

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.633.6

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

УТОЧНЕННЫЕ СХЕМЫ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД¹⁾

© 2023 г. В. И. Голубев^{1,2,*}, И. С. Никитин²

¹ 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

² 123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19\18,

ИАП РАН Институт автоматизации проектирования РАН, Россия

*e-mail: w.golubev@mail.ru, golubev.vi@mipt.ru

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.

Переработанный вариант 16.03.2023 г.

Принята к публикации 26.06.2023 г.

Для устойчивого численного решения определяющей системы упруговязкопластической модели сплошной среды предложена явно- неявная схема 2-го порядка с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр времени релаксации в знаменателе нелинейных свободных членов. Для согласования порядков аппроксимации явного упругого и неявного корректировочного шагов построена неявная аппроксимация второго порядка для изотропной и анизотропной моделей упруговязкопластической модели сплошной среды. Получены уточненные корректировочные формулы для девиаторов напряжений после “упругого” шага расчета при различных представлениях функции вязкости. Полученные решения неявной аппроксимации 2-го порядка для девиаторов напряжений упруговязкопластической системы уравнений допускают предельный переход при стремлении времени релаксации к нулю. Корректировочные формулы, полученные таким предельным переходом, можно трактовать как регуляризаторы численных решений упругопластических систем. Библ. 28. Фиг. 5.

Ключевые слова: математическое моделирование, упруговязкопластические среды, полулинейные гиперболические системы, явно- неявные схемы повышенного порядка.

DOI: 10.31857/S0044466923100046, **EDN:** MHBRTI

1. ВВЕДЕНИЕ

Деформируемую среду, которая в нестационарных процессах нагружения проявляет вязкие свойства за пределом упругости, т.е. обладает динамическим пределом текучести, зависящим от скорости деформаций, называют упруговязкопластической. Одномерная модель такой среды была предложена в работах [1, 2] (модель Соколовского–Малверна). Ее обобщение на многомерный случай выполнено в работах [3, 4].

Определяющие уравнения модели выводятся из аддитивного представления девиатора тензора скоростей деформации в виде суммы упругой и вязкопластической составляющих. Объемная вязкопластическая составляющая при этом равна нулю. Поэтому дифференциальная часть нестационарных систем уравнений упруговязкопластических сред [4–7] совпадает с системой уравнений динамической теории упругости. Однако выражения для девиаторов скоростей вязкопластических деформаций за пределом упругости (пределом текучести) вносят в уравнения для девиаторных компонент напряжений сильно нелинейные свободные члены с характерным временем релаксации τ в знаменателе.

В нестационарных процессах с характерным временем, много большим, чем τ , тем более в квазистатических процессах, упруговязкопластические (УВП) среды ведут себя как упругопластические (УП) [8–10]. То есть при $\tau \rightarrow 0$ УВП системы уравнений переходят в системы типа

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 19-71-10060), <https://rscf.ru/project/19-71-10060/>.

Прандтля–Рейса [9, 10]. С использованием формулировок моделей на основе вариационных неравенств этот факт доказан в монографиях [11, 12].

Однако для существенно нестационарных процессов с характерными временами, меньшими или порядка τ эффекты скоростного упрочнения, резкого роста динамического предела текучести проявляют себя в полной мере [7, 10]. Для их описания требуется использовать полную УВП систему уравнений.

Как уже отмечено, УВП системы уравнений в своей дифференциальной части совпадают с уравнениями динамической упругости, поэтому заведомо являются гиперболическими и приводятся к дивергентному виду, что обеспечивает консервативность сеточно-характеристических и конечнообъемных численных методов решения начально-краевых задач.

В то же время УП системы уравнений, к которым сводятся теории пластического течения, не являются дивергентными. Для построения теории сильных разрывов приходится применять модифицированные формулировки [12, 13], в частности, использовать предельные переходы от УВП к УП обобщенному решению. При этом результат может зависеть от выбора “переходной” УВП модели [13, 14].

Поэтому формулировка существенно нестационарных задач неупругого деформирования в виде УВП системы уравнений, с одной стороны, отражает физику динамических процессов, а с другой стороны, обеспечивает регуляризацию недивергентных УП систем уравнений.

Устойчивое интегрирование определяющих соотношений связи напряжений и деформаций в УВП системах уравнений по явной схеме для малых времен релаксации τ требует более сильного ограничения величины временного шага, нежели обычное курантовское ограничение. Устранить это дополнительное ограничение можно с помощью неявных схем расчета определяющих соотношений (“жесткой” части общей УВП системы уравнений). Важно, что описываемые ниже неявные схемы расчета определяющих уравнений для УВП сред не требуют решения систем алгебраических уравнений, и расчет каждого шага по времени проводится явно с обычным курантовским шагом по времени.

2. ИЗОТРОПНЫЕ И АНИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

2.1. Система уравнений изотропной упруговязкопластической среды

В декартовой прямоугольной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) система уравнений изотропной упруговязкопластической (УВП) среды при малых деформациях имеет вид [4, 7]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} &= 2\mu e'_{ij} - 2\mu \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad e'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{kk} / 3, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где v_i — компоненты вектора скорости, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, s_{ij} — компоненты девиатора напряжений, σ — среднее напряжение, e_{ij} — компоненты тензора скорости деформации, e'_{ij} — компоненты девиатора скорости деформации, $\sqrt{s_{kl}s_{kl}}$ — второй инвариант девиатора напряжений, σ_s — предел текучести, $F(x)$ — нелинейная функция вязкости, описывающая скоростное упрочнение, $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F \rangle = FH(f)$, $H(x)$ — функция Хэвисайда, τ — характерное время релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести, ρ — плотность среды, λ и μ — модули упругости Ламе. По повторяющимся индексам происходит суммирование.

