

---

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

---

УДК 532.59

**ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ  
ОТ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИСТОЧНИКА В ПОТОКЕ  
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ С МОДЕЛЬНЫМ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТОТЫ ПЛАВУЧЕСТИ<sup>1)</sup>**

© 2023 г. В. В. Булатов<sup>1,\*</sup>, И. Ю. Владимиров<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119526 Москва, пр-т Вернадского, 101–1, ИПМ им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия

<sup>2</sup> 117997 Москва, Нахимовский пр-т, 36, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Россия

\*e-mail: [internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)

\*\*e-mail: [iyuvladimirov@rambler.ru](mailto:iyuvladimirov@rambler.ru)

Поступила в редакцию 30.01.2023 г.

Переработанный вариант 02.02.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассмотрена задача о расчете полей внутренних гравитационных волн, генерируемых локализованным источником возмущений в потоке стратифицированной среды конечной толщины с модельным распределением частоты плавучести. Используя аналитические представления частоты плавучести, получена неявная форма дисперсионного соотношения, аналитическое представление которой зависит от функций Бесселя действительного индекса. Приведены результаты численных расчетов дисперсионных кривых, линий равной фазы и волновых амплитуд для различных волновых мод и скоростей стратифицированного потока. Толщина стратифицированного слоя, вертикальный масштаб частоты плавучести и величина скорости потока являются основными факторами, влияющими на амплитудно-фазовую пространственную трансформацию возбуждаемых вниз по потоку волновых полей. Библ. 24. Фиг. 10.

**Ключевые слова:** стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, волновая мода, источник возмущений.

**DOI:** 10.31857/S0044466923080045, **EDN:** WRZZHG

## ВВЕДЕНИЕ

Геофизическая гидродинамика предлагает большой ряд задач по изучению распространения волн в среде, анизотропия которой связана с эффектами стратификации (см. [1–4]). Изменчивость плотности воды в океане, вызванное, в частности, его термохалинной структурой, приводит к генерации внутренних гравитационных волн (ВГВ). В настоящее время растет интерес к исследованию динамики ВГВ для решения фундаментальных задач физической океанологии, а также геофизических, промышленных и экологических приложений (см. [4–6]). Например, для изучения влияния крупномасштабных ВГВ на глобальные энергетические обмены в океане проводятся математическое моделирование, натурные наблюдения и лабораторные эксперименты. Исследования, связанные с приложениями, с одной стороны, в основном сосредоточены на изучении воздействия ВГВ на морские технологические сооружения. С другой стороны, представляют определенный интерес пакеты ВГВ, генерируемые различными источниками возмущений природного и антропогенного характеров (см. [7–10]). Такие пакеты ВГВ могут иметь регулярный характер и сохранять неизменной свою структуру в течение нескольких дней, что дает возможность их обнаружения с помощью радаров с синтезированной апертурой и инфракрасных детекторов (см. [4, 6, 7, 11]). В [8] представлен обзор наблюдений ВГВ больших амплитуд, играющих важную роль в глобальной картине перемешивания вод Мирового океана.

Актуальность исследования возбуждаемых ВГВ заключается также в том, что понимание физических свойств наблюдаемых в океане турбулентных следов остается актуальной и сложной за-

---

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 23-21-00194).

дачей физической океанографии. Соответствующие исследования могут предоставить важную информацию об особенностях полей океанических течений и гидродинамических параметрах источников возбуждения, в том числе для разработки эффективных алгоритмов обнаружения. Даже незначительное ускорение или изменение направления движущегося источника возмущений может привести к заметной трансформации возникающих крупномасштабных амплитудно-фазовых структур волнового следа (см. [7, 8, 12–14]).

В современных научных исследованиях при анализе динамики ВГВ в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) широко используются аналитические модели волновой генерации (см. [1, 4, 7, 16–20]). Численные модели не позволяют эффективно рассчитывать конкретные физические задачи волновой динамики океана и атмосферы с учетом их реальной изменчивости, ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют большой вычислительной мощности, не всегда учитывают физическую специфику решаемых задач, что существенно ограничивает их практическую применимость. Кроме того, использование мощных численных алгоритмов требует верификации и сравнения с решениями модельных задач. В результате проведения модельных расчетов волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натурных условиях волновым картинам, что позволяет оценить физические параметры реальных источников возбуждения ВГВ в природных стратифицированных средах (см. [4–6, 10–12]). В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и анализе получаемых решений (см. [1–4, 7, 17, 18]). Целью настоящей работы является изучение внутренних гравитационных волн, возникающих в потоке стратифицированной среды конечной толщины с модельным распределением частоты плавучести.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ

Рассматривается невязкая, несжимаемая, стратифицированная по вертикали среда, которая в невозмущенном состоянии имеет плотность  $\rho_0(z)$ . Стратификация предполагается устойчивой:  $d\rho_0(z)/dz < 0$ . Линеаризованная система уравнений гидродинамики может быть представлена в виде [1–4, 7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{gp}{\rho_0(z)} = 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{d\rho_0(z)}{dz} W, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $(U_1, U_2, W)$  — вектор скоростей,  $p$  и  $\rho$  — возмущения давления и плотности от равновесного состояния соответственно. Из системы уравнений (1.1) можно получить одно уравнение, например, для вертикальной компоненты скорости  $W$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta W + \frac{\partial^4 W}{\partial t^2 \partial z^2} - \frac{N^2(z)}{g} \frac{\partial^3 W}{\partial t^2 \partial z} + N^2(z) \Delta W = 0, \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $N^2(z) = (g/\rho_0(z))(d\rho_0(z)/dz)$  — квадрат частоты Брента–Вайсяля (частоты плавучести). Оценим третий член уравнения (1.2) по сравнению со вторым. Введем характерный для океана масштаб по вертикали  $Z \sim 10^2$ – $10^3$  м, тогда отношение третьего члена ко второму будет  $\delta \sim ZN^2/g$ , где  $N \sim 10^{-2}$  с $^{-1}$  — характерная частота плавучести (см. [1–5]). В реальном океане  $\delta \sim 10^{-2}$ – $10^{-3} \ll 1$ , поэтому уравнение (1.2) можно представить в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + N^2(z) \Delta W = 0.$$

Данное приближение является общепринятым в большинстве океанологических задач, связанных с изучением динамики линейных ВГВ (см. [1–7]). Интересно отметить, что в случае  $N(z) = \text{const}$  и глубины дна  $H$ , значение  $\delta$  можно оценить следующим образом:

$\delta = H^2 N^2 / (gH) = \pi^2 c^2 / C^2$ , где  $C = \sqrt{gH}$  — скорость длинных поверхностных гравитационных волн на поверхности жидкости глубины  $H$ ,  $c = NH/\pi$  — максимальная групповая скорость ВГВ. В реальном океане эти величины соответственно равны  $C \sim 10^2$  м/с,  $c \sim 1$  м/с (см. [1–4, 7]).

Рассматривается стационарная картина линейных внутренних гравитационных волн, генерируемых точечным источником мощности  $q$  в потоке стратифицированной среды, имеющим скорость  $V$ , занимающую область (слой)  $0 < z < H$ , ось  $z$  направлена вниз. Источник расположен в точке  $(0, 0, z_0)$ ,  $0 < z_0 < H$ . Тогда смещение изопикн  $\xi = \xi(x, y, z, z_0)$ , где  $W = \partial \xi / \partial \xi$ , в приближении Буссинеска и “твердой крышки” описывается уравнением (см. [1, 7, 19])

$$\left(V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \xi + N^2(z) \Delta \xi = q V \delta'(x) \delta(y) \delta'(z - z_0), \quad (1.3)$$

$$\xi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, H.$$

Далее будем рассматривать модельное представление частоты плавучести в виде  $N(z) = 0$  при  $0 \leq z \leq h$ ,  $N(z) = N_0 \exp(-\alpha(z - h))$  при  $h \leq z \leq H$ , которое применяется в прикладных океанологических расчетах для изучения динамики ВГВ, в частности, при наличии сезонного термоклина толщиной несколько десятков метров (см. [1, 5, 6, 8, 10]). Параметр  $\alpha$  характеризует вертикальный масштаб стратификации.

Замечательной особенностью Мирового океана является наличие такого слоя — пространственной области сравнительно быстрого изменения температуры и в то же время области большой устойчивости частоты плавучести. Зависимость частоты Брента–Вайсяля от глубины в модельном представлении может отличаться от эмпирических зависимостей, которые, однако, могут характеризоваться наличием в верхнем слое океана слоя с почти постоянной стратификацией, лежащем на подстилающем слое слабой стратификации и большой глубины. Модельное распределение частоты плавучести позволяет исследовать задачу аналитически, в то время как использование эмпирических зависимостей требует применения только численных методов. Однако, как показывают ряд исследований, основные качественные результаты по описанию динамики ВГВ, как правило, не сильно зависят от конкретной аналитической формы аппроксимации частоты плавучести (см. [5–7, 17, 18, 21]).

