ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 8, с. 1309–1315

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В КОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

© 2023 г. **В. Б. Васильев**[1,*]

[1] 308015 Белгород, ул. Победы, 85, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия

*e-mail: vbv57@inbox.ru

Поступила в редакцию 09.02.2023 г.
Переработанный вариант 25.03.2023 г.
Принята к публикации 28.03.2023 г.

Рассматривается модельное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в многогранном конусе и исследуется ситуация, когда некоторые параметры конуса стремятся к своим предельным значениям. В пространствах Соболева–Слободецкого решение уравнения в конусе строится при наличии специальной волновой факторизации эллиптического символа. Показано, что предельное решение краевой задачи с дополнительным интегральным условием может существовать только при дополнительных ограничениях на граничное условие. Библ. 15.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, эллиптический символ, конус, волновая факторизация, область с разрезом.

DOI: 10.31857/S0044466923080161, **EDN:** WTRDTP

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории псевдодифференциальных уравнений в негладких областях (областях с негладкой границей) модельные уравнения в канонических негладких областях (конусах) играют особую роль: однозначная разрешимость такого уравнения гарантирует фредгольмовость общего псевдодифференциального уравнения в области с соответствующей конической точкой на границе. Этот факт называется локальным принципом и в той или иной степени общности фигурирует во всех вариантах теорий псевдодифференциальных уравнений и связанных с ними краевых задач в негладких областях.

Теория псевдодифференциальных уравнений широко используется во многих разделах математики и физики, такие уравнения появляются, в частности, в задачах дифракции электромагнитных волн (см., например, [1–3]), где широко применяется метод факторизации. Мы также используем многомерный вариант этого метода для получения интегральных представлений решений рассматриваемых краевых задач.

В настоящей работе рассматриваются некоторые краевые задачи для модельных псевдодифференциальных уравнений, когда конус вырождается в конус меньшей размерности, другими словами, когда какие-то параметры исходного конуса стремятся к нулю. Основой этих исследований служат теория краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений (см. [4]), теория одномерных сингулярных интегральных уравнений (см. [5–7]), многомерный комплексный анализ (см. [8]) и разработанный автором метод волновой факторизации, который привел к многочисленным результатам о разрешимости краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в канонических негладких областях евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ (см. [9–13]).

2. ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОНУСЕ

2.1. Модельные операторы в канонической области

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – область в m-мерном пространстве, функция определена на $\mathbb{R}^m$. Модельным псевдодифференциальным оператором A в области D мы называем оператор вида

$$(Au)(x) = \int_D \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi)u(y)e^{i(y-x)\xi}d\xi dy, \quad x \in D,$$

функция $A(\xi)$ называется его символом. Здесь рассматривается класс символов, удовлетворяющих условию

$$c_1 \le \left|A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}\right| \le c_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Число $\alpha \in \mathbb{R}$ – это порядок псевдодифференциального оператора A.

Область $D \subset \mathbb{R}^m$ мы называем канонической областью, если это конус $C \subset \mathbb{R}^m$, не содержащий целой прямой в пространстве $\mathbb{R}^m$.

С конусами связаны важные области многомерного комплексного пространства и понятие специальной факторизации эллиптического символа, с помощью которого удается описать картину разрешимости псевдодифференциального уравнения в конусе.

Определение 1. *Радиальной трубчатой областью над конусом C* называется область в многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^m M$ следующего вида:

$$T(C) \equiv \{z \in \mathbb{C}^m : z = x + iy, x \in \mathbb{R}^m, y \in C\}.$$

Сопряженным конусом $\overset{*}{C}$ называется такой конус, для всех точек которого выполняется условие

$$x \cdot y > 0 \quad \forall y \in C,$$

$x \cdot y$ обозначает скалярное произведение x и y.

Всюду ниже мы будем предполагать, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C (см. [8], [14]) с индексом æ:

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi),$$

где $A_{\neq}(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в $T(-\overset{*}{C})$ и $A_{=}(\xi)$ – в $T(\overset{*}{C})$. Мы приводим ниже точное определение такой факторизации, поскольку величина индекса существенно влияет на картину разрешимости псевдодифференциального уравнения.

