УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПО ОТЫСКАНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

К. Б. Сабитов[1,2,*]

[1] *450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Россия*

[2] *453103 Стерлитамак, пр-т Ленина, 49, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии, Россия*

**e-mail: sabitov_fmf@mail.ru*

Поступила в редакцию 07.01.2023 г.
Переработанный вариант 25.02.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Приводятся постановки обратных задач для уравнения Гельмгольца по отысканию его правой части с дополнительным интегральным условием типа Самарского–Ионкина и обоснование их корректности в смысле Адамара в классе регулярных решений. Единственность решений поставленных задач доказана на основании интегральных тождеств. Методами разделенных переменных и интегральных уравнений решения задач построены в явном виде. Библ. 19.

Ключевые слова: уравнение эллиптического типа, обратные задачи, интегральное условие, метод интегральных тождеств, единственность, существование, ряд, интегральное уравнение, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0044466923070141, **EDN:** VTCYGA

1. ВВЕДЕНИЕ

В области $D = \{(x,y) | 0 < x < l,\ 0 < y < \beta\}$ рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$\mathcal{L}u(x,y) \equiv u_{xx} + u_{yy} - b(x,y)u = F(x,y) = f(x)g(y), \tag{1}$$

где $b(x,y)$ – заданная в области D функция, и поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти пару функций $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,l) \cap L(0,l), \tag{3}$$

$$\mathcal{L}u(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D, \tag{4}$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0, \quad 0 \le y \le \beta, \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,\beta) = h(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{6}$$

$$\int_0^\beta u(x,y)g(y)dy = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{7}$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $h(0) = h(l) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, запись $f(x) \in C(0,l) \cap L(0,l)$ означает, что функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(0,l)$ и интегрируема по модулю на $[0,l]$.

Задача 2. Найти функции $u(x, y)$ и $g(y)$, удовлетворяющие условиям (2), (4)–(6) и, кроме того,

$$g(y) \in C(0, \beta) \cap L(0, \beta), \tag{8}$$

$$\int_0^l u(x, y) f(x) dx = \chi(y), \quad 0 \le y \le \beta, \tag{9}$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$ и $\chi(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $h(0) = h(l) = \varphi(0) = \varphi(l) = 0$,

$$\int_0^l h(x) f(x) dx = \chi(\beta), \quad \int_0^l \varphi(x) f(x) dx = \chi(0). \tag{10}$$

Целью настоящей работы являются постановка обратных задач для эллиптического уравнения по определению его правой части в прямоугольной области и обоснование их корректности в классе классических решений. В известных монографиях [1–10] и других работах единственность решения обратных задач устанавливается исходя из построения явного решения прямой задачи с дальнейшим применением метода последовательных приближений или с применением теории прямых и обратных спектральных задач, или переходя к прямой задаче для более сложного дифференциального уравнения с нагруженными слагаемыми (см. [11]).

В настоящей статье, следуя работе [12], где впервые для эволюционных уравнений установлены теоремы единственности и устойчивости решений обратных задач определения правой части по финальному наблюдению, методом интегральных тождеств установлены теоремы единственности решения обратных задач 1 и 2 для уравнения (1) по определению правой части и в случае, когда $b(x, y) = \mathrm{const}$, методами разделения переменных и интегральных уравнений Фредгольма решения поставленных задач построены в явном виде.

Отметим, что в [13] для операторного уравнения второго порядка

$$u''(t) - Au(t) = \Phi(t) p, \quad 0 < t < T, \tag{11}$$

что соответствует эллиптическому случаю, изучается обратная задача по определению пары $(u(t), p)$ по следующим граничным условиям:

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u(T) = u_2, \tag{12}$$

где $u(t) \in C^2([0, T]; H)$, $p \in H$, H – банаховое пространство, A – оператор, который действует в H, линеен, замкнут и имеет плотную область определения $D(A)$, $\Phi(t)$ – известная функция. Здесь при условии, когда H – гильбертово, оператор A самосопряжен и положительно определен и $\Phi(t) \in C^1[0, T]$, $\Phi(0) \neq 0$, и функция $\Phi(t)$ не меняет знака на $[0, T]$. Доказано, что обратная задача (11) и (12) имеет единственное решение в указанном выше классе.