Фурье-образ возвышения изопикн

$$\Phi(\mu, \nu, z, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(\nu y + \mu x)) \xi(x, y, z, z_0) dx$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{N^2(z)}{(\mu V)^2} - 1 \right) \Phi = \frac{i q}{\mu V} \delta'(z - z_0), \quad (1.4)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, H, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2.$$

Решение (1.4) ищется в виде ряда по собственным функциям  $\varphi_n(z, k)$  соответствующей однородной спектральной задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi_n(z, k)}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{N^2(z)}{\omega_n^2(k)} - 1 \right) \varphi_n(z, k) = 0, \quad (1.5)$$

$$\varphi_n(z, k) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, H.$$

Задача (1.5) имеет полную ортонормированную (с весом  $N^2(z)$ ) систему собственных функций  $\varphi_n(z, k)$  и соответствующий набор собственных значений  $\omega_n(k)$  (дисперсионных кривых) (см. [1, 4, 7]). Для использованной модельной стратификации собственные функции  $\varphi_n(z, k)$  могут быть найдены аналитически (см. [16, 22, 23]):

$$\varphi_n(z, k) = \frac{1}{L_n} \text{sh}(kz) \quad \text{при} \quad 0 \leq z \leq h,$$

$$\varphi_n(z, k) = \frac{1}{L_n} \left( C_n^1 J_\lambda(\beta_n(z)) + C_n^2 Y_\lambda(\beta_n(z)) \right) \quad \text{при} \quad h \leq z \leq H,$$

$$C_n^{1,2} = \frac{d_n^{1,2}}{D_n}, \quad \beta_n(z) = \lambda \frac{N(z)}{\omega_n(k)}, \quad \lambda = \frac{k}{\alpha},$$

$$d_n^1 = \frac{\omega}{N_0} \operatorname{ch}(kh) Y_\lambda(\beta_n(h)) + \operatorname{sh}(kh) Y'_\lambda(\beta_n(h)),$$

$$d_n^2 = -\frac{\omega}{N_0} \operatorname{ch}(kh) J_\lambda(\beta_n(h)) - \operatorname{sh}(kh) J'_\lambda(\beta_n(h)),$$

$$D_n = J_\lambda(\beta_n(h)) Y'_\lambda(\beta_n(h)) - J'_\lambda(\beta_n(h)) Y_\lambda(\beta_n(h)),$$

$$L_n = \left( \int_h^H N^2(z) \left( C_n^1 J_\lambda(\beta_n(z)) + C_n^2 Y_\lambda(\beta_n(z)) \right)^2 dz \right)^{1/2},$$

где  $J_\lambda, Y_\lambda$  — функции Бесселя действительного индекса  $\lambda$ . Тогда из условия обращения в нуль собственной функции  $\varphi_n(z, k)$  при  $z = H$  можно получить неявную форму дисперсионного соотношения

$$d_n^1 J_\lambda \left( \lambda \frac{N(H)}{\omega_n(k)} \right) + d_n^2 Y_\lambda \left( \lambda \frac{N(H)}{\omega_n(k)} \right) = 0,$$

решение которого представляет определенную вычислительную трудность. При малых значениях волнового числа  $k$  аналитические свойства дисперсионных кривых  $\omega_n(k)$  (в виде ряда по нечетным степеням  $k$ ) определяются из задачи (1.5) с помощью метода возмущений (см. [1, 4, 7]). При значениях  $k$ , отличных от нуля, можно при достаточно малых значениях параметра  $\alpha$ , характеризующего вертикальный масштаб стратификации, построить равномерную (по параметру  $\lambda = k/\alpha$ ) асимптотику функции  $J_\lambda(\lambda\tau)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  и произвольных значениях  $\tau$ . Действительно, функция  $F = J_\lambda(\lambda\tau)$  удовлетворяет уравнению Бесселя порядка  $\lambda$  (см. [22, 23])

$$\tau^2 F'' + \tau F' + \lambda^2 (\tau^2 - 1) F = 0. \quad (1.6)$$

Перейдем в (1.6) к новой функции  $F = u(\tau)/\sqrt{\tau}$ . В результате можно получить

$$u'' + \left( \lambda^2 q_1(\tau) + q_2(\tau) \right) u = 0, \quad q_1(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^2}, \quad q_2(\tau) = \frac{1}{4\tau^2}. \quad (1.7)$$

Далее, следуя общим алгоритмам построения асимптотик функций Бесселя, выполним переход к новой независимой переменной  $s$  и новой функции  $v(s)$ :  $s = \varphi(\tau)$ ,  $v = \psi(\tau)u(\tau)$ , где функции  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  подлежат определению (см. [24]). Тогда из (1.7) можно получить

