ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 10, с. 1648–1659

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.634

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛЭМБА В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА

© 2023 г. А. В. Кравцов[1,*]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т, Россия

**e-mail: avkravtsow@rambler.ru*

Поступила в редакцию 14.04.2023 г.
Переработанный вариант 14.04.2023 г.
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Рассматривается начально-краевая задача Лэмба для упругого полупространства в случае, когда коэффициент Пуассона принимает предельное значение 1/2. Доказывается существование классического решения для осевой симметрии в виде повторного несобственного интеграла. Библ. 6.

Ключевые слова: упругая среда, уравнения Ламэ, коэффициент Пуассона, интеграл Фурье–Бесселя, интеграл Меллина, оценки интегралов.

DOI: 10.31857/S0044466923100083, **EDN:** LIPUJQ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМАЛЬНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

В упругой среде, занимающей полупространство, малые относительные перемещения описываются уравнениями Ламэ

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2},$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, λ, μ и ρ_0 соответственно параметры Ламэ и плотность упругой среды.

Пусть к свободной поверхности S упругой среды приложена нагрузка $\mathbf{n}\tilde{p}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к S, $\tilde{p}$ – заданная функция точки поверхности и времени. В соответствии с [1], граничные условия на свободной поверхности зададим в виде

$$2\mu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n}+\lambda\mathbf{n}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\rho_0 g(\mathbf{u},\mathbf{n})+\mu[\mathbf{n},\mathrm{rot}\,\mathbf{u}]=\mathbf{n}\tilde{p},$$

где g – ускорение свободного падения (вектор $\mathbf{n}$ противоположен вектору силы тяжести).

Параметры Ламэ выражаются через коэффициент Пуассона ν и модуль Юнга E следующим образом:

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Далее будем считать, что $\nu\to\frac{1}{2}-0$, а $E\to+0$, но так, что отношение $\frac{E}{1-2\nu}\to k>0$. Поэтому $\lambda\to\frac{k}{3}$, $\mu\to+0$, что означает отсутствие в упругой среде волн сдвига. Для отличного от нуля параметра Ламэ мы сохраним прежнее обозначение λ. Тогда уравнения для перемещений и граничные условия на свободной поверхности примут вид

$$\lambda\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2},\quad \lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\rho_0 g(\mathbf{u},\mathbf{n})=\tilde{p}.$$

Представим вектор перемещений в виде $\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi$. Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, для которой поверхность S совпадает с плоскостью $z = 0$ и орт оси z сонаправлен с вектором $\mathbf{n}$.

Пусть функция $\tilde{p}$ имеет вид $\tilde{p}(r,t) = p_0 f(r)\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t$, где $f(r)$ – заданная непрерывная функция, допускающая разложение в интеграл Фурье–Бесселя, а p_0, α, ω – заданные положительные постоянные величины. Заметим, что формальное интегральное представление решения начально-краевой задачи Лэмба в случае предельного значения коэффициента Пуассона представлено в [2]. Там же получена асимптотическая оценка решения при больших значениях полярного радиуса. Задача об установившихся колебаниях упругого полупространства в случае предельного значения коэффициента Пуассона рассматривалась в [3], где было доказано существование классического решения при $r > 0$, $z \le 0$ и получены асимптотические формулы для компонент вектора перемещений при достаточно больших r. Формальное интегральное представление решения задачи Лэмба в случае распределенной гармонической нагрузки для произвольного ν из интервала $(0,1/2)$ представлено в [4], где было проведено сравнение аналитического и численного решений. В [5] начально-краевая задача Лэмба для полупространства решалась методом конечных элементов.

Для функции φ в безразмерных переменных, для которых сохранены прежние обозначения, получим задачу (см. [2])

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi, \quad (r,z,t)\in\Omega: \quad r>0, \quad z<0, \quad t>0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{z=0} + \beta\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{p_0}{\rho_0 a^2} f(r)\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin t, \quad r>0, \quad t\ge 0,$$

$$\varphi\to 0, \quad \sqrt{r^2+z^2}\to+\infty, \quad t\ge 0, \quad |\varphi|\le C, \quad (r,z,t)\in\Omega': \quad r>0, \quad z\le 0, \quad t\ge 0, \tag{2}$$

$$\left.\varphi\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad r>0, \quad z\le 0, \quad a=\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0}}, \quad \beta=\frac{g}{\omega a}, \quad \gamma=\frac{\alpha}{\omega}.$$

Кроме того, считаем, что функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = \frac{l^3}{\left(r^2+l^2\right)^{3/2}}, \quad l>0.$$

Формальное, не зависящее от θ, классическое решение задачи (1), (2) в виде интеграла Фурье–Бесселя следующее (см. [2]):

$$\varphi(r,z,t) = \int\limits_0^{+\infty} J_0(xr)\Phi(x,z,t)x\,dx, \quad (r,z,t)\in\Omega', \tag{3}$$

где $J_0(u)$ – функция Бесселя нулевого порядка, а $\Phi(x,z,t)$ – образ Фурье–Бесселя функции $\varphi(r,z,t)$, который при $x>0$ имеет вид интеграла Меллина

$$\Phi(x,z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{A\,\mathrm{e}^{pt-lx+z\sqrt{p^2+x^2}}\,dp}{\left[(p+\gamma)^2+1\right]\left(p^2+\beta\sqrt{p^2+x^2}\right)}, \quad A=\frac{p_0 l^2}{\rho_0 a^2}. \tag{4}$$

Здесь b – любое положительное число, $p=\xi+i\eta$, а $\sqrt{p^2+x^2}$ означает аналитическую в области $p\notin(-i\infty,-ix]\cup[ix,+i\infty)$ функцию такую, что $\sqrt{\xi^2+x^2}>0\ \forall x>0$.