В [14] изучена такая же обратная задача, где вместо $u(T) = u_2$ дополнительным условием является значение решения во внутренней точке интервала $(0, T)$. Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи.

В [15], [16] изучена обратная задача для эллиптических уравнений по определению их правой части в более общей постановке, чем задача 1. Здесь в качестве дополнительного условия задан след решения прямой задачи на отрезке внутри прямоугольной области. В [15] для уравнения Пуассона доказаны теоремы существования и единственности при достаточно жестких ограничениях на заданные функции и прямоугольную область. В [16] для уравнения Гельмгольца показана справедливость альтернативы Фредгольма задачи типа 1. В указанных выше работах (и других) решения поставленных задач не построены в явном виде в классе функций (2) и (3).

Введение дополнительных интегральных условий в виде (7) и (9) типа Самарского–Ионкина (см. [17]) вместо финального условия позволяет установить напрямую единственность решения и построить решение в явном виде.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ 1 И 2

Теорема 1. *Пусть* $b(x, y) \in C(D) \cap L(D)$, $b(x, y) \ge 0$ *в* D *и* $g(y) \in C(0, \beta) \cap L(0, \beta)$ *и* $g(y) \neq 0$ *на* $(0, \beta)$. *Тогда если существует решение обратной задачи* (2)–(7)*, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ и $f(x)$ – решение однородной задачи 1, где $\varphi(x) = h(x) = \psi(x) \equiv 0$. В области D рассмотрим тождество

$$u\mathcal{L}u \equiv (uu_x)'_x + (uu_y)'_y - u_x^2 - u_y^2 - b(x,y)u^2 = uf(x)g(y). \tag{13}$$

Проинтегрируем тождество (13) по области $D_{\varepsilon,\delta} = \{(x,y) | \varepsilon < x < l - \varepsilon,\ \delta < y < \beta - \delta\}$, где ε и δ – достаточно малые положительные постоянные. Затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, получим

$$\int_D \left(u_x^2 + u_y^2 + b(x,y)u^2\right)dxdy = -\int_D uf(x)g(y)dxdy = -\int_0^l f(x)\left(\int_0^\beta u(x,y)g(y)dy\right)dx = 0. \tag{14}$$

Отсюда при условии $b(x,y) \ge 0$ в D следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в D. Тогда из уравнения (1) при $g(y) \ne 0$ уже вытекает, что $f(x) \equiv 0$.

Теорема 2. *Пусть* $b(x,y) \in C(D) \cap L(D)$, $b(x,y) \ge 0$ *в* D *и* $f(x) \in C(0,l) \cap L(0,l)$ *и* $f(x) \ne 0$ *на* $(0,l)$. *Тогда если существует решение обратной задачи* 2, *то оно единственно.*

Справедливость данного утверждения следует из равенства (14), где правая часть имеет вид

$$-\int_D uf(x)g(y)dy = -\int_0^\beta g(y)\left(\int_0^l u(x,y)f(x)dx\right)dy = 0.$$

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В дальнейшем установим теоремы существования решений задач 1 и 2, когда $b(x,y) = \text{const} = b \ge 0$. В постановках обратных задач 1 и 2 прямой задачей является задача Дирихле, т.е. задача (2), (4)–(6). В [18] методом разделения переменных доказана следующая

Теорема 3. *Если* $b(x,y) \equiv \text{const} = b \ge 0$, $\varphi(x)$, $h(x) \in C^3[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = 0$, $h(0) = h''(0) = h(l) = h''(l) = 0$, $F(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C_x^1(\overline{D})$, $F(0,y) = F(l,y) = 0$, $0 \le y \le \beta$, *то существует единственное и устойчивое решение задачи* (2), (4)–(6) *и оно определяется формулой*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^\infty u_k(y)X_k(x), \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} u_k(y) = \varphi_k \frac{\operatorname{sh}\lambda_k(\beta - y)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + h_k\frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + \frac{1}{2\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta}[F_{1k}(0)\operatorname{sh}\lambda_k(\beta - y) + F_{2k}(\beta)\operatorname{sh}\lambda_k y] - \\ - \frac{1}{2\lambda_k}(F_{1k}(y) + F_{2k}(y)), \end{gathered} \tag{16}$$

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l},$$

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x)X_k(x)dx, \quad h_k = \int_0^l h(x)X_k(x)dx,$$

$$F_{1k}(y) = \int_y^\beta F_k(t)e^{-\lambda_k(t-y)}dt, \quad F_{2k}(y) = \int_0^y F_k(t)e^{-\lambda_k(y-t)}dt,$$

$$F_k(y) = \int_0^l F(x,y)X_k(x)dx, \quad \lambda_k^2 = \mu_k^2 + b.$$

В дальнейшем будем считать, что $\mu_k^2 + b > 0$ при всех $k \ge 1$, так как если $b < 0$, то, начиная с некоторого номера k_0, все $\mu_k^2 + b > 0$.