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \left( \varphi'' - \frac{2\psi'\varphi'}{\psi} \right) \frac{dv}{ds} + \left( \lambda^2 \frac{q_1}{(\varphi')^2} + \frac{q_2}{(\varphi')^2} - \frac{\psi''}{\psi(\varphi')^2} + \frac{2(\psi')^2}{\psi^2(\varphi')^2} \right) v = 0. \quad (1.8)$$

Для преобразования уравнения (1.8) потребуем, чтобы коэффициент при  $dv/ds$  был равен нулю:  $\varphi'' - 2\psi'\varphi'/\psi = 0$ . Тогда, интегрируя это уравнение, имеем  $\psi = \sqrt{\varphi'}$ . Далее, требуя, чтобы  $\lambda^2 q_1/(\varphi')^2 = s = \varphi(\tau)$ , можно получить явные выражения для функции  $\varphi(\tau)$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \left[ \frac{3}{2} \lambda \left( \sqrt{\tau^2 - 1} - \arccos \frac{1}{\tau} \right) \right]^{2/3} \quad \text{при} \quad \tau > 1, \\ \varphi(\tau) &= - \left[ \frac{3}{2} \lambda \left( -\sqrt{1 - \tau^2} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{\tau} \right) \right]^{2/3} \quad \text{при} \quad \tau < 1. \end{aligned}$$

В результате уравнение (1.8) представимо в форме

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + (s + \delta)v = 0, \quad \delta = \frac{q_2}{(\varphi')^2} - \frac{\psi''}{\psi(\varphi')^2} + \frac{2(\psi')^2}{\psi^2(\varphi')^2},$$

где  $\delta = O(1/\sqrt{\lambda})$  и  $s = \varphi(\tau) = O(\lambda^{2/3})$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Поэтому для главного члена асимптотики получается уравнение Эйри:  $d^2 v/ds^2 + sv = 0$ , ограниченное решение которого  $v(s) = C \operatorname{Ai}(-s) = C \operatorname{Ai}(-\varphi(\tau))$  (см. [22, 23]). Тогда асимптотика функции  $J_\lambda(\lambda\tau)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеет вид

$$J_\lambda(\lambda\tau) \sim \frac{u}{\sqrt{\tau}} = \frac{C \operatorname{Ai}(-\varphi(\tau))}{\psi(\tau)\sqrt{\tau}}, \quad \psi(\tau) = \sqrt{\frac{\lambda}{\tau}} \sqrt{\frac{\tau^2 - 1}{\varphi(\tau)}}.$$

Значение постоянной  $C$  определяется из условий сшивки соответствующих асимптотических разложений. В результате можно получить равномерную по переменной  $\tau$  на луче  $[0; +\infty)$  асимптотику функции Бесселя  $J_\lambda(\lambda\tau)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  в виде

$$J_\lambda(\lambda\tau) \sim \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \operatorname{Ai}(-\varphi(\tau)) \sqrt{\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2 - 1}}.$$

Асимптотический анализ поведения функций Бесселя  $Y_\lambda$  можно провести аналогично [24], что дает возможность эффективно рассчитывать неявную форму дисперсионного соотношения. Далее, в силу полноты и ортонормированности собственных функций  $\varphi_n(z, k)$ , используя соотношение  $\delta'(z - z_0) = -N^2(z) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z, k) \partial \varphi_n(z_0, k) / \partial z_0$ , окончательно получаем решение задачи (1.3) в виде суммы волновых мод:  $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ , где

$$\xi_n = \frac{iqV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(vy + \mu x)) \frac{\mu \omega_n^2(k)}{(\mu^2 V^2 - \omega_n^2(k))k^2} \varphi_n(z, k) \frac{\partial \varphi_n(z_0, k)}{\partial z_0} d\mu. \quad (1.9)$$

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Чтобы удовлетворить условию излучения, т.е. условию отсутствия волнового возмущения вверх по потоку, контур интегрирования по переменной  $\mu$  следует сместить в верхнюю полуплоскость, тогда при  $x < 0$  интеграл (1.9) экспоненциально мал. При  $x > 0$  контур интегрирования в (1.9) замыкается в нижнюю полуплоскость. В этом случае основной вклад будет определяться полюсами подынтегральной функции на действительной оси, которые находятся из уравнения  $\mu^2 V^2 = \omega_n^2(\sqrt{\mu^2 + v^2})$ . Учитывая вычеты в полюсах  $\mu = \pm \mu_n(v)$ , для отдельной моды возвышения изопокин можно получить представление в виде

$$\xi_n = \frac{qV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} A_n [\exp(-i(vy + \mu_n(v)x)) + \exp(i(vy - \mu_n(v)x))] \varphi_n(z, k) \frac{\partial \varphi_n(z_0, k)}{\partial z_0} dv,$$