2.2. Система уравнений анизотропной упруговязкопластической среды

Системы уравнений анизотропных упруговязкопластических сред возникают при построении континуальных моделей деформируемых сред с дискретным набором плоскостей скольжения (слоистые, блочные среды) и с нелинейными (вязкопластическими) условиями проскальзывания на контактных границах. Такие системы могут быть получены методом асимптотического осреднения [15] или с помощью дискретного варианта теории скольжения [5]. Кратко опишем схему построения континуальной модели с использованием теории скольжения.

В декартовой прямоугольной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) рассмотрим безграничную упругую среду с ориентированной системой периодически повторяющихся параллельных плоскостей скольжения. Ориентацию этой системы зададим единичной нормалью $\mathbf{n}$. Расстояние между плоскостями скольжения постоянно и равно ϵ . Плотность материала ρ , а также модули упругости Ламе λ и μ считаются заданными константами. Напряженное состояние описывается тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Вектор касательного напряжения на плоскости скольжения равен $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, нормальное напряжение равно $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Введем вектор скоростей сдвига $\boldsymbol{\gamma}$, определяемый скачками касательной $[\mathbf{V}_\tau]$ скоростей на контактных границах: $\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{V}_\tau]/\epsilon$.

Вязкопластические условия контактного взаимодействия имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_\tau}{|\boldsymbol{\sigma}_\tau|} \left\langle F \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}_\tau|}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau,$$

где τ — время релаксации, $F(x)$ — нелинейная функция вязкости, отличная от нуля за пределом условия скольжения $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \sigma_s$.

Для того чтобы перейти к континуальной модели среды, содержащей систему таких плоскостей скольжения, будем рассматривать $\boldsymbol{\gamma}$ как непрерывные функции координат и времени, имеющие смысл распределенных скоростей скольжений. Воспользуемся соотношениями теории скольжения, которая применялась многими авторами для построения моделей неупругих сред с непрерывным распределением плоскостей скольжения (см. обзор [5]). Эти соотношения позволяют учитывать вклад скоростей скольжений $\boldsymbol{\gamma}$ в тензор скоростей неупругой деформации $\mathbf{e}^\gamma$:

$$\mathbf{e}^\gamma = (\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n})/2.$$

Полный тензор скоростей деформации $\mathbf{e}$ получается сложением упругих и неупругих составляющих и равен:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^\gamma, \quad \mathbf{e} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2.$$

Здесь $\mathbf{v}$ — “макроскопическая” скорость частиц среды, $\mathbf{e}^e$ — тензор скоростей упругой деформации, который связан с тензором напряжений законом Гука: $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\mathbf{e}^e : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}^e$.

Сквозные условия для $\boldsymbol{\gamma}$ соответствуют локальным контактным условиям:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_\tau}{|\boldsymbol{\sigma}_\tau|} \left\langle F \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}_\tau|}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau.$$

Система замыкается уравнениями движения: $\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

Отметим, что принятое нелинейное условие вязкопластического скольжения справедливо в случае поджатых слоев (при $\sigma_n < 0$). Соответственно, континуальная система уравнений слоистой среды применима при выполнении данного неравенства. В случае возникновения растягивающих напряжений на межслойных границах необходимо вводить дополнительные переменные — распределенные отслоения и уточнять построенную систему уравнений [5].

Если направление нормали к плоскости скольжения (межслойной границе) совпадает с направлением оси x_3 принятой системы координат, то для нормали будет справедливо соотношение $n_j = \delta_j^3$, где δ_j^i — символ Кронекера.

В этой системе координат тензор скоростей неупругих деформаций равен:

$$e_{3j}^\gamma = \frac{\sigma_{3j}}{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau.$$

Тогда система уравнений анизотропной упруговязкопластической среды, описывающая динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, перпендикулярных оси x_3 , примет вид [5, 6]:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i \neq 3, \quad j \neq 3, \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial t} &= 2\mu e_{3j} - 2\mu \frac{\sigma_{3j}}{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau, \quad j \neq 3, \quad k = 1, 2.\end{aligned}\quad (2)$$

Отметим, что классическая система уравнений изотропной УВП среды также может быть обоснована с помощью теории скольжения [16] с использованием локального условия скольжения на произвольно ориентированной плоскости и интегрирования по всевозможным плоскостям, где превышено предельное условие $|\sigma_\tau| = \sigma_s$.

Обе УВП системы уравнений (1) и (2) являются полулинейными гиперболическими системами первого порядка дивергентного вида. Вся характерного вида нелинейность сосредоточена в свободных, недифференциальных членах уравнений для компонент девиаторов или касательных напряжений.

3. НЕЯВНАЯ СХЕМА 2-ГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОБОДНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Поскольку системы (1) и (2) по существу аналогичны друг другу, будем вести построение численной схемы на примере изотропной УВП системы (1). Особый интерес представляет схема расчета части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром в его знаменателе. Что касается остальных уравнений системы (1) — линейных уравнений движения для компонент скорости и уравнения для среднего напряжения, то их численная аппроксимация по какой-либо явной схеме требуемого (2-го) порядка не вызывает затруднений [17]. Будем считать, что такая аппроксимация проведена, значения скоростей и среднего напряжения на верхнем временном слое определены с учетом необходимых по постановке начальных и граничных условий.