При $F(x,y) = f(x)g(y)$ функции $F_{1k}(y)$ и $F_{2k}(y)$ принимают вид

$$F_{1k}(y) = f_k g_{1k}(y), \quad F_{2k}(y) = f_k g_{2k}(y),$$

$$g_{1k}(y) = \int_y^\beta g(t)e^{-\lambda_k(t-y)}dt, \quad g_{2k}(y) = \int_0^y g(t)e^{-\lambda_k(y-t)}dt, \tag{17}$$

$$f_k = \int_0^l f(x)X_k(x)dx.$$

Теперь функцию (15) удовлетворим нелокальному условию (7):

$$\int_0^\beta \sum_{k=1}^\infty u_k(y)X_k(x)g(y)dy = \sum_{k=1}^\infty X_k(x)\int_0^\beta g(y)u_k(y)dy = \psi(x) = \sum_{k=1}^\infty \psi_k X_k(x), \tag{18}$$

где

$$\psi_k = \int_0^l \psi(x)X_k(x)dx.$$

Тогда из равенства (18) получим равенство для нахождения коэффициентов f_k :

$$\int_0^\beta g(y)u_k(y)dy = \psi_k, \tag{19}$$

где функция (16) с учетом (17) примет вид

$$u_k(y) = \varphi_k \frac{\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + h_k\frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + \frac{f_k}{2\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta}(g_{1k}(0)\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y) + g_{2k}(\beta)\operatorname{sh}\lambda_k y) - \\ - \frac{f_k}{2\lambda_k}(g_{1k}(y) + g_{2k}(y)). \tag{20}$$

Используя формулу (20), вычислим интеграл

$$\int_0^\beta g(y)u_k(y)dy = \frac{\varphi_k}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}\int_0^\beta g(y)\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y)dy + \frac{h_k}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}\int_0^\beta g(y)\operatorname{sh}\lambda_k y dy + \\ + \frac{f_k}{2\lambda_k}\left[\frac{g_{1k}(0)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}\int_0^\beta g(y)\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y)dy + \frac{g_{2k}(\beta)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}\int_0^\beta g(y)\operatorname{sh}\lambda_k y dy - \int_0^\beta g(y)[g_{1k}(y) + g_{2k}(y)]dy\right]. \tag{21}$$

Если $g(y) \equiv 1$, то равенство (21) принимает вид

$$\int_0^\beta u_k(y)dy = \varphi_k\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1}{\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + h_k\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1}{\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + \\ + \frac{f_k}{2\lambda_k}\left[g_{1k}(0)\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1}{\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + g_{2k}(\beta)\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1}{\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta} - \frac{2}{\lambda_k}\left(\beta - \frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k}\right)\right] = \\ = \varphi_k\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1}{\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + h_k\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1}{\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + \frac{f_k}{\lambda_k^2}\left[\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k}\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + \frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k} - \beta\right] = \\ = \varphi_k\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1}{\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + h_k\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1}{\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + \frac{f_k}{\lambda_k^2}\left[\frac{2(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1)}{\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k\beta} - \beta\right] = \\ = (\varphi_k + h_k)\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k\left(1+e^{-\lambda_k\beta}\right)} + \frac{f_k}{\lambda_k^2}\left(\frac{2}{\lambda_k}\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{1+e^{-\lambda_k\beta}} - \beta\right). \tag{22}$$

С учетом вычисленного интеграла (22) равенство (19) примет вид

$$\frac{f_k}{\lambda_k^2}\left(\frac{2}{\lambda_k}\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{1+e^{-\lambda_k\beta}}-\beta\right)=\psi_k-(\varphi_k+h_k)\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k\left(1+e^{-\lambda_k\beta}\right)}. \tag{23}$$

