

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.54

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА ЭЙЛЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ¹⁾

© 2023 г. С. И. Безродных^{1,*}¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

Поступила в редакцию 20.04.2023 г.

Переработанный вариант 25.05.2023 г.

Принята к публикации 09.06.2023 г.

Рассматриваются интегралы типа Эйлера и тесно связанная с ними функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, являющаяся гипергеометрической функцией многих комплексных переменных $z_1, \dots, z_N$. Для функции $F_D^{(N)}$ найдены новые формулы аналитического продолжения, позволяющие представить ее в виде гипергеометрических рядов Горна, экспоненциально сходящихся в соответствующих подобластях $\mathbb{C}^N$, в том числе вблизи гиперплоскостей, имеющих вид $\{z_j = z_l\}$, $j, l = \overline{1, N}$, $j \neq l$. Совокупность найденных в работе формул продолжения и тождеств для $F_D^{(N)}$ дает эффективный аппарат для вычисления этой функции и выражаемых через нее интегралов типа Эйлера во всем комплексном пространстве $\mathbb{C}^N$, включая сложные случаи, когда переменные образуют одну или несколько групп очень близких величин. Представлено приложение полученных результатов к решению проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца в ситуации “кроудинга” и построению конформных отображений многоугольников. Библ. 45. Фиг. 3.

Ключевые слова: гипергеометрические интегралы типа Эйлера, функции Лауричеллы и Горна, аналитическое продолжение, интеграл Кристоффеля–Шварца, эффект “кроудинга”.

DOI: 10.31857/S004446692311008X, EDN: ADXMHU

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Гипергеометрические интегралы типа Эйлера и функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$

Работа посвящена построению эффективного алгоритма для вычисления гипергеометрических контурных интегралов следующего вида:

$$\int_{\mathcal{L}} (t - w_1)^{\alpha_1} \cdots (t - w_M)^{\alpha_M} dt, \quad (1.1)$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{C}^M$ и $(w_1, \dots, w_M) \in \mathbb{C}^M$ — векторы, составленные из комплексных чисел, а путь интегрирования $\mathcal{L}$ является кривой, соединяющей некоторые две точки комплексной плоскости t , например, точки w_j и w_k , $j \neq k$, либо представляет собой контур Похгаммера, замкнутый на римановой поверхности подынтегральной функции (см. [1–3]). Интегралы (1.1) возникают во многих современных приложениях (см., например, [4–7]), а изучение их аналитических свойств привлекает внимание специалистов (см. [8–12]). Следуя [11, 13], будем называть (1.1) *гипергеометрическими интегралами типа Эйлера*. В настоящей работе эти интегралы рассматриваются в связи с вопросом об эффективном решении проблемы вычисления параметров интеграла Кристоффеля–Шварца и построения на этой основе конформного отображения многоугольных областей сложной формы (о проблеме параметров см. [14–17], а также п. 1.4 и разд. 6 ниже).

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 22-21-00727), <https://rscf.ru/project/22-21-00727/>.

Интегралы типа Эйлера тесно связаны с функцией Лауричеллы $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$, представляющей собой гипергеометрическую функцию N комплексных переменных $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ и зависящую от набора комплексных параметров $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ и $b, c \in \mathbb{C}$ (об этой функции см. [18] и [2, 19, 20]). Функция $F_D^{(N)}$ в области

$$\mathbb{L}^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |\arg(1 - z_j)| < \pi, \quad j = \overline{1, N}\}, \quad (1.2)$$

представима в виде следующего интеграла [2], который обобщает известную формулу Эйлера для функции Гаусса:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{\prod_{j=1}^N (1-tz_j)^{a_j}} dt, \quad (1.3)$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция (см. [3]); в (1.3) предполагается, что $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Правая часть (1.3) является однозначной аналитической функцией переменных $z_1, \dots, z_N$ в области (1.2). Нетрудно увидеть, что интеграл (1.1) с помощью линейной замены переменных может быть приведен (с точностью до мультипликативной константы) к виду (1.3) или соответствующей модификации, которая возникает при использовании в качестве $\mathcal{L}$ петлеобразного контура Похгаммера.

