**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**

*УДК 517.977*

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

**© 2023 г. Г. М. Абдуалимова[1,*], Н. А. Мамадалиев[2,3,**], М. Тухтасинов[2]**

*[1] 170100 Андижан, ул. Университетская, 129, Андижанский государственный университет, Узбекистан*

*[2] 100174 Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4,*
*Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан*

*[3] 100174 Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 9, Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан*

** e-mail: abduolimova81@inbox.ru*

*** e-mail: m_numana59@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.07.2022 г.
Переработанный вариант 07.01.2023 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

В статье рассмотрена линейная дифференциальная игра преследования при условии, что на управление убегающего накладывается интегральное ограничение, а преследователь использует импульсное управление. Эти импульсные воздействия на объект осуществляются в заранее заданных моментах времени, и соответствующее управление представляется при помощи дельта-функции Дирака. Изучаются линейные конфликты, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений, траектории которых имеют скачки в определенных моментах времени. Терминальное множество представляется в виде цилиндра в $n$-мерном евклидовом пространстве. Для решения поставленной задачи применяется метод разрешающей функции. Для доказательства достижения нижней грани используется теория опорных функций. Благодаря этому факту, вместо квазистратегии применяется почти стробоскопическая стратегия и указывается способ построения этой стратегии. Приведен пример нелинейной правой части. Библ. 20.

**Ключевые слова:** преследование, квазистратегия, почти стробоскопическая стратегия, преследователь, интегральное ограничение, терминальное множество, импульсное управление, опорная функция.

**DOI:** 10.31857/S0044466923070025, **EDN:** ZXGBVH

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории дифференциальных уравнений с аддитивно входящими обобщенными функциями, в частности, дельта-функцией Дирака, в значительной степени вызвано многочисленными приложениями в теории оптимального управления и дифференциальных игр [1–3]. К настоящему времени эта теория всесторонне разработана, а в монографии [4] доказаны важные теоремы теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

В работе [1] рассмотрены линейные дифференциальные игры преследования с импульсным управлением и геометрическим ограничением на управление игроков и на их комбинации. Применяя метод разрешающих функций, доказаны теоремы завершения преследования за конечное время. В явном виде указаны условия нахождения гарантированного времени и построение управления преследующего игрока для завершения преследования. Полученные результаты проиллюстрированы на конкретных контрольных примерах.

В работе [5] изучены линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями на управление обоих игроков. Для решения поставленных задач использованы идеи метода разрешающих функций в обобщенном виде, а именно, в матричном. Это позволило, естественно, в отличие от других исследований, использовать возможности преследующего игрока и терминального множества более полно для достижения поставленной цели.

Разрешения конфликтов при интегральных ограничениях на управление игроков и управления импульсного характера представляет определенный интерес. Работа [6] продолжает изучение игры, рассмотренной в работе [1] при интегральном ограничении вместо геометрического. В вышеуказанной работе с помощью метода разрешающих функций доказаны теоремы с достаточными условиями для завершения преследования за конечное время. Полученные результаты иллюстрированы на конкретных примерах. Особенно следует отметить, что применение полученных результатов к игре, описываемой простыми уравнениями, дает альтернативу, т.е. все пространство разделяется на две части, из точек одной части гарантируется возможность окончания игры, а из точек другой — убегания.

Работа [7] посвящена изучению дифференциальных игр, описываемых квазилинейными дифференциальными уравнениями цилиндрическим терминальным множеством, с геометрическими ограничениями на управление игроков. Если в работах [1—3] для завершения преследования были использованы квазистратегии, то в этой, при тех же предположениях, применен более узкий класс стратегии, а именно стробоскопический. При этом следует отметить, что разрешающая функция не зависит от управления убегающего, что обусловливает не реагировать на воздействия убегающего игрока в ходе движения. В связи с чем представляется возможность убегающему игроку оттянуть время окончания игры.

Изучение процессов с импульсным управлением, движение которых описывается различными видами системы дифференциальных уравнений, представляет как теоретический, так и практический интерес. В работе [8] рассмотрена задача управления объектом, описываемая функционально-дифференциальной системой с последействием общего вида с целью доставления предписанного значения заданному векторному функционалу. При этом воздействие на объект осуществляется импульсно, в заранее заданных моментах времени, тем самым траектория терпит разрыв первого рода.

В работах [1, 5, 6] управление преследователя строилось в виде “контруправления”. Однако для определения $\tau_K$ — момента переключения с одного закона на другой, необходима была информация в момент $t$ о всей предыстории управления убегающего. Поэтому, в целом, стратегию преследователя, реализующую окончание преследования, следует классифицировать как квазистратегию. В данной работе при тех же предположениях для завершения преследования использован более узкий класс, а именно, класс почти стробоскопических стратегий [7].