Построим неявную аппроксимацию 2-го порядка уравнения для девиаторов тензора напряжений с нелинейным свободным членом из УВП системы (1) путем аппроксимации правой части полулинейных уравнений в виде полусуммы слагаемых на верхнем и нижнем слоях по времени:

$$\frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^n}{\Delta t} = 2\mu \frac{(e_{ij}^{n+1} + e_{ij}^n)}{2} - \frac{2\mu}{\tau} \left(\frac{s_{ij}^{n+1}}{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle + \frac{s_{ij}^n}{\sqrt{s_{kl}^n s_{kl}^n}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^n s_{kl}^n}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle \right) / 2.$$

Индексами $n+1$ и n помечены значения искомых величин на верхнем и нижнем слоях разбиения по времени, Δt — шаг по времени.

Эту нелинейную систему уравнений для s_{ij}^{n+1} можно записать в виде:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\bar{s}_{ij}^{n+1}}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1}\bar{s}_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1}\bar{s}_{kl}^{n+1}} - 1 \right) \right\rangle + \frac{\bar{s}_{ij}^n}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} \left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} - 1 \right) \right\rangle \right).$$

Здесь введены безразмерные компоненты $\bar{s}_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{n+1} / \sigma_s$, $\bar{s}_{ij}^n = s_{ij}^n / \sigma_s$, $\bar{s}_{ije}^{n+1} = s_{ije}^{n+1} / \sigma_s$, где $s_{ije}^{n+1} = s_{ij}^n + \mu (e_{ij}^{n+1} + e_{ij}^n) \Delta t$ — компоненты девиатора после “упругого” шага по времени, $\delta = \frac{\tau \sigma_s}{\Delta t \mu}$ — безразмерный малый параметр системы уравнений.

Отметим, что с учетом проведенного ранее расчета значений компонент скорости на верхнем временном слое, компоненты “упругого” девиатора $\bar{s}_{ije}^{n+1}$ также можно считать известными, как и значения $\bar{s}_{ij}^n$ на n -м слое.

Нелинейную систему, из которой необходимо найти неизвестные компоненты девиатора на верхнем слое $\bar{s}_{ij}^{n+1}$, можно записать следующим образом:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \left(\delta + \frac{\langle F(\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}} - 1) \rangle}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}} \right) + \bar{s}_{ij}^n \frac{\langle F(\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} - 1) \rangle}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} = \delta \bar{s}_{ije}^{n+1}. \quad (3)$$

Свернем эти уравнения последовательно с $\bar{s}_{ij}^{n+1}$, $\bar{s}_{ij}^n$, $\bar{s}_{ije}^{n+1}$ и введем обозначения для возникающих сверток с неизвестными значениями

$$X = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}, \quad Y = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^n}, \quad Z = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}},$$

и уже вычисленными значениями

$$T = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}, \quad S = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^{n+1}}, \quad \Sigma = \sqrt{\bar{s}_{kle}^{n+1} \bar{s}_{kle}^{n+1}}.$$

Получим нелинейную систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} X^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right) + Y^2 \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} &= \delta Z^2, \\ Y^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right) + T^2 \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} &= \delta S^2, \\ Z^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right) + S^2 \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} &= \delta \Sigma^2. \end{aligned}$$

Исключая неизвестные Y и Z , получаем уравнение для X^2 :

$$X^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right)^2 = \Delta P^2,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta P^2 &= \delta^2 \bar{s}_{ije}^{n+1} \bar{s}_{ije}^{n+1} - 2\delta \bar{s}_{ije}^{n+1} \bar{s}_{ij}^n \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} + \bar{s}_{ij}^n \bar{s}_{ij}^n \left(\frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} \right)^2 = \delta^2 \tilde{S}^2 \geq 0, \\ \tilde{S}^2 &= \tilde{s}_{kl}^{n+1} \tilde{s}_{kl}^{n+1}, \quad \tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n \langle F(T-1) \rangle}{T \delta}, \quad T = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что промежуточный девиатор $\tilde{s}_{ij}^{n+1}$ и его свертка $\tilde{S}$ вычисляются по результатам “упругого” шага по времени.

Поскольку для свертки $\tilde{S}^2$ всегда выполняется $\tilde{S}^2 \geq 0$, получаем окончательное уравнение для неизвестной свертки X :

$$\delta X + \langle F(X-1) \rangle = \delta \tilde{S}. \quad (4)$$

Отметим, что из (3) следует формула для искомых компонент девиатора на верхнем временном слое в следующем виде:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\delta \tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right)} = \frac{\delta \tilde{s}_{ij}^{n+1} X}{(\delta X + \langle F(X-1) \rangle)} = \tilde{s}_{ij}^{n+1} \frac{X}{\tilde{S}}. \quad (5)$$

Таким образом, для полного определения величин $\bar{s}_{ij}^{n+1}$ следует решить уравнение (4) и подставить результат в (5).

Уточним диапазоны допустимых значений для X .

При $X < 1$ решение (4) тривиально: $X = \tilde{S}$.

Следовательно, $\bar{s}_{ij}^{n+1} = \tilde{s}_{ij}^{n+1}$ с критерием применимости $\tilde{S} < 1$ после “упругого” шага.