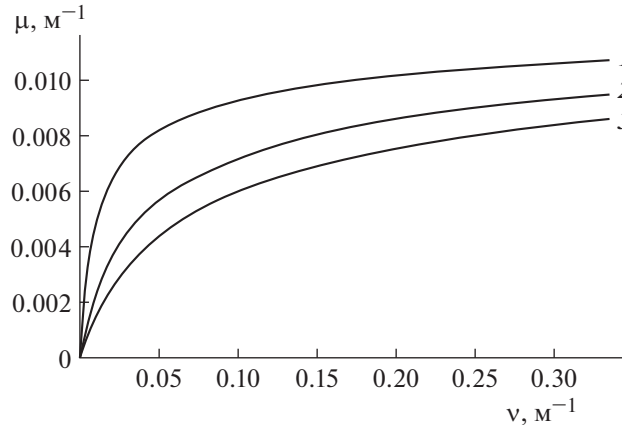
$$A_n = \frac{\omega_n^2(k)}{(V^2 - \omega_n(k)\omega'_n(k)/k)k^2}, \quad k \equiv k(v) = \sqrt{\mu_n^2(v) + v^2}.$$

Используя соотношение

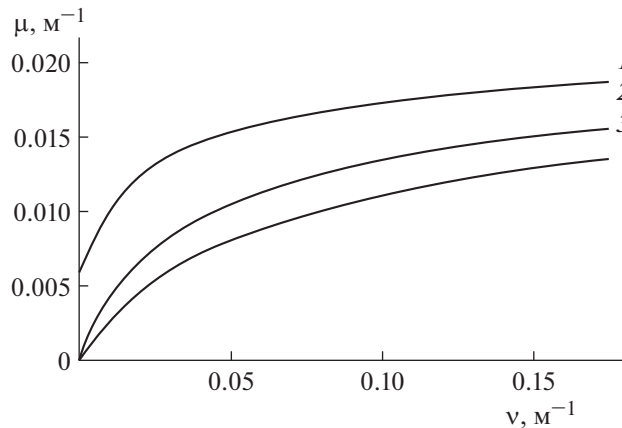
$$\frac{\omega_n(k)\omega'_n(k)}{k} = \frac{\mu_n(v)\mu'_n(v)V^2}{\mu_n(v)\mu'_n(v) + v},$$

окончательно имеем

$$\xi_n = \frac{qV}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mu_n^2(v)}{\mu_n^2(v) + v^2} \left( \frac{\mu_n(v)\mu'_n(v)}{v} + 1 \right) \cos(\mu_n(v)x) \cos(vy) f_n(z, v) \frac{\partial f_n(z_0, v)}{\partial z_0} dv,$$



**Фиг. 1.** Дисперсионные кривые  $\mu_n(v)$  первых трех мод: 1 – первая мода, 2 – вторая мода, 3 – третья мода. Сверхкритический режим.

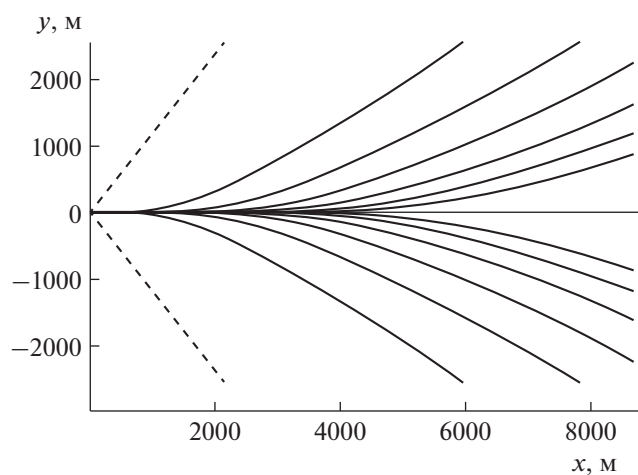


**Фиг. 2.** Дисперсионные кривые  $\mu_n(v)$  первых трех мод: 1 – первая мода, 2 – вторая мода, 3 – третья мода. До-критический режим.