Работы [9, 10] посвящены изучению простых линейных дифференциальных игр преследования, в частности, контрольного примера Понтрягина для многих лиц при интегральных ограничениях на управления игроков. При этом существенно использован метод разрешающих функции А.А. Чикрия для обоснования правила параллельного сближения.

В работах [11—14] исследованы линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздывания. С помощью разрешающих функций установлены достаточные условия завершения игры за конечное время.

В статье [15] рассмотрены линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. Преследователи стремятся перевести состояние системы в начало координат, у убегающего цель противоположна. Получены достаточные условия для окончания игры.

В данной работе рассмотрены конфликтно-игровые задачи с точки зрения завершения преследования за конечное время. При этом воздействии на объект управление игроков имеет характер импульсного или интегрального ограничения. Пользуясь идеями работ [1], доказываются теоремы с достаточными условиями для завершения преследования из заданной точки за конечное время. Одной из отличительных черт данной работы является то, что преследующий игрок применяет стратегии из более узкого класса, а именно, стробоскопического. В конце работы приведен пример с нелинейной правой частью для иллюстрации результата.

## 2. МИНИМИЗАЦИЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Прежде чем сформулировать результат по минимизации функционала приведем некоторые сведения и определения.

**Определение 2.1** (см. [17, определение 11]). Функционал $J(v)$, заданный на некотором подмножестве $V$ банахового пространства $B$, называется *слабополунепрерывным снизу* в точке $v \in V$, если для любой последовательности $\{v_n\}$, которая слабо сходится к $v$ при $n \to \infty$, имеет место соотношение

$$J(v) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} J(v_n).$$

Функционал $J(v)$ слабополунепрерывен снизу на множестве $V$, если он слабополунепрерывен снизу в каждой точке $v \in V$.

**Определение 2.2.** Пусть $V$ – подмножество банахового пространства $B$. Многозначное отображение $W : V \to \Omega(R^d)$ назовем *слабополунепрерывным снизу* в точке $v \in V$, если для любой последовательности $\{v_n\}$, которая слабо сходится к $v$, имеет место неравенство

$$C(W(v), \psi) \le \varliminf_{n\to\infty} C\left(W(v_n), \psi\right)$$

при каждом $\psi \in R^d$, где $\Omega(R^d)$ – пространство, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространта $R^d$.

Многозначное отображение $W(v)$ слабополунепрерывно снизу на множестве $V$, если оно слабополунепрерывено снизу в каждой точке $v \in V$.

Здесь $C(F,\cdot) : R^d \to R^1$ – опорная функция непустого компактного подмножества $F$ пространства $R^d$ [18, лекция 3].

**Пример 2.1.** Пусть $W(v) = S_{\|v\|}(0)$. Тогда имеем $C(W(v), \psi) = \|v\|\|\psi\|$. Известно, что функционал $J(v) = \|v\|$ слабополунепрерывен снизу на подмножестве $V$ пространства $B$.

**Теорема 2.1** (см. [17, теорема 1]). *Всякий слабополунепрерывный снизу функционал $J(v)$ на слабокомпактном множестве $V \subset B$ ограничен снизу и достигает на $V$ своей нижней грани.*

**Лемма 2.1.** *Пусть $M \in \Omega(R^d)$ – выпуклое множество, $W : V \to \Omega(R^d)$ – выпуклозначное слабополунепрерывное снизу многозначное отображение, кроме того $0 \in \operatorname{int} W(v)$, $v \in V$, где $V$ – слабокомпактное подмножество банахового пространства $B$. Тогда функционал $\alpha(v)$, $v \in V$, определяемый следующим образом*:

$$\alpha(v) = \begin{cases} \max\{\alpha \ge 0 : \alpha M \cap W(v) \ne \emptyset\} & \textit{при} \quad 0 \notin M, \\ 1 \quad \textit{при} \quad 0 \in M, \end{cases} \tag{2.1}$$

*слабополунепрерывен снизу на множестве $V$.*

**Доказательство.** Так как при $0 \in M$ утверждение леммы очевидно, то далее предположим, что $0 \notin M$.

Пусть $v_* \in V$ и $\{v_n\}$ – произвольная последовальность из множества $V$, слабосходящаяся к элементу $v_*$. Введем следующее обозначение $\alpha_n = \alpha(v_n)$. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена снизу, то нижний предел $\varliminf_{n\to\infty} \alpha_n$ существует и его обозначим через $\alpha_\infty$. Выберем подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ последовательности $\{\alpha_n\}$, для которой верно равенство $\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha_\infty$. Покажем, что $\alpha(v_*) \le \alpha_\infty$.