При $X \geq 1$ следует решить уравнение

$$\delta X + F(X - 1) = \delta \tilde{S}. \quad (6)$$

Для этого нужно конкретизировать функцию вязкости с учетом ее упомянутых выше свойств $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F \rangle = FH(f)$.

4. КОРРЕКТИРОВОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ВЯЗКОСТИ

4.1. Изотропная УВП среда

Как правило, для функции вязкости используются степенные или полиномиальные аппроксимации, построенные по результатам экспериментальных исследований [7, 10]. Рассмотрим случай линейной функции вязкости $F(x) = x$, когда уравнение (6) имеет точное решение, независимо от величины параметра δ .

В этом случае решение уравнения (6), условие $X \geq 1$ и искомые компоненты девиатора имеют вид:

$$X = \frac{(1 + \delta \tilde{S})}{(1 + \delta)}, \quad \tilde{S} \geq 1, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \frac{(1 + \delta \tilde{S})}{(1 + \delta)}. \quad (7)$$

При малых δ имеем

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \sim \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} (1 + \delta(\tilde{S} - 1)).$$

Рассмотрим случай степенной функции вязкости $F(x) = x^q$. Необходимо решить уравнение при $\delta \ll 1$:

$$\delta X + (X - 1)^q = \delta \tilde{S}, \quad X \geq 1, \quad q > 0.$$

Будем искать решение в виде асимптотического ряда по степеням $\delta^{1/q}$ с точностью до первого малого члена:

$$X = 1 + C_1 \delta^{1/q} + \dots$$

Подставляя это разложение и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях δ , получим значение неизвестного коэффициента разложения:

$$C_1 = (\tilde{S} - 1)^{1/q}, \quad X \sim 1 + (\tilde{S} - 1)^{1/q} \delta^{1/q}, \quad \tilde{S} \geq 1.$$

Отсюда следует решение для девиаторов при произвольном положительном q :

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \sim \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \left(1 + (\tilde{S} - 1)^{1/q} \delta^{1/q} \right). \quad (8)$$

Легко видеть, что частное точное решение (7) при малых δ совпадает с полученным приближенным решением.

Также обсудим вопрос предельного перехода $\delta \rightarrow 0$, поскольку формула для промежуточного девиатора $\tilde{s}_{ij}^{n+1}$ содержит малый параметр в знаменателе:

$$\tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n \langle F(T - 1) \rangle}{T \delta}.$$

Для этого уравнение (6), справедливое на $n + 1$ - слое по времени, перепишем для n -го слоя:

$$\delta T + \langle F(T - 1) \rangle = \delta \sqrt{\tilde{s}_{kl}^n \tilde{s}_{kl}^n}.$$

Отсюда имеем

$$\langle F(T-1) \rangle = \delta \left\langle \sqrt{\tilde{s}_{kl}^n \tilde{s}_{kl}^n} - \sqrt{\tilde{s}_{kl}^n \tilde{s}_{kl}^n} \right\rangle,$$

и в формуле для промежуточного девиатора удается снять особенность при $\delta \rightarrow 0$:

$$\tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n}{\sqrt{\tilde{s}_{kl}^n \tilde{s}_{kl}^n}} \left\langle \sqrt{\tilde{s}_{kl}^n \tilde{s}_{kl}^n} - \sqrt{\tilde{s}_{kl}^n \tilde{s}_{kl}^n} \right\rangle, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}}. \quad (9)$$

4.2. Анизотропная (слоистая) УВП среда

Что касается системы уравнений (2) для анизотропной упруговязкопластической среды, описывающей динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, то для ее численного решения корректировка касательных напряжений, скажем, аналога формул (8) и (9), будет выглядеть следующим образом. Для степенного вязкопластического условия скольжения на межслойных границах корректировочные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{3j}^{n+1} &\sim \frac{\tilde{\sigma}_{3j}^{n+1}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3k}^{n+1}}} \left(1 + (\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3k}^{n+1}} - 1)^{1/q} \delta^{1/q} \right), \\ \tilde{\sigma}_{3j}^{n+1} &= \bar{\sigma}_{3je}^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_{3j}^n}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^n \tilde{\sigma}_{3k}^n}} \frac{\langle F(\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^n \tilde{\sigma}_{3k}^n} - 1) \rangle}{\delta}, \quad j \neq 3, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Предельный переход к нулевому времени релаксации (нулевой вязкости) $\delta \rightarrow 0$ дает следующий результат:

$$\tilde{\sigma}_{3j}^{n+1} = \bar{\sigma}_{3je}^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_{3j}^n}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{3l}^n \tilde{\sigma}_{3l}^n}} \left\langle \sqrt{\tilde{\sigma}_{3l}^n \tilde{\sigma}_{3l}^n} - \sqrt{\tilde{\sigma}_{3l}^n \tilde{\sigma}_{3l}^n} \right\rangle, \quad \tilde{\Sigma}^2 = \tilde{\sigma}_{3l}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3l}^{n+1}, \quad \bar{\sigma}_{3j}^{n+1} = \frac{\tilde{\sigma}_{3j}^{n+1}}{\tilde{\Sigma}}.$$

Таким образом, показано, что полученные решения неявной аппроксимации 2-го порядка для девиаторов напряжений УВП системы уравнений допускают предельный переход при малом времени релаксации. Следовательно, формулы (7)–(9) для различных представлений функций вязкости при малых δ можно трактовать как регуляризаторы численных решений УП систем. Сами эти формулы представляют собой алгебраические корректировки компонент девиаторов напряжений, полученных в результате расчета “упругого” шага по времени.