Отсюда находим неизвестные коэффициенты

$$f_k=\frac{\lambda_k^2}{\Delta_k(\beta)}\left[\psi_k-(\varphi_k+h_k)\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k\left(1+e^{-\lambda_k\beta}\right)}\right], \tag{24}$$

где

$$\Delta_k(\beta)=\frac{2}{\lambda_k}\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{1+e^{-\lambda_k\beta}}-\beta. \tag{25}$$

В силу теоремы единственности выражение (25) не равно нулю при всех $k\in\mathbb{N}$. Действительно, пусть $\varphi(x)\equiv h(x)=\psi(x)\equiv 0$. Тогда все $\varphi_k=h_k=\psi_k\equiv 0$. Если при некотором $k=m\in\mathbb{N}$ выражение $\Delta_m(\beta)=0$, то из равенства (23) следует, что f_m – произвольная постоянная, вообще говоря, не равная нулю. Тогда обратная задача 1 с нулевыми граничными условиями при $g(y)=1$ имеет ненулевое решение

$$f(x)=f_m\sin\frac{\pi m}{l}x,$$

$$u(x,y)=\frac{f_m}{2\lambda_m^2}\left[\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\operatorname{sh}\lambda_m\beta}(\operatorname{sh}\lambda_m(\beta-y)+\operatorname{sh}\lambda_m y)+e^{-\lambda_m(\beta-y)}+e^{-\lambda_m y}-2\right]\sin\frac{\pi m}{l}x.$$

Далее, найденные значения f_k по формуле (24) подставим в (20). Тогда имеем

$$\begin{gathered}u_k(y)=\varphi_k\frac{\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}+h_k\frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}+\frac{\lambda_k}{2\Delta_k(\beta)}\left[\psi_k-(\varphi_k+h_k)\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k\left(1+e^{-\lambda_k\beta}\right)}\right]\times\\ \times\left[g_{1k}(0)\frac{\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}+g_{2k}(\beta)\frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}-g_{1k}(y)-g_{2k}(y)\right].\end{gathered} \tag{26}$$

Поскольку при $g(y)=1$

$$g_{1k}(0)=g_{2k}(\beta)=\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k},\quad g_{1k}(y)=\frac{1-e^{-\lambda_k(\beta-y)}}{\lambda_k},\quad g_{2k}(y)=\frac{1-e^{-\lambda_k y}}{\lambda_k},$$

то равенство (26) примет вид

$$u_k(y)=\varphi_k\left[\frac{\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}-\frac{\omega_k(y)}{\Delta_k(\beta)}\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k(1+e^{-\lambda_k\beta})}\right]+h_k\left[\frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}-\frac{\omega_k(y)}{2\Delta_k(\beta)}\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\lambda_k(1+e^{-\lambda_k\beta})}\right]+\psi_k\frac{\omega_k(y)}{\Delta_k(\beta)}, \tag{27}$$

где

$$\omega_k(y)=\frac{1-e^{-\lambda_k\beta}}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}(\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y)+\operatorname{sh}\lambda_k y)+e^{-\lambda_k(\beta-y)}+e^{-\lambda_k y}-2. \tag{28}$$

При этом функция $\omega_k(y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega_k(0)=\omega_k(\beta)=0,\quad \int_0^\beta\omega_k(y)dy=2\Delta(\beta),\quad \omega_k''(y)=\lambda_k^2(\omega_k(y)+2).$$

Теперь решение обратной задачи 1 определяется рядами

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(y)X_k(x), \tag{29}$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_kX_k(x), \tag{30}$$

где $u_k(y)$ и f_k определены соответственно формулами (27) и (24).

Для коэффициентов $u_k(y)$ и f_k справедливы следующие оценки.

