ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 6, с. 962–978

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.96

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Ф. Чистяков[1],*

[1] 664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, ИДСТУ СО РАН, Россия

*e-mail: chist@icc.ru

Поступила в редакцию 31.08.2022 г.
Переработанный вариант 27.11.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматриваются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с тождественно вырожденной в области определения матрицей при старшей производной искомой вектор-функции и с нагружениями в виде интегральных операторов Вольтерра и Фредгольма. При постановке начальных задач задаются проекторы на допустимые множества начальных векторов. Особое внимание уделено системам при наличии на отрезке интегрирования особых точек. В статье формализовано понятие особой точки. В случае дифференциальных уравнений дана их классификация. Приведен ряд примеров, иллюстрирующих теоретические результаты. Библ. 30.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, линейные системы, операторы Вольтерра и Фредгольма, пространство решений, размерность, индекс, особые точки.

DOI: 10.31857/S0044466923060066, **EDN:** TRQOZZ

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\Lambda_k x := \sum_{i=0}^{k} A_i(t)x^{(i)}(t) = f, \quad t \in T, \tag{1}$$

и соответствующие им системы интегродифференциальных уравнений (ИДУ)

$$(\Lambda_k + \mathcal{V})y := \sum_{i=0}^{k} A_i(t)y^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^{t} \mathcal{K}(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t \in T, \tag{2}$$

$$(\Lambda_k + \mathcal{V} + \lambda\Phi)z := \sum_{i=0}^{k} A_i(t)z^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^{t} \mathcal{K}(t,s)z(s)ds + \lambda\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{K}(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t \in T, \tag{3}$$

где $T = [\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}^1$, $A_i(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, $\mathrm{K}(t,s)$ суть $(n \times m)$-матрицы, определенные в областях T и $T \times T$ соответственно, $x \equiv x(t)$, $y \equiv y(t)$, $z \equiv z(t)$ – искомые и $f \equiv f(t)$ – известная вектор-функции соответственно, $x^{(i)}(t) = (d/dt)^i x(t)$, $x^{(0)}(t) = x(t)$, λ – скалярный параметр (в общем случае комплексный). Ниже предполагается, что входные данные систем (1)–(3) обладают гладкостью, необходимой при проведении рассуждений, и выполнено условие

$$\det A_k(t) = 0 \quad \forall t \in T. \tag{4}$$

При моделировании природных и технических процессов, начиная с 70-х годов прошлого века, встречаются системы, включающие в себя взаимосвязанные ОДУ различных порядков, алгебраические уравнения, интегральные уравнения (ИУ) Вольтерра и Фредгольма I и II рода (см., например, [1–5]). Эту совокупность уравнений можно записать в общем случае в виде систем вида (1)–(3), удовлетворяющих условию (4). Но в общем случае, есть примеры систем (1)–(3), которые нельзя разделить неособенными преобразованиями на подсистемы ОДУ, алгебраические уравнения и ИУ.

Системы (1), удовлетворяющие условию (4), называют обычно в настоящее время линейными дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) (см., например, [4]). Используются также термины "сингулярные системы" (см. [1]), "дескрипторные системы" (см. [5]), "алгебродифференциальные системы" (АДС) (см. [6]). Системы вида (2), (3) авторы называют вырожденными системами интегродифференциальных уравнений (ИДУ).

Под решениями систем (1)–(3) мы понимаем любые k-раз дифференцируемые на T векторфункции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, которые обращают системы в тождество на T при подстановке.

При изучении систем вида (1)–(3) обычно ставится задача Коши: предполагается, что в начальной точке решения систем удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\mathrm{x}(\alpha) = \left(a_0^\top a_1^\top \ldots a_{k-1}^\top\right)^\top, \\ \mathrm{y}(\alpha) = \left(b_0^\top b_1^\top \ldots b_{k-1}^\top\right)^\top, \quad \mathrm{z}(\alpha) = \left(e_0^\top e_1^\top \ldots e_{k-1}^\top\right)^\top,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\mathrm{x} = \left(x^\top \dot{x}^\top \ldots (x^{(k-1)})^\top\right)^\top$, $\mathrm{y} = \left(y^\top \dot{y}^\top \ldots (y^{(k-1)})^\top\right)^\top$, $\mathrm{z} = \left(z^\top \dot{z}^\top \ldots (z^{(k-1)})^\top\right)^\top$, $\dot{x}^\top \equiv (d/dt)x^\top$, a_i, b_i, e_i – заданные векторы из $\mathbf{R}^n$, $i = \overline{0, k-1}$, $\top$ – символ транспонирования.

Замечание 1. Очевидно, что для существования решений задач Коши для систем (1)–(3) необходимо (но не всегда достаточно) выполнение критерия Кронекера–Капелли в точке $t = \alpha$ для векторов $x^{(k)}(\alpha)$, $y^{(k)}(\alpha)$, $z^{(k)}(\alpha)$, а именно,

$$\begin{gathered}\operatorname{rank} A_k(\alpha) = \operatorname{rank}\left(A_k(\alpha) | f(\alpha) - \sum_{i=0}^{k-1} \vec{a}_i\right), \quad \operatorname{rank} A_k(\alpha) = \operatorname{rank}\left(A_k(\alpha) | f(\alpha) - \sum_{i=0}^{k-1} \vec{b}_i\right), \\ \operatorname{rank} A_k(\alpha) = \operatorname{rank}\left(A_k(\alpha) | f(\alpha) - \sum_{i=0}^{k-1} \vec{e}_i - \int_\alpha^\beta \mathrm{K}(\alpha, s) z(s) ds\right),\end{gathered} \tag{6}$$

где $\vec{a}_i = A_i(\alpha)a_i$, $\vec{b}_i = A_i(\alpha)b_i$, $\vec{e}_i = A_i(\alpha)e_i$. Итак, для разрешимости задач Коши необходимо, чтобы начальные векторы a_i, b_i, e_i в формулах (5) принадлежали некоторым линейным многообразиям $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z \subset \mathbf{R}^\mathrm{m}$.

Поэтому начальные задачи для систем (1)–(3) ставятся ниже в виде соотношений

$$P_x\mathrm{x}(\alpha) = \mathrm{a}, \quad P_y\mathrm{y}(\alpha) = \mathrm{b}, \quad P_z\mathrm{z}(\alpha) = \mathrm{e}, \tag{7}$$

где P_x, P_y, P_z суть $(m \times n)$ – заданные матрицы полного ранга, $\mathrm{m} = kn$, $m \le \mathrm{m}$, a, b, e – заданные векторы, Задачи (1)–(3), (7) при $P_x, P_y, P_z = E_\mathrm{m}$ совпадает с задачами Коши, где E_m – единичная матрица размерности m. Матрицы P_x, P_y, P_z в формулах (7) выбираются проекторами начальных данных на $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z$. В школе Г.А. Свиридюка условия вида (7) называют условиями Шоуолтера–Сидорова (см. [7]). Для ДАУ в такой форме начальные условия записывал Ю.Е. Бояринцев (см. [8]).

Если вектор-функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются решениями и удовлетворяют условиям (7), то они являются решениями задач (1)–(3), (7).

Под особыми точками (ОТ) систем (1)–(3) мы неформально будем понимать любую точку на отрезке T, при наличии которой система не имеет решений на T, теряется единственность, меняется размерность многообразия решений и т.д.

Системы (1)–(3) приводимы к нормальной форме (форме Коши) умножением на матрицы $A_k^{-1}(t)$, $t \in T$, если $\det A_k(t) \ne 0$ $\forall t \in T$. При непрерывных входных данных для систем ОДУ (1) в нормальной форме справедлив ряд теорем существования (см., например, [9]), на которых базируются теоремы о разрешимости систем ИДУ (2), (3). При наличии изолированных точек $t_\star \in T$ со свойством $\det A_k(t_\star) = 0$ условия этих теорем нарушаются.

В [9–11] изложены методы исследования систем ОДУ при $A_k(t) = (t - t_\star)^i E_n$, $i = 1, 2\ldots$ Часто предполагается, что t – комплексная переменная и $t_\star = 0$. В ряде работ ОТ указаны в виде условий $\det A_k(\alpha) = 0$, $A_k(\alpha) = 0$ (см., например, [12–17]). Большое внимание уделено методам исследования, основанных на введении малого параметра в системы ОДУ или ДАУ с ОТ и построении асимптотических приближений к решениям (см., например, [18], [19]). Точки изменения ранга матрицы $A_k(t)$ для вырожденных систем ИДУ, в частности, для ДАУ, в отличие от систем с вырождением $A_k(t)$ в изолированных точках, не всегда совпадают с ОТ, и нужны методики их поиска. Для ДАУ исследования в этом направлении проводились в [2], [6], [20].

Основными задачами настоящей статьи являются: 1) формализация понятия ОТ систем ИДУ и ДАУ и их классификация; 2) изучение влияния ОТ на разрешимость ДАУ.

Замечание 2. Для упрощения записи указание зависимости от t в работе будет иногда опускаться, если это не вызывает путаницы. Используются следующие обозначения: включения $M(\zeta) \in \mathbf{C}(U)$, $M(\zeta) \in \mathbf{C}^i(U)$, $i \geq 1$, $M(\zeta) \in \mathbf{C}^\infty(U)$, $M(\zeta) \in \mathbf{C}^A(U)$, где $M(\zeta)$ – некоторая матрица (вектор-функция) $U = T$, $\zeta = t$ или $U = T \times T$, $\zeta = (t, s)$, означают, что все элементы $M(\zeta)$ являются непрерывными, i-раз дифференцируемыми, бесконечно-дифференцируемыми, вещественно-аналитическими функциями в U соответственно.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Нам потребуются следующие понятия и факты.

Определение 1 (см., например, [1]). Полуобратной матрицей к $(m \times n)$-матрице M, называется $(n \times m)$-матрица M^-, удовлетворяющая уравнению $MM^-M = M$.

Полуобратная матрица определена для любой $(m \times n)$-матрицы M. Если матрица M квадратная и неособенная, то $M^{-1} = M^-$. Матрица M^- определена в общем случае неединственным образом (ее частным случаем является псевдообратная матрица M^+).

Важную роль в статье играет утверждение В. Долезаля (см., например, [21]).