В единичном поликруге

$$\mathbb{U}^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_j| < 1, j = \overline{1, N}\} \quad (1.4)$$

функция $F_D^{(N)}$ представима в виде следующего N -кратного гипергеометрического ряда (см. [2, 18, 19]):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(\mathbf{a})_{\mathbf{k}}}{(c)_{|\mathbf{k}|} \mathbf{k}!} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}. \quad (1.5)$$

В формуле (1.5) суммирование ведется по мультииндексу $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_N)$ с неотрицательными целыми компонентами $k_j \geq 0, j = \overline{1, N}$, причем $|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^N k_j$, а для сокращенной записи произведений использованы традиционные обозначения:

$$\mathbf{k}! := k_1! \cdots k_N!, \quad (\mathbf{a})_{\mathbf{k}} := (a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}, \quad \mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}. \quad (1.6)$$

Фигурирующий в (1.6) символ Похгаммера $(a)_k$ определяется через гамма-функцию $\Gamma(s)$ по формуле (см. [2, 3])

$$(a)_k = (a, k) := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad (1.7)$$

так что справедливы соотношения

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_m = \begin{cases} (a)_m = a(a+1) \cdots (a+m-1), & m = 1, 2, \dots, \\ (-1)^m [(1-a)(2-a) \cdots ((1-a)-m-1)]^{-1}, & m = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

Параметр c в формуле (1.5) не принимает целых неположительных значений, т.е. $c \notin \mathbb{Z}^-$.

Отметим, что указанное выше ограничение на параметры $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, требуемое для сходимости интеграла (1.2), может быть снято, если в (1.2) использовать интегрирование по петлеобразным контурам Похгаммера (см. [2]); при этом меняется множитель перед интегралом.

1.2. Вычисление интегралов типа Эйлера и аналитическое продолжение функции $F_D^{(N)}$

Высокоточное вычисление интеграла (1.3) при заданном наборе переменных $\mathbf{z}$ и параметров b, c , вообще говоря, является трудной задачей. Ряд (1.5) может быть применен для такого вычисления, только если $\mathbf{z}$ лежит в поликруге $\mathbb{U}_\rho := \{|z_j| < \rho, j = \overline{1, N}\}$ достаточно малого радиуса ρ . Если же $\mathbf{z} \notin \mathbb{U}_\rho$ при $\rho = 1$, то ряд расходится и заведомо не может быть использован для вычисления (1.3). В связи со сказанным естественным образом возникает задача о получении для инте-

грала (1.3) набора представлений в виде обобщенных гипергеометрических рядов, экспоненциально сходящихся в таких подобластях $\mathbb{C}^N$, объединение которых покрывает все множество $\mathbb{C}^N \setminus \bigcup_{\rho} \mathbb{U}_{\rho}^N$ с некоторым $\rho < 1$.

Решение этой задачи дают формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, построенные в [20, 21], а также в разд. 3 настоящей работы. Каждая из таких формул имеет следующий вид:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N \lambda_j u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \Omega \not\subset \mathbb{U}^N, \quad (1.9)$$

где набор функций $\{u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})\}_{j=0}^N$, представимых в терминах гипергеометрических рядов Горна, зависящих от N переменных, образует в области Ω базис для пространства решений системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет функция Лауричеллы (об этой системе уравнений см. [2, 18, 19], а необходимые сведения о ней приведены ниже в п. 1.3). В формуле (1.9) коэффициенты $\lambda_j \in \mathbb{C}$ зависят от параметров $a_1, \dots, a_N, b, c$. Область Ω , где ряды u_j одновременно сходятся, имеет непустое пересечение с дополнением к единичному поликругу $\mathbb{U}^N$, т.е. справедливо соотношение $\Omega \cap (\mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N) \neq \emptyset$.