Лемма 1. *При любом* $y \in [0,\beta]$ *имеют место оценки*

$$|u_k(y)| \le C_1\left(|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|\right), \tag{31}$$

$$\begin{gathered} \left|u_k''(y)\right| \le C_2\lambda_k^2\left(|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|\right), \\ |f_k(y)| \le C_3\lambda_k^2\left(|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|\right), \end{gathered} \tag{32}$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость этих оценок непосредственно следует из формул (27) и (24) в силу ограниченности выражений (25) и (28):

$$0 < C_4 < |\Delta_k(\beta)| \le C_5, \quad |\omega_k(y)| \le C_6.$$

На основании леммы 1 ряд (29) и его производные до второго порядка включительно на замкнутой области $\overline{D}$ и ряд (30) на $[0,l]$ мажорируются числовым рядом

$$C_7\infty\sum_{k=1}\lambda_k^2\left(|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|\right). \tag{33}$$

Теорема 4. *Если* $b(x,y) \equiv \mathrm{const} = b \ge 0$, $\varphi(x)$, $h(x)$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = 0$, $h(0) = h''(0) = h(l) = h''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi''(0) = \psi(l) = \psi''(l) = 0$, $g(y) \equiv 1$, *то существует единственное решение обратной задачи* (2)–(7) *и оно определяется суммами рядов* (29) *и* (30) *при этом* $u(x,y) \in C^2(\overline{D})$ *и* $f(x) \in C[0,l]$.

Доказательство. В силу наложенных на функции $\varphi(x)$, $h(x)$ и $\psi(x)$ условий коэффициенты φ_k, h_k и ψ_k их разложения в ряд Фурье по системе $X_k(x)$ на сегменте $[0,l]$ можно представить в виде

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad h_k = \frac{h_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(3)}}{\mu_k^3},$$

где

$$\varphi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\mu_k x dx, \quad h_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l h'''(x)\cos\mu_k x dx,$$

$$\psi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi'''(x)\cos\mu_k x dx,$$

при этом справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k^{(3)}\right|^2 \le \|\varphi'''\|^2_{L_2(0,l)}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\left|h_k^{(3)}\right|^2 \le \|h'''\|^2_{L_2(0,l)}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\psi_k^{(3)}\right|^2 \le \|\psi'''\|^2_{L_2(0,l)}.$$

Тогда числовой ряд (33) мажорируется сходящимся рядом

$$C_8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\left|\varphi_k^{(3)}\right| + \left|h_k^{(3)}\right| + \left|\psi_k^{(3)}\right|\right).$$

В силу этого ряды (29) и (30) сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{D}$ и $[0,l]$ соответственно, при этом ряд (29) допускает почленное дифференцирование дважды по x и y в $\overline{D}$. Покажем, что эти ряды удовлетворяют уравнению (4):

$$\mathscr{L}u(x,y) \equiv u_{xx} + u_{yy} - bu = -\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k^2 u_k(y)X_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}u_k''(y)X_k(x) - b\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(y)X_k(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[u_k''(y) - \left(\mu_k^2 + b\right)u_k(y)\right]X_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}f_k X_k(x) = f(x),$$

так как на основании формулы (20)

$$u_k''(y) - \left(\mu_k^2 + b\right) u_k(y) = f_k.$$

Устойчивость решения задачи 1 от заданных функций $\varphi(x)$, $h(x)$ и $\psi(x)$ устанавливается следующим утверждением.

Теорема 5. *Для решения задачи* (2)–(7) *при* $b(x, y) \equiv \mathrm{const} = b \geq 0$ *имеют место оценки*

$$\|u(x,y)\|_{L_2(0,l)} \leq C_9 \left(\|\varphi\|_{L_2(0,l)} + \|h\|_{L_2(0,l)} + \|\psi\|_{L_2(0,l)}\right), \quad 0 \leq y \leq \beta, \tag{34}$$

$$\|f(x)\|_{L_2(0,l)} \leq C_{10} \left(\|\varphi''\|_{L_2(0,l)} + \|h''\|_{L_2(0,l)} + \|\psi''\|_{L_2(0,l)}\right), \tag{35}$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\bar{D})} \leq C_{11} \left(\|\varphi'\|_{C[0,l]} + \|h'\|_{C[0,l]} + \|\psi'\|_{C[0,l]}\right), \tag{36}$$

$$\|f(x)\|_{C[0,l]} \leq C_{12} (\|\varphi'''\|_{C[0,l]} + \|h'''\|_{C[0,l]} + \|\psi'''\|_{C[0,l]}). \tag{37}$$

Доказательство. В силу оценки (31) на основании формулы (29) имеем

$$\|u(x,y)\|^2_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(y) \leq 3C_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k^2 + h_k^2 + \psi_k^2\right) \leq 3C_1^2 \left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|h\|^2_{L_2(0,l)} + \|\psi\|^2_{L_2(0,l)}\right).$$

Отсюда следует оценка (34).