Лемма 1. *Пусть*

1) $(m \times n)$*-матрица* $M(t) \in \mathbf{C}^A(T)$;

2) $\operatorname{rank} M(t) \leq r$, $t \in T$.

Тогда существуют $(m \times m)$*-матрица* $L(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ *и* $(n \times n)$*-матрица* $R(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ *со свойствами* $\det L(t) \det R(t) \neq 0$ $\forall t \in T$, $L(t)M(t)R(t) = \begin{pmatrix} M_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *где* $M_{11}(t)$ – $(r \times r)$*-блок,* $\det M_{11}(t) \not\equiv 0$ *на* T.

Из формулы Лейбница для дифференцирования произведений вытекает формула

$$\mathrm{d}_i[MF] = \mathcal{M}_i[M]\mathrm{d}_i[F], \tag{8}$$

где $M \equiv M(t)$, $F \equiv F(t)$ – некоторые матрицы подходящей размерности из $\mathbf{C}^i(T)$,

$$\mathrm{d}_i[M] = \begin{pmatrix} M \\ (d/dt)M \\ \cdots \\ (d/dt)^i M \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_i[M] = \begin{pmatrix} C_0^0 M & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^0 M^{(1)} & C_1^1 M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_i^0 M^{(i)} & C_i^1 M^{(i-1)} & \cdots & C_i^i M \end{pmatrix},$$

$C_i^j = i!/j!(i-j)!$ – биномиальные коэффициенты.

Поставим в соответствие системе (1) эквивалентное ДАУ первого порядка

$$\mathrm{A}(t)\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{B}(t)\mathrm{x} = \begin{pmatrix} E_\nu & 0 \\ 0 & A_k(t) \end{pmatrix}\dot{\mathrm{x}} + \begin{pmatrix} 0 & -E_\nu \\ A_0(t) & \tilde{A}(t) \end{pmatrix}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \tag{9}$$

где $\nu = (k-1)n$, $\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) & \ldots & A_{k-1}(t) \end{pmatrix}$. Следствием известных теорем (см., например, [9, с. 66]) является такое утверждение.

Теорема 1. *Пусть в системе* (1)

1) $A_i(t),\ f(t) \in \mathbf{C}(T),\ i = \overline{0,k}$;

2) $\det A_k(t) \neq 0\ \forall t \in T$.

Тогда

1. *Система* (1) *разрешима на* T *и все ее решения представимы в виде суммы*

$$x(t,c) = X_d(t)c + \psi(t), \quad \psi(t) = Vf = \int_\alpha^t K(t,s)f(s)ds, \tag{10}$$

где $X_d(t)$ *есть* $(n \times d)$*-матрица из* $\mathbf{C}^k(T)$, $d = nk$, $\breve{X}_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[X_d(t)]$ *— фундаментальная матрица системы* (9), $\mathrm{d}_{k-1}[.]$ *— оператор из формул* (8), $\det \breve{X}_{k-1}(t) \neq 0\ \forall t \in T$, $K(t,s)$ *есть* $(n \times n)$*-матрица,* $\partial^j K(t,s)/\partial t^j\big|_{t=s} = 0\ \forall t \in T,\ j = \overline{0,k-1}$, c *— вектор произвольных постоянных*;

2. *Существует единственное решение системы* (1), *проходящее через любую заданную точку* $(\mathrm{x}(\vartheta) = \mathrm{a} \in \mathbf{R}^{\mathrm{m}},\ \vartheta \in T)$.

Следствие 1. Пусть в системах (2), (3)

1) $A_i(t),\ f(t) \in \mathbf{C}(T),\ i = \overline{0,k},\ \mathcal{K}(t,s),\ \mathrm{K}(t,s) \in \mathbf{C}(T \times T)$;

2) $\det A_k(t) \neq 0\ \forall t \in T$.

Тогда

1. Система (2) разрешима на T и все ее решения представимы в виде суммы

$$y(t,c) = Y_d(t)c + \hat{\psi}(t), \quad \hat{\psi}(t) = \psi(t) + \hat{V}\psi, \quad \hat{V}\psi = \int_\alpha^t \hat{K}(t,s)\psi(s)ds, \tag{11}$$

где $Y_d(t) = [X_d(t) + \hat{V}X_d] \in \mathbf{C}^k(T)$, $(I + \breve{V})^{-1} = I + \hat{V}$, $\breve{V} = V \circ \mathcal{V}$, $\det \breve{Y}_{k-1}(\alpha) \neq 0$, $\breve{Y}_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[Y_d(t)]$, $\hat{K}(t,s)$ есть $(n \times n)$-матрица, $\partial^j \hat{K}(t,s)/\partial t^j\big|_{t=s} = 0\ \forall t \in T,\ j = \overline{0,k-1}$, c — вектор произвольных постоянных;

2. Существует единственное решение системы (2), проходящее через точку $\mathrm{y}(\alpha) = \mathrm{b}$;

3. Система (3) разрешима на T за исключением счетного множества значений параметра λ и все ее решения представимы в виде суммы

$$z(t,c) = Z_d(t)c + \varphi(t), \quad \varphi(t) = \hat{\psi}(t) + \lambda\hat{\Phi}\hat{\psi}, \quad \hat{\Phi}\hat{\psi} = \int_\alpha^\beta \hat{\mathrm{K}}(t,s,\lambda)\hat{\psi}(s)ds, \tag{12}$$

где $Z_d(t) = [Y_d(t) + \lambda\hat{\Phi}Y_d] \in \mathbf{C}^k(T)$, $(I + \lambda\breve{\Phi})^{-1} = I + \lambda\hat{\Phi}$, $\breve{\Phi} = \hat{V} \circ \Phi$, $\hat{\mathrm{K}}(t,s,\lambda)$ – $(n \times n)$-резольвента оператора $\breve{\Phi}$, c — вектор произвольных постоянных;

4. При значениях параметра $\lambda : |\lambda| \leq \varepsilon$, где ε — некоторое малое положительное число, существует единственное решение системы (3), проходящее через точку $\mathrm{z}(\alpha) = \mathrm{e}$.

Доказательство. Докажем п. 1 утверждения. Запишем систему (2) в виде равенства $\Lambda_k y = -\mathcal{V}y + f,\ t \in T$, из нее согласно формуле (10) получаем систему ИУ Вольтерра II рода $y + \breve{V}y = X_d(t)c + \psi(t),\ t \in T$. Используя формулу обращения $(I + \breve{V})^{-1} = I + \hat{V}$ (см. [22, с. 111]) убеждаемся в справедливости формулы (11).

Докажем п. 2. Система $\breve{X}_{k-1}(\alpha)c = \mathrm{b} - \varpi_{k-1}(\alpha)$, $\varpi_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[\hat{\psi}(t)]$ однозначно разрешима относительно вектора c, так как согласно теореме 1 матрица $\breve{Y}_{k-1}(\alpha)$ неособенная, производные матрицы $\hat{K}(t,s)$ по t равны нулю на диагонали $t = s$.

Докажем п. 3. Запишем систему (3) в виде равенства $(\Lambda_k + \mathcal{V})z = -\lambda\Phi z + f,\ t \in T$. Из формулы (11) следует система ИУ Фредгольма II рода $z + \lambda\breve{\Phi}z = Y_d(t)c + \hat{\psi},\ t \in T$, разрешая которую получаем формулу (12) (см. [22, с. 120]).

Для доказательства четвертого пункта достаточно заметить, что $\det \breve{Z}_{k-1}(\alpha) \neq 0$, где $\breve{Z}_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[Z_d(t)]$ при малых λ, так как $\det \breve{Y}_{k-1}(\alpha) \neq 0$.

Замечание 3. Если $A_i(t),\ f(t) \in \mathbf{C}^A(T),\ i = \overline{0, k-1},\ \mathcal{K}(t,s),\ \mathrm{K}(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$, то в формулах (10)–(12) справедливы включения $X_d(t),\ \psi(t),\ Y_d(t)c,\ \hat{\psi}(t),\ Z_d(t),\ \varphi(t), \in \mathbf{C}^A(T),\ \hat{K}(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$. Любая точка $t_\star \in T$ со свойством $\det A_k(t_\star) = 0$ является особой, и число их конечно на отрезке T. Других ОТ на отрезке нет.

Более того, найдутся вектор $\mathrm{a} \in \mathbf{R}^{\mathrm{m}}$ и свободный член $f(t)$ такие, что имеет место неравенство $\operatorname{rank} A_k(t_\star) \neq \operatorname{rank}\left(A_k(t_\star) | f(t_\star) - \sum_{i=0}^{k-1} \vec{a}_i\right)$, $\vec{a}_i = A_i(t_\star)a_i$, вследствие которого решение задачи $\Lambda_k x = f,\ t \in T,\ \mathrm{x}(t_\star) = \mathrm{a}$, не существует на T (ср. с теоремой 1).

Замечание 4. Часть утверждений следствия 1 можно найти в литературе по ИДУ (см., например, [23]), но автор изложил их в удобной для себя форме.

Для ИДУ теряется важное свойство общих решений ОДУ (ср. с теоремой 1).

Пример 1. Рассмотрим ИДУ $\dot{y}(t) + \int_0^t \gamma^2 y(s)ds = 0,\ t \in T = [0,1]$, с условием $y(\vartheta) = a \in \mathbf{R}^1,\ \vartheta \in T$, где γ – вещественный параметр. Общее решение ИДУ здесь имеет вид $y(t,c) = c\cos(\gamma t),\ c \in \mathbf{R}^1$. Начальная задача с условием $y(0) = a$ имеет единственное решение $y(t) = a\cos(\gamma t)$.

Если $a \neq 0$, $\vartheta \in (0,1]$ и $\vartheta\gamma = \pi/2$, то исходная задача не имеет на T решений, так как $y(\vartheta) = 0$. В случае $y(\vartheta) = 0$, $\vartheta\gamma = \pi/2$ видим, что $y(t,c) = c\cos(\gamma t)$ при любом c.

Итак, в отличие от ОДУ решения ИДУ “помнят” отрезок, на котором определены, и при сужениях отрезка $T_0 \subset T$ решения меняются (или могут не существовать).

3. СВЕДЕНИЯ О СВОЙСТВАХ ДАУ БЕЗ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Выделим класс линейных ДАУ без ОТ в области определения.