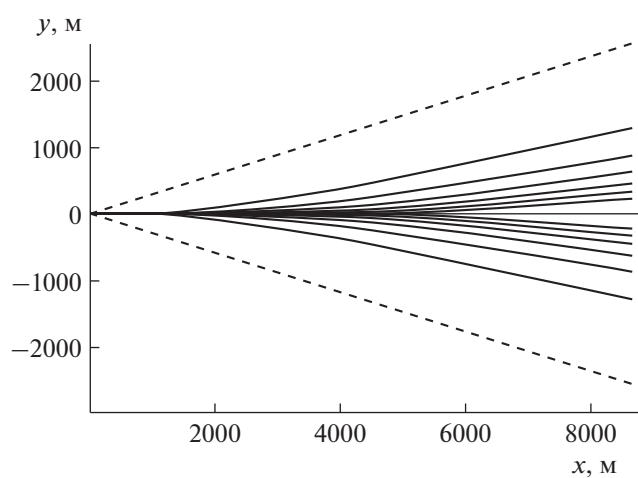
$$f_n(z, v) \equiv \varphi_n \left( z, \sqrt{\mu_n^2(v) + v^2} \right).$$

На иллюстрациях приведены результаты расчетов дисперсионных кривых (фиг. 1, 2), линий равных фаз (фиг. 3–5, 7–9) и волновых полей возвышения изопикн (фиг. 6, 10) первых трех мод для различных значений скорости потока:  $M = 1.3$  (фиг. 1, 3–6),  $M = 0.7$  (фиг. 2, 7–10), где  $M$  – отношение скорости стратифицированного потока  $V$  к максимальной групповой скорости первой волновой моды ВГВ. Остальные параметры расчетов, характерные для условий реального океана, были следующие (см. [1–7]):  $N_0 = 0.015 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha_0 = 0.01 \text{ м}^{-1}$ ,  $h = 50 \text{ м}$ ,  $H = 1600 \text{ м}$ ,  $z = 40 \text{ м}$  (горизонт наблюдения),  $z_0 = 60 \text{ м}$  (горизонт источника). Сплошные линии на фиг. 3–5, 7–9 – линии равной фазы с шагом  $2\pi$ , штриховые – волновые фронты.

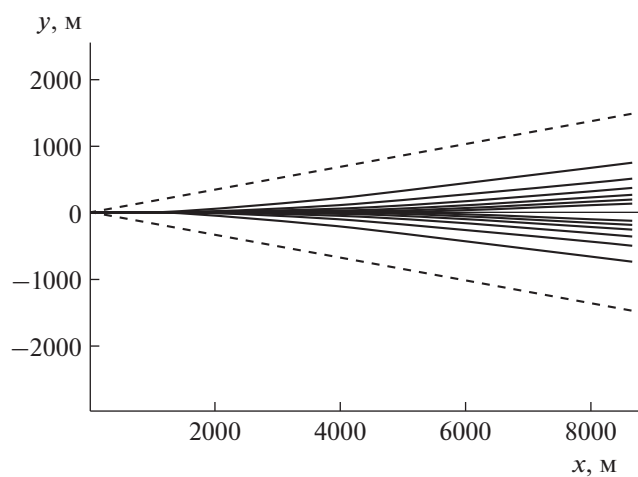
Для заданных параметров численное исследование дисперсионных соотношений показывает, что при  $M = 0.7$  только у первой волновой моды значение в нуле положительно ( $\mu_1(0) > 0$ ), у остальных мод  $\mu_n(0) = 0$ ,  $n > 1$ . Максимальная групповая скорость первой моды больше скорости потока  $V$ , максимальные групповые скорости других мод меньше скорости потока. Поэтому полученные результаты можно интерпретировать следующим образом: стратифицированный поток при  $M = 0.7$  является докритическим для первой моды (его скорость меньше максимальной



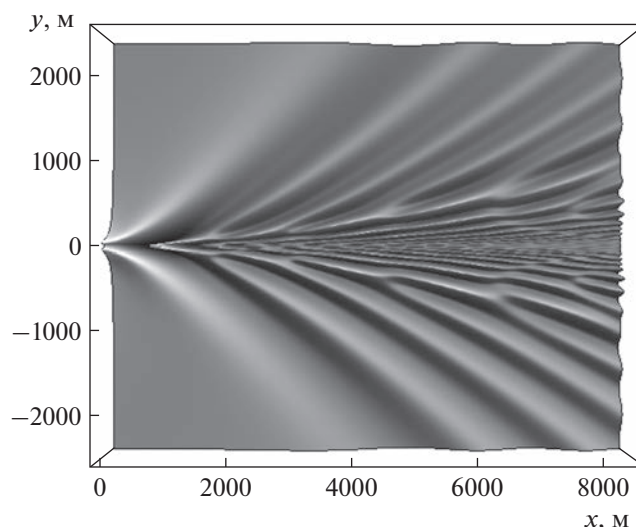
Фиг. 3. Линии равной фазы первой моды.