Пусть для каждого $k$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\min_{\|\psi\|=1} \left\{\alpha_{n_k} C(M, \psi) + C(W(v_{n_k}), -\psi)\right\} = \alpha_{n_k} C\left(M, \psi_{n_k}\right) + C\left(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}\right) \ge 0.$$

Покажем, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ имеют место следующие равенства:

$$\alpha_{n_k} C\left(M, \psi_{n_k}\right) + C\left(W\left(v_{n_k}\right), -\psi_{n_k}\right) = 0. \tag{2.2}$$

Действительно, если для некоторого $k$ имеет место неравенство

$$\alpha_{n_k} C\left(M, \psi_{n_k}\right) + C\left(W\left(v_{n_k}\right), -\psi_{n_k}\right) > 0,$$

то ясно, что $\alpha_{n_k} C(M, \psi) + C(W(v_{n_k}), -\psi) > 0$ для любого $\psi$, $\|\psi\| = 1$. Следовательно, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\left(\alpha_{n_k} + \varepsilon\right) C(M, \psi) + C\left(W(v_{n_k}), -\psi\right) > 0$$

для любого $\psi$, $\|\psi\| = 1$, это означает, что

$$(\alpha_{n_k} + \varepsilon) M \cap W(v_{n_k}) \ne \emptyset,$$

которое противоречит определению числа $\alpha_{n_k}$ (см. (2.1)).

Отсюда в силу неравенства $C\left(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}\right) > 0$, $\alpha_{n_k} > 0$, следует, что

$$C\left(M, \psi_{n_k}\right) < 0. \tag{2.3}$$

Так как сфера $\psi : \|\psi\| = 1$ является компактным множеством, то у последовательности $\{\psi_{n_k}\}$ имеется подпоследовательность, сходящаяся к некоторому элементу $\psi_*$, $\|\psi_*\| = 1$, не умаляя общности, можно считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\{\psi_{n_k}\}$. Из равенства (2.2) и неравенства

$$\alpha(v_*)C\left(M, \psi_{n_k}\right) + C\left(W(v_*), -\psi_{n_k}\right) \geq 0$$

получим

$$\left(\alpha(v_*) - \alpha_{n_k}\right)C\left(M, \psi_{n_k}\right) + C\left(W(v_*), -\psi_{n_k}\right) - C\left(W\left(v_{n_k}\right), -\psi_{n_k}\right) \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$0 \leq \left(\alpha(v_*) - \alpha_{n_k}\right)C\left(M, \psi_{n_k}\right) + C\left(W(v_*), -\psi_{n_k}\right) - C\left(W\left(v_{n_k}\right), -\psi_{n_k}\right) \leq$$
$$\leq \left(\alpha(v_*) - \alpha_{n_k}\right)C\left(M, \psi_{n_k}\right) + C\left(W(v_*), -\psi_{n_k} + \psi_*\right) + C\left(W(v_*), -\psi_*\right) - C\left(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}\right).$$

Добавля и вычитая $C(W(v_{n_k}), -\psi_*)$ из последнего выражения, получим

$$\begin{aligned} 0 \leq \left(\alpha(v_*) - \alpha_{n_k}\right)C\left(M, \psi_{n_k}\right) + C\left(W(v_*), -\psi_{n_k} + \psi_*\right) + C\left(W(v_*), -\psi_*\right) - \\ - C\left(W(v_{n_k}), -\psi_*\right) + C\left(W\left(v_{n_k}\right), -\psi_*\right) - C\left(W\left(v_{n_k}\right), -\psi_{n_k}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Теперь, учитывая следующие неравенства:

$$\left|C\left(W(v_*), -\psi_{n_k} + \psi_*\right)\right| \leq \left|W(v_*)\right| \left\|-\psi_{n_k} + \psi_*\right\|,$$
$$C\left(W(v_*), -\psi_*\right) \leq \varliminf_{k\to\infty} C\left(W(v_{n_k}), -\psi_*\right),$$
$$\left|C\left(W(v_{n_k}), -\psi_*\right) - C\left(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}\right)\right| \leq \left|W\left(v_{n_k}\right)\right| \left\|\psi_* - \psi_{n_k}\right\|$$

и переходя к пределу при $k \to \infty$, из неравенства (2.4) имеем $0 \leq (\alpha(v_*) - \alpha_\infty)C(M, \psi_*)$.