Пусть (x, y) – произвольная точка из области $\bar{D}$. Тогда из формулы (29) с учетом оценки (31) будем иметь

$$|u(x,y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_k| + |h_k| + |\psi_k|). \tag{38}$$

Далее, используя представления

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad h_k = \frac{h_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k},$$

где

$$\varphi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'(x) \cos \mu_k x dx, \quad h_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l h'(x) \cos \mu_k x dx,$$

$$\psi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'(x) \cos \mu_k x dx,$$

и неравенство Коши–Буняковского из (38), получим

$$|u(x,y)| \leq \tilde{C}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\left|\varphi_k^{(1)}\right| + \frac{1}{k}\left|h_k^{(1)}\right| + \frac{1}{k}\left|\psi_k^{(1)}\right|\right) \leq$$

$$\leq \tilde{C}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_k^{(1)}\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|h_k^{(1)}\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\psi_k^{(1)}\right|^2\right)^{1/2}\right] \leq$$

$$\leq \tilde{C}_2 \left(\|\varphi'\|_{L_2(0,l)} + \|h'\|_{L_2(0,l)} + \|\psi'\|_{L_2(0,l)}\right) \leq C_{11} \left(\|\varphi'\|_{C[(0,l)]} + \|h'\|_{C[0,l]} + \|\psi'\|_{C[0,l]}\right),$$

где $\tilde{C}_i$ – здесь и далее положительные постоянные. Тем самым установлена справедливость оценки (36).

Аналогично доказываются оценки (35) и (37).

Если $g(y) \not\equiv 1$, то в условиях теоремы 1 функция $g(y) \neq 0$ на $(0,\beta)$. Поэтому при $g(y) \in C[0,\beta]$ можно считать, что $g(y) \geq g_0 = \text{const} > 0$. В этом случае функции $g_{1k}(y)$ и $g_{2k}(y)$ можно представить в виде

$$g_{1k}(y) = g(\xi)\int_y^\beta e^{-\lambda_k(t-y)}dt = g(\xi)\frac{1-e^{-\lambda_k(\beta-y)}}{\lambda_k},$$

$$g_{2k}(y) = g(\eta)\int_0^y e^{-\lambda_k(y-t)}dt = g(\eta)\frac{1-e^{-\lambda_k y}}{\lambda_k},$$

где $y < \xi < \beta$, $0 < \eta < y$. Тогда аналогично устанавливается справедливость теорем 4 и 5.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

Далее докажем существование и устойчивость решения задачи 2. Решение задачи Дирихле (15) удовлетворим нелокальному условию (9). В результате получим

$$\int_0^l u(x,y)f(x)dx = \int_0^l \sum_{k=1}^\infty u_k(y)X_k(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^\infty u_k(y)f_k = \chi(y). \tag{39}$$

В равенство (39) подставим выражение (20). Предварительно его преобразуем к виду

$$u_k(y) = \varphi_k\frac{\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + h_k\frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + \frac{f_k}{2\lambda_k}\int_0^\beta g(t)E_k(t,y)dt, \tag{40}$$

где

$$E_k(t,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda_k t}\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y) + e^{-\lambda_k(\beta-t)}\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} - e^{-\lambda_k(y-t)}, & 0 \leq t \leq y, \\ \dfrac{e^{-\lambda_k t}\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y) + e^{-\lambda_k(\beta-t)}\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} - e^{-\lambda_k(t-y)}, & t \geq y. \end{cases}$$

Тогда равенство (39) принимает вид

$$\int_0^\beta g(t)H(t,y)dt = d(y), \tag{41}$$

где

$$H(t,y) = \sum_{k=1}^\infty \frac{f_k^2}{2\lambda_k}E_k(t,y),$$

$$d(y) = \chi(y) - \sum_{k=1}^\infty f_k\left(\varphi_k\frac{\operatorname{sh}\lambda_k(\beta-y)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + \varphi_k\frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}\right),$$

т.е. относительно неизвестной функции $g(y)$ получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода (41), которое трудно разрешимо.