В [2] было показано, что для интеграла Меллина имеет место представление

$$\Phi(x,z,t) = 2\pi i\sum_{n=1}^{4}\operatorname{res}[F(p,x,z,t),p_n] - I_{1l}(x,z,t) - I_{1r}(x,z,t) - I_{2l}(x,z,t) - I_{2r}(x,z,t), \tag{5}$$

где $\operatorname{res}[F(p,x,z,t),p_n]$ – вычеты в полюсах p_n его подынтегральной функции $F(p,x,z,t)$ (множитель $\dfrac{1}{2\pi i}$ включается в подынтегральную функцию), а $I_{1l}(x,z,t)$, ... , $I_{2r}(x,z,t)$ – интегралы от $F(p,x,z,t)$ по берегам разрезов Γ_1: $[ix,+i\infty)$, Γ_2: $(-i\infty,-ix]$:

$$p_k(x)=\pm i\sigma(x),\quad \sigma(x)=\sqrt{\sqrt{\frac{\beta^4}{4}+\beta^2x^2}-\frac{\beta^2}{2}},\quad k=1,2,\quad p_m=-\gamma\pm i,\quad m=3,4,$$

$$\operatorname{res}\left[F(p,x,z,t),p_k\right]=\mp\frac{B\,\mathrm{e}^{\pm i\sigma(x)t-lx+z\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}}\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}}{\sigma(x)\left\{\left[\pm i\sigma(x)+\gamma\right]^2+1\right\}\left(2\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}+\beta\right)},\quad B=\frac{A}{2\pi},$$

(верхний знак соответствует $k=1$, нижний $k=2$),

$$\operatorname{res}\left[F(p,x,z,t),p_m\right]=\mp\frac{B\,\mathrm{e}^{(-\gamma\pm i)t-lx+zy(p_m,x)}}{2\left[(-\gamma\pm i)^2+\beta y(p_m,x)\right]},\quad y(p_m,x)=\left[\left(x^2+\gamma^2-1\right)^2+4\gamma^2\right]^{1/4}\mathrm{e}^{i\psi_m(x)},$$

$$\psi_m(x)=\begin{cases}\mp\dfrac{\pi}{2}\pm\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{1-x}+\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{1+x}\right), & 0<x<1,\\ \mp\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{2}, & x=1,\\ \pm\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{x+1}-\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{x-1}\right), & x>1\end{cases}$$

(верхний знак соответствует $m=3$, нижний $m=4$),

$$I_{1l}(x,z,t)=-\int\limits_x^{+\infty}\frac{B\,\mathrm{e}^{i\eta t-lx-iz\sqrt{\eta^2-x^2}}\,d\eta}{\left[(i\eta+\gamma)^2+1\right]\left(\eta^2+i\beta\sqrt{\eta^2-x^2}\right)},$$

$$I_{1r}(x,z,t)=-\int\limits_x^{+\infty}\frac{B\,\mathrm{e}^{i\eta t-lx+iz\sqrt{\eta^2-x^2}}\,d\eta}{\left[(i\eta+\gamma)^2+1\right]\left(-\eta^2+i\beta\sqrt{\eta^2-x^2}\right)},$$

$$I_{2l}(x,z,t)=\int\limits_x^{+\infty}\frac{B\,\mathrm{e}^{-i\eta t-lx+iz\sqrt{\eta^2-x^2}}\,d\eta}{\left[(-i\eta+\gamma)^2+1\right]\left(-\eta^2+i\beta\sqrt{\eta^2-x^2}\right)},$$

$$I_{2r}(x,z,t)=\int\limits_x^{+\infty}\frac{B\,\mathrm{e}^{-i\eta t-lx-iz\sqrt{\eta^2-x^2}}\,d\eta}{\left[(-i\eta+\gamma)^2+1\right]\left(\eta^2+i\beta\sqrt{\eta^2-x^2}\right)}$$

(индексы $1l$, $1r$ соответствуют левому и правому берегам разреза Γ_1, а индексы $2l$, $2r$ – левому и правому берегам разреза Γ_2).

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Докажем, что функция $\varphi(r,z,t)$ является решением задачи (1), (2). Сначала убедимся, что эта функция удовлетворяет уравнению (1) в области Ω.

В [2] было показано, что функция $x\Phi(x,z,t)$ под знаком интеграла в (3) непрерывна на множестве G': $x\ge 0$, $z\le 0$, $t\ge 0$. Докажем, что данная функция имеет на G' непрерывные частные производные по z и t до второго порядка включительно.

Рассмотрим интеграл $I_{1l}(x,z,t)$. Для любого $x>0$ сделаем замену $s=\eta-x$. Получим

$$I_{1l}(x,z,t)=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{B\,\mathrm{e}^{i(s+x)t-lx-iz\sqrt{s(s+2x)}}\,ds}{\left\{\left[i(s+x)+\gamma\right]^2+1\right\}\left[i\beta\sqrt{s(s+2x)}-(s+x)^2\right]}:=\int\limits_0^{+\infty}f_0(s,x,z,t)ds.$$

На множестве H: $s \ge 0$, $x > 0$, $z \le 0$, $t \ge 0$ функция $f_0(s,x,z,t)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^k f_0}{\partial z^k} = (-i)^k \left[s(s+2x)\right]^{k/2} f_0, \quad \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k} = \left[i(s+x)\right]^k f_0, \quad k = 1,2.$$

Рассмотрим интегралы

$$I_z^k(x,z,t) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^k f_0}{\partial z^k} ds, \quad I_t^k(x,z,t) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k} ds, \quad k = 1,2.$$