Определение 2. Система (1) имеет решение типа Коши на отрезке T, если она разрешима для любой вектор-функции $f(t) \in \mathbf{C}^{\mathrm{m}}(T)$, $\mathrm{m} = kn$, и ее решения представимы в виде линейной комбинации

$$x(t,c) = X_d(t)c + \psi(t), \tag{13}$$

где $X_d(t)$ есть $(n \times d)$-матрица из $\mathbf{C}^k(T)$ со свойством $\operatorname{rank} \mathrm{d}_{k-1}[X_d(t)] = d\ \forall t \in T$, c – вектор произвольных постоянных, $\psi(t)$ – вектор-функция со свойством $\Lambda_k \psi(t) = f(t),\ t \in T$, и на любом подотрезке $[\alpha_0, \beta_0] \subseteq T$ нет решений, отличных от $x(t,c)$.

Замечание 5. Из работы [24] следует, что для ДАУ (1) с постоянными коэффициентами $\bar{\Lambda}_k x := \sum_{i=0}^k \bar{A}_i x^{(i)} = f,\ t \in T$, параметр $d = \deg \xi(\lambda) = \deg\det\left[\sum_{i=0}^k \lambda^j \bar{A}_i\right]$, $0 \le d \le kn$, где λ – скалярный параметр (возможно комплексный), deg – символ степени многочлена. Предполагается, что многочлен $\xi(\lambda)$ ненулевой. Если $\xi(\lambda) \equiv 0$, то $\dim \ker \bar{\Lambda}_k = \infty$.

Замечание 6. Если ДАУ (1) имеет решение типа Коши, то сохраняются важнейшие свойства линейных систем ОДУ в нормальной форме (форме Коши): 1) множества решений на отрезках T и $T_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$ совпадают (отсутствует “память”); 2) если через заданную точку ($\mathrm{a} \in \mathbf{R}^{\mathrm{m}},\ \vartheta \in T$) проходит решение ДАУ, то оно единственно.

Определение 3. Если существуют операторы

$$\Omega_{\hat{l}} = \sum_{j=0}^{\hat{l}} L_j(t)(d/dt)^j, \quad \Omega_r = \sum_{j=0}^{\breve{r}} R_j(t)(d/dt)^j,$$

где $L_j(t), R_j(t)$ суть $(n \times n)$-матрицы из $\mathbf{C}(T)$, обладающие свойствами

$$\Omega_{\hat{l}} \circ \Lambda_k v = \hat{\Lambda}_k v, \quad \Lambda_k \circ \Omega_{\breve{r}} v = \breve{\Lambda}_k v \quad \forall v \equiv v(t) \in \mathbf{C}^{\nu+k}(T),$$

где $\hat{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^{k} \hat{A}_i(t)v^{(i)}$, $\breve{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^{k} \breve{A}_i(t)v^{(i)}$, $\nu = \{\hat{l}$ или $\breve{r}\}$, $\hat{A}_i(t), \breve{A}_i(t)$ суть $(n \times n)$-некоторые матрицы из $\mathbf{C}(T)$, $\det \hat{A}_k(t) \neq 0$, $\det \breve{A}_k(t) \neq 0$ $\forall t \in T$, то они называются левым и правым регуляризирующими операторами (ЛРО и ПРО) для оператора системы (1), а наименьшие возможные $\hat{l}$, $\breve{r}$ называются ее индексами (левым и правым). Индексы оператора Λ_k, $t \in T$, где $\det A_k(t) \neq 0$ $\forall t \in T$, полагаются равными нулю.

Далее, нам потребуется сводка результатов из [25, теоремы 1, 2, леммы 4, 5] и [6, леммы 4.1–4.3]. Для аналитических входных данных эти утверждения формулируются в более компактном виде.

Теорема 2. *Пусть в ДАУ* (1) $A_i(t)$, $f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = \overline{0,k}$.

Тогда три условия на систему (1) *эквивалентны*:

1) *на отрезке T определено решение типа Коши*;

2) *на отрезке T определен ЛРО*;

3) *на отрезке T определен ПРО.*

Теорема 3. *Пусть в ДАУ* (1) $A_i(t)$, $f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = \overline{0,k-1}$, *и левый индекс ДАУ равен* $\hat{l}$.

Тогда

1. *Правый и левый индексы ДАУ равны, и справедливы неравенства* $0 \le \hat{l} \le \mathrm{m}$;

2. *В формуле* (13) $X_d(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, *при* $d = 0$ *вектор-функция* $\psi(t) = x = \sum_{j=0}^{\hat{l}-1} C_j(t) f^{(j)}(t)$, *иначе*

$$\psi(t) = \int_{\alpha}^{t} K(t,s) f(s) ds + \sum_{j=0}^{\hat{l}-k} C_j(t) f^{(j)}(t), \quad \hat{l} \ge k, \quad \psi(t) = \int_{\alpha}^{t} K(t,s) f(s) ds, \quad \hat{l} < k, \tag{14}$$

где $K(t,s)$, $C_j(t)$ *суть* $(n \times n)$-*матрицы, причем* $K(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$, $C_j(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ *и* $\partial^j K(t,s)/\partial t^j\big|_{t=s} = 0$ $\forall t \in T$, $j = \overline{0, k-\hat{l}-1}$, *если* $\hat{l} < k$.

Следствие 2. Пусть для произведения операторов $\Lambda_\nu = \prod_{j=1}^{i} \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, выполнены условия

1) входные данные операторов Λ_{k_j}, $t \in T$, $j = \overline{1,i}$, принадлежат пространству $\mathbf{C}^A(T)$;

2) для оператора произведения Λ_ν определен ЛРО.

Тогда для каждого сомножителя Λ_{k_j}, $j = \overline{1,i}$, $t \in T$, определен свой ЛРО. Более того, если для каждого оператора Λ_{k_j}, $j = \overline{1,i}$, $t \in T$, определен ЛРО, то для оператора произведения Λ_ν определен ЛРО.

Следствие 3. Пусть оператор Λ_{k_1}, $t \in T$, является ЛРО для оператора Λ_{k_2}, $t \in T$, с входными данными из пространства $\mathbf{C}^A(T)$.

Тогда начальная задача $\Lambda_{k_1} v = 0$, $t \in T$, $v^{(j)}(\alpha) = 0$, $j = \overline{0, k_1 - 1}$, имеет на отрезке T только нулевое решение.

Следствие 4. Пусть для каждого оператора Λ_{k_j}, $j = \overline{1,i}$, $t \in T$, с матрицами и коэффициентами из $\mathbf{C}^A(T)$ определен ЛРО.

Тогда для их произведения Λ_ν, $t \in T$, справедливо равенство $d_\nu = \sum_{j=0}^{i} d_j$, где d_ν, d_j – размерности ПР операторов Λ_ν и Λ_{k_j}, $t \in T$, из формулы (13).

К сожалению, нет пока общей формулы, позволяющей вычислить индекс произведения операторов ДАУ по их индексам. Он может меняться достаточно произвольно, например,

$$[E_n - (d/dt)A_1]^j = E_n - (d/dt) j A_1, \quad [E_n - (d/dt)A_1] \circ [E_n + (d/dt)A_1] = E_n,$$

где A_1 – постоянная матрица со свойством $A_1^2 = 0$, оператор $E_n \pm (d/dt)^j A_1$, $j = 1,2,\ldots$, имеет индекс 2. Но имеются исключения из общего правила (см. ниже лемму 2).

Лемма 2. *Пусть входные данные операторов* Λ_{k_j}, $t \in T$, $j = \overline{1,i}$, *принадлежат пространству* $\mathbf{C}^A(T)$. *Тогда*

1. *Индекс оператора* $\Lambda_{k+j} = (d/dt)^j \Lambda_k$, $t \in T$, $j = 1, 2, \ldots$, *равен индексу* Λ_k, $t \in T$;

2. *Если индексы сомножителей* Λ_{k_j}, $t \in T$, *не превосходят* 1, *то индекс оператора* $\Lambda_\omega = \prod_{j=1}^{i} \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, *не превосходит* i.

Доказательство вытекает из теорем 2, 3 и вида формулы обращения (14), в которой при выполнении условия $\hat{l} \le k$ отсутствуют операторы $C_j(t)(d/dt)^j$, $j \ge 1$.

Очевидно, что задача (1), (7) разрешима в условиях теоремы 3 тогда и только тогда, когда разрешима система $\hat{X}_{k-1}(\alpha)c = \mathrm{a} - \psi_{k-1}(\alpha)$ (где $\hat{X}_{k-1}(t) = P_x \mathrm{d}_{k-1}[X_d(t)]$, $\psi_{k-1}(t) = P_x \mathrm{d}_{k-1}[\psi(t)]$) относительно вектора c. Решение $x(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ единственно, если решение c единственно. Чтобы сформулировать утверждение о разрешимости задачи (1), (7) в терминах входных данных, нам потребуется такое понятие.

Определение 4. Совокупность самой системы (1) и ее производных до порядка i включительно: $\mathrm{d}_i[\Lambda_k x - f] = 0$, $t \in T$, где $\mathrm{d}_i[.]$ – оператор из формул (8), называется i-продолженной системой (1).

С учетом формулы (8) i-продолженную систему из определения 3 запишем в виде равенств

$$D_i[\mathbf{A}]\mathrm{x}_{i+k} = \mathrm{d}_i[f(t)], \quad D_i[\mathbf{A}] = \sum_{j=0}^{k} \left(O_j \ \mathcal{M}_i[A_j(t)] \ \tilde{O}_j \right), \tag{15}$$

где $\mathbf{A} = (A_k \ A_{k-1} \ \ldots \ A_0)$, матрица $D_i[\mathbf{A}]$ имеет размер $[(i+1)n \times (i+k+1)n]$, нулевые матрицы O_j, $\tilde{O}_j$ имеют размеры $[(i+1)n \times jn]$, $[(i+1)n \times (k-j)n]$, $j = \overline{0,k}$, соответственно, $\mathrm{x}_{i+k} = \mathrm{d}_{i+k}[x]$. Ниже используются разбиения матрицы из формул (15) на блоки вида $D_i[\mathbf{A}] = \left(\tilde{B}_i(t) \ \Gamma_i[\mathbf{A}(t)] \right)$, где $\Gamma_i[\mathbf{A}]$ – блочно-треугольная квадратная матрица с блоками $A_k(t)$ на диагонали.