Покажем, что при $k \to \infty$ строгое неравенство $C\left(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}\right) > 0$ остается. Действительно, имеем

$$0 < C\left(W(v_*), -\psi_*\right) \leq \varliminf_{k\to\infty} C\left(W(v_{n_k}), -\psi_*\right) \leq$$
$$\leq \varliminf_{k\to\infty}\left[C\left(W(v_{n_k}), \psi_{n_k} - \psi_*\right) + C\left(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}\right)\right] = \varliminf_{k\to\infty} C\left(W(v_{n_k}), -\psi_{n_k}\right).$$

Отсюда, в силу (2.2) следует, что $\alpha_\infty \geq \alpha(v_*)$, т.е. слабополунепрерывность снизу функционала $\alpha(v)$ на элементе $v_*$. Этим лемма доказана.

## 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz + u - \varliminf_{k\to\infty}, \quad z \in \mathbb{R}^d, \tag{3.1}$$

где $z$ – фазовый вектор, $u$, $v$ – параметры управления преследующего и убегающего игроков соответственно, $C$ – постоянная матрица порядка $d \times d$, $U$ – непустое компактное подмножество в $\mathbb{R}^d$, терминальное множество представляется бесконечным цилиндром вида $M = M^0 + M^1$, где $M^0$ – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^d$, $M^1$ – непустой компакт из ортогонального дополнения $L$ к $M^0$ в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Через $\pi$ обозначим оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^d$ на $L$, а через $e^{tC}$ – фундаментальную матрицу однородной части системы (3.1). Тогда, понятно, что $z \in M$ тогда и только тогда, когда $\pi z \in M^1$. В дальнейшем, этим фактом полностью воспользуемся. Пусть $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без конечных точек сгущения, т.е. любой отрезок вида $[a,b]$ содержит конечное число элементов этой последовательности, положим $\tau_0 = 0$. Тогда, например, импульсное воздействие преследователя в моментах $\tau_i$ времени представляется с помощью функции Дирака $\delta(t-\tau_i)$, т.е. его управление представляется в виде

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t-\tau_i), \quad t \geq 0,$$

где $u_i \in U$.

Через $B(i,\sigma)$ обозначим совокупность всех измеримых функций $v(\cdot) : [0, \tau_{i+1} - \tau_i] \to R^d$, удовлетворяющих условиям:

$$\int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \|v(t)\|^2 \, dt \leq \sigma^2.$$

После подстановки в правую часть уравнения (3.1) допустимых управлений игроков получим систему с правой частью с аддитивно входящей обобщенной функцией. Согласно [4, п. 1] эта система имеет решение при любом начальном условии

$$z(0) = z^0,$$

причем оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах $(\tau_i, \tau_{i+1})$, где $i \in N$, $\tau_0 = 0$. А решения в моментах времени $\tau_i$ могут иметь разрывы первого рода.

**Определение 3.1** (см. [19]). *Стратегией преследователя* назовем отображение $\mathbb{P}$, состоящее из совокупности отображений:

$$\mathbb{P}_i(\cdot,\cdot) : R^d \times B(i,\sigma) \to U.$$

**Определение 3.2.** *Стратегией убегаюшего* назовем отображение $\mathbb{E}$, состоящее из совокупности отображений:

$$\mathbb{E}_i(\cdot) : R^d \to B(i,\sigma).$$

Заданные начальная точка $z^0$ и пара стратегий $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ порождают единственную траекторию

$$z(t) = z\left(t; z^0, \mathbb{P}, \mathbb{E}\right), \quad t \geq 0.$$

Траектория $z(t)$ на полуинтервале $[0, \tau_1)$ определяется как решение задачи

$$\dot{z} = Cz - u_0\delta(t) + v_0(t), \quad z(0) = z^0,$$

где $v_0(\cdot) = \mathbb{E}_0(z^0)$, $u_0 = \mathbb{P}_0(z^0, v_0(\cdot))$.

Далее, траектория $z(t)$ из отрезка $[0, \tau_k]$ на полуинтервал $[\tau_k, \tau_{k+1})$ продолжается как решение следующей задачи:

$$\dot{z} = Cz - u_k\delta(t-\tau_k) + v_k(t), \quad z(\tau_k) = z(\tau_k - 0),$$

где $v_k(t) = \overline{v}(t-\tau_k)$, $\overline{v}(\cdot) = \mathbb{E}_k(z(\tau_k))$ и

$$u_k(t) = P_k\left(z(\tau_k), \overline{v}(\cdot))\right](t-\tau_k), \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

**Определение 3.3.** Игра (3.1), начинающаяся из начальной точки $z^0$, завершается к моменту $\tau_K$, если существует стратегия $\mathbb{P}$ преследующего игрока так, что $z(\tau_K; z^0, \mathbb{P}, \mathbb{E}) \in M$ для любой стратегии $\mathbb{E}$ убегающего игрока.

**Постановка задачи.** Определить условия, при выполнении которых для данной начальной точки $z^0 \notin M$ можно завершить преследования.