Этот прием, предложенный в свое время в работах [18, 19], широко использовался в вычислительной практике, например, в [20–22] и в огромном количестве других работ, но трактовался как корректировка 1-го порядка в результате физического расщепления упругопластического процесса на упругий шаг и приведение девиаторов напряжений на круг текучести. Сама эта корректировка в принятых обозначениях выглядит следующим образом:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ije}^{n+1}}{\sqrt{\tilde{s}_{kle}^{n+1} \tilde{s}_{kle}^{n+1}}}.$$

В приведенном изложении специфические корректировки девиаторов напряжений за пределом текучести 2-го порядка возникают как обоснованный результат построения явно-неявной схемы 2-го порядка для УВП системы уравнений, а корректировка (9) – для УП системы уравнений.

5. РАСЧЕТ УПРУГОГО ШАГА

Система уравнений изотропной линейно упругой среды может быть получена из системы уравнений упруговязкопластической среды (1), если формальным положить нелинейную функ-

цию вязкости $F(y)$ тождественно равной нулю. В полных напряжениях и скоростях она может быть записана в каноническом виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} = \mathbf{f},$$

где матрицы A_1, A_2, A_3 являются функциями упругих параметров среды λ, μ, ρ , а вектор $\mathbf{u}$ включает в себя все шесть независимых компонент тензора напряжений и три компоненты вектора скорости среды. В правой части системы стоит вектор $\mathbf{f}$, описывающий действующую на рассматриваемый элементарный объем внешнюю силу. Для ее решения в настоящей работе применялся сеточно-характеристический метод на параллелепипедных сетках. На первом этапе производилось расщепление по пространственным направлениям, сводящее исходную трехмерную дифференциальную систему уравнений к набору из трех последовательно решаемых одномерных систем уравнений. Сравнение различных схем пространственного расщепления для задач акустики и упругости представлено, например, в работах [23, 24]. Для определенности рассматривается шаг расщепления по координате x_1 . В дальнейшем, ввиду гиперболичности полученных одномерных систем, возможно введение новых неизвестных функций, сводящих задачу к набору одномерных линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \xi \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0,$$

где ξ — одно из собственных значений матрицы A_1 . Для решения данного уравнения справедливо тождество

$$w(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) = w(x_1 - \xi \Delta t, x_2, x_3, t),$$

где Δt — используемый при расчетах шаг по времени. Фиксируя в пространстве некоторый набор узлов расчетной сетки (шаблон), в общем случае, получаем одномерную задачу интерполяции. В работе использовался интерполянт в виде полинома третьей степени, обеспечивающий третий порядок аппроксимации полученной одномерной схемы как по времени, так и по пространству [25]. Ее расчетная формула имеет вид

$$w_m^{n+1} = w_m^n + \frac{\sigma}{2} (w_{m-1}^n - w_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2} (w_{m-1}^n - 2w_m^n + w_{m+1}^n) - \frac{\sigma(1-\sigma^2)}{6} (w_{m-2}^n - 3w_{m-1}^n + 3w_m^n - w_{m+1}^n),$$

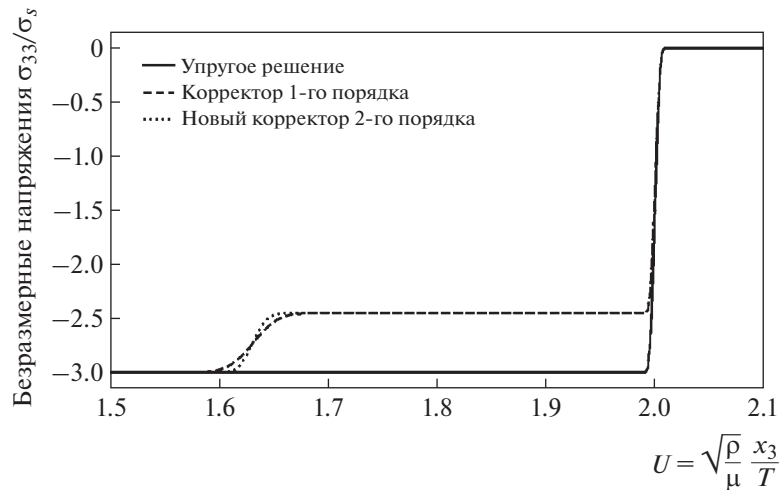
где верхний индекс относится к шагу по времени, а нижний — к пространственной координате x_1 , $\sigma = \xi \Delta t / \Delta x_1 < 1$ — число Куранта. Отличительной особенностью данной схемы является практически полное отсутствие осцилляций даже на разрывных решениях, что объясняется ее близостью к области монотонных схем в пространстве неопределенных коэффициентов [26].

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

С использованием описанной явно-неявной схемы было проведено моделирование процесса распространения динамических возмущений в изотропной упруговязкопластической среде от мгновенно приложенной нагрузки при различных значениях времени релаксации (параметра δ), в том числе и при $\delta = 0$. Среда описывалась следующими параметрами: плотность $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, скорость распространения продольных волн $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 4500 \text{ м/с}$, скорость распространения поперечных волн $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ варьировалась, предел текучести $\sigma_s = 112\,500 \text{ Па}$. Расчетная область представляла собой параллелепипед размерами $50 \times 50 \times 10\,000 \text{ м}$. Она покрывалась кубической расчетной сеткой с шагом 5 м . Для корректного расчета задачи о нагружении полупространства на боковых гранях расчетной области использовалось условие нулевой пространственной производной решения. Для устойчивости используемой на этапе решения упругой задачи явной сеточно-характеристической схемы использовался шаг по времени 0.001 с , удовлетворяющий условию Куранта. Рассчитывалось 2с физического эксперимента.