При фиксированных x, z, t, принадлежащих множеству G: $x > 0$, $z \le 0$, $t \ge 0$, они сходятся абсолютно по признаку сравнения:

$$\lim_{s\to+\infty} \left|\frac{\partial^k f_0}{\partial z^k}\right| s^2 = \lim_{s\to+\infty} \left|\frac{\partial^k f_0}{\partial t^k}\right| s^2 = 0.$$

Докажем, что эти интегралы сходятся равномерно на G. Представим I_z^k в виде

$$I_z^k = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{s_0} + \int\limits_{s_0}^{+\infty} := I_{1z}^k + I_{2z}^k + I_{3z}^k,$$

где s_0 – любое число, большее $\sqrt{\gamma^2+1}$. Интегралы I_{1z}^k, I_{2z}^k – собственные. Для подынтегральных функций интегралов I_{3z}^k при всех $s \ge s_0$, $x > 0$, $z \le 0$, $t \ge 0$ имеем

$$\left|\frac{\partial^k f_0}{\partial z^k}\right| < \frac{\left[s(s+2x)\right]^{k/2} B\,\mathrm{e}^{-lx}}{\left[s^2-1-\gamma^2\right](s+x)^2} < \frac{B\,\mathrm{e}^{-lx} s^{-1+k/2}}{s^2-1-\gamma^2}\frac{s+2x}{s+x} < \frac{2B\,\mathrm{e}^{-lx} s^{-1+k/2}}{s^2-1-\gamma^2} < \frac{2Bs^{-1+k/2}}{s^2-1-\gamma^2}. \tag{6}$$

Поэтому I_{3z}^k сходятся равномерно на G по признаку Вейерштрасса. Тогда интеграл $I_{1l}(x,z,t)$ имеет на G непрерывную частную производную по z до второго порядка включительно, причем

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\int\limits_0^{+\infty} f_0(s,x,z,t)ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^k f_0}{\partial z^k}(s,x,z,t)\,ds, \quad k = 1,2. \tag{7}$$

Представим I_t^k в виде

$$I_t^k = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{s_0} + \int\limits_{s_0}^{+\infty} := I_{1t}^k + I_{2t}^k + I_{3t}^k.$$

Интегралы I_{1t}^k, I_{2t}^k – собственные. Для подынтегральных функций интегралов I_{3t}^k при всех $s \ge s_0$, $x > 0$, $z \le 0$, $t \ge 0$ имеем

$$\left|\frac{\partial^k f_0}{\partial t^k}\right| < \frac{B\,\mathrm{e}^{-lx}}{\left[s^2-1-\gamma^2\right](s+x)^{2-k}} < \frac{B\,\mathrm{e}^{-lx}}{\left[s^2-1-\gamma^2\right]s^{2-k}} < \frac{B}{\left[s^2-1-\gamma^2\right]s^{2-k}}. \tag{8}$$

Поэтому I_{3t}^k сходятся равномерно на G по признаку Вейерштрасса. Тогда интеграл $I_{1l}(x,z,t)$ имеет на G непрерывную частную производную по t до второго порядка включительно, причем

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int\limits_0^{+\infty} f_0(s,x,z,t)ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k}(s,x,z,t)\,ds, \quad k = 1,2. \tag{9}$$

Точно так же доказывается, что и остальные интегралы I_{1r}, I_{2l}, I_{2r} имеют на G непрерывные частные производные по z, t до второго порядка включительно и дифференцирование можно проводить под знаками интегралов.

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что функция $f_0(s,x,z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} - x^2 f_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2}, \quad (s,x,z,t) \in H.$$

Откуда, в силу (7), (9), следует, что и интеграл $I_{1l}(x,z,t)$ удовлетворяет этому уравнению

$$\frac{\partial^2 I_{1l}}{\partial z^2} - x^2 I_{1l} = \frac{\partial^2 I_{1l}}{\partial t^2}, \quad (x,z,t) \in G.$$

Аналогичным образом доказывается, что интегралы I_{1r}, I_{2l}, I_{2r} удовлетворяют на G тому же уравнению.

Функции $F_n(x,z,t) := \operatorname{res}[F(p,x,z,t), p_n]$, $n = 1,2,3,4$, имеют на G непрерывные частные производные по z и t до второго порядка включительно. Поэтому, в силу доказанного выше, этими свойствами обладает и $\Phi(x,z,t)$. Кроме того, имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2} - x^2 F_n = \frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2}, \quad (x,z,t) \in G.$$

Откуда, также в силу доказанного выше, следует, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - x^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (x,z,t) \in G. \tag{10}$$

Получим оценки частных производных по z, t первого и второго порядков от всех функций в правой части (5), умноженных на x. Рассмотрим, например, произведения $x\dfrac{\partial^k I_{1l}}{\partial z^k}$, которые, в силу (7), равны xI_z^k, $k = 1,2$.

Пусть $0 < s \le 1$, $0 < x \le \delta$, $z \le 0$, $t \ge 0$, а δ – любое число из интервала $\left(0, \sqrt{\gamma^2+1}-1\right)$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^k f_0}{\partial z^k}\right| < \frac{B(2\delta+1)^{k/2}}{\gamma^2+1-(\delta+1)^2}\frac{e^{-lx}}{\beta\sqrt{2sx}}.$$

Поэтому, в силу сходимости интеграла $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}}$, будем иметь

$$x\left|I_{1z}^k\right| \le C_1\sqrt{x}\, e^{-lx}.$$

Пусть $0 \le s \le 1$, $x > \delta$, $z \le 0$, $t \ge 0$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^k f_0}{\partial z^k}\right| < \frac{[s(s+2x)]^{k/2}}{2\gamma(s+x)^3} B e^{-lx} < \frac{B e^{-lx}}{2\gamma\delta^{3-k/2}}\left(\frac{s+2x}{s+x}\right)^{k/2} \le \frac{2^{-1+k/2}}{\gamma\delta^{3-k/2}} B e^{-lx}, \quad x\left|I_{1z}^k\right| < C_2 x\, e^{-lx}.$$