## 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается игра (3.1) при условии, что преследующий игрок применяет импульсное управление, убегающий имеет право применять измеримое управление $v(t)$, $t \geq 0$, с условием:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|v(t)\|^2 \, dt \leq \sigma^2,$$

где $\sigma$ — неотрицательное фиксированное число.

Пусть $v(\cdot) \in B(i, \sigma)$ — допустимое управление убегающего игрока. Рассмотрим множества

$$W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n - \tau_i)C} U - \int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau,$$

$$W_i(n) = \bigcap_{v(\cdot) \in B(i,\sigma)} W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n - \tau_i)C} U \overset{*}{-} G(n, \tau_i, \tau_{i+1}). \tag{4.1}$$

Здесь

$$G(n, \tau_i, \tau_{i+1}) = \left\{ x \in L : x = \int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v(\tau) d\tau, v(\cdot) \in B(i, \sigma) \right\},$$

где $n \in N$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. А через

$$A \overset{*}{-} B = \{x : x + B \subset A\} = \bigcap_{b \in B} (A - b)$$

будем обозначать геометрическую разность (разность Минковского) множеств $A$ и $B$.

**Лемма 4.1.** *Множества $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ являются выпуклыми компактными подмножествами подпространства $L$.*

**Доказательство.** Вначале покажем выпуклость множеств $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$. Пусть $x_1, x_2 \in G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ и $\lambda \in [0, 1]$. Тогда по определению множеств $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ существуют функции $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in B(i, \sigma)$ такие, что:

$$x_k = \int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Так как

$$\int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \|\lambda v_1(\tau) + (1-\lambda) v_2(\tau)\|^2 \, d\tau = \lambda^2 \int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \|v_1(\tau)\|^2 d\tau + 2\lambda(1-\lambda) \int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} v_1(\tau) v_2(\tau) d\tau +$$
$$+ (1-\lambda)^2 \int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \|v_2(\tau)\|^2 d\tau \leq \lambda^2 \sigma^2 + 2\lambda(1-\lambda)\sigma^2 + (1-\lambda)^2 \sigma^2 = \sigma^2,$$

и

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = \int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} (\lambda v_1(\tau) + (1-\lambda) v_2(\tau)) d\tau,$$

то

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in G(n, \tau_i, \tau_{i+1}).$$

В силу теоремы [20, теорема 6.4.3], замкнутый шар $S$ радиусом $\sigma$ с центром в нуле пространства $L_2\left[\tau_i, \tau_{i+1}\right]$ слабокомпактен. Отсюда легко получить компактность множеств $G\left(n, \tau_i, \tau_{i+1}\right)$. Лемма 4.1 доказана.

**Предположение 4.1.** Множества $W_i(n)$ непусты при всех $n$, $i$, $n \in N$, $i = 0,1,\ldots,n$.

В силу предположения 1 каждое из множеств $W_i(n)$ имеет внутренний элемент для всех $n$, $i$, $n \in N$, $i = 0,1,\ldots,n$, которые обозначим через $w_i(n)$. Пусть $w = w(n) = \{w_i(n)\}_{i=1}^n$, и положим

$$\xi(n, z, w) = \pi e^{(\tau_n - \tau_0)C} z + \sum_{i=0}^{n} w_i(n).$$

Зафиксируем его. Определим следующую функцию:

$$\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = \sup\left\{\alpha \geq 0 : \alpha\left[M^1 - \xi(n, z, w)\right] \cap \left[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)\right] \neq \emptyset\right\}. \tag{4.2}$$

Применяя результаты леммы 4.1 к функционалу $\alpha_i(n, z, v(\cdot), w), v(\cdot) \in B(i, \sigma)$, получим, что существует функция $v_i^*(\cdot) \in B(i, \sigma)$, удовлетворяющая равенству:

$$\inf_{v(\cdot) \in B(i,\sigma)} \alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w).$$

**Предположение 4.2.** Пусть выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w) \geq 1$$

при всех $n$, $i$, $n \in N$, $i = 0,1,\ldots,n$.

Введем следующее обозначение:

$$K = K(z, w) = \min\left\{ j \in \{0,\ldots,n\} : \sum_{i=0}^{j} \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w) \geq 1 \right\}. \tag{4.3}$$

Если $\xi(n, z, w) \in M^1$, то $\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = +\infty$ для $i, v \in B(i, \sigma)$, и в этом случае значение интеграла в соотношении (4.3) соответственно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство будет выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в фигурных скобках в (4.3) не выполняется ни при одном $j, j \in \{0,\ldots,n\}$, то положим $k = n + 1$.