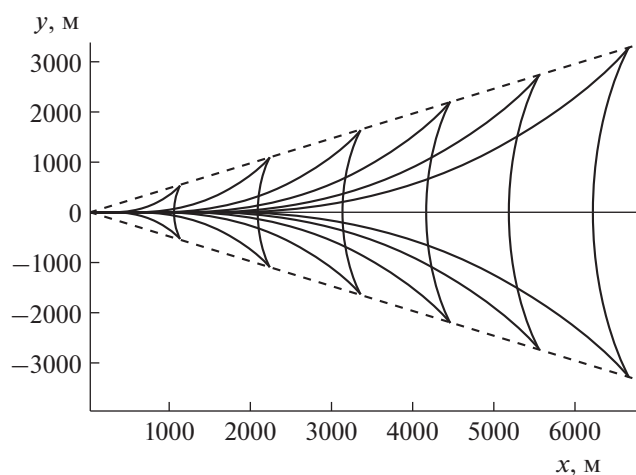
Фиг. 4. Линии равной фазы второй моды.



Фиг. 5. Линии равной фазы третьей моды.

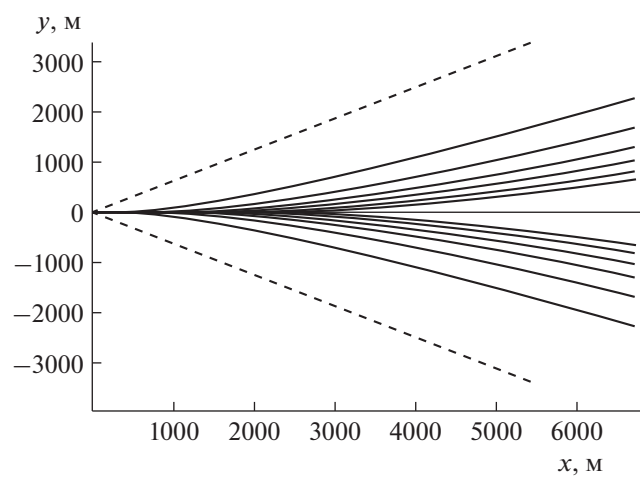


Фиг. 6. Возвышение изопикн: сумма трех первых мод.

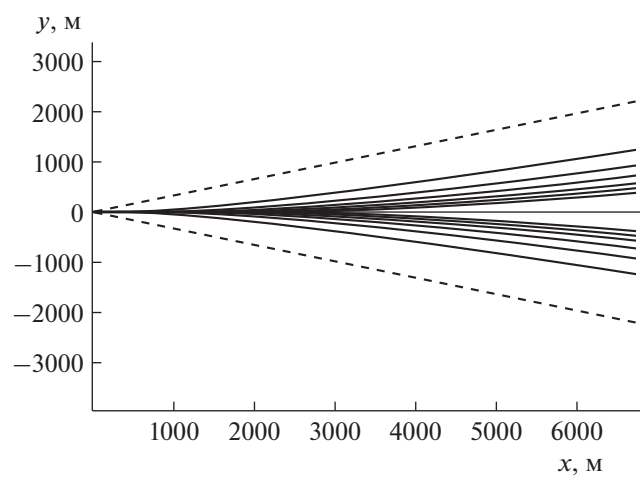


Фиг. 7. Линии равной фазы первой моды.

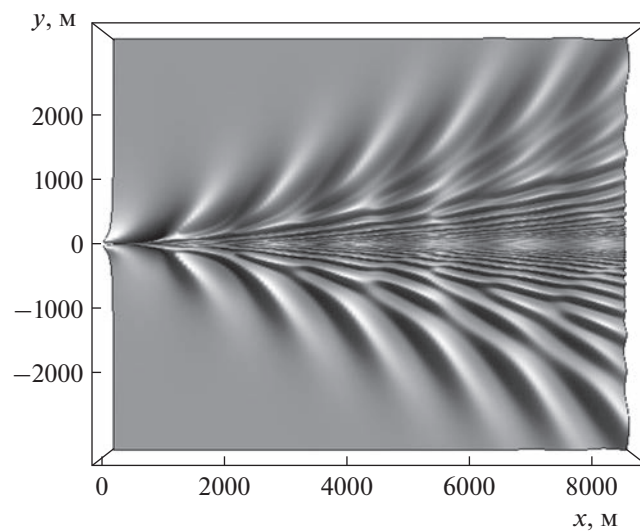
групповой скорости волны первой моды) и сверхкритическим для других мод (максимальная групповая скорость которых меньше скорости потока). Это означает, в частности, что волновая система первой моды (с наибольшим углом полураствора) состоит как из продольных (клиновидных), так и из поперечных (кольцевых) волн (фиг. 7). Остальные моды (с меньшими углами полураствора) представляют собой только продольные (клиновидные) волны (фиг. 8, 9). Известно, что максимальные групповые скорости ВГВ при увеличении номера моды  $n$  убывают как  $n^{-1}$ , поэтому только конечное число волновых мод могут генерировать поперечные (кольцевые) волны (см. [1, 7, 16, 17]). При  $M > 1$  все волновые моды находятся внутри клиновидной области, ограниченной углом полураствора первой моды вниз по потоку. Определяющий вклад в полное поле вносят только первые три моды, суммарный вклад остальных мод не превышает 5%. Такие параметры течения, как толщина стратифицированного слоя  $h$ , значение вертикального масштаба стратификации  $\alpha$ , величина скорости потока  $V$ , являются основными факторами, влияющими на амплитудно-фазовую пространственную трансформацию возбуждаемых вниз по потоку волновых полей.