Следовательно,

$$x\left|I_{1z}^k\right| < C_3\left(\sqrt{x}+x\right)e^{-lx}, \quad (x,z,t) \in G.$$

Пусть $1 \le s \le s_0$, $x > 0$, $z \le 0$, $t \ge 0$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^k f_0}{\partial z^k}\right| < \frac{[s(s+2x)]^{k/2}}{2\gamma(s+x)^3} B e^{-lx} < \frac{B e^{-lx}}{2\gamma s^{3-k}}\left(\frac{s+2x}{s+x}\right)^{k/2} \le 2^{-1+k/2}\frac{B e^{-lx}}{\gamma}.$$

Поэтому

$$x\left|I_{2z}^k\right| < C_4 x\, e^{-lx}, \quad (x,z,t) \in G.$$

Из (6) следует, что

$$x\left|I_{3z}^k\right| < C_5 x\, e^{-lx}, \quad (x,z,t) \in G.$$

Из указанных выше оценок и равенства (7) получаем

$$x\left|\frac{\partial^k I_{1l}}{\partial z^k}\right| < C_6\left(\sqrt{x}+x\right)\mathrm{e}^{-lx}, \quad (x,z,t)\in G, \quad k=1,2.$$

Пусть $0<s\le 1$, $0<x\le\delta$, $z\le 0$, $t\ge 0$, где δ имеет тот же смысл, что и ранее. Тогда

$$\left|\frac{\partial^k f_0}{\partial t^k}\right| < \frac{B(\delta+1)^k}{\gamma^2+1-(\delta+1)^2}\frac{\mathrm{e}^{-lx}}{\beta\sqrt{2sx}}, \quad x\left|I_{1t}^k\right| \le C_7\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-lx}.$$

Пусть $0\le s\le 1$, $x>\delta$, $z\le 0$, $t\ge 0$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^k f_0}{\partial t^k}\right| < \frac{B\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\gamma(s+x)^{3-k}} \le \frac{B\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\gamma\delta^{3-k}}, \quad x\left|I_{1t}^k\right| < C_8 x\,\mathrm{e}^{-lx}.$$

Следовательно,

$$x\left|I_{1t}^k\right| < C_9\left(\sqrt{x}+x\right)\mathrm{e}^{-lx}, \quad (x,z,t)\in G.$$

Пусть $1\le s\le s_0$, $x>0$, $z\le 0$, $t\ge 0$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^k f_0}{\partial t^k}\right| < \frac{B\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\gamma(s+x)^{3-k}} < \frac{B\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\gamma}.$$

Поэтому

$$x\left|I_{2t}^k\right| < C_{10} x\,\mathrm{e}^{-lx}, \quad (x,z,t)\in G.$$

Из (8) следует, что

$$x\left|I_{3t}^k\right| < C_{11} x\,\mathrm{e}^{-lx}, \quad (x,z,t)\in G.$$

Из указанных выше оценок и равенства (9) получаем

$$x\left|\frac{\partial^k I_{1l}}{\partial t^k}\right| < C_{12}\left(\sqrt{x}+x\right)\mathrm{e}^{-lx}, \quad (x,z,t)\in G, \quad k=1,2.$$

В [2] были получены оценки

$$|F_k| \le C_{13}\,\mathrm{e}^{-lx}, \quad k=1,2, \quad x|F_m| \le C_{14}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-lx}, \quad m=3,4, \quad (x,z,t)\in G',$$

где C_{13}, C_{14} не зависят от x, z, t. Поэтому на множестве G справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^j F_k}{\partial z^j}\right| < C_{13}\left[x^2+\sigma^2(x)\right]^{j/2}\mathrm{e}^{-lx}, \quad \left|\frac{\partial^j F_k}{\partial t^j}\right| < C_{13}[\sigma(x)]^{j/2}\,\mathrm{e}^{-lx}, \quad j=1,2,$$

$$x\left|\frac{\partial^j F_m}{\partial z^j}\right| < C_{14}\sqrt{x}\left[\left(x^2+\gamma^2-1\right)^2+4\gamma^2\right]^{j/4}\mathrm{e}^{-lx}, \quad x\left|\frac{\partial^j F_m}{\partial t^j}\right| < C_{15}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-lx}, \quad j=1,2.$$

Окончательно всюду на указанном множестве получаем оценки

$$x\left|\frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}\right| < C_{16}\left\{\sqrt{x}\left(1+\left[\left(x^2+\gamma^2-1\right)^2+4\gamma^2\right]^{k/4}\right)+x\left(1+\left[x^2+\sigma^2(x)\right]^{k/2}\right)\right\}\mathrm{e}^{-lx}, \tag{11}$$

$$x\left|\frac{\partial^k \Phi}{\partial t^k}\right| \le C_{17}\left\{\sqrt{x}+x\left(1+[\sigma(x)]^{k/2}\right)\right\}\mathrm{e}^{-lx}, \quad k=1,2. \tag{12}$$

Отсюда следует, что $x\dfrac{\partial^k\Phi}{\partial z^k}\to 0$, $x\dfrac{\partial^k\Phi}{\partial t^k}\to 0$ при $x\to +0$ равномерно относительно $z\le 0$, $t\ge 0$. Поэтому $x\dfrac{\partial^k\Phi}{\partial z^k}$, $x\dfrac{\partial^k\Phi}{\partial t^k}$ можно доопределить до непрерывных на множестве G' и равных нулю в точках $(0,z,t)$ функций. За этими функциями мы сохраним прежние обозначения. Заметим, что равенство (10), умноженное на x, будет справедливым на G'.