Определим разрешающие функции [6]

$$\Lambda_i(n, z, w) = \begin{cases} \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w), \quad i = 0,1,\ldots,K-1, \\ 1 - \sum\limits_{j=0}^{K-1} \alpha_j(n, z, v_i^*(\cdot), w), \quad i = K, \\ 0, \quad i = K+1, K+2,\ldots,n. \end{cases} \tag{4.4}$$

Справедлива следующая

**Лемма 4.2.** *Пусть выполнены предположения* 4.1 *и* 4.2*, множества* $M^1$ *и* $U$ *выпуклы. Тогда*

$$\Lambda_i(n, z, w)\left[M^1 - \xi(n, z, w)\right] \cap \left[W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)\right] \neq \emptyset$$

*для* $i, i = 0, \ldots, n$.

**Доказательство.** Пусть $i = 0, 1, \ldots, K-1$, тогда из (4.4) получим $\Lambda_i(n, z, w) = \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w)$ и поэтому согласно (4.2) следует верность (4.5). При $i = K+1, \ldots, n$ имеем $\Lambda_i(n, z, w) = 0$, значит, условие (4.5) будет выполнено, поскольку множества $W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)$ содержат нулевой элемент в качестве внутреннего.

Теперь рассмотрим случай $i = K$. Покажем, что множество

$$\Gamma = \left\{\alpha \geq 0 : \alpha\left[M^1 - \xi(n, z, w)\right] \cap \left[W_i(n, v_i^*(\cdot)) - w_i(n)\right]\right\} \neq \emptyset$$

выпукло. По условию леммы множества $M^1 - \xi(n,z,w)$ и $W_i(n,v_i^*(\cdot)) - w_i(n)$ выпуклы. Допустим $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$,

$$x_1 \in \alpha_1\left[M^1 - \xi(n,z,w)\right] \cap \left[W_i(n,v_i^*(\cdot)) - w_i(n)\right],$$

$$x_2 \in \alpha_2\left[M^1 - \xi(n,z,w)\right] \cap \left[W_i(n,v_i^*(\cdot)) - w_i(n)\right].$$

Так как $M^1 - \xi(n,z,w)$ и $W_i(n,v_i^*(\cdot)) - w_i(n)$ выпуклы, то для любого $\lambda \in [0,1]$ имеет место

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in (\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2)\left[M^1 - \xi(n,z,w)\right] \cap \left[W_i(n,v_i^*(\cdot)) - w_i(n)\right],$$

из которого следует, что $\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 \in \Gamma$, значит, $\Gamma$ выпукло. Отсюда очевидно, что

$$\alpha\left[M^1 - \xi(n,z,w)\right] \cap \left[W_i(n,v_i^*(\cdot)) - w_i(n)\right] \neq \emptyset$$

для всех $\alpha$: $0 \le \alpha \le \alpha_K$. Но по (4.3), (4.4) $\Lambda_K(n,z,w) \le \alpha_K(n,z,v_i^*(\cdot),w)$, т.е. утверждение леммы справедливо и при $i = K$. Лемма 4.2 доказана.

**Теорема 4.1.** *Если для системы* (3.1) *выполнены предположения* 4.1 *и* 4.2*, множества* $M^1$, $U$ *выпуклы и* $K = K(z,w) < \infty$ *для начального положения* $z = z^0$ *и вышеуказанного набора* $w$*, то траекторию* $z(t)$ *системы* (3.1) *можно вывести на терминальное множество* $M$ *к моменту времени* $t = \tau_K$.

**Доказательство.** Для доказательства теоремы надо построить соответствующую стратегию преследователя $\mathbb{P}$, состоящую из совокупности отображений: $\mathbb{P}_i(\cdot,\cdot) : R^d \times B(i,\sigma) \to U$. Рассмотрим вначале случай, когда $\xi(K,z^0,w) \notin M$.

При $i = 0,1,\ldots,K$ отображение $\mathbb{P}_i(\cdot,\cdot)$ определим следующим образом: $\mathbb{P}_i(z^0,v(\cdot)) = u_i$, где $u_i$ удовлетворяет следующему включению:

$$\pi e^{(\tau_K-\tau_i)C}u_i - \int\limits_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \pi e^{(\tau_K-\tau_i-\tau)C}v(\tau)d\tau - w_i(K) \in \Lambda_i(K,z^0,w)\left(M^1 - \xi(K,z^0,w)\right). \tag{4.6}$$

Заметим, что в силу соотношений (4.1), (4.2), предположения 4.1 и леммы 4.2 включение (4.6) выполняется при некотором $u_i \in U$.

Для $i = K+1,\ldots,n$ в качестве $u_i$ выбираем решения уравнения

$$\pi e^{(\tau_K-\tau_i)C}u_i - \int\limits_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \pi e^{(\tau_K-\tau_i-\tau)}v(\tau)d\tau = w_i(K). \tag{4.7}$$

Это уравнение в силу предположения имеет решение $u_i \in U$.