Определение 2. *Волновой факторизацией символа $A(\xi)$ относительно конуса C* называется его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ определены для всех значений $\xi \in \mathbb{R}^m$, кроме, возможно, точек $\partial(\overset{*}{C} \cup (-\overset{*}{C}))$;

2) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C})$, $T(-\overset{*}{C})$ соответственно, для которых справедливы оценки

$$c_1'(1 + |\xi| + |\tau|)^{æ} \le |A_{\neq}(\xi + i\tau)| \le c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{æ},$$

$$c_2'(1 + |\xi| + |\tau|)^{\alpha-æ} \le |A_{=}(\xi - i\tau)| \le c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\alpha-æ} \quad \forall \tau \in \overset{*}{C}.$$

Число æ $\in \mathbb{R}$ называется *индексом волновой факторизации.*

Класс символов, допускающих волновую факторизацию, достаточно богат. Отдельная глава книги [14] целиком посвящена этому вопросу, там приведено достаточно много примеров.

2.2. Конструкция решения

Мы рассмотрим здесь многогранный конус и уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{C_+^{ab}}, \tag{1}$$

в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^3 \backslash (\overline{C_+^{ab}}))$, где

$$C_+^{ab} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3),\ x_3 < a|x_1| + b|x_2|,\ a, b > 0\right\}.$$

Мы рассмотрим специальный случай $æ - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$, для которого автором были получены ранее результаты о структуре решения уравнения (1) (см. [11–13]). Введем следующие одномерные сингулярные интегральные операторы (см. [5–7]):

$$(S_1 u)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \text{v.p.}\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\tau, \xi_2, \xi_3)d\tau}{\xi_1 - \tau}, \quad (S_2 u)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \text{v.p.}\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\xi_1, \eta, \xi_3)d\eta}{\xi_2 - \eta}.$$

В терминах этих операторов была получена формула

$$\begin{gathered} A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi) = \tilde{C}_1(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + \tilde{C}_2(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + \\ + \tilde{C}_3(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + \tilde{C}_4(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3), \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{C}_1(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) = \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) - \frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) - \\ - \frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + (S_1 S_2\tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3); \\ \tilde{C}_2(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) = \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) - \frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + \\ + \frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) - (S_1 S_2\tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3); \\ \tilde{C}_3(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) = \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + \frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) - \\ - \frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) - (S_1 S_2\tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3); \\ \tilde{C}_4(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) = \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + \frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + \\ + \frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + (S_1 S_2\tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3), \end{gathered}$$

и $c_0(x_1, x_2)$ – произвольная функция из пространства $H^{s-æ+1/2}(\mathbb{R}^2)$. Таким образом, ядро оператора A является одномерным подпространством пространства $H^s(\mathbb{R}^3 \backslash (\overline{C_+^{ab}}))$.

Для выделения единственного решения (однозначного определения функции $c_0(\xi_1, \xi_2)$) требуется какое-то дополнительное условие. Исходя из вида общего решения, наиболее удобным представляется задание сужения $\tilde{u}(\xi_1, \xi_2, 0)$ или, другими словами, задание интегрального условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3)dx_3 \equiv g(x_1, x_2), \tag{3}$$

которое в образах Фурье выглядит следующим образом:

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2, 0) = \tilde{g}(\xi_1, \xi_2), \tag{4}$$

$g(x_1, x_2)$ – известная функция.

Полагая $\xi_3 = 0$ в формуле (2), получим

$$\sum_{k=1}^{4}\tilde{C}_k(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2) - \frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) - \frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) + (S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) +$$
$$+ \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2) - \frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) + \frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) - (S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) +$$
$$+ \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2) + \frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) - \frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) - (S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) +$$
$$+ \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2) + \frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) + \frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) + (S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2) = \tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2).$$

С учетом условия (4) находим

$$\tilde{c}_0(\xi') = \tilde{A}_{\neq}(\xi',0)\,\tilde{g}(\xi'). \tag{5}$$

Итог наших вычислений содержится в следующем результате, который станет отправной точкой для дальнейших исследований (см. [11], [13]).

Теорема 1. *Пусть* $æ - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$, $g \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда единственное решение задачи* (1), (3) *дается формулой* (2), *где* $c_0(x_1,x_2)$ *определено формулой* (5).