Поскольку $|J_0(xr)| \le 1\ \forall x \ge 0,\ \forall r \ge 0$, то из (11), (12) следует, что интегралы

$$\int_0^{+\infty} J_0(xr)\frac{\partial^k\Phi}{\partial z^k}(x,z,t)\,xdx, \quad \int_0^{+\infty} J_0(xr)\frac{\partial^k\Phi}{\partial t^k}(x,z,t)\,xdx, \quad k=1,2, \tag{13}$$

сходятся равномерно по переменным $r>0$, $z\le 0$, $t\ge 0$ по признаку Вейерштрасса. Кроме того, подынтегральные функции в (13) непрерывны на множестве X': $x\ge 0$, $r>0$, $z\le 0$, $t\ge 0$. Поэтому решение $\varphi(r,z,t)$ имеет на множестве Ω' непрерывные частные производные по z и t до второго порядка включительно, причем

$$\frac{\partial^k\varphi}{\partial z^k} = \int_0^{+\infty} J_0(xr)\frac{\partial^k\Phi}{\partial z^k}(x,z,t)\,xdx, \quad \frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k} = \int_0^{+\infty} J_0(xr)\frac{\partial^k\Phi}{\partial t^k}(x,z,t)\,xdx, \quad k=1,2.$$

Подынтегральная функция в (3) имеет на X' непрерывную частную производную по r до второго порядка включительно. Воспользуемся соотношениями (см. [6])

$$J_0'(u) = -J_1(u), \quad J_1'(u) = J_0(u) - \frac{J_1(u)}{u},$$

где $J_1(u)$ – функция Бесселя первого порядка. Тогда

$$\int_0^{+\infty} J_0'(xr)\Phi(x,z,t)x^2dx = -\int_0^{+\infty} J_1(xr)\Phi(x,z,t)x^2dx, \tag{14}$$

$$\int_0^{+\infty} J_0''(xr)\Phi(x,z,t)x^3dx = -\int_0^{+\infty} J_0(xr)\Phi(x,z,t)x^3dx + \frac{1}{r}\int_0^{+\infty} J_1(xr)\Phi(x,z,t)x^2dx. \tag{15}$$

В силу оценки (см. [2])

$$x|\Phi(x,z,t)| \le C_{18}\left(\sqrt{x}+x\right)e^{-lx}, \quad (x,z,t)\in G',$$

где C_{18} не зависит от x, z, t, а также в силу неравенств

$$|J_k(xr)| \le 1, \quad x\ge 0, \quad r\ge 0, \quad k=0,1, \quad \frac{|J_1(xr)|}{r} < \frac{1}{r_0}, \quad x\ge 0, \quad r\ge r_0,$$

интеграл в левой части (14) сходится равномерно на множестве Ω' по признаку Вейерштрасса, а интеграл в левой части (15) – равномерно на множестве $r\ge r_0$, $z\le 0$, $t\ge 0$ по тому же признаку, где r_0 – любое положительное число. Тогда решение $\varphi(r,z,t)$ будет иметь на Ω' непрерывную частную производную по r до второго порядка включительно, а в области Ω будет иметь место равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_0^{+\infty} J_0(xr)\Phi(x,z,t)xdx + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{+\infty} J_0(xr)\Phi(x,z,t)xdx =$$

$$= \int_0^{+\infty} J_0''(xr)\Phi(x,z,t)x^3dx + \frac{1}{r}\int_0^{+\infty} J_0'(xr)\Phi(x,z,t)x^2dx = -\int_0^{+\infty} J_0(xr)\Phi(x,z,t)x^3dx.$$

Мы воспользовались соотношениями (14), (15). Поэтому

$$\Delta\varphi = \int_0^{+\infty} J_0(xr)\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}(x,z,t) - x^2\Phi(x,z,t)\right\}xdx = \int_0^{+\infty} J_0(xr)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(x,z,t)\,xdx = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

т.е. функция $\varphi(r,z,t)$ удовлетворяет уравнению (1) .

Покажем, что граничное условие при $z = 0$ также удовлетворяется. В интеграле I_{1r} сделаем замену $s = \eta - x$. Обозначим после этого подынтегральную функцию указанного интеграла через $g_0(s,x,z,t)$. Для f_0 и g_0 имеем

$$\left.\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2}\right|_{z=0} + \beta\left.\frac{\partial f_0}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{B\,\mathrm{e}^{i(s+x)t-lx}}{[i(s+x)+\gamma]^2+1}, \quad \left.\frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2}\right|_{z=0} + \beta\left.\frac{\partial g_0}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{B\,\mathrm{e}^{i(s+x)t-lx}}{[i(s+x)+\gamma]^2+1}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(I_{1l}+I_{1r})\big|_{z=0} + \beta\frac{\partial}{\partial z}(I_{1l}+I_{1r})\big|_{z=0} = 0, \quad x>0, \quad t\ge 0.$$

Точно также можно показать, что для тех же x, t справедливо равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(I_{2l}+I_{2r})\big|_{z=0} + \beta\frac{\partial}{\partial z}(I_{2l}+I_{2r})\big|_{z=0} = 0.$$

Такому же однородному граничному условию удовлетворяет каждая функция F_k, $k = 1,2$. В самом деле, $\sigma^2(x) - \beta\sqrt{x^2-\sigma^2(x)} = 0\ \forall x > 0$. Поэтому при $x > 0$, $t \ge 0$ имеем

$$\left.\frac{\partial^2 F_k}{\partial t^2}\right|_{z=0} + \beta\left.\frac{\partial F_k}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{B\,\mathrm{e}^{\pm i\sigma(x)t-lx}\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}}{\sigma(x)\left\{[\pm i\sigma(x)+\gamma]^2+1\right\}\left(2\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}+\beta\right)}\left\{\pm\sigma^2(x)\mp\beta\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}\right\} = 0.$$

