\varepsilon) = y_0 \exp\left(\frac{a}{\varepsilon^2}(t-t_0)\right)\cos\left(\frac{b}{\varepsilon^2}(t-t_0)\right) + \frac{y_1\varepsilon^2 - ay_0}{b}E(t-t_0;\varepsilon) - \\ - \frac{1}{\varepsilon^2 f_2(x_0)b}\int_t^{t_0} E(t-\tau;\varepsilon)H(\tau;\varepsilon)d\tau - \\ - \frac{1}{f_2(x_0)b}\int_t^{t_0} E(t-\tau;\varepsilon)\left[f_1(x_0)\int_0^\tau K(\tau,\theta)y(\theta;\varepsilon)d\theta + 2\varepsilon^2 f_2(x_0)K(\tau,\tau)y(\tau;\varepsilon)\right]d\tau -\end{gathered} \tag{32}$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{b}\int\limits_t^{t_0} E(t-\tau;\varepsilon)\int\limits_0^{\tau}\left[K_\tau(\tau,\theta)-K_\theta(\tau,\theta)-\int\limits_\theta^\tau K(\tau,\xi)K(\xi,\theta)d\xi\right]y(\theta;\xi)d\theta d\tau.$$

Уравнение (32) является уравнением Фредгольма II рода для функции $y(t;\varepsilon)$. Из условий леммы следует, что оно имеет единственное решение $y\in C^2[0,t_0]$, которое является решением задачи (26), (27). Лемма доказана.

Предположим, что известны значения функции $\mu(t)$ и ее производной при $t=t_0$: $\mu(t_0)=m_0$, $\mu'(t_0)=m_1$. Пусть $K\in C^1(\Delta_{t_0})$ и выполнено условие (28). Тогда из леммы следует, что существует единственная функция $\tilde\mu_2(t;\varepsilon)\in C^2[0,t_0]$, являющаяся решением задачи

$$\begin{gathered}\varepsilon^4 f_2(x_0)\tilde\mu_2''(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 f_1(x_0)\tilde\mu_2'(t;\varepsilon)+\tilde\mu_2(t;\varepsilon)=g(t;\varepsilon)+\\ +\varepsilon^4 f_2(x_0)\left[2K(t,t)\tilde\mu_2(t;\varepsilon)+\int\limits_0^t\left(K_t(t,\tau)-K_\tau(t,\tau)-\int\limits_\tau^t K(t,\theta)K(\theta,\tau)d\theta\right)\tilde\mu_2(\tau;\varepsilon)d\tau\right]+\\ +\varepsilon^2 f_1(x_0)\int\limits_0^t K(t,\tau)\tilde\mu_2(\tau;\varepsilon)d\tau,\quad 0\le t\le t_0,\end{gathered}\tag{33}$$

$$\tilde\mu_2(t_0;\varepsilon)=m_0,\quad \tilde\mu_2'(t_0;\varepsilon)=m_1.\tag{34}$$

Теорема 2. *Предположим, что* $\mu\in C^3[0,t_0]$, $\mu(0)=\mu'(0)=\mu''(0)=0$, $\mu(t_0)=m_0$, $\mu'(t_0)=m_1$, $K\in C^2(\Delta_{t_0})$ *и выполнено условие* (28). *Тогда*

$$\max_{[0,t_0]}\left|\tilde\mu_2(t;\varepsilon)-\mu(t)\right|\le c_9\varepsilon^6.\tag{35}$$

Доказательство. Преобразуем формулу (19) для свободного члена $\psi(t;\varepsilon,n)$ уравнения (8)

$$\begin{gathered}\psi(t;\varepsilon,n)=-\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2}\left[\mu'(t)-\int\limits_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right]+w_1(t;\varepsilon,n)=-\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2}\times\\ \times\left[\mu'(t)-\int\limits_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right]+\frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4}\left[\mu''(t)-K(t,t)\mu(t)-\int\limits_0^t K_t(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right]+w_4(t;\varepsilon,n),\end{gathered}\tag{36}$$