В конусе присутствуют два параметра a, b, и интерес представляют случаи, когда эти параметры устремляются к своим предельным значениям 0 или ∞. Получающаяся при этом область будет областью с разрезом, и этот разрез представляет собой конус размерности меньшей, чем размерность пространства. Нас будет интересовать поведение решения задачи (1), (3) в этих предельных случаях. Как будет показано ниже, предельные решения могут существовать только при некоторых дополнительных требованиях к функции g.

Стоит отметить, что в двумерном случае имеется только один конус, и предельные решения рассмотрены в [15]. В многомерных ситуациях конусов гораздо больше, и, в частности, предельная ситуация $a \to 0$, $b = \mathrm{const}$ и $a = \mathrm{const}$, $b \to 0$ описана в [13]. Отметим также, что случай $a, b \to 0$ соответствует полупространству и полностью разобран в книге [4].

Мы разберем здесь некоторые предельные ситуации, опираясь на формулу (2), и покажем, какие условия следует наложить на функцию g для существования предельных решений.

Рассмотрим равенство (2). Используя замену переменных $\xi_1 - a\xi_3 = t_1$, $\xi_1 + a\xi_3 = t_3$ и находя $\xi_1 = (t_3 + t_1)/2$, $\xi_3 = (t_3 - t_1)/(2a)$, мы можем определить функцию $\tilde{c}_0$ в новых переменных t_1, ξ_2, t_3 с учетом условия (4). Переписывая формулу (2) в новых переменных t_1, ξ_2, t_3, мы получим

$$\begin{gathered} A_{\neq}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2,\frac{t_3-t_1}{2a}\right)\tilde{u}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2,\frac{t_3-t_1}{2a}\right) = \tilde{C}_1\left(t_1,\xi_2 - b\frac{t_3-t_1}{2a}\right) + \\ + \tilde{C}_2\left(t_1,\xi_2 + b\frac{t_3-t_1}{2a}\right) + \tilde{C}_3\left(t_3,\xi_2 - b\frac{t_3-t_1}{2a}\right) + \tilde{C}_4\left(t_3,\xi_2 + b\frac{t_3-t_1}{2a}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Устремляя $a \to +\infty$, получаем

$$A_{\neq}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2,0\right)\tilde{u}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2,0\right) = \tilde{C}_1(t_1,\xi_2) + \tilde{C}_2(t_1,\xi_2) + \tilde{C}_3(t_3,\xi_2) + \tilde{C}_4(t_3,\xi_2).$$

Дальше идут вычисления

$$\tilde{C}_1(t_1,\xi_2) + \tilde{C}_2(t_1,\xi_2) + \tilde{C}_3(t_3,\xi_2) + \tilde{C}_4(t_3,\xi_2) = \frac{\tilde{c}_0(t_1,\xi_2) + \tilde{c}_0(t_3,\xi_2)}{2} - (S_1\tilde{c}_0)(t_1,\xi_2) + (S_1\tilde{c}_0)(t_3,\xi_2).$$

Принимая во внимание условие (4), формулу (5) в равенстве (6) и введя новое обозначение

$$\tilde{A}_{\neq}(\xi_1,\xi_2,0)\tilde{g}(\xi_1,\xi_2) \equiv h(\xi_1,\xi_2),$$

приходим к следующему уравнению с параметром ξ_2 для функции g:

$$h\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2\right) = \frac{h(t_1,\xi_2) + h(t_3,\xi_2)}{2} - (S_1h)(t_1,\xi_2) + (S_1h)(t_3,\xi_2). \tag{7}$$

Собирая проведенные выкладки, приходим к следующей формулировке результата.

Теорема 2. *Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C_+^{ab} с индексом æ таким, что æ $- s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$ для всех достаточно больших a, то единственное решение краевой задачи* (1), (3) *имеет предел при $a \to +\infty$ тогда и только тогда, когда функция в граничном условии $g \in H^{s+1/2}(R^2)$ является решением уравнения* (7).