Но для функций $F_m(x,z,t)$, $m = 3,4$ получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F_3+F_4)\big|_{z=0} + \beta\frac{\partial}{\partial z}(F_3+F_4)\big|_{z=0} = -iB\,\mathrm{e}^{-\gamma t-lx}\sin t, \quad x>0, \quad t\ge 0.$$

Принимая во внимание (5), будем иметь граничное условие для функции $\Phi(x,z,t)$:

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right|_{z=0} + \beta\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t-lx}\sin t, \quad x>0, \quad t\ge 0.$$

Таким образом, в силу доказанного выше, окончательно получаем

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{z=0} + \beta\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin t\int_0^{+\infty} J_0(xr)\,\mathrm{e}^{-lx}\,xdx = \frac{p_0}{\rho_0 a^2}f(r)\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin t, \quad r>0, \quad t\ge 0,$$

т.е. граничное условие при $z = 0$ удовлетворяется. При этом мы воспользовались равенством (см. [6])

$$\int_0^{+\infty} J_0(xr)\,\mathrm{e}^{-lx}\,xdx = \frac{l}{\left(r^2+l^2\right)^{3/2}}.$$

Докажем, что $\varphi(r,z,t) \to 0$ при $\sqrt{r^2+z^2} \to +0$ и любом фиксированном $t \ge 0$. В [2] была получена оценка

$$|\varphi(r,z,t)| < \frac{\tilde{C}}{\sqrt{r}}, \quad r \gg 1, \tag{16}$$

где $\tilde{C}$ не зависит от $z \le 0$, $t \ge 0$. Откуда следует, что $\varphi(r,z,t) \to 0$ при $r \to +\infty$ равномерно относительно z и t из указанных промежутков. Покажем, что $\varphi(r,z,t) \to 0$ при $z \to -\infty$ равномерно относительно $r > 0$ и любом фиксированном $t \geq 0$. При любых $x > 0$, $z < -1$, $t \geq 0$ рассмотрим произведение $xI_{1l}(x,z,t)$ и сделаем замену $u = \sqrt{\eta^2 - x^2}$. Получим

$$xI_{1l}(x,z,t) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{Bx\,\mathrm{e}^{it\sqrt{u^2+x^2}-lx+i|z|u}\,udu}{\left[\left(i\sqrt{u^2+x^2}+\gamma\right)^2+1\right]\left[u^2+x^2+i\beta u\right]\sqrt{u^2+x^2}} := \int\limits_0^{+\infty} h(u,x,t)\,\mathrm{e}^{i|z|u}\,du =$$

$$= \int\limits_0^{u_0(z)} + \int\limits_{u_0(z)}^{+\infty} := I_1 + I_2, \quad u_0(z) = \frac{1}{|z|^{1/4}}.$$

Пусть $0 < u \leq u_0(z)$, $0 < x \leq \delta_1$, $t \geq 0$, а δ_1 – любое число из интервала $(0,\gamma)$. Тогда для h и I_1 имеем оценки

$$|h| < \frac{B\,\mathrm{e}^{-lx}}{\beta\left[\gamma^2 + 1 - u_0^2(z) - \delta_1^2\right]} < \frac{B\,\mathrm{e}^{-lx}}{\beta\left(\gamma^2 - \delta_1^2\right)}, \quad |I_1| \leq \frac{C_{19}\,\mathrm{e}^{-lx}}{|z|^{1/4}}.$$

Пусть $0 \leq u \leq u_0(z)$, $x > \delta_1$, $t \geq 0$. Тогда для h и I_1 имеем оценки

$$|h| < \frac{Bx\,\mathrm{e}^{-lx}\,u}{2\gamma\left(u^2+\delta_1^2\right)^2} \leq \frac{Bx\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\gamma} \max_{u\in[0,1]} \frac{u}{\left(u^2+\delta_1^2\right)^2}, \quad |I_1| < \frac{C_{20}}{|z|^{1/4}}\,x\,\mathrm{e}^{-lx}.$$

Поэтому при всех $x > 0$, $z < -1$, $t \geq 0$ получаем

$$|I_1| < \frac{C_{21}\,\mathrm{e}^{-lx}}{|z|^{1/4}}(x+1).$$

Заметим, что функция h имеет непрерывную частную производную по u на полупрямой $[u_0(z),+\infty)$ при любых фиксированных $x > 0$, $t \geq 0$. Для оценки I_2 выполним интегрирование по частям:

$$I_2 = \frac{i}{|z|}\mathrm{e}^{i|z|^{3/4}}\,h\{u_0(z),x,t\} - \frac{i}{|z|}\int\limits_{u_0(z)}^{+\infty} \mathrm{e}^{i|z|u}\frac{\partial h}{\partial u}(u,x,t)du\ ,$$

где подстановка на $+\infty$ равна нулю и

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{h}{u}\left\{1 + \frac{itu^2}{\sqrt{u^2+x^2}} - \frac{u^2}{u^2+x^2} - \frac{2u^2\left(i\gamma - \sqrt{u^2+x^2}\right)}{\sqrt{u^2+x^2}\left[\left(i\sqrt{u^2+x^2}+\gamma\right)^2+1\right]} - \frac{u(2u+i\beta)}{u^2+x^2+i\beta u}\right\} := \frac{h}{u}\left(1 + \sum_{k=1}^4 h_k\right).$$