Отметим, что представления вида (1.9) являются обобщением классических формул аналитического продолжения функции Гаусса одного переменного на случай N переменных, а фигурирующие в (1.9) функции $u_j(\mathbf{z})$ играют для приведенной ниже системы (1.10) ту же роль, что и канонические решения Куммера (см. [1–3]) для гипергеометрического уравнения, которому удовлетворяет функция Гаусса. Построенные формулы аналитического продолжения вида (1.9) являются вкладом в решение общей проблемы аналитического продолжения рядов Горна (о гипергеометрических функциях Горна см. [22]). Общий подход к нахождению формул продолжения таких рядов предложен в [23]. Отметим, что изучению функций Горна посвящены многие современные работы (см., например, [24–28]).

1.3. Система уравнений Лауричеллы и результаты об аналитическом продолжении

Интеграл типа Эйлера (1.3) и гипергеометрический ряд Лауричеллы (1.5), рассматриваемые как функции переменных $z_1, \dots, z_N$, удовлетворяют следующей системе из N линейных уравнений второго порядка с частными производными (см. [2, 18, 19]):

$$\left(c + \sum_{m=1}^N \theta_m \right) (1 + \theta_j)(z_j^{-1} u(\mathbf{z})) = \left(b + \sum_{m=1}^N \theta_m \right) (a_j + \theta_j) u(\mathbf{z}), \quad j = \overline{1, N}, \quad (1.10)$$

где $\theta_s := z_s \partial / \partial z_s$, а величины a_j, b и c — параметры функции Лауричеллы. Голоморфный ранг системы (1.10) равен $N + 1$ и, таким образом, ее общее решение зависит от $(N + 1)$ -й произвольной комплексной постоянной (см. [2, 18]). Особым множеством $\mathcal{M}$ системы (1.10) является объединение гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_j^{(\tau)} := \{\mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = \tau\}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1.11)$$

где $\tau \in \mathcal{S} := \{0, 1, \infty\}$, и гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_{j,l} := \{\mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = z_l\}, \quad (1.12)$$

здесь индексы $j, l = \overline{1, N}$, $j \neq l$. В частности, множеству $\mathcal{M}$ принадлежат такие точки $\mathbf{z}$, у которых для всех компонент z_j выполняется включение $z_j \in \mathcal{S}$, $j = \overline{1, N}$, например, точки $(1, \dots, 1)$ и $(\infty, \dots, \infty)$, у которых все N компонент равны соответственно единице или бесконечности, а также точки $(1, \dots, 1, \infty, \dots, \infty)$, у которых первые k компонент равны единице, а остальные — бесконечности. Систему уравнений (1.12) для краткости будем обозначать $E_D^{(N)}$.

В [20] при произвольном N представлен набор формул аналитического продолжения (1.9) функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, области сходимости которых в совокупности покрывают $\mathbb{C}^N$ за исключением гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$, определенных равенством (1.12). Граница области сходимости каждой из таких формул содержит часть одной или нескольких гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$, поэтому указанный набор формул адекватно представляет функцию $F_D^{(N)}$ и позволяет ее вычислять, когда аргумент $\mathbf{z}$ лежит достаточно далеко от $\mathcal{M}_{j,l}$. В [21] при произвольном N предложен способ построения формул аналитического продолжения нового типа, позволяющий для любого пересечения S гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$ указать представление вида (1.9), область сходимости которого имеет непустое пересечение с S .