Замечание 7. На разбиении $D_i[\mathbf{A}] = \left(\tilde{B}_i(t) \ \Gamma_i[\mathbf{A}(t)] \right)$ базируется способ вычисления индекса (левого) и матричных коэффициентов ЛРО (см. [2]). При вычислении ПРО для системы (1) нужно решать матричные ДАУ (см. [26]). Поэтому это понятие пока представляет только теоретический интерес.

Лемма 3. *Начальная задача* (1), (17)*, в условиях теоремы* 3 *разрешима тогда и только тогда, когда для некоторого вектора* $c \in \mathbf{R}^{nk}$ *выполнены соотношения*

$$\operatorname{rank} \mathrm{G}_{\hat{l}-1} = \operatorname{rank} \left(\mathrm{G}_{\hat{l}-1} | \mathrm{h} - \mathrm{g} \right), \tag{16}$$

где $\mathrm{G}_{\hat{l}-1} = \Gamma_{\hat{l}-1}[\mathbf{A}]\big|_{t=\alpha}$, $\mathrm{h} = \mathrm{d}_{\hat{l}-1}[f(t)]\big|_{t=\alpha}$, $\mathrm{g} = B_{\hat{l}-1}(\alpha)[P_x^{-}\mathrm{a} + (E_{nk} - P_x^{-} P_x)c]$.

Более того, если вектор g *вычисляется единственным образом, то решение начальной задачи единственно.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши, где $P_x = E_{nk}$. Формула (16) является необходимым и достаточным условием выполнения равенства $D_{\hat{l}-1}[\mathbf{A}]\mathrm{d}_{k+\hat{l}-1}[x] = \mathrm{d}_{\hat{l}-1}[f]$ в точке $t = \alpha$. Согласно разбиению матрицы $D_{\hat{l}-1}[\mathbf{A}]$ это равенство эквивалентно разрешимости СЛАУ $\mathrm{G}_{\hat{l}-1}\mathcal{X} = \mathrm{h} - B_{\hat{l}-1}(\alpha)\mathrm{a}$, $\mathcal{X} = \mathrm{d}_{\hat{l}-1}[x^{(k)}]\big|_{t=\alpha}$.

Если ввести вектор-функции $z^{(i)}(t) = (d/dt)^i[\Lambda_k x - f]$, $t \in T$, $i = \overline{0, \hat{l}-1}$, то они в силу вышесказанного удовлетворяют условиям $z^{(i)}(\alpha) = 0$. Начальная задача

$$\Omega_{\hat{l}} z = 0, \quad t \in T, \quad z^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i = \overline{0, \hat{l}-1},$$

где $\Omega_{\hat{l}}$ – ЛРО для системы (1), имеет согласно следствию 2 только одно решение $z \equiv z(t) = [\Lambda_k x - f] = 0$. ДАУ $\Lambda_k x = f$ имеет решение типа Коши и СЛАУ $\hat{X}_{k-1}(\alpha)\chi = \mathrm{a} - \hat{\psi}_{k-1}(\alpha)$, где $\hat{X}_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[X_d]$, $\hat{\psi}_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[\psi]$, имеет единственное решение χ. Для завершения доказательства отметим, что согласно (см. [1, с. 33]) все начальные вектора $\mathrm{x}(\alpha)$ принадлежат многообразию $P_x^- \mathrm{a} + (E_2 - P_x^- P_x)c$, где вектор c пробегает $\mathbf{R}^{nk}$.

Пример 2. Рассмотрим начальную задачу

$$\bar{\Lambda}_1 x = \bar{A}_1 \dot{x} + \bar{A}_0 x = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 2+\gamma & 1 \\ 4+4\gamma & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} (2+\gamma)e^t + 5e^{2t} \\ (4+4\gamma)e^t + 12e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0,1], \tag{17}$$
$$P_x \mathrm{x}(\alpha) = (1\ \ 2)\, x(0) = \mathrm{a} = 3.$$

Если $\gamma \neq 0$, то индекс ДАУ $\hat{l} = 1$, размерность ПР $d = 1$, в качестве ЛРО можно принять оператор $\Omega_1 = \mathrm{diag}\{1, (d/dt)\}L$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Матрицы и векторы в формуле (16) имеют вид $\mathrm{G}_0 = \bar{A}_1$, $B_0 = \bar{A}_0$, $c = (c_1\ \ c_2)^\top \in \mathbf{R}^2$,

$$P_x^- \mathrm{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x)c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{h} = \begin{pmatrix} 7+\gamma \\ 16+4\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathrm{g} = \begin{pmatrix} 3+2\gamma \\ 4+8\gamma \end{pmatrix} c_2.$$

Из условия равенства рангов (16) следует уравнение $(1-2\gamma)c_2 = 1 - 2\gamma$; $c_2 = 1\ \forall \gamma \neq 1/2$. Итак, для любого $\gamma \neq 1/2$ имеем $x(0) = P_x^- \mathrm{a} + (E_2 - P_x^- P_x)c = (1\ \ 1)^\top$, $x = \left(e^t\ \ e^{2t}\right)^\top$.

Если $\gamma = 1/2$, то умножением ДАУ (17) на матрицу L мы выделим алгебраическое уравнение $(1\ \ 2)\,x = e^t + 2e^{2t}$, $t \in T$, и начальное условие является его следствием при $t = 0$. Начальная задача совместна, но ее решение неединственно.

Если $\gamma = 0$, то $d = 0$, $\hat{l} = 2$. В формуле (16) матрицы и векторы имеют вид

$$\mathrm{G}_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ \bar{A}_0 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{h} = \mathrm{d}_1[f(t)]\big|_{t=0}, P_x^- \mathrm{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x)c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Проделав аналоги выкладок при $l = 1$, получим $c_2 = 1$, $x(0) = (1\ \ 1)^\top$.

4. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОНЯТИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК ЛИНЕЙНЫХ ДАУ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Введем понятия.

Определение 5. Если существует $(n \times d)$-матрица $\tilde{X}_d(t) \in \mathbf{C}^k(T)$ такая, что любой элемент линейного пространства решений (ПР) однородной системы (1) на отрезке T представим в виде произведения $\tilde{X}_d(t)c$, где c — вектор произвольных постоянных, то будем говорить, что это ПР конечномерно ($\dim\ker \Lambda_k < \infty$). Минимально возможное значение целочисленного параметра d назовем *размерностью* ПР ДАУ (1).

ПР однородной системы (1) бесконечномерно ($\dim\ker \Lambda_k = \infty$), если оно содержит бесконечное количество линейно независимых решений.

Определение 6. Пусть существует оператор $\tilde{\Omega}_l = \sum_{j=0}^{l} \tilde{L}_j(t)(d/dt)^j$, $t \in T$, где $\tilde{L}_j(t)$ суть $(n \times n)$-матрицы из $\mathbf{C}(T)$, со свойствами

1) для системы $\tilde{\Omega}_l u = 0$, $t \in T$, определен ЛРО;

2) $\Omega_l \circ \Lambda_k v = \breve{\Lambda}_k v\ \forall v \equiv v(t) \in \mathbf{C}^{l+k}(T)$, где $\tilde{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^{k} \tilde{A}_i(t) v^{(i)}(t)$, $\det \tilde{A}_k(t) \not\equiv 0$, $t \in T$;

3) на T определены изолированные точки t_j, $j = \overline{1,q}$, в которых $\det \tilde{A}_k(t_j) = 0$.

Тогда точки t_j называются ОТ системы (1).

Пример 3. Рассмотрим однородное ДАУ

$$\Lambda_1 x = \begin{pmatrix} \kappa(t-t_1)^i & \xi(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (t_2-t)^j \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0,1], \tag{18}$$

где $i,j \geq 1$, $t_1,t_2 \in T$, $\kappa \in \mathbf{R}^1$, $\xi(t)$ – функция из $\mathbf{C}^1(T)$. В определении 6 можно принять $\tilde{\Omega}_1 = \operatorname{diag}\{1,(d/dt)\}$, $\det \tilde{A}_1(t) = \kappa(t-t_1)^i(t_2-t)^j$, $t \in T$. ОТ $t_* = t_2$ имеет вид разрыва второго рода при любом j. В ОТ $t_* = t_1$ в зависимости от i поведение решений существенно отличается (см., например, [9–11]).

Если $\kappa = 0$ и ДАУ (18) рассматривается на отрезке $\tilde{T} = [\alpha_0,\beta_0] \subset T$, $t_2 \not\in \tilde{T}$, то система имеет решение типа Коши, где $d = 0$ при $f_1 \in \mathbf{C}^1(T)$, $f_2 \in \mathbf{C}^2(T)$ независимо от количества точек изменений ранга матрицы $A_1(t)$ (нулей функции $\xi(t)$).

Пример 4. Рассмотрим ДАУ

$$\Lambda_1 x = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T = [-1,1]. \tag{19}$$

Здесь $\operatorname{rank} A_1(t) = \mathrm{const} = 1$, $t \in T$. Умножая ДАУ на матрицу $L(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ и выражая x_2 через x_1, ДАУ расщепляем на дифференциальное и алгебраическое уравнения

$$(\gamma-2)t\dot{x}_1(t) + 2\gamma x_1(t) = \tilde{f}_1, \quad x_2(t) = \gamma t x_1(t) + \tilde{f}_2, \quad t \in T, \tag{20}$$

где $\tilde{f}_1 = 2f_1 + t\dot{f}_1 - \dot{f}_2$, $\tilde{f}_2 = f_2(t) - tf_1(t)$. При $\gamma = 2$ существует решение системы (19) типа Коши, где $d = 0$, индекс $l = 2$.

При $\gamma \neq 2$ свойства ДАУ качественно меняются. Система имеет ОТ $t_* = 0$ в смысле определения 6, где $\tilde{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt) \end{pmatrix} L(t)$, $\tilde{A}_1(t) = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -\gamma t & 1 \end{pmatrix}$, $\det \tilde{A}_1(t) = t(\gamma-2)$.

В однородной системе (19) формально $x_1(t) = c_1 t^{-\mu}$, где $\mu = 2\gamma/(\gamma-2)$, c_1 – произвольная константа. При $\gamma > 2$ имеем $\mu > 0$. В этом случае ненулевых решений однородного ДАУ (19) на T нет, $d = 0$. На любом отрезке $T_0 = [\alpha_0,\beta_0] \subset T$, $0 \not\in T_0$, оператор $\tilde{\Omega}_1$ является ЛРО, существует решение типа Коши, размерность ПР ДАУ (19) $d = 1$.