2.3. Двумерная ситуация

Мы опишем здесь, что происходит на плоскости. Уравнение (1) записывается как

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \tag{8}$$

и рассматривается в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$. Число æ обозначает индекс волновой факторизации (как и выше, предполагается, что такая факторизация для символа $A(\xi)$ существует) относительно угла C_+^a (см. [14]), и предполагается выполненным условие $1/2 <$ æ $- s < 3/2$, угол C_+^a имеет вид

$$C_+^a = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\right\}.$$

Общее решение уравнения (8) в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$ имеет следующий вид (см. [11]):

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)} + A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2)\left(\text{v.p.}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - \text{v.p.}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta}\right),$$

где c_0 – произвольная функция из $H^{s-æ+1/2}(\mathbb{R})$.

Вводим обозначения

$$\text{v.p.}\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} \equiv \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2), \quad \text{v.p.}\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta} \equiv \tilde{d}_0(\xi_1 - a\xi_2) \tag{9}$$

и получаем

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2) + \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)} \equiv \frac{\tilde{c}(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{d}(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)}, \tag{10}$$

где $\tilde{c}(\xi_1 + a\xi_2) \equiv \tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2)$, $\tilde{d}(\xi_1 - a\xi_2) \equiv \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_1 - a\xi_2)$.

Далее мы добавляем интегральное условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 \equiv g(x_1), \tag{11}$$

которое в образах Фурье выглядит как $\tilde{u}(\xi_1, 0) = \tilde{g}(\xi)$. С учетом формулы (10) можно заключить, что

$$\frac{\tilde{c}_0(\xi_1)}{A_{\neq}(\xi_1, 0)} = \tilde{g}(\xi_1).$$

Следовательно, мы можем определить функцию $\tilde{c}_0(\xi_1) = A_{\neq}(\xi_1, 0)\tilde{g}(\xi_1)$. Тогда по формуле (9) мы можем определить $\tilde{d}_0(\xi_1)$ так, что формула (10) дает решение уравнения (8). Подытожив, заключаем, что решение уравнения (8) при условии (11) дается формулой

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \frac{A_{\neq}(\xi_1 + a\xi_2, 0)\tilde{g}(\xi_1 + a\xi_2) + A_{\neq}(\xi_1 - a\xi_2, 0)\tilde{g}(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)} +$$

$$+ \frac{1}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)}\text{v.p.}\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - \frac{1}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)}\text{v.p.}\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta}$$

(подробности см. в [12]).

Теперь попытаемся выяснить, что произойдет с решением, когда $a \to \infty$, эта ситуация соответствует плоскости с разрезом по лучу.

Вводя новые переменные, обозначим

$$a_{\neq}(t_1,t_2) \equiv A_{\neq}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1-t_2}{2a}\right), \quad \tilde{U}(t_1,t_2) \equiv \tilde{u}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1-t_2}{2a}\right)$$

и запишем

$$\tilde{U}(t_1,t_2) = \frac{A_{\neq}(t_1,0)\tilde{g}(t_1) + A_{\neq}(t_2,0)\tilde{g}(t_2)}{2a_{\neq}(t_1,t_2)} +$$
$$+ \frac{1}{2a_{\neq}(t_1,t_2)}\text{v.p.}\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_1-\eta} - \frac{1}{2a_{\neq}(t_1,t_2)}\text{v.p.}\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_2-\eta}.$$

Устремляя $a \to +\infty$, вводя новые обозначения $A_{\neq}(t,0)\tilde{g}(t) \equiv G(t)$, $\lim\limits_{a\to+\infty} a_{\neq}(t_1,t_2) \equiv h(t_1,t_2)$, мы можем записать

$$\tilde{u}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, 0\right) = \tilde{U}(t_1,t_2) = \frac{A_{\neq}(t_1,0)\tilde{g}(t_1) + A_{\neq}(t_2,0)\tilde{g}(t_2)}{2h(t_1,t_2)} +$$
$$+ \frac{1}{2h(t_1,t_2)}\text{v.p.}\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_1-\eta} - \frac{1}{2h(t_1,t_2)}\text{v.p.}\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_2-\eta}. \tag{12}$$

С учетом условия (11) имеем

$$G\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) = \frac{G(t_1)+G(t_2)}{2} + (SG)(t_1) - (SG)(t_2), \tag{13}$$

где

$$(SG)(t) = \text{v.p.}\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\eta)d\eta}{t-\eta}.$$

Итог наших рассмотрений содержится в следующем результате.