Так как при $u \geq u_0(z)$, $x > 0$, $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\frac{|h|}{u} < \frac{Bx\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\beta\gamma u^3}, \quad |h_1| \leq tu, \quad |h_2| < 1, \quad |h_3| < \frac{u\sqrt{u^2+x^2+\gamma^2}}{\gamma\sqrt{u^2+x^2}} < 1 + \frac{u}{\gamma}, \quad |h_4| < \frac{\sqrt{4u^2+\beta^2}}{u^4} < 2 + \frac{\beta}{u},$$

то при тех же u, x, t справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial h}{\partial u}\right| < \left\{\frac{\gamma t + 1}{2\beta\gamma^2 u^2} + \frac{5}{2\beta\gamma u^3} + \frac{1}{2\gamma u^4}\right\} Bx\,\mathrm{e}^{-lx}.$$

Учитывая, что при $x > 0$, $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\left|h\{u_0(z),x,t\}\right| < \frac{Bx\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\beta\gamma}|z|^{1/2},$$

для I_2 при всех $x > 0$, $z < -1$, $t \geq 0$ получаем оценку

$$\left|I_2\right| < \left\{\frac{C_{22}(t)}{|z|^{3/4}} + \frac{C_{23}}{|z|^{1/2}} + \frac{C_{24}}{|z|^{1/4}}\right\} x\,\mathrm{e}^{-lx} < \frac{C_{25}(t)}{|z|^{1/4}} x\,\mathrm{e}^{-lx}, \quad C_{25}(t) > 0.$$

Следовательно,

$$x\left|I_{1l}\right| < \frac{C_{26}(t)}{|z|^{1/4}}(x+1)\,\mathrm{e}^{-lx}, \quad x > 0, \quad z < -1, \quad t \geq 0. \tag{17}$$

В [2] было показано, что $xI_{1l}\big|_{x=0} = 0\ \forall z \leq 0$, $\forall t \geq 0$. Поэтому неравенство (17) справедливо $\forall x \geq 0$. Аналогичные неравенства имеют место для произведений xI_{2l}, xI_{1r}, xI_{2r}. Тогда получим

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} J_0(xr)\left\{I_{1l}(x,z,t) + \ldots + I_{2r}(x,z,t)\right\} x dx\right| < \frac{C_{27}(t)}{|z|^{1/4}} \int\limits_0^{+\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^{-lx}\,dx < \frac{C_{28}(t)}{|z|^{1/4}}, \quad C_{28}(t) > 0.$$

Рассуждая как в [2], для функций F_k, $k = 1,2$, получаем неравенства

$$\left|F_k\right| \leq C_{29}\,\mathrm{e}^{-|z|\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}}, \quad (x,z,t) \in G',$$

где $\sigma(0) = \lim\limits_{x\to+0} \sigma(x) = 0$. Поэтому при любом $z < 0$ имеем

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} J_0(xr) F_k(x,z,t) x dx\right| \leq C_{29} \int\limits_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-|z|\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}} dx = \frac{C_{29}}{2} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-|z|\lambda(s)} ds = \frac{C_{29}}{2}\left(\int\limits_0^{s_1} + \int\limits_{s_1}^{+\infty}\right) := \frac{C_{29}}{2}\left(I_3 + I_4\right),$$

где $s = x^2$, $\lambda(s) = \sqrt{s - \sqrt{\dfrac{\beta^4}{4} + \beta^2 s} + \dfrac{\beta^2}{2}}$, а s_1 будет выбрано ниже. Заметим, что интеграл $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-|z|\lambda(s)} ds$ сходится по признаку сравнения: $\lim\limits_{s\to+\infty} s^2\,\mathrm{e}^{-|z|\lambda(s)} = 0$.

Получим оценки для I_3 и I_4. Функция $\lambda(s)$ непрерывно дифференцируема на $(0,+\infty)$, причем $\lambda'(s) > 0$ всюду на этом промежутке, т.е. $\lambda(s)$ возрастает. Положим $\lambda'(0) = \lim\limits_{s\to+0} \lambda'(s) = \dfrac{1}{\beta}$. Выберем s_1 таким, чтобы $\lambda'(s) > \dfrac{1}{2\beta}$ $\forall s \in [0, s_1]$. Тогда для указанных s по формуле конечных приращений Лагранжа будем иметь

$$\lambda(s) - \frac{s}{2\beta} = \left\{\lambda'(\tilde{s}) - \frac{1}{2\beta}\right\} s, \quad \tilde{s} \in (0, s),$$

т.е. $\lambda(s) \geq \dfrac{s}{2\beta}$ $\forall s \in [0, s_1]$ и для I_3 получаем

$$I_3 \leq \int\limits_0^{s_1} \mathrm{e}^{-\frac{|z|s}{2\beta}} ds = \frac{2\beta}{|\,z\,|}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{|z|s_1}{2\beta}}\right).$$

Пусть $z < -1$. Для I_4 имеем

$$I_4 = \int\limits_{s_1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(|z|-1)|\lambda(s)} \mathrm{e}^{-\lambda(s)} ds \leq C_{30}\,\mathrm{e}^{-|z|\lambda(s_1)}, \quad C_{30} = \mathrm{e}^{\lambda(s_1)} \int\limits_{s_1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(s)} ds > 0.$$

Рассуждая как в [2], для функций F_m, $m = 3,4$, получаем неравенства

$$x\left|F_m\right| \leq C_{31}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-|z|\sqrt{\gamma^2+1}\cos\psi_m(x) - lx}, \quad (x,z,t) \in G',$$