где

$$\max_{[0,t_0]}\left|w_4(t;\varepsilon,n)\right|\le c_{10}\frac{\varepsilon^6}{(2n+1)^6}.$$

Для резольвенты $R(t,\tau;\varepsilon,n)$ ядра $B(t,\tau;\varepsilon,n)$ справедливо представление

$$R(t,\tau;\varepsilon,n)=B(t,\tau;\varepsilon,n)+R_1(t,\tau;\varepsilon,n),\quad \max_{\bar Q_{t_0}}\left|R_1(t,\tau;\varepsilon,n)\right|\le c_{11}\frac{\varepsilon^4}{(2n+1)^4}.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t R(t,\tau;\varepsilon,n)\psi(\tau;\varepsilon,n)d\tau=-\frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4}\int\limits_0^t K(t,\tau)\left[\mu'(\tau)-\int\limits_0^\tau K(\tau,\xi)\mu(\xi)d\xi\right]d\tau+w_5(t;\varepsilon,n)=\\ =-\frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4}K(t,t)\mu(t)+\frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4}\int\limits_0^t\left[K_\tau(t,\tau)+\int\limits_\tau^t K(t,\xi)K(\xi,\tau)d\xi\right]\mu(\tau)d\tau+w_5(t;\varepsilon,n),\end{gathered}\tag{37}$$

где

$$\max_{[0,t_0]}\left|w_5(t;\varepsilon,n)\right|\le c_{12}\frac{\varepsilon^6}{(2n+1)^6}.$$

Учитывая формулы (36), (37), получаем следующее представление для функции $T_n(t;\varepsilon)$, являющейся решением интегрального уравнения (8)

$$\begin{aligned} T_n(t;\varepsilon) = &-\frac{4\varepsilon^2}{(2n+1)^2}\left[\mu'(t) - \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right] + \frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4}\left[\mu''(t) - K(t,t)\mu(t) - \int_0^t K_t(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right] - \\ &- \frac{16\varepsilon^4}{(2n+1)^4}\left[K(t,t)\mu(t) - \int_0^t\left[K_\tau(t,\tau) + \int_\tau^t K(t,\xi)K(\xi,\tau)d\xi\right]\mu(\tau)d\tau\right] + w_6(t;\varepsilon,n), \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$\max_{[0,t_0]}|w_6(t;\varepsilon,n)| \le c_{13}\frac{\varepsilon^6}{(2n+1)^6}.$$

Из формул (5), (38) и определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ следует асимптотическое представление решения задачи (1)–(4)

$$\begin{aligned} u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) + \varepsilon^2 f_1(x)\left[\mu'(t) - \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right] + \varepsilon^4 f_2(x)\mu''(t) - \\ - \varepsilon^4 f_2(x)\left[2K(t,t)\mu(t) + \int_0^t\left[K_t(t,\tau) - K_\tau(t,\tau) - \int_\tau^t K(t,\xi)K(\xi,\tau)d\xi\right]\mu(\tau)d\tau\right] + w_7(x,t;\varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$\max_{\bar{Q}_{t_0}}|w_7(x,t;\varepsilon)| \le c_{14}\varepsilon^6.$$

Положив $x = x_0$ и использовав условие (11), имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 f_2(x_0)\mu''(t) + \varepsilon^2 f_1(x_0)\mu'(t) + \mu(t) = g(t;\varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(x_0)\int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau + 2\varepsilon^4 f_2(x_0)K(t,t)\mu(t) + \\ + \varepsilon^4 f_2(x_0)\int_0^t\left[K_t(t,\tau) - K_\tau(t,\tau) - \int_\tau^t K(t,\xi)K(\xi,\tau)d\xi\right]\mu(\tau)d\tau + w_7(x_0,t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le t_0. \end{aligned} \tag{39}$$