6.1. Нормальная нагрузка на упруговязкопластическое полупространство

В трехмерной постановке рассматривался случай мгновенного приложения к изотропному упруговязкопластическому полупространству $x_3 > 0$ сжимающей нагрузки $\sigma_n = -3\sigma_s = -337\,500 \text{ Па}$ вдоль оси x_3 . Скорость поперечных волн в среде составляла 2250 м/с . В случае изотропной ли-



Фиг. 1. Распределение напряжения σ_{33} вдоль оси x_3 через 2 с от начала расчета, $\sigma_n = -3\sigma_s$, $\delta = 0$.

нейно-упругой среды известно аналитическое решение, заключающееся в распространении продольной волны, которое изображено на фиг. 1. Для случая упругопластической среды аналитическое решение представляет собой упругий предвестник – продольную волну, а также волну пластических деформаций, распространяющуюся с меньшей скоростью $c_f = \sqrt{(\lambda + 2\mu/3)/\rho}$. При этом между двумя разрывами решения устанавливается зона постоянных по пространству напряжений, величина которых σ_{33}^* также может быть вычислена аналитически. Используя условие текучести Мизеса при определенном соотношении между компонентами напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}\lambda/(\lambda + 2\mu)$, получаем

$$(\sigma_{11} - \sigma/3)^2 + (\sigma_{22} - \sigma/3)^2 + (\sigma_{33} - \sigma/3)^2 = \sigma_s^2, \quad \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)} \sigma_{33}.$$

Отсюда имеем

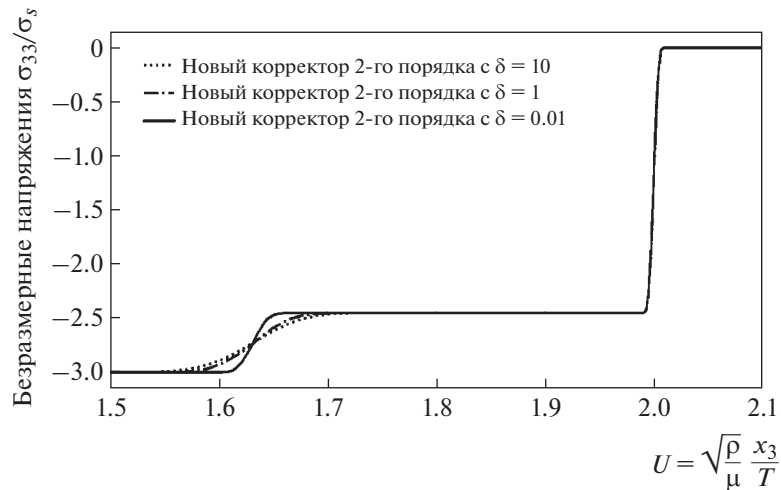
$$\sigma_{33}^* = \frac{(\lambda + 2\mu)\sqrt{6}}{\mu} \frac{\sigma_s}{4}.$$

На фиг. 1 представлены численные решения, полученные по известным ранее расчетным формулам 1-го порядка аппроксимации, и по предложенным в настоящей работе формулам 2-го порядка аппроксимации. Видно, что при одинаковой точности разрешения разрыва на упругом предвестнике, точность разрешения разрыва на волне пластичности выше при использовании разработанного нами алгоритма. Отметим, что в обоих случаях корректно восстанавливаются скорости распространения обеих волн и значение напряжения σ_{33}^* .

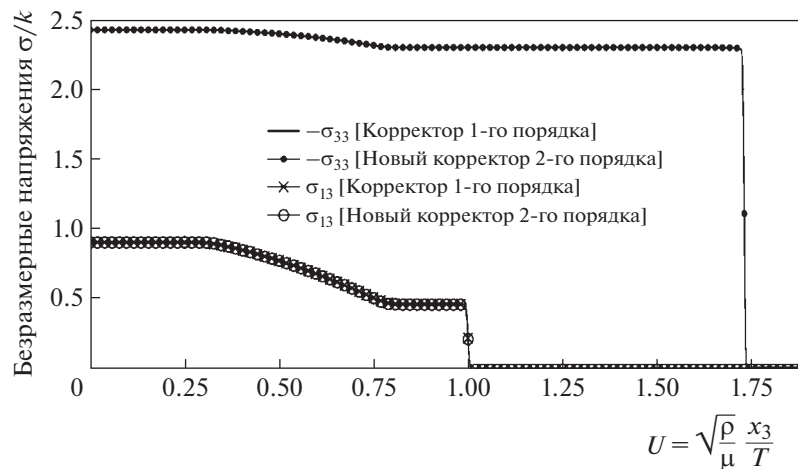
Кроме того, разработанный в настоящей работе вычислительный алгоритм может быть успешно использован в том случае, если время релаксации τ не мало. Были проведены расчеты по деформированию упруговязкопластической среды с линейным условием вязкости для ненулевых значений безразмерного параметра δ . Результаты расчетов представлены на фиг. 2. Видно, что увеличение вязкости среды приводит к увеличению размывания фронта пластической волны и не влияет на фронт упругого предвестника.