где $\psi_m(0) = \lim\limits_{x\to+0}\psi_m(x) = \mp\dfrac{\pi}{2} \pm \operatorname{arctg}\gamma$. Функции $\psi_m(x)$ непрерывно дифференцируемы на $(0,+\infty)$, причем $\{\cos\psi_m(x)\}' > 0$ всюду на этом промежутке, т.е. $\cos\psi_m(x)$ возрастают. Поэтому при $z < 0$ имеем

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} J_0(xr)F_m(x,z,t)xdx\right| \le C_{31}\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-|z|\sqrt{\gamma^2+1}\cos\psi_m(x)-lx}\sqrt{x}dx \le$$

$$\le C_{31}\,\mathrm{e}^{-|z|\tilde\gamma}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-lx}\sqrt{x}dx = C_{32}\,\mathrm{e}^{-|z|\tilde\gamma},\quad \tilde\gamma = \sqrt{\gamma^2+1}\sin(\operatorname{arctg}\gamma) > 0.$$

Окончательно при $z < -1$ будем иметь

$$|\varphi(r,z,t)| < \frac{C_{28}(t)}{|z|^{1/4}} + C_{32}\,\mathrm{e}^{-|z|\tilde\gamma} + C_{33}\,\mathrm{e}^{-|z|\lambda(s_1)} + \frac{C_{34}}{|z|}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{|z|s_1}{2\beta}}\right),$$

где $0 < C_{28}(t) < a't + b'\ \forall t \ge 0$ и фиксированных $a' > 0$, $b' > 0$, не зависящих от r, z. Откуда следует, что $\varphi(r,z,t) \to 0$ при $z \to -\infty$ равномерно относительно $r > 0$ и любом фиксированном $t \ge 0$. Вместе с (16) это означает, что $\varphi(r,z,t) \to 0$ при $\sqrt{r^2+z^2} \to +\infty$ и любом фиксированном $t \ge 0$.

Ограниченность $\varphi(r,z,t)$ на множестве Ω' была установлена в [2]. Докажем, наконец, что начальные условия также удовлетворяются.

Положим в (4) $t = 0$. Получим

$$\Phi(x,z,0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{A\,\mathrm{e}^{-lx+z\sqrt{p^2+x^2}}\,dp}{\left[(p+\gamma)^2+1\right]\left(p^2+\beta\sqrt{p^2+x^2}\right)} := \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}F_0(p,x,z)dp.$$

Рассмотрим замкнутую кривую Γ_R, состоящую из отрезка L_R: $[b-iR, b+iR]$ и дуги окружности C_R: $|p| = R$, $\operatorname{Re} p \ge b$ $(R > b)$. Так как функция F_0 является аналитической в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, то по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma_R}F_0dp = \int\limits_{L_R}F_0dp + \int\limits_{C_R}F_0dp = 0. \tag{18}$$

При всех $p \in C_R$ для достаточно больших R, всех $z \le 0$ и любого фиксированного $x > 0$ справедлива оценка (см. [2])

$$|F_0(p,x,z)| \le \frac{A}{2\pi\left[(R-\gamma)^2-1\right]\left(R^2-\beta\sqrt{R^2+x^2}\right)}. \tag{19}$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{C_R}F_0dp\right| \le \int\limits_{C_R}|F_0|\,dl < \frac{AR}{2\left[(R-\gamma)^2-1\right]\left(R^2-\beta\sqrt{R^2+x^2}\right)} \to +0,\quad R\to+\infty.$$

Переходя в (18) к пределу при $R \to +\infty$, в силу сходимости интеграла (4), получаем

$$\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}F_0(p,x,z)dp = 0\quad \forall x > 0,\quad \forall z \le 0.$$

Откуда следует, что $\varphi(r,z,0) = 0$ при всех $r > 0$, $z \le 0$.

Ранее мы получили равенство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(r,z,t) = \int\limits_0^{+\infty}J_0(xr)\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,z,t)\,xdx,\quad (r,z,t)\in\Omega'.$$

В силу доказанного выше имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2\pi i \sum_{n=1}^{4} p_n F_n - \frac{\partial I_{1l}}{\partial t} - \frac{\partial I_{1r}}{\partial t} - \frac{\partial I_{2l}}{\partial t} - \frac{\partial I_{2r}}{\partial t}, \quad (x,z,t) \in G,$$

где частные производные от интегралов справа равны интегралам от частных производных подынтегральных функций. Поэтому

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,z,t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p,x,z,t)\,p\,dp. \tag{20}$$

Полагая в (20) $t = 0$, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,z,0) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F_0(p,x,z)\,p\,dp.$$

С помощью теоремы Коши для функции $F_0(p,x,z)p$ и кривой Γ_R, а также оценки (19) убеждаемся, что последний интеграл равен нулю при всех $x > 0$, $z \le 0$, т.е. $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(r,z,0) = 0$ при всех $z \le 0$, $r > 0$.

Таким образом, доказана

Теорема. *Задача* (1), (2) *имеет классическое решение, представимое в виде интеграла* (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bromwich T.J.I.A.* On the influence of gravity on elastic waves and, in particular, on the vibrations of an elastic Globe // Proc. London Math. Soc. 1898. V. 30. P. 98–120.
2. *Ильясов Х.Х., Кравцов А.В., Кравцов Ал.В., Кузнецов С.В.* Интегральное представление решения нестационарной задачи Лэмба в случае предельного значения коэффициента Пуассона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 3. С. 478–487.
3. *Ильясов Х.Х., Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Аналитическое решение задачи Лэмба в случае предельного значения коэффициента Пуассона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 597–610.
4. *Ильясов Х.Х., Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Внешняя пространственная задача Лэмба. Распределенная по поверхности гармоническая нагрузка // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2016. № 1. С. 50–56.
5. *Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Конечноэлементные модели в задаче Лэмба // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2011. № 6. С. 160–169.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1963.