Рассмотрим влияние ОТ на разрешимость ДАУ (19). Для первого уравнения (20) имеем

$$\mathrm{d}_i[t\dot{x}_1(t) + \mu x_1(t) - \tilde{f}_1] = \begin{pmatrix} \mu & t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu+1 & t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu+2 & t & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ \ldots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g \\ g^{(1)} \\ g^{(2)} \\ \ldots \end{pmatrix} = 0,$$

где $g(t) = \tilde{f}_1(t)/(\gamma-2)$, $i \to \infty$. Формально разрешая эту систему как алгебраическую относительно функций x_1, $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$, …, для решения получим формулу

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i g^{(i)}(t)(-t)^i, \quad \nu_i = 1/\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+i). \tag{21}$$

Ряд (21) сходится при $\gamma > 2$ для любой функции $g(t) \in \mathbf{C}^A(T)$.

Иная ситуация при $\gamma < 2$. Например, при $\gamma = 1$ и произвольном свободном члене ДАУ не имеет решений. Необходимо выполнение условия $g^{(2)}(0) = 0$, так как здесь $\mu + 2 = 0$.

Из равенств (20) следует, что однородная система (19) имеет семейства аналитических решений $(x_1\ x_2)^\top = c_1(t^2\ t^3)^\top$ и семейство неаналитических решений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{X}_2(t)c = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ t\phi_1(t) & t\phi_2(t) \end{pmatrix} c, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2,$$

где $\phi_1(t) = \{0,\, t \in T_1;\, t^2,\, t \in T_2\}$, $\phi_2(t) = \{t^2,\, t \in T_1;\, 0,\, t \in T_2\}$, $T_1 = [-1,0]$, $T_2 = (0,1]$. Здесь (в смысле определения 5) размерность ПР $d = 2$. Любая начальная задача $\left(x_1(\vartheta)\ x_2(\vartheta)\right)^\top = \left(a\ \vartheta a\right)^\top$, $\vartheta \in T$, имеет бесконечное число решений ДАУ на T. Например, если $\vartheta \neq 0$, $\vartheta \in T_1$, то

$$x_1(t) = \{(a/\vartheta^2)t^2,\, t \in T_1;\, c_2t^2,\, t \in T_2\}, \quad x_2(t) = tx_1(t), \quad t \in T,$$

где c_2 произвольно.

Теорема 4. *Пусть в системе* (1)

1. *Матрицы* $A_i(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = \overline{0,k-1}$;

2. *ПР конечномерно* $(\dim\ker \Lambda_k < \infty)$.

Тогда для ДАУ (9) существуют $(\mathrm{m}\times\mathrm{m})$*-матрицы* $P(t), Q(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $\mathrm{m} = kn$, *такие, что* $\det\ P(t)Q(t) \neq 0\ \forall t \in T$,

$$\begin{gathered} \tilde{\mathrm{A}}(t)\dot{y} + \tilde{\mathrm{B}}(t)y = P(t)\mathrm{A}(t)Q(t)\dot{y} + [P(t)\mathrm{B}(t)Q(t) + P(t)\mathrm{A}(t)\dot{Q}(t)]y = \\ = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(t) & \tilde{A}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{A}_{22}(t) \end{pmatrix}\dot{y} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11}(t) & \tilde{B}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{B}_{22}(t) \end{pmatrix} y \quad \forall y(t) \in \mathbf{C}^1(T), \end{gathered} \tag{22}$$

где $\mathrm{x}(t) = Q(t)y(t)$, $\tilde{A}_{22}(t)$, $\tilde{B}_{22}(t)$ *суть* $([\mathrm{m}-d]\times[\mathrm{m}-d])$ *— верхнетреугольные блоки с идентичной блочной структурой, диагональ* $N(t)$ *содержит* l *квадратных нулевых блоков,* $\det\tilde{A}_{11}(t) \not\equiv 0$, $\det\ \tilde{B}_{22}(t) \not\equiv 0$ *на* T.

Доказательство. Если $\det \mathrm{A} \not\equiv 0$, $t \in T$, то теорема справедлива. Пусть $\det \mathrm{A} = 0\ \forall t \in T$. Тогда согласно лемме 1 существует $(\mathrm{m}\times\mathrm{m})$-матрица $L \in \mathbf{C}^A(T)$ такая, что

$$\det L \neq 0 \quad \forall t \in T, \quad L(\mathrm{A}\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{B}\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\mathrm{x}, \quad LA = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad LB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $([\mathrm{m}-r]\times\mathrm{m})$ – блок B_2 имеет полный ранг для любого $t \in T$, $r = \max\{\mathrm{rank}\ \mathrm{A},\, t \in T\}$, за исключением может быть конечного числа точек.

Если это не так, то $\mathrm{rank}\,(\mathrm{A}|\mathrm{B}) < \mathrm{m}\ \ \forall t \in T$, и согласно [6, теорема 3.1] имеем $\dim\ker\Lambda_k = \infty$. Произведем замену $\mathrm{x} = Ry$, где $R \in \mathbf{C}^A(T)$, $\det R \neq 0\ \forall t \in T$ и

$$B_2R = \begin{pmatrix} 0 & B_{22} \end{pmatrix}, \quad \det B_{22} \not\equiv 0, \quad t \in T.$$

При этом получим равенство

$$L\left(\mathrm{A}\frac{d}{dt}(Ry) + \mathrm{B}Ry\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $y = \left(y_1^\top\ \ y_2^\top\right)^\top$. Если $\det A_{11} \not\equiv 0$ на T, то теорема справедлива. В противном случае повторяем рассуждения для системы $A_{11}\dot{y}_1 + B_{11}y_1 = 0$, $t \in T$. За l шагов такого процесса мы исчерпаем систему, причем $\mathrm{l} \leq r + 1$, так как на каждом шаге к размерности блока B_{22} будут добавляться размерности блоков $B_{22}^1, B_{22}^2, \cdots, B_{22}^{\mathrm{l}}$, по меньшей мере, равные единице.

Следствие 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда

1. Число точек $t_j \in T$, $j = \overline{1,q}$ со свойством $\det\tilde{A}_{11}(t_j) = 0$, $\det\tilde{B}_{22}(t_j) = 0$, $t \in T$, конечно, и на отрезках $T_j = [\alpha_j,\beta_j] \subset (t_j,t_{j+1})$, $j = \overline{1,q-1}$, определены решения типа Коши, где точки t_j занумерованы по правилу $t_1 < \cdots < t_q$;

2. Существует оператор $\tilde{\Omega}_l$ из определения 6, и равенство $\det \tilde{A}_k(t_\star) = 0$, $t_\star \in T$, выполняется тогда и только тогда, когда справедливо одно из условий: $\det \tilde{A}_{11}(t_\star) = 0$ или $\det \tilde{B}_{22}(t_\star) = 0$.

Доказательство. Докажем п. 1 следствия. В силу аналитичности матриц $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$ в формуле (22) число точек t_j конечно. Выпишем две подсистемы:

$$\dot{y}_1 + J(t)y_1 = \tilde{g}_1, N(t)\dot{y}_2 + y_2 = \tilde{g}_2, \quad t \in T_j, \tag{23}$$

$J(t) = A_{11}^{-1}(t)\tilde{B}_{11}(t)$, $\quad N(t) = \tilde{B}_{22}^{-1}(t)\tilde{A}_{22}(t)$, $\quad \tilde{g}_1 = A_{11}^{-1}(t)[\tilde{g}_1 - \tilde{A}_{12}(t)\dot{y}_2 - \tilde{B}_{12}(t)y_2]$, $\quad \tilde{g}_2 = \tilde{B}_{22}^{-1}(t)g_2$, $g = (g_1^\top\ g_2^\top)^\top = P(t)(0^\top\ f^\top(t))^\top$. Тогда решение системы (9) на T_j имеет вид

$$\mathrm{x}(t,c) = Q(t)\begin{pmatrix} Y(t) \\ 0 \end{pmatrix}c + \int\limits_{\alpha_j}^{t} Q(t)\begin{pmatrix} Y(t)Y^{-1}(s) \\ 0 \end{pmatrix}\tilde{g}_1(s)ds + Q(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \breve{\Lambda}_{\varrho-1}g_2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $y_2(t) = \breve{\Lambda}_{\varrho-1}\tilde{g}_2 = \tilde{g}_2 + \mathcal{T}\tilde{g}_2 + \dots + \mathcal{T}^{\varrho-1}\tilde{g}_2$, $\mathcal{T} = -N(t)(d/dt)$, ϱ — количество нулевых блоков на диагонали матрицы $= \tilde{B}_{22}(t)$, $Y(t)$ — матрицант первой подсистемы (23), c — вектор произвольных постоянных. Из неособенности матриц $Q(t)$, $Y(t)$, $t \in T_j$, следует свойство $\operatorname{rank} Q(t)\begin{pmatrix} Y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = d$ $\forall t \in T_j$. Интегрируя по частям и приводя подобные в формуле (24), мы получим вектор-функцию $\psi(t)$ в виде формулы из равенств (11).

Докажем п. 2. Выпишем равенство

$$\omega_0 \circ \Lambda_k v = \tilde{\Lambda}_k v, \quad \omega_0 = \operatorname{diag}\{E_r, (d/dt)E_{n-r}\}L(t), \quad L(t)A_k(t) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $\tilde{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^{k} \tilde{A}_i(t)v^{(i)}(t)$, $\tilde{A}_k(t) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(t) \\ A_{k-1,2}(t) \end{pmatrix}$, $L(t)A_{k-1}(t) = \begin{pmatrix} A_{k-1,1}(t) \\ A_{k-1,2}(t) \end{pmatrix}$, $t \in T$, $L(t)$ — матрица из леммы 1 применительно к матрице $A_k(t)$. Размерность ПР оператора ω_0 равна $n - r \geq 1$. Согласно следствию 4 она суммируется на отрезках T_j с размерностью ПР оператора Λ_k. Если $\det \tilde{A}_k(t) \equiv 0$ $\forall t \in T$, то процесс повторяем, получая оператор ω_1. Размерность ПР дифференциального оператора порядка k, приводимого к нормальной форме, не превышает nk, и процесс построения операторов ω_i, $i \geq 0$ завершится за конечное число шагов χ. Искомый оператор $\Omega_\chi = \prod_{i=0}^{\chi-1}\omega_i$. Согласно формуле (24) $\chi = \varrho$.