**Фиг. 8.** Линии равной фазы второй моды.



**Фиг. 9.** Линии равной фазы третьей моды.



**Фиг. 10.** Возвышение изопоикн: сумма трех первых мод.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенные в работе решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики полей внутренних гравитационных волн от локализованного источника возмущений в потоке стратифицированной среды конечной толщины с модельным распределением частоты плавучести. Получена неявная форма дисперсионного соотношения, аналитическое представление которого выражается через функции Бесселя действительного индекса. Приведены результаты численных расчетов дисперсионных кривых, линий равной фазы и волновых амплитуд для различных скоростей потока и волновых мод. Наибольший выигрыш при использовании данного подхода можно получить при исследовании эволюции волновых пакетов, возбуждаемых распределенными в пространстве возмущениями, так как, используя операцию свертки, построенные в работе решения позволяют рассчитывать волновые поля от нелокальных движущихся источников возмущений различной физической природы. Полученные результаты с различными значениями входящих в них параметров позволяют провести оценку характеристик пакетов внутренних гравитационных волн, наблюдаемых в реальных океанических условиях. Такие волновые картины полей могут наблюдаться при дистанционном зондировании, наблюдении и измерениях внутренних гравитационных волн, возбуждаемых различными источниками возмущений в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мирополюцкий Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Ленинград: Гидрометеоздат, 1981. 302 с.
2. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Ozsoy E.* Geophysical fluid dynamics II. Stratified rotating fluid dynamics of the atmosphere-ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. Switzerland AG Cham: Springer Nature, 2021. 323 p.
5. *Morozov E. G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
6. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.)* The ocean in motion. Springer Oceanography. Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.
7. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
8. *Сабинин К.Д., Серебряный А.Н.* “Горячие” точки в поле внутренних волн в океане // Акустич. ж. 2007. Т. 53. № 3. С. 410–436.
9. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mech. 2013. V. 720. P. 104–139.
10. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dynamics Atm. Oceans. 2019. V. 86. P. 116–133.
11. *Сидняев Н.И.* Теоретические исследования гидродинамики при подводном взрыве точечного источника // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 2. URL: <https://engjournal.ru/catalog/aprmath/hidden/614.html>  
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-2-614>
12. *Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Крикалев С.К., Кумакшев С.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Идентификация системы океанских волн по фотоснимкам из космоса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 1. С. 117–127.
13. *Матюшин П.В.* Процесс формирования внутренних волн, инициированных начальным движением тела в стратифицированной вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 3. С. 83–97.
14. *Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z.* Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // Ocean Engineer. 2022. V. 266. P. 112840.
15. *Wang J., Wang S., Chen X., Wang W., Xu Y.* Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount // Phys. Fluid. 2017. V. 29. P. 106601.
16. *Garrett C., Munk W.* Space-time scales of internal waves // Geophys. Fluid Dyn. 1972. V. 3. P. 225–264.
17. *Свиркунов П.Н., Калашиник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
18. *Gnevyshev V., Badulin S.* Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // Fluids. 2020. V. 5. P. 219.

19. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Generation of internal gravity waves far from moving non-local source // *Symmetry*. 2020. V. 12 (11). P. 1899.
20. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Аналитические решения уравнения внутренних гравитационных волн в полубесконечном слое стратифицированной среды переменной плавучести // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 5. С. 792–795.
21. *Рындина В.В.* Собственные частоты внутренних волн в жидкости и частота Брента–Вайсяля. Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2007. 128 с.
22. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с.
23. *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М.: ИД Интеллект, 2008. 344 с.
24. *Доброхотов С.Ю., Миненков Д.С., Назайкинский В.Е.* Представления функций Бесселя с помощью канонического оператора Маслова // *Теор. и матем. физ.* 2021. Т. 208. № 2. С. 196–217.