Введем функцию $z(t;\varepsilon) = \mu(t) - \tilde{\mu}_2(t;\varepsilon)$. Из уравнений (39), (33) и условий (34) следует, что функция $z(t;\varepsilon)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 f_2(x_0)z''(t;\varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(x_0)z'(t;\varepsilon) + z(t;\varepsilon) = w_7(x_0,t;\varepsilon) + \\ + \varepsilon^4 f_2(x_0)\left[2K(t,t)z(t;\varepsilon) + \int_0^t\left(K_t(t,\tau) - K_\tau(t,\tau) - \int_\tau^t K(t,\theta)K(\theta,\tau)d\theta\right)z(\tau;\varepsilon)d\tau\right] + \\ + \varepsilon^2 f_1(x_0)\int_0^t K(t,\tau)z(\tau;\varepsilon)d\tau, \quad 0 \le t \le t_0, \end{aligned}$$

$$z(t_0;\varepsilon) = 0, \quad z'(t_0;\varepsilon) = 0.$$

Аналогично доказательству леммы, используя формулу (31), получим, что $z(t;\varepsilon)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$
\begin{gathered}
z(t;\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^2 f_2(x_0)b}\int_t^{t_0} E(t-\tau;\varepsilon)w_7(x_0,\tau;\varepsilon)d\tau - \\
-\frac{1}{f_2(x_0)b}\int_t^{t_0} E(t-\tau;\varepsilon)\left[f_1(x_0)\int_0^{\tau} K(\tau,\theta)z(\theta;\varepsilon)d\theta + 2\varepsilon^2 f_2(x_0)K(\tau,\tau)z(\tau;\varepsilon)\right]d\tau - \\
-\frac{\varepsilon^2}{b}\int_t^{t_0} E(t-\tau;\varepsilon)\int_0^{\tau}\left[K_\tau(\tau,\theta) - K_\theta(\tau,\theta) - \int_\theta^{\tau} K(\tau,\xi)K(\xi,\theta)d\xi\right]z(\theta;\xi)d\theta d\tau.
\end{gathered} \tag{40}
$$

Уравнение (40) является уравнением Фредгольма II рода для функции $z(t;\varepsilon)$. Для свободного члена этого уравнения справедлива оценка

$$
\max_{[0,t_0]}\left|\frac{1}{\varepsilon^2 f_2(x_0)b}\int_t^{t_0} E(t-\tau;\varepsilon)w_7(x_0,\tau;\varepsilon)d\tau\right| \le c_{15}\varepsilon^6.
$$

Из этого неравенства, условия (28) и уравнения (40) следует оценка (35) и теорема 2 доказана.

Замечание 2. Очевидно, что при замене начальных условий (34) на

$$
\tilde{\mu}_2(0;\varepsilon) = 0, \quad \tilde{\mu}_2'(0;\varepsilon) = 0,
$$

решение уравнения (33) с этими условиями не будет приближенным решением обратной задачи.

Замечание 3. Используя более высокие члены разложения задачи (1)–(4) по малому параметру, можно получить приближенное решение с более высокой по порядку оценкой погрешности. Однако интегральное уравнение для приближенного решения будет очень громоздким.

Замечание 4. В случае, когда $K(t,\tau) = 0$, т.е. уравнение (1) представляет собой обычное уравнение теплопроводности, построенные приближенные решения определяются простыми явными формулами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир. 1970.
2. *Иванов В.К.* Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике // Дифференц. ур-ния. 1972. Т. 8. № 4. С. 652–658.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. Едиториал УРСС. Москва. 2004.
4. *Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Е.* Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики // Известия уральского университета. 2008. № 58. С. 78–87.
5. *Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д.* О решении граничной обратной задачи методом квазиобращения // Вестник ЮУГУ, серия Математика. Механика, Физика. 2012. Вып. 6. С. 8–13.
6. *Денисов А.М., Соловьева С.И.* Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 7. С. 919–928.
7. *Денисов А.М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 5. С. 744–752.
8. *Belov Yury Ya., Kopylova Vera G.* Determination of source function in composite type system of equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2014. Т. 7. Вып. 3. С. 275–288.
9. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // J. Inverse and Ill posed Problems. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
10. *Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A.* Solving coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of reaction front// Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation. 2021. V. 99. 105824.
11. *Денисов А.М.* Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2040–2049.