Определение 7. Нули функции $\det \tilde{A}_{11}(t)$, $t \in T$, будем называть *дифференциальными* ОТ системы (1), а нули функции $\det \tilde{B}_{22}(t)$, $t \in T$, назовем *алгебраическими* ОТ системы (1).

Следствие 6. Пусть выполнены условия теоремы 4 и на отрезке T определена хотя бы одна алгебраическая ОТ. Тогда найдется свободный член $f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, при котором не существует решений системы (1) на T.

Доказательство очевидно. Сделаем замечания о влиянии дифференциальных ОТ на разрешимость ДАУ (1). Анонсируем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть*

1. *Выполнены условия теоремы* 4 *и на отрезке T определена хотя бы одна дифференциальная ОТ*;

2. *Однородное ДАУ* (1) *имеет нетривиальные решения. Тогда найдется свободный член $f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, при котором не существует решений системы* (1) *на T*.

5. СВЕДЕНИЯ О СВОЙСТВАХ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ИДУ

Введем для вырожденных систем ИДУ понятие, аналогичное ЛРО для ДАУ.

Определение 8. Если существуют операторы

$$\tilde{\Omega}_l = \sum_{j=0}^{\tilde{l}} \tilde{L}_j(t)(d/dt)^j, \quad \breve{\Omega}_r = \sum_{j=0}^{\breve{r}} \breve{R}_j(t)(d/dt)^j,$$

где $\tilde{L}_j(t), \breve{R}_j(t)$ суть $(n\times n)$-матрицы из $\mathbf{C}(T)$, обладающие свойствами

$$\tilde{\Omega}_l \circ (\Lambda_k + \mathcal{V})v = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})v, \quad (\Lambda_k + \mathcal{V}) \circ \breve{\Omega}_r v = (\breve{\Lambda}_k + \breve{\mathcal{V}})v \quad \forall v \equiv v(t) \in \mathbf{C}^{\nu+k}(T),$$

где $(\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})v = \sum_{i=0}^{k} \tilde{A}_i(t)v^{(i)} + \int_\alpha^t \tilde{K}(t,s)v(s)ds, \quad (\breve{\Lambda}_k + \breve{\mathcal{V}})v = \sum_{i=0}^{k} \breve{A}_i(t)v^{(i)} + \int_\alpha^t \breve{K}(t,s)v(s)ds,$
$\nu = \{\tilde{l}$ или $\breve{r}\}$, $\tilde{A}_i(t), \breve{A}_i(t)$ суть $(n\times n)$-некоторые матрицы из $\mathbf{C}(T)$,

$$\det \tilde{A}_k(t) \neq 0, \quad \det \breve{A}_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in T,$$

то они называются левым и правым регуляризирующими операторами (ЛРО и ПРО) для системы (2), а наименьшие возможные $\tilde{l}$, $\breve{r}$ называются ее индексами (левым и правым). Индекс оператора $\Lambda_k + \mathcal{V}$, $t \in T$, где $\det A_k(t) \neq 0$ $\forall t \in T$, полагается равным нулю.

Пример 5. Рассмотрим систему ИДУ

$$(\Lambda_1 + \mathcal{V} + \lambda\Phi)z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\dot{z}(t) + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}z(t) + \int_0^t (t-s)^\nu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} z(s)ds + \lambda\int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} z(s)ds = f,$$
$$t \in T = [0, 1],$$

где $z = (z_1 \ z_2)^\top$, $f = (f_1 \ f_2)^\top \in \mathbf{C}^{\nu+2}(T)$. Здесь в качестве ЛРО в смысле определения 8 можно принять оператор

$$\tilde{\Omega}_{\nu+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt)^{\nu+2} \end{pmatrix} L, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПР системы $\Lambda_1 x = 0, t \in T$, бесконечномерно (в качестве базиса можно взять набор вектор-функций $\phi_j = (t^j, -t^j)^\top$, $j = 0,1,\ldots$). ЛРО для оператора Λ_1 не существует. Умножим систему ИДУ на матрицу L. Второе уравнение новой системы имеет вид ИУ

$$\int_0^t (t-s)^\nu z_2(s)ds + \lambda\int_0^1 z_2(s)ds = g(t), \quad t \in T.$$

ИУ (следовательно, и наша система ИДУ) имеют решения при $\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда $(d/dt)^j g(t)\Big|_{t=0} = 0$, $g(t) = [f_2(t) - 4f_1(t)]$, $j = \overline{0,\nu}$.

Еще сложнее условия разрешимости выглядят при $\lambda \neq 0$. Для простоты предположим, что $\nu = 0$. Условие совместности ИУ имеет вид равенства $\lambda\int_0^1 z_2(s)ds = g(0)$. Дифференцируя ИУ по t, получаем $z_2(t) = \dot{g}(t)$, $t \in T$. Тогда из условия совместности получим равенства $\lambda\int_0^1 \dot{g}(s)ds = \lambda[g(1) - g(0)] = g(0)$. Итак, ИУ разрешимо тогда и только тогда, когда $(1+\lambda)g(0) - \lambda g(1) = 0$. При $\lambda = 0$ имеем условие $g(0) = 0$.

В отличие от ДАУ, существование ЛРО для вырожденной системы ИДУ не гарантирует ее разрешимость при сколь угодно гладких входных данных, причем в общем случае индекс ИДУ не ограничен числом m, так как ν можно задавать произвольно.

Существование ЛРО для системы $\Lambda_k x = 0$, $t \in T$, не гарантирует существование ЛРО для системы ИДУ (2), а следовательно, и для системы ИДУ (3).

Пример 6. Рассмотрим вырожденную систему ИДУ

$$(\Lambda_1 + \gamma\mathcal{V})y = A_1\dot{y}(t) + A_0 y(t) + \gamma\int_0^t A_1^\top y(s)ds = f, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = E_2, \quad t \in T = [0,1],$$

где $A_1^2 = 0$, $y = (y_1 \ y_2)^\top$, $f = (f_1 \ f_2)^\top \in \mathbf{C}^2(T)$. Для ДАУ $\Lambda_1 x = 0$, $t \in T$, в качестве ЛРО можно принять оператор $\Omega_2 = A_1(d/dt)^2 - A_0(d/dt)$. Если $\gamma \neq 1$, то индекс системы ИДУ $\tilde{l} = 2$. В качестве

ЛРО можно принять оператор $\tilde{\Omega}_2 = \omega\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\omega$, $\omega = \operatorname{diag}\{1, (d/dt)\}$. В определении 8 $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma - 1 & 0 \end{pmatrix}$. Решение

$$y = \left(y_1(t),\ f_2(t) - \gamma\int_0^t y_1(s)ds \right)^\top,$$

где $y_1(t) = [f_1(t) - \dot{f}_2(t)]/(1-\gamma)$, существует при любой $f \in \mathbf{C}^2(T)$ и единственно (ср. с примером 5). При $\gamma = 1$ индекс не определен и ПР системы $(\Lambda_1 + \gamma\mathcal{V})y = 0$, $t \in T$, бесконечномерно. В качестве базиса можно принять $\phi_j(t) = \left(-jt^{j-1}\ \ t^j\right)^\top$, $j = 1, 2, \ldots$. Для совместности системы ИДУ необходимо выполнение условия $f_1(t) - \dot{f}_2(t) = 0$, $t \in T$.

С учетом формул (8), (15) для системы ИДУ (2) по аналогии с определением 4 запишем i-продолженную систему $\mathrm{d}_i[(\Lambda_k + \mathcal{V})y - f] = 0$, $t \in T$, в виде равенства

$$\tilde{D}_i[\mathbf{A}, \mathcal{K}]\mathrm{y}_{i+k} + \int_\alpha^t \mathrm{d}_i[\mathcal{K}(t,s)]y(s)ds = \mathrm{d}_i[f(t)], \quad \tilde{D}_i[\mathbf{A}, \mathcal{K}] = D_i[\mathbf{A}] + \sum_{j=1}^i \mathcal{M}_i[\mathrm{Q}_{j-1}]\mathcal{E}_{-j}, \tag{25}$$

где $\mathcal{E}_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n(i+1-j)} & 0 \end{pmatrix}$, нулевые блоки в матрице $\mathcal{E}_{-j}$ уравнивают размеры слагаемых матриц, $\mathrm{Q}_{j-1} \equiv \mathrm{Q}_{j-1}(t) = \partial^{j-1}\mathcal{K}(t,s)/\partial t^{j-1}\Big|_{t=s}$.

Укажем условия, когда существование ЛРО для системы $\Lambda_k x = 0$, $t \in T$, гарантирует существование ЛРО для системы ИДУ и рассмотрим этот класс систем.

Теорема 6. *Пусть в системах* (2), (3)

1) $A_i(t)$, $f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = \overline{0,k}$, $\mathcal{K}(t,s)$, $\mathrm{K}(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$;

2) *для ДАУ* $\Lambda_k x = 0$, $t \in T$, *определен ЛРО* Ω_1 *со свойством* $1 \le k$.