Из формулы Коши с начальным условием $z(0) = z^0$ и свойств дельта-функции следует представление решения системы (3.1)

$$\begin{aligned}\pi z(\tau_K) &= \pi e^{(\tau_K-\tau_0)C}z^0 + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_K} \pi e^{(\tau_K-\tau)C}(u(\tau) - v(\tau))d\tau = \\ &= \pi e^{(\tau_K-\tau_0)C}z^0 + \sum_{i=1}^{K}\pi e^{(\tau_K-\tau_i)C}u_i - \int\limits_{\tau_0}^{\tau_K}\pi e^{(\tau_K-\tau)C}v(\tau)d\tau = \\ &= \pi e^{(\tau_K-\tau_0)C}z^0 + \sum_{i=1}^{K}\left[\pi e^{(\tau_K-\tau_i)C}u_i - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\pi e^{(\tau_K-\tau)C}v(\tau)d\tau\right].\end{aligned} \tag{4.8}$$

Прибавим и вычтем из правой части равенства (4.8) величину $\sum_{i=1}^{K} w_i(K)$. Учитывая выпуклость множества $M^1$ и выбор управления $u(t)$, $t \geq 0$ (4.6), (4.7) получим

$$\pi z(\tau_K) \in \xi(K, z^0, w)\left[1 - \sum_{i=1}^{K} \Lambda_i\left(K, z^0, v(\cdot), w\right)\right] + \sum_{i=1}^{K} \Lambda_i\left(K, z^0, v(\cdot), w\right) M^1 = M^1.$$

А это означает $z(\tau_K) \in M$, т.е. игра преследования завершена.

Пусть теперь $\xi(K, z^0, w) \in M$. Тогда в качестве векторов скачков $u_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, K$ выбираем решения уравнения (4.7). В этом случае из представления (4.8) следует включение $\pi z(\tau_K) \in M^1$.

## 5. ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим следующую конфликтно-управляемую задачу

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left(|v|^2 + 1\right) z_2 + v, \\ \dot{z}_2 &= u, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $z_1, z_2, v, u \in R^d$.

Предположим, что преследователь может воздействовать на систему (5.1) только в моменты $\{\tau_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, $\tau_0 = 0$ и его воздействие в эти моменты имеет импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \tag{5.2}$$

где вектор скачков $u_i$ выбирается из единичного шара $S_1(0)$ с центром в нуле пространства $R^d$.

Управлением убегающего игрока являются $d$ — мерные измеримые вектор функции $v(\cdot)$, которые при каждом $i, i = 0, 1, \ldots$, удовлетворяют интегральному ограничению

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq \sigma^2. \tag{5.3}$$

Задача преследователя состоит в том, чтобы, определенным образом выбирая управления $u_i \in U$, за конечное время вывести траекторию системы (5.1) на цилиндрическое терминальное множество $M$, которое имеет вид

$$M = M^0 + M^1,$$

где $M^0 = \left\{(0, z_2) : z_2 \in R^d\right\}$, $M^1$ – подмножество подпространства $M^{0\perp}$.

**Утверждение 5.1.** *Если* $\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n \to \infty$ *(без конечных точек сгущения) и* $M^1$ *— выпуклое компактное множество, то в игре* (5.1) *возможно завершение преследования из любой начальной точки* $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in R^{2d}$.

**Доказательство.** Сначала рассмотрим начальные точки вида $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, где $z_2^0 = 0$. Через $\pi$ обозначим оператор ортогонального проектирования и по определению, положим $\pi(z_1, z_2) \doteq z_1$. Легко показать, что

$$W_i(v(\cdot)) = S_{\|v(\cdot)\|^2 + \tau_{i+1} - \tau_i}\left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} v(\theta) d\theta\right).$$

Так как

$$\left|\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} v(\theta)d\theta\right| \le \|v(\cdot)\|\sqrt{\tau_{i+1}-\tau_i}$$

отсюда

$$\|v(\cdot)\|\sqrt{\tau_{i+1}-\tau_i} < \|v(\cdot)\|^2 + \tau_{i+1}-\tau_i,$$

то $0 \in \operatorname{int} W_i(v(\cdot))$.

Кроме того, многозначное отображение $W_i(v(\cdot))$ является слабополунепрерывно снизу на слабокомпактном множестве (5.3).