В силу наложенных условий относительно функций $\varphi(x)$, $h(x)$ и $f(x)$ в теореме 3 при исследовании прямой задачи Дирихле ядро $H(t,y)$ и правая часть $d(y)$ уравнения (39) дважды непрерывно дифференцируемы по y в областях определения.

Попытаемся получить относительно $g(y)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Для этого дважды продифференцируем равенство (20):

$$u_k''(y) = \lambda_k^2\left(\varphi_k \frac{\operatorname{sh}\lambda_k(\beta - y)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + h_k \frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}\right) + \frac{\lambda_k f_k}{2\operatorname{sh}\lambda_k\beta}(g_{1k}(0)\operatorname{sh}\lambda_k(\beta - y) + g_{2k}(\beta)\operatorname{sh}\lambda_k y) - \\ - \frac{f_k}{2\lambda_k}\left[-2\lambda_k g(y) + \lambda_k^2(g_{1k}(y) + g_{2k}(y))\right] = \lambda_k^2 u_k(y) + f_k g(y). \tag{42}$$

Тогда из равенства (39) с учетом (42) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k''(y) f_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\lambda_k^2 f_k u_k(y) + f_k^2 g(y)\right] = \chi''(y).$$

Отсюда с учетом (40) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 g(y) + \int_0^{\beta} K(t,y) g(t) dt = \chi''(y) - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 f_k\left(\varphi_k \frac{\operatorname{sh}\lambda_k(\beta - y)}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta} + h_k \frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}\right) = d''(y), \tag{43}$$

где

$$K(t,y) = \frac{\partial^2 H(t,y)}{\partial y^2} = \infty\sum_{k=1}\frac{\lambda_k f_k^2}{2} E_k(t,y).$$

По условию теоремы 2 функция $f(x) \neq 0$ на $(0,l)$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \int_0^l f^2(x)dx = \|f\|_{L_2}^2 > 0.$$

Следовательно, интегральное уравнение (43) является уравнением Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Тогда поскольку в силу теоремы единственности 2 соответствующее однородное интегральное уравнение

$$g(y) + \frac{1}{\|f\|_{L_2}^2}\int_0^l K(t,y) g(t) dt = 0$$

имеет только нулевое решение, то по альтернативе Фредгольма (см. [19], с. 479) интегральное уравнение (43) имеет единственное и непрерывное на $[0,\beta]$ решение.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 6. *Если функции* $b(x,y) \equiv \mathrm{const} = b \geq 0$ *и* $\varphi(x)$, $h(x)$ *удовлетворяют теореме* 3, *функция* $\chi(y) \in C^2[0,\beta]$, $f(x) \in C^1[0,l]$, $f(0) = f(l) = 0$, *и выполнены условия* (10), *то существует единственное решение обратной задачи* 2, *при этом функция* $g(y)$ *определяется как решение интегрального уравнения* (43), *затем функция* $u(x,y)$ — *по формуле* (15) *как решение задачи Дирихле*.

Теперь докажем следующее утверждение об устойчивости решения задачи 2.

Теорема 7. *Для решения задачи* 2 *при* $b(x,y) \equiv \mathrm{const} = b \geq 0$ *справедливы оценки*

$$\|g(y)\|_{C[0,\beta]} \leq C_{13}\left(\|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]} + \|\chi''\|_{C[0,\beta]}\right), \tag{44}$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\bar{D})} \leq C_{14}\left(\|\varphi\|_{C^2[0,l]} + \|h''\|_{C^2[0,l]} + \|\chi''\|_{C[0,\beta]}\right). \tag{45}$$

Доказательство. Решение интегрального уравнения (43) можно построить через резольвенту $R(y,t,\lambda)$ ядра $K(y,t)$ по формуле

$$g(y) = \bar{d}(y) + \lambda\int_0^{\beta} R(y,t,\lambda)\bar{d}(t)dt, \quad \lambda = \frac{1}{\|f\|_{L_2}^2}, \quad \bar{d}(y) = \frac{d''(y)}{\|f\|_{L_2}^2}. \tag{46}$$

Поскольку λ не является характеристическим числом ядра $K(y,t)$, то резольвента $R(y,t,\lambda)$ при любом $\lambda > 0$ является непрерывной на квадрате $[0,\beta]\times[0,\beta]$ (см. [19], с. 460–469), поэтому она ограничена.