Тогда

1. *Система* (2) *разрешима на* T *и все ее решения представимы в виде суммы*

$$y(t,c) = Y_d(t)c + \hat{\psi}(t), \quad \hat{\psi}(t) = \psi(t) + \hat{V}\psi, \quad \hat{V}\psi = \int_\alpha^t \hat{K}(t,s)\psi(s)ds, \tag{26}$$

где $Y_d(t) = [X_d(t) + \hat{V}X_d] \in \mathbf{C}^k(T)$, $(I + \breve{V})^{-1} = I + \hat{V}$, $\breve{V} = C_0(t)V + V \circ \mathcal{V}$, $C_0(t)$, V — *матрица и интегральный оператор из теоремы 3, матрица* $C_0(t) \equiv 0$, *если* $1 < k$, $\det \breve{Y}_{k-1}(\alpha) \ne 0$, $\breve{Y}_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[Y_d(t)]$, $\hat{K}(t,s)$ *есть* $(n \times n)$-*матрица,* $\partial^j \hat{K}(t,s)/\partial t^j\Big|_{t=s} = 0$ $\forall t \in T$, $j = \overline{0, k-1}$, c — *вектор произвольных постоянных*;

2. *Система* (3) *разрешима на* T *за исключением счетного множества значений параметра* λ *и все ее решения представимы в виде суммы*

$$z(t,c) = Z_d(t)c + \varphi(t), \quad \varphi(t) = \hat{\psi}(t) + \lambda\hat{\Phi}\hat{\psi}, \quad \hat{\Phi}\hat{\psi} = \int_\alpha^\beta \hat{\mathrm{K}}(t,s,\lambda)\hat{\psi}(s)ds, \tag{27}$$

где $Z_d(t) = [Y_d(t) + \lambda\hat{\Phi}Y_d] \in \mathbf{C}^k(T)$, $(I + \lambda\breve{\Phi})^{-1} = I + \lambda\hat{\Phi}$, $\breve{\Phi} = \hat{C}_0(t)\Phi + \hat{V} \circ \Phi$, $\hat{C}_0(t)$, $\hat{V}$ — *матрица и интегральный оператор из п.* 1 *теоремы,* $\hat{\mathrm{K}}(t,s,\lambda)$ *есть* $(n \times n)$-*резольвента оператора* $\breve{\Phi}$, c — *вектор произвольных постоянных*;

3. *ОТ систем* (1)–(3) *совпадают на* T.

Доказательстово. Докажем п. 1 утверждения теоремы. Запишем систему (2) в виде равенства $\Lambda_k y = -\mathcal{V}y + f$, $t \in T$, из которого согласно формуле (10) получаем систему ИУ Вольтерра II рода $y + \breve{V}y = X_d(t)c + \psi(t)$, $t \in T$. Используя формулу обращения $(I + \breve{V})^{-1} = I + \hat{V}$ (см. [22, с. 111]) убеждаемся в справедливости формулы (26).

Докажем п. 2. Запишем систему (3) в виде равенства $(\Lambda_k + \mathcal{V})z = -\lambda\Phi z + f$, $t \in T$. Из формулы (26) следует система ИУ Фредгольма II рода $z + \lambda\breve{\Phi}z = Y_d(t)c + \hat{\psi}$, $t \in T$, разрешая которую получаем формулу (27) (см. [22, с. 120]).

Третий пункт утверждения доказывается прямым вычислением. При действии на любую из систем (1)–(3) оператором Ω_l мы получаем систему с одинаковой матрицей при старшей производной искомой вектор-функции. Теорема 6 доказана.

Некоторые свойства частных случаев вырожденных систем ИДУ (3) описаны в [25–28]. Приведем простейший критерий выполнения условий теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть в ДАУ* (1) *матрицы* $A_i(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = \overline{0,k}$, *и выполнены условия*

1) $\mathbf{r}[A_k(t)] = \max\{\operatorname{rank} A_k(t),\ t \in T\} = r_k < n$, $\mathbf{r}[(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\ldots|A_{k-j}(t))] = r_k$, $1 \le j \le k-1$;

2) *в многочлене* $\xi(t;\lambda) = \det[\lambda A_k(t) + A_{k-j-1}(t)] = \mathbf{a}_0(t)\lambda^{\varrho} + \ldots$, *степень* $\varrho = r_k$.

Тогда

1. *Если* $\mathbf{a}_0(t) \ne 0\ \forall t \in T$, *то* $\operatorname{rank} A_k(t) = \mathrm{const}$ *на* T, *ДАУ* (1) *имеет индекс* $l = j$, *причем размерность ПР* $d = (k-j)n + r_k j$ (*верно и обратное*);

2. *Любая точка* $t_\star \in T$ *со свойством* $\mathbf{a}_0(t_\star) = 0$ *является ОТ*;

3. *Если* $\operatorname{rank}(A_k(t)|A_{k-1}(t)) = n\ \forall t \in T$, *то на* T *отсутствуют алгебраические ОТ*.

Доказательство. Для произвольного регулярного пучка постоянных матриц $\lambda A + B$, $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$, справедливо неравенство $\operatorname{rank} A \ge \deg\det(\lambda A + B)$, так как существуют неособенные матрицы P, Q со свойством $P(\lambda A + B)Q = \operatorname{diag}\{\lambda E_d + J, \lambda N + E_{n-d}\}$, где $\det(\lambda N + E_{n-d}) = 1\ \forall\lambda$.

Тогда из условия 2) теоремы следует равенство $\varrho = r_k = \mathrm{conts}\ \ \forall t \in T$. Следовательно, мы можем выбрать матрицы $L(t)$, $R(t)$ из леммы 1 таким образом, что в равенстве

$$L(t)[\lambda A_k(t) + A_{k-j-1}(t)]R(t) = \begin{pmatrix} \lambda A_{k,11}(t) & \lambda A_{k,12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{k-j-1,11}(t) & A_{k-j-1,12}(t) \\ 0 & A_{k-j-1,22}(t) \end{pmatrix}$$

$\det A_{k,11}(t) \ne 0$, $\det A_{k-j-1,22} \ne 0\ \forall t \in T$. Все нули функции $\mathbf{a}_0(t)$, $t \in T$, совпадают с нулями определителей $\det A_{k,11}(t)$, $\det A_{k-j-1,22}$, $t \in T$. В произведении $L(t)(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\ldots|A_{k-j}(t))$ последние $n - r_k$ строк нулевые, иначе $\operatorname{rank}(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\ldots|A_{k-j}(t)) > r_k$ и можно принять, что ЛРО $\Omega_j = \operatorname{diag}\{E_{r_k}, (d/dt)^j E_{n-r_k}\}L(t)$. Из следствия 4 получаем формулу для размерности ПР $d = nk - (n - r_k)j$.

Из вышесказанного следует справедливость п. 2 утверждения теоремы. Элементарно проверяется, что п. 3 утверждения верен, так как в теореме 4 на первом шаге процесса получаем $\det \tilde{A}_{11}(t) \not\equiv 0$, $\tilde{A}_{22}(t) \equiv 0$, $t \in T$, $\det \tilde{B}_{22}(t) \ne 0\ \forall t \in T$.

Пример 7. Рассмотрим ДАУ

$$\Lambda_2 x = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix}\ddot{x} + \begin{pmatrix} -2t^2 & t \\ -2t^3 & t^2 \end{pmatrix}\dot{x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x = f, \quad t \in T = [-1,1], \tag{28}$$

где $\mathbf{r}[A_2(t)] = 1$, $\mathbf{r}[(A_2(t)|A_1(t)] = 1$, $\xi(t;\lambda) = \det[\lambda A_2(t) + A_0(t)] = t(\gamma - 2)\lambda + \ldots$. Согласно теореме 7 ДАУ (28) имеет ОТ $t_\star = 0$, если $\gamma \ne 2$. Точка является особой также в смысле определения 6, где

$$\tilde{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt)^2 \end{pmatrix}L(t), \quad L(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2(t) = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -\gamma t & 1 \end{pmatrix}, \quad \det\tilde{A}_2(t) = t(\gamma - 2).$$

6. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Продемонстрируем на примере возможные эффекты наличия ОТ в области определения, влияющие на вычислительные процессы при решении ДАУ.

Пример 8. Рассмотрим задачу Коши для ДАУ и соответствующую неявную разностную схему (РС) Эйлера

$$\Lambda_1 x = A_1(t)\dot{x} + A_0(t)x = f(t), \quad x(\alpha) = a, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} t\zeta(t) & \zeta(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0(t) = \begin{pmatrix} \delta(t) & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$A_1(t_{i+1})\frac{v_{i+1} - v_i}{\tau} + A_0(t_{i+1})v_{i+1} = f(t_{i+1}), \quad v_0 = a,$$

где $t \in T$, $x = (x_1 \ x_2)^\top$, $f = (f_1 \ f_2)^\top$, a – заданный вектор, $\zeta(t)$, $\delta(t)$ – заданные функции из $\mathbf{C}^1(T)$, $\mathbf{w}(t) = \zeta(t) - \delta(t) \neq 0 \ \forall t \in T$, $i = 0,1,\ldots,\mathbf{n}-1$, $\tau = (\beta - \alpha)/\mathbf{n}$, $t_i = \alpha + i\tau$. Пусть $f \in \mathbf{C}^2(T)$. Второе уравнение ДАУ (29) перепишем в виде равенства $x_2 = -tx_1 + f_2$, $t \in T$. Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение ДАУ, получим формулу

$$x = \breve{\Lambda}_1 f = \frac{1}{\mathbf{w}(t)}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} 0 & -\zeta(t) \\ 0 & t\zeta(t) \end{pmatrix} \dot{f}\right], \quad t \in T.$$

Несмотря на произвольные изменения ранга матрицы $A_1(t)$, для ДАУ определен ЛРО. Можно принять, что $\Omega_2 = (d/dt)\breve{\Lambda}_1$. Если $\mathbf{w}(t) = 0 \quad \forall t \in T$, то $\dim\ker\Lambda_1 = \infty$, вектор-функции $\phi_j = (-t^j \ t^{j+1})^\top$, $j = 0,1,\ldots$, образуют базис в ПР. Изолированная точка $t_\star \in T : \mathbf{w}(t_\star) = 0$ является алгебраической ОТ.

Аналогично, в РС (29) $v_{2,i} = -t_i v_{1,i} + f_{2,i}$, где $v_i = (v_{1,i} \ v_{2,i})^\top$. Подставляя выражение для $v_{2,i}$ в первое разностное уравнение, получим формулы

$$v_{1,i+1} = \frac{\zeta_{i+1}}{\delta_{i+1}} v_{1,i} + \frac{1}{\delta_{i+1}}\left[f_{1,i+1} - \zeta_{i+1}\frac{f_{2,i+1} - f_{2,i}}{\tau}\right], \quad v_{2,i+1} = -t_{i+1}v_{1,i+1} + f_{2,i+1},$$

где $f_i = f(t_i)$, $\zeta_i = \zeta(t_i)$, $\delta_i = \delta(t_i)$. Если выполнены равенство $a = x(\alpha)$ и неравенство $|\zeta(t)/\delta(t)| < 1$, то справедлива оценка $\|v_i - x(t_i)\| = O(\tau)$, $i = \overline{0,\mathbf{n}}$, где $\|\cdot\|$ – произвольная норма в $\mathbf{R}^2$. В случае, когда $|\zeta(t)/\delta(t)| > 1$, $t \in [\alpha_0, \beta_0] \subseteq T$, справедливо соотношение $\|v_i - x(t_i)\| \to \infty$, $t_i \in [\alpha_0, \beta_0]$, $\mathbf{n} \to \infty$. Если $\mathbf{w}(t) \neq 0 \ \forall t \in T$, и $\delta(t_\star) = 0$, $t_\star \in T$, то по поведению векторов v_i, $t_i \to t_\star$, точку $t_\star$ ошибочно можно принять за ОТ.