Пусть $\|h_0\| = \min\limits_{h\in M-z_1^0}\|h\|$. Очевидно, минимум функционала $\alpha_i(v(\cdot))$ достигается при

$$v(\vartheta) = -x\frac{\overrightarrow{h_0}}{\|h_0\|}, \quad 0 \le x \le \sigma,$$

где $x$ пока неопределенное число. Тогда имеем

$$\alpha_i(v(\cdot)) = \frac{x^2 + \tau_{i+1}-\tau_i - x\sqrt{\tau_{i+1}-\tau_i}}{\|h_0\|},$$

$$\min\alpha_i(v(\cdot)) = \min_{0\le x\le\sigma}\frac{x^2 + \tau_{i+1}-\tau_i - x\sqrt{\tau_{i+1}-\tau_i}}{\|h_0\|}.$$

Легко показать, что

$$\min\alpha_i(v(\cdot)) = \begin{cases}\dfrac{3(\tau_{i+1}-\tau_i)}{4\|h_0\|} & \text{при} \quad \tau_{i+1}-\tau_i \le 2\sigma,\\ \dfrac{\sigma^2 + \tau_{i+1}-\tau_i - \sigma\sqrt{\tau_{i+1}-\tau_i}}{\|h_0\|} & \text{при} \quad \tau_{i+1}-\tau_i > 2\sigma.\end{cases}.$$

В силу $\tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$ и

$$\sigma^2 + \tau_{i+1}-\tau_i - \sigma\sqrt{\tau_{i+1}-\tau_i} = \left(\sqrt{\tau_{i+1}-\tau_i} - \sigma\right)^2 + \sigma\sqrt{\tau_{i+1}-\tau_i} > \sqrt{2\sigma}\sigma$$

следует, что существует натуральное число $K$ :

$$\sum_{i=1}^{K-1}\min\alpha_i(v(\cdot)) < 1, \quad \sum_{i=1}^{K}\min\alpha_i(v(\cdot)) \ge 1.$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены. Значит, в рассматриваемом случае утверждение доказано.

Теперь рассмотрим случай $z_2^0 \ne 0$. Пусть $[a]$ означает целую часть, а $\{a\}$ – дробную часть действительного числа $a$. Введем обозначения:

$$m = \left[\left|z_2^0\right|\right], \quad u_i^0 = -\frac{z_2^0}{\left|z_2^0\right|}, \quad i = 0,\dots,m-1, \quad u_m^0 = -\left\{\left|z_2^0\right|\right\}\frac{z_2^0}{\left|z_2^0\right|}.$$

Стратегии преследователя $\mathbb{P}$ построим следующим образом:

$$u_i = \mathbb{P}_i(z^0, v(\cdot))(t-\tau_i), \quad \tau_i \le t < \tau_{i+1}, \quad i = 0,\dots,m.$$

Тогда получается $z_2(\tau_{m+1}-0) = 0$. Теперь исходя из полученного начального положения $z^0 = \left(z_1(\tau_{m+1}-0), 0\right)$ построим далее $\mathbb{P}_i(\cdot,\cdot)$, $i = m+1,\dots$ и, из предыдущих рассуждений следует, что существует натуральное число $K$, что: $z(\tau_K) \in M$. Этим утверждение доказано.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 212–224.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
4. *Филиппов А.В.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
5. *Чикрий А.А., Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 290–301.
6. *Тухтасинов М.* Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2016. Т. 22. № 3. С. 273–282.
7. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* О достаточных условиях разрешимости игровых задач сближения в классе стробоскопических стратегий // Теория оптимальных решений. 2005. № 4. С. 49–55.
8. *Максимов В.П.* Управление функционально-дифференциальной системой в условиях импульсных возмущений // Изв. вузов. Матем. 2013. № 9. С. 70–74.
9. *Samatov B.T.* Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. I // Cybernetics and Systems Analysis. 2013. V. 49. № 5. P. 756–767.
10. *Samatov B.T.* The Resolving Functions Method for the Pursuit Problem with Integral Constraints on Controls // J. of Automation and Information Sciences. USA: Begell House Inc. 2013. V. 45. № 8. P. 41–58.
11. *Мамадалиев Н.А.* Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков // Изв. вузов. Матем. 2020. № 3. С. 12–28.
12. *Мамадалиев Н.* Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сиб. матем. журнал. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148.
13. *Мамадалиев Н.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздываний // Матем. заметки. 2012. Т. 5. С. 750–760.
14. *Мамадалиев Н.* О задаче преследования для линейных дифференциальных игр с различными ограничениями на управления игроков // Дифференц. ур-ния 2012. Т. 48. № 6. С. 860–873.
15. *Ibragimov G.I.* On a Multiperson pursuit problem with integral constraints on the controls of the players // Math. N. 2001. V. 70. № 2. P. 181–191.
16. *Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц.* Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 324–333.
17. *Васильев Ф.П.* Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во Московского университета. 1974.
18. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высш. школа, 2001.
19. *Азамов А.* Двойственность линейных дифференциальных игр преследования // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 4. С. 777–779.
20. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.