Предварительно при любом $y \in [0,\beta]$ с учетом представлений

$$f_k = \frac{1}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f'(x)\cos\mu_k x dx = \frac{1}{\mu_k} f_k^{(1)},$$

$$\varphi_k = -\frac{1}{\mu_k^2}\int_0^l \varphi''(x)X_k(x)dx = -\frac{1}{\mu_k^2}\varphi_k^{(2)},$$

$$h_k = -\frac{1}{\mu_k^2}\int_0^l h''(x)X_k(x)dx = -\frac{1}{\mu_k^2}h_k^{(2)}$$

оценим функцию

$$\begin{aligned} |d''(y)| &\le |\chi''(y)| + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|f_k|(|\varphi_k| + |h_k|) \le |\chi''(y)| + \tilde{C}_3\sum_{k=1}^{\infty}k(|\varphi_k| + |h_k|)x \le \\ &\le |\chi''(y)| + \tilde{C}_4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\left|\varphi_k^{(2)}\right| + \left|h_k^{(2)}\right|\right) \le |\chi''(y)| + \tilde{C}_5\left(\|\varphi''\|_{L_2(0,l)} + \|h''\|_{L_2(0,l)}\right) \le \\ &\le \tilde{C}_6\left(\|\chi''\|_{C[0,\beta]} + \|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]}\right). \end{aligned} \tag{47}$$

Тогда из формулы (46) с учетом (47) имеем

$$|g(y)| \le \tilde{C}_7\left(\|\chi''\|_{C[0,\beta]} + \|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]}\right).$$

Отсюда вытекает оценка (44).

Пусть $(x,y) \in \overline{D}$. Тогда из формул (15) и (20) будем иметь

$$\begin{aligned} |u(x,y)| &\le \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(y)| \le \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[|\varphi_k| + |h_k| + \frac{f_k}{2\lambda_k}(|g_{1k}(0)| + |g_{2k}(\beta)| + |g_{1k}(y) + g_{2k}(y)|)\right] \le \\ &\le \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[|\varphi_k| + |h_k| + \frac{|f_k|}{2\lambda_k^2}\|g(y)\|_{C[0,\beta]}\right] \le \tilde{C}_8\left(\|\varphi'\|_{L_2(0,l)} + \|h'\|_{L_2(0,l)} + \|g(y)\|_{C[0,\beta]}\right) \le \\ &\le \tilde{C}_9\left(\|\varphi'\|_{C[0,l]} + \|h'\|_{C[0,l]} + \|\chi''\|_{C[0,\beta]} + \|\varphi''\|_{C[0,l]} + \|h''\|_{C[0,l]}\right), \end{aligned}$$

из которой уже получим оценку (45).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Романов В.Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука СО, 1972. 164 с.
2. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982. 88 с.
3. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.
4. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
5. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.
6. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. New-York: Springer, 2006. 358 p.
7. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с. (изд. 2).
8. *Дмитриев В.И.* Обратные задачи геофизики. М.: Макс Пресс, 2012. 340 с.
9. *Ягола А.Г., Янфей Ван, Степанова И.Э., Титаренко В.Н.* Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. 216 с.
10. *Ягола А.Г., Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А.* Обратные задачи колебательной спектроскопии. М.: Изд-во "Курс", 2017. 336 с. (изд. 2).
11. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 4. С. 694–716.
12. *Romanov V., Hasanov A.* Uniqueness and stability analysis of final data inverse sourse problems for evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2022. V. 30. № 3. P. 425–446.

13. *Орловский Д.Г.* Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 6. С. 1000–1009.
14. *Орловский Д.Г.* Обратная задача Дирихле для уравнения эллиптического типа // Дифференц. ур-ния. 2008. Т. 44. № 1. С. 119–128.
15. *Соловьев В.В.* Обратные задачи определения источника для уравнения Пуассона на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 5. С. 862–871.
16. *Соловьев В.В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 8. С. 1365–1377.
17. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференц. ур-ния. 2010. Т. 46. № 10. С. 1468–1478.
18. *Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В.* К вопросу о корректности обратных задач для неоднородного уравнения Гельмгольца // Вестник Сам. гос. тех. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 269–292.
19. *Сабитов К.Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высш. школа, 2005. 671 с.