Отметим еще один момент. Если выполнены соотношения $\mathbf{w}(t) = 0$, $\zeta(t) \neq 0 \ \forall t \in T$ и $f_1(t) \neq \zeta(t)\dot{f}_2(t)$, то ДАУ (29) не имеет решений. Но решения РС v_i определены и ограничены при любом i. И обратно, при $\delta(t) = 0 \ \forall t \in T$ решение ДАУ (29) существует и единственно, но найдется свободный член $f(t)$, когда v_i не существуют для любого i.

Для численных расчетов использовался метод эрмитовой сплайн-коллокации. На отрезке T задается сетка $\{t_i = \alpha + i\tau,\ i = 0,1,\ldots,\mathbf{n}-1,\ \tau = (\beta - \alpha)/\mathbf{n}\}$. На отрезке $[t_0, t_1]$ приближенное решение ДАУ (1) с начальными данными $\mathrm{a} = \left(a_0^\top \ a_1^\top \ \ldots \ a_{k-1}^\top\right)^\top$ ищется в виде многочлена $\mu_{k+q}(t) = \mu_{k-1}(t) + \mu_{k,q}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t - t_j)^j/j! + \sum_{j=k}^{k+q} \mathrm{c}_j(t - t_j)^j/j!$, где векторы c_j являются искомыми, и формируются выражения

$$D_q[\mathbf{A}(t)]\mathrm{d}_k[\mu_{k,q}(t)] = M_{k,q}(t)\mathrm{C}, \quad D_q[\mathbf{A}(t)]\mathrm{d}_k[\mu_{k-1}(t)] = M_{0,k}(t)\mathrm{a}, \xi_q(t) = \mathrm{d}_q[f(t)], \tag{30}$$

где $\mathrm{C} = \left(\mathrm{c}_k^\top \ \mathrm{c}_1^\top \ \ldots \ \mathrm{c}_{k+q}^\top\right)^\top$. Вычисляем выражения из формул (30) в точке $\bar{t} \in (t_0, t_1]$ и формируем систему алгебраических уравнений

$$M_{k,q}(\bar{t})\mathrm{C} = -M_{0,k}(\bar{t})\mathrm{a} + \xi_q(\bar{t})$$

размерности $n(q+1)$. Если ее решение C существует, то многочлен $\mu_{k+q}(t)$ удовлетворяет в точке $\bar{t}$ системе $D_q[\mathbf{A}(t)]\mathrm{d}_{k+q}[x] = \mathrm{d}_q[f]$. Решая эту систему, находим новые вектора $a_j = [\mu_{k+q}(t)]^{(j)}|_{t=t_1}$, $j = 0,1,\ldots,k-1$, и повторяем вычисления на отрезке $[t_1, t_2]$ и т.д. Число q рекомендуется выбирать по правилу $q = \mathrm{l} - 1$ либо $q = 1$, где l – индекс ДАУ. Особенностью этого метода является выполнение равенства $x(\overline{t}) = \mu_{k+q}(\overline{t})$, $x(t) = \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t) f^{(j)}(t)$, если ДАУ индекса l имеет нулевое ПР (см. теорему 3). Иначе говоря, решение ДАУ находится точно (независимо от шага сетки). Известно, что от численного процесса, описываемого формулами (30), можно перейти к (РС) (см. [29]). Тогда для ДАУ первого порядка РС при $q = 0$ совпадает с неявным методом Эйлера.

При тестовых расчетах применялись схемы при $q = 0{,}1$. Решалась задача Коши для ДАУ (19) с решением $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, t \in T_1 = [-1, 0]; \begin{pmatrix} e^t + c_2t^2 \\ e^{2t} + c_2t^3 \end{pmatrix}, t \in T_2(0, 1]\right\}$. Решению соответствуют начальные данные $\begin{pmatrix} x_1(-1) & x_2(-1) \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1/e & 1/e^2 \end{pmatrix}^\top$ и свободный член $(f_1; f_2) = (2e^{2t} + e^t(\gamma - 2t);$ $e^{2t}(2t + 1) - 2t^2e^t)$, где c_2 – произвольное число, если $\gamma = 1$, и $c_2 = 0$, если $\gamma = 2$. Задавалась сетка $t_i = -1 + i\tau$, $i = 0, 1, \ldots, \mathbf{n} - 1$, $\tau = 2/\mathbf{n}$, где число узлов $\mathbf{n}$ варьировалось от 10 до 10 000.

При $\gamma = 2$, $q = 0$ РС сходилась с эмпирической оценкой $O(\tau)$. Метод при $q = 1$ выдавал результаты на уровне ошибок округления. Если узел сетки при $\gamma = 1$, $q = 0$ совпадал с ОТ $t = 0$, то происходил авост. В обратном случае получали решение с эмпирической оценкой $O(\tau)$. Метод при $\gamma = 1$, $q = 1$ независимо от расположения узлов сетки демонстрировал сходимость на отрезке T_1 с оценкой $O(\tau^2)$ с переходом на какую-то другую ветку решения в узлах $t_i > 0$.

При $\gamma = 1$ проводились расчеты для однородной системы с начальными данными $x_1(-1) = 1$, $x_2(-1) = -1$. Здесь $x_1(t) = \{t^2, t \in T_1, x_1(t) = c_2t^2, t \in T_2\}$, $x_2(t) = tx_1(t)$, где $t \in T$. Если узел сетки схемы при $q = 0$ совпадал с ОТ, то происходил авост. В обратном случае метод сходился со скоростью $O(\tau)$ к аналитическому решению $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t^3 \end{pmatrix}$, $t \in T$. В случае схемы при $q = 1$ авоста не происходило, даже если узел сетки совпадал с особой точкой, и наблюдался численный процесс, аналогичный численному процессу при решении неоднородной системы. Ряд похожих эффектов влияния ОТ при численном решении ОДУ (в основном в нелинейном случае) описан в [30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.
2. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 1996.
3. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006.
4. *Lamour R., Marz R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Description: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH Co. KG, Germany, 2013.
5. *Белов А.А.* Дескрипторные системы и задачи управления / ред. А.А. Белов, А.П. Курдюков. М.: Физматлит, 2015. 270 с.
6. *Бояринцев Ю.Е.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / ред. Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. Новосибирск: Наука, 1998.
7. *Свиридюк Г.А., Загребина С.А.* Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем. 2010. Т. 3. № 1. С. 104–125.
8. *Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М.* Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Вопросы прикладной математики. Иркутск: Изд. СЭИ СО АН СССР, 1975. С. 140–152.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
10. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 2-е изд., дополненное. М.: Наука, 1966.
12. *Сидоров Н.А., Дрегля А.И.* Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с необратимым оператором в главной части и неклассическими начальными условиями. В кн: Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз., 183, ВИНИТИ РАН, М., 2020 С. 120–129.
13. *Sidorov N.A.* A study of the continuous solutions of the Cauchy problem in the neighborhood of a branch point // Sov. Math. (Iz. VUZ). 1976. V. 20. № 9. P. 77–87.

14. *Maerz R., Weinmuller E.B.* Solvability of Boundary Value Problems for Systems of Singular Differential-Algebraic Equations // SIAM J. Math. Anal. 1993. V. 24. № 1. P. 200–215. https://doi.org/10.1137/0524012
15. *Gorbunov V.K., Gorobetz A., Sviridov V.* The method of normal splines for linear implicit differential equations of second order // Lobachevskii J. Math. 2005. V. 20. P. 59–75.
16. *Marz R., Riaza R.* Linear differential-algebraic equations with properly stated leading term: Regular points // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 323. № 2. P. 1279–1299. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.038
17. *Estevez Schwarz D., Lamour R.* Diagnosis of singular points of structured DAEs using automatic differentiation // Numer. Algorithm. 2014. V. 69. № 4. P. 667–691. https://doi.org/10.1007/s11075-014-9919-8
18. *Lomov S.A.* Introduction to the General Theory of Singular Perturbations. MONOGRAPHS, V. 112 i. Am. Math. Soc. 1992.
19. *Samoilenko A.M., Samusenko P.F.* Asymptotic integration of singularly perturbed differential algebraic equations with turning points. Part I // Ukrains'kyi Mat. Zh. Vol. 2020. V. 72. № 12. P. 1669–1681. https://doi.org/10.37863/umzh.v72i12.6261
20. *Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.* Evaluation of the Index and Singular Points of Linear Differential-Algebraic Equations of Higher Order // J. Math. Sci. 2018. V. 231. Iss. 6. P. 827–845.
21. *Silverman L.M., Bucy R.S.* Generalizations of theorem of Dolezal // Math. System Theory. 1970. V. 4. P. 334–339.
22. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М: Наука, 1975.
23. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. 2-е изд., стереот. М.: Физматлит, 2002. 160 с.
24. *Лузин Н.Н.* К изучению матричной системы теории дифференциальных уравнений // Автомат. и телемех. 1940. № 5. С. 4–66.
25. *Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.* Linear Differential-Algebraic Equations Perturbed by Volterra Integral Operators // Different. Equat. 2017. V. 53. № 10. P. 1274–1287.
26. *Щеглова А.А.* Исследование и решение вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью замен переменных // Сиб. матем. журн. 1995. V. 36. № 6. P. 1435–1445.
27. *Chistyakova E.V., Chistyakov V.F.* Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // Appl. Numer. Math. 2020. V. 149. P. 43–51.
28. *Chistyakov V.F.* Improved Estimates of the Effect of Perturbations on the Solutions of Linear Differential-Algebraic Equations // Different. Equat. 2019. V. 55. P. 279–282.
29. *Булатов М.В., Чистяков В.Ф.* Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 4. С. 459–470.
30. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Численное интегрирование задач Коши с особыми точками. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2020. 076. 36 с.