6.2. Комбинированная нагрузка на УВП полупространство

В трехмерной постановке также было получено численное решение задачи о мгновенном приложении совместно сдвиговой и сжимающей нормальной нагрузок на изотропное упруговязкопластическое полупространство $x_3 > 0$. Для этой задачи существует аналитическое решение [27] в предельном случае идеальной упругопластической среды (исчезающей вязкости). Сравнение с аналитикой позволяет оценить точность численных решений различного порядка аппроксимации.



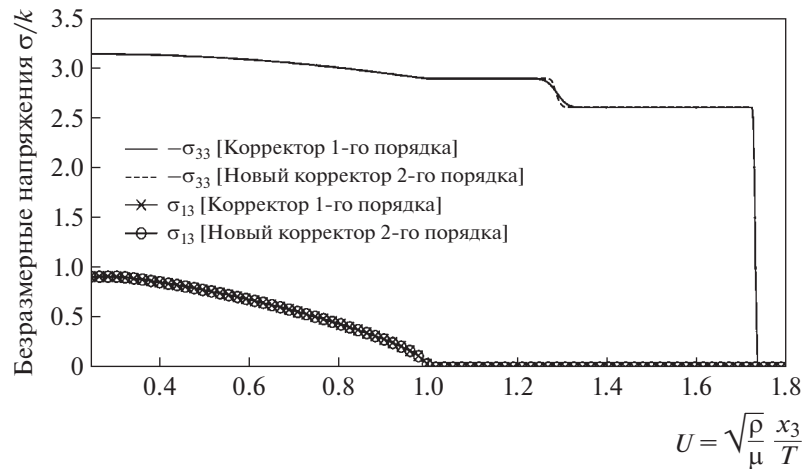
Фиг. 2. Распределение напряжения σ_{33} вдоль оси x_3 через 2 с от начала расчета для различных значений параметра δ , $\sigma_n = -3\sigma_s$.



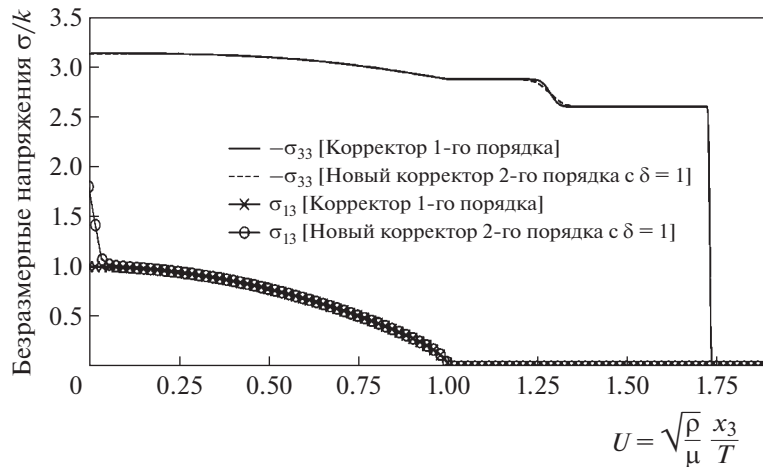
Фиг. 3. Пространственное распределение касательных и сдвиговых напряжений при расчете по схеме из работы [18] и по явно- неявной схеме, $\sigma_n = -2.4k$, $\sigma_\tau = 0.9k$.

Скорость поперечных волн в среде была равна 2598 м/с. Для возможности сопоставления результатов проведенных расчетов с аналитическим решением, представленным в работе [27], в рассмотрение была введена величина $k = \sigma_s/\sqrt{2}$. Соответствующие рассматриваемой постановке граничные условия при $x_3 = 0$ на компоненты тензора напряжений имели вид: $\sigma_{33} = \sigma_n$, $\sigma_{13} = \sigma_\tau$. На фиг. 3 представлены результаты расчетов, полученные с использованием формулы из работы [18] и представленной в настоящей работе корректировки. Использованы значения: $\sigma_n = -2.4k$, $\sigma_\tau = 0.9k$. Видно, что фронты волн на обеих компонентах тензора напряжений разрешаются с одинаковой точностью обоими методами, граничные условия выполняются, скорости движения фронтов совпадают с приведенными в работе [27, рис. 5].

Далее, нами был проведен расчет с увеличением сжимающей нагрузки до значений, использованных в работе [27, рис. 6]. Результаты численных расчетов по обеим схемам представлены на фиг. 4. На компоненте σ_{33} тензора напряжений наблюдаются две волны: продольная волна — упругий предвестник, и пластическая волна, распространяющаяся с меньшей скоростью. Анализ расчетов показывает, что предложенная в работе схема 2-го порядка аппроксимации с той же



Фиг. 4. Пространственное распределение касательных и сдвиговых напряжений при расчете по схеме из работы [18] и по явно-неявной схеме, $\sigma_n = -3.1k$, $\sigma_\tau = 0.9k$.



Фиг. 5. Пространственное распределение касательных и сдвиговых напряжений при расчете по схеме из работы [18] и по явно-неявной схеме, $\sigma_n = -2.4k$, $\sigma_\tau = 1.8k$.

точностью разрешает разрыв на продольной волне и непрерывное решение на компоненте σ_{13} , однако, более точно воспроизводит пластическую волну.