Теорема 3. *Если символ $A(\xi_1,\xi_2)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C_+^a для всех достаточно больших a, то предел решения* (10) *краевой задачи* (8), (11) *при $a \to +\infty$ существует тогда и только тогда, когда выполнено условие* (13).

3. РАЗРЕЗЫ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Опишем здесь несколько многомерных ситуаций, основываясь на материале предыдущих разделов. Точнее, мы покажем, какие многомерные области с разрезами могут быть получены аналогичным предельным переходом и приведем формулировки соответствующих постановок краевых задач.

Основная идея заключается в следующем. Пусть C_1 и C_2 – конусы в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, не содержащие целой прямой. Очевидно, что $C_1 \times C_2$ – это конус в пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$, не содержащий целой прямой в $\mathbb{R}^{m+n}$. Тогда мы можем поставить краевую задачу, аналогичную (1), (5) в области $\mathbb{R}^{m+n}\backslash(C_1 \times C_2)$. Записывая формулу для решения этой задачи (при наличии волновой факторизации относительно “большого” конуса), мы можем рассматривать краевые задачи в областях с многомерными разрезами разной геометрии, устремляя к предельным значениям параметры конусов C_1 и C_2.

Вот первый вариант такой краевой задачи:

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^5\backslash\overline{\left(C_+^a \times C_+^{bd}\right)}, \quad \int_{\mathbb{R}^2} u(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)dx_2dx_5 = g(x_1,x_3,x_4), \tag{14}$$

где $C_+^a \subset \mathbb{R}^2$, $C_+^{bd} \subset \mathbb{R}^3$.

Второй вариант

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^4 \setminus \overline{\left(C_+^a \times C_+^b\right)}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_4 = g(x_1, x_3), \tag{15}$$

где $C_+^a \subset \mathbb{R}^2$, $C_+^b \subset \mathbb{R}^2$.

Можно рассмотреть и такой вариант с двумя многогранными углами в $\mathbb{R}^6$, точнее, следующую краевую задачу:

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^6 \setminus \overline{(C_+^{ab} \times C_+^{dl})}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) dx_3 dx_6 = g(x_1, x_2, x_4, x_5), \tag{16}$$

где $C_+^{ab} \subset \mathbb{R}^3$, $C_+^{dl} \subset \mathbb{R}^3$.

Наконец, можно вернуться к краевой задаче (14) и рассмотреть такую же краевую задачу. Разумеется, решение будет таким же, но предельный вариант рассмотрим другой: $a \to \infty$, $b \to \infty$, $d = \mathrm{const}$, получая разрез другой геометрии. Более подробно мы рассмотрим эти ситуации в последующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). М.: ИПРЖР, 1996.
2. *Speck F.-O.* From Sommerfeld diffraction problems to operator factorisation // Constr. Math. Anal. 2019. V. 2. № 4. P. 183–216.
3. *Castro L. Duduchava R., Speck F.-O.* Mixed impedance boundary value problems for the Laplace-Beltrami equation // J. Integral Equations Appl. 2020. V. 32. № 3. P. 275–292.
4. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
7. *Milkhin S.G., Prößdorf S.* Singular Integral Operators. Akademie-Verlag, Berlin, 1986.
8. *Владимиров В.С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
9. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations on manifolds with non-smooth boundaries. In: Pinelas S. editor. Differential and Difference Equations (and Applications. Springer Proc. Math. & Stat. **47**). Berlin: Springer, 2013. P. 625–637.
10. *Vasilyev V.B.* Elliptic equations, manifolds with non-smooth boundaries, and boundary value problems. In: Dang P., Ku M., Qian T., Rodino L. eds. New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications. Basel: Birkhäuser, 2017. P. 337–344.
11. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9252–9263.
12. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // Opusc. Math. 2019. V. 39. № 1. P. 109–124.
13. *Vasilyev V.B.* On certain 3-dimensional limit boundary value problems // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 5. P. 917–925.
14. *Vasil'ev V.B.* Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2000.
15. *Kutaiba Sh., Vasilyev V.* On limit behavior of a solution to boundary value problem in a plane sector // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44. № 15. P. 11904–11912.