Достоинством самой системы уравнений УВП модели и предложенного численного метода ее решения по сравнению с идеальной УП моделью является то, что она допускает касательные нагрузки, превышающие предел текучести. При ненулевом значении времени релаксации зоны такого превышения сосредоточены в окрестности границы деформируемой области, где приложены высокоамплитудные касательные нагрузки. При малых значениях времени релаксации эти зоны носят пограничный характер, вне этих зон решение мало отличается от идеально упруго-пластического. Для иллюстрации этого эффекта приведены результаты численного решения с $\sigma_\tau = 1.8k$ на фиг. 5.

Еще раз отметим, что все построенные на графиках распределения напряжений получены в результате расчета по полноценному коду для трехмерных динамических систем уравнений, а не по аппроксимации одномерной нестационарной системы. Обычно в этом случае наблюдается значительное размывание волновых фронтов, в том числе и упругих, особенно для больших значений времени расчета. Предложенная явно-неявная схема дает хорошие результаты в широком диапазоне комбинированных нагрузок, при различных временах релаксации, в том числе допус-

кает предельный переход к его нулевому значению (регуляризованное УП решение) и лучше держит волновые фронты в сравнении с широко используемой схемой [18]. Такой результат достигается за счет использования высокоточной сеточно-характеристической схемы для расчета явного упругого шага и предложенной неявной аппроксимации второго порядка для нелинейных свободных членов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано динамическое поведение изотропной и анизотропной упруговязкопластической среды с произвольной функцией вязкости под действием внешней нагрузки. Возникающая система уравнений является полулинейной гиперболической с малым параметром в знаменателе свободного члена, что не позволяет напрямую применять явные расчетные схемы. Предложен оригинальный подход, основанный на неявной аппроксимации части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром в его знаменателе. Путем алгебраических преобразований показано, что это приводит к явному расчетному алгоритму, обладающему вторым порядком аппроксимации по времени.

Полученные решения неявной аппроксимации 2-го порядка для девиаторов напряжений упруговязкопластической системы уравнений допускают предельный переход при стремлении времени релаксации к нулю. Корректировочные формулы, полученные таким предельным переходом, можно трактовать как регуляризаторы численных решений упругопластических систем.

Для получения промежуточного численного решения линейной упругой задачи в работе использован сеточно-характеристический метод на параллелепипедных расчетных сетках. Он позволяет обеспечить повышенный порядок аппроксимации, совместно с отсутствием сильных осцилляций даже на разрывных решениях.

Получено численное решение трехмерной задачи о мгновенном приложении сжимающей и сдвиговой нагрузок к упруговязкопластическому полупространству. Продемонстрированы сохранение точности разрешения фронта упругой волны и повышение точности разрешения фронта пластической волны. Дальнейшие исследования могут быть направлены на применение рассмотренных в работе моделей и численных методов в обратных сейсмических задачах [28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malvern L.E.* The propagation of longitudinal waves of plastic deformations in a bar of material exhibiting a strain-rate effect // *J. Appl. Mech.* 1951. V. 18.
2. *Соколовский В.В.* Распространение упруго-вязкопластических волн в стержнях // *Прикл. матем. и механ.* 1948. Т. 12. № 8.
3. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
4. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2008. 320 с.
5. *Никитин И.С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // *Изв. РАН. Механ. твердого тела.* 2008. № 4. С. 154–165.
6. *Никитин И.С.* Теория неупругих слоистых и блочных сред. М.: Физматлит, 2019. 190 с.
7. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 310 с.
8. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
9. *Кукуджанов В.Н.* Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида // *Механ. твердого тела.* 2001. № 5. С. 96–111.
10. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
11. *Дюво Г., Лионс Н.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
12. *Садовский В.М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997. 208 с.
13. *Dal Maso G., LeFloch P.G., Murat F.* Definition and weak stability of nonconservative products // *J. de Mathématiques Pures et Appliquées.* 1995. V. 74. № 6. P. 483–548.
14. *Parés C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 2006. V. 44. № 1.
15. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
16. *Nikitin I.S.* Constitutive equations of the elastoviscoplastic model and slip theory // *Mechanics of Solids.* 2007. V. 42. № 2. P. 260–270.

17. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 600 с.
18. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 163–212.
19. Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer, 1999. 264 p.
20. Кукуджанов В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений // Механ. твердого тела. 2004. № 1. С. 98–108.
21. Абузаров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В. и др. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 940–953.
22. Бураго Н.Г. Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычисл. механ. сплошных сред. 2008. Т. 1. №. 4. С. 5–20.
23. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting // Computer Research and Modeling. 2022. V. 14(4). P. 899–910.
24. Petrov I., Golubev V., Shevchenko A. Higher-Order Grid-Characteristic Schemes for the Acoustic System // Proc. 2021 Ivannikov Memorial Workshop, IVMEM 2021. 2021. P. 61–65.
25. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B., Malovichko M.S. Compact Grid- Characteristic Scheme for the Acoustic System with the Piece-Wise Constant Coefficients // Internat. Journal of Applied Mechanics. 2022. P. 2250002.
26. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 17. № 6. С. 1476–1492.
27. Bleich H.H., I. Nelson I. Plane Waves in an Elastic-Plastic Half-Space Due to Combined Surface Pressure and Shear // ASME. J. Appl. Mech. 1966. V. 33:1. P. 149–158.
28. Golubev V.I., Nikitin I.S., Vasyukov A.V., Nikitin A.D. Fractured inclusion localization and characterization based on deep convolutional neural networks // Procedia Structural Integrity. 2023. V. 43. P. 29–34.