В настоящей работе, продолжающей исследования [20, 21], для построения формул аналитического продолжения функции Лауричеллы мы воспользовались следующим тождеством (см. [2]):

$$F_D^{(N)}(a_1, \dots, a_N; b, c; z_1, \dots, z_N) = (1 - z_N)^{-b} F_D^{(N)}\left(a_1, \dots, a_{N-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s; b, c; \frac{z_1 - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{N-1} - z_N}{1 - z_N}, \frac{z_N}{z_N - 1}\right), \quad (1.13)$$

а затем применили к его правой части результаты об аналитическом продолжении, полученные в [20, 21]. При произвольном числе переменных функции Лауричеллы формулы аналитического продолжения, выведенные таким способом, представлены в разд. 2, 3 (см. теоремы 2 и 4). В разд. 3–5 даны примеры применения теорем 2 и 4 для случая $N = 3$ и 6 переменных. Найденные в разд. 2–5 формулы удобны для вычисления интегралов (1.1), (1.3) и ориентированы на решение проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца.

Построенные формулы аналитического продолжения позволяют адекватно и удобно с вычислительной точки зрения представить функцию $F_D^{(N)}$, в том числе в тех случаях, когда ее переменные $z_1, \dots, z_N$ делятся на группы близких величин. Такую ситуацию будем называть кроудингом (от английского слова “to crowd” – толпиться, сбиваться в кучу), заимствуя этот термин из работ, посвященных практике построения конформного отображения прямолинейных многоугольников на основе интеграла Кристоффеля–Шварца (см. [16, 17, 29, 30]). В этих работах кроудинг означает резко неравномерное распределение значений параметров интеграла, являющихся прообразами вершин многоугольника.

В следующем п. 1.4 обсуждается связь функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ и задачи о вычислении параметров интеграла Кристоффеля–Шварца. В разд. 6 рассматривается вопрос о вычислении этой функции и представлены примеры численного решения проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца для двух многоугольников сложного вида.

1.4. Проблема параметров интеграла Кристоффеля–Шварца

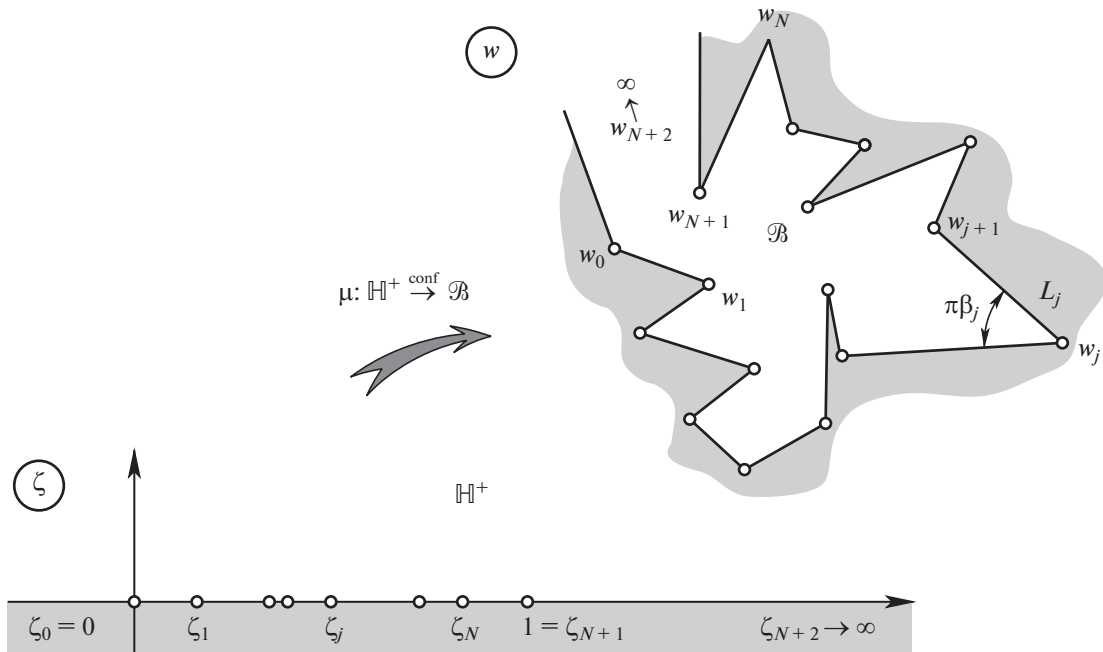
Обозначим через $w_0, \dots, w_{N+2}$ вершины многоугольника $\mathcal{B}$, а через $\pi\beta_0, \dots, \pi\beta_{N+2}$ – измеряемые по области углы в этих вершинах (см. фиг. 1). Величины β_j называют показателями углов. Предположим, что бесконечно удаленная точка не является внутренней для области $\mathcal{B}$. Будем рассматривать отображение $w = \mu(\zeta)$ верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+ := \{\zeta : \text{Im } \zeta > 0\}$ на многоугольник $\mathcal{B}$, подчиненное следующим условиям нормировки, которые его однозначно определяют:

$$\zeta_0 = \mu^{-1}(w_0) = 0, \quad \zeta_{N+1} = \mu^{-1}(w_{N+1}) = 1, \quad \zeta_{N+2} = \mu^{-1}(w_{N+2}) = \infty. \quad (1.14)$$

Согласно [14–17] отображение $w = \mu(\zeta)$ может быть записано в виде интеграла Кристоффеля–Шварца, имеющего следующий вид:

$$w = \mu(\zeta) = \mathcal{H}_0 \exp(i \arg(w_{N+2} - w_{N+1})) \int_{\tilde{\zeta}}^{\zeta} t^{\beta_0-1} \left[\prod_{j=1}^N (t - \zeta_j)^{\beta_j-1} \right] (t-1)^{\beta_{N+1}-1} dt + \tilde{w}, \quad (1.15)$$

где $\mathcal{H}_0$, $\tilde{w} := \mu(\tilde{\zeta})$ – некоторые постоянные, а вещественные параметры $\zeta_j := \mu^{-1}(w_j)$, фигурирующие в подынтегральном выражении, являются прообразами вершин w_j многоугольника. Вели-


 Фиг. 1. Конформное отображение полуплоскости на многоугольник $\mathcal{B}$.

чины ζ_j , $j = \overline{1, N}$ и $\mathcal{H}_0$ однозначно определяются геометрией области $\mathcal{B}$, но заранее неизвестны. Задачу об их нахождении называют *проблемой параметров интеграла Кристоффеля–Шварца*.

Методы вычисления неизвестных параметров интеграла Кристоффеля–Шварца предложены в работах [16, 31–40]. Особенно сложной проблема их нахождения становится в ситуации кроудинга (см. [16, 17, 29, 30]), [39], под которым, как отмечено выше в п. 1.3, понимается резко неравномерное расположения величин ζ_j . Различные подходы к решению проблемы кроудинга были предложены в работах [16, 34, 36, 39–42], однако она по-прежнему остается далекой от решения. Существенного прогресса в решении проблемы кроудинга, как продемонстрировано в [20, 38], можно ожидать с помощью подхода, основанного на применении формул (1.9) аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$. Отметим, что связь функции Лауричеллы и проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца указана в [35].

Далее будем рассматривать случай, когда все вершины w_j , $j = \overline{0, N+1}$, конечны, т.е. соответствующие показатели углов удовлетворяют соотношениям $1 \neq \beta_j \in (0, 2]$, $j = \overline{0, N+1}$. Для нахождения параметров ζ_j интеграла Кристоффеля–Шварца (1.15) прежде всего сформируем систему из $N+1$ нелинейных уравнений, следуя известному способу [14–17]. Вычисляя модуль разности $|\mu(\zeta_{s+1}) - \mu(\zeta_s)|$ с помощью формулы (1.15) и приравнявая полученную величину длине стороны $L_s := |w_{s+1} - w_s|$, приходим к следующему уравнению:

$$\mathcal{H}_0 I_s(\mathbf{x}) = L_s, \quad (1.16)$$

где $\mathbf{x} = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ – вектор, составленный из неизвестных прообразов, а $I_s(\mathbf{x})$ – модуль интеграла из формулы (1.15), взятого между точками ζ_s и ζ_{s+1} :

$$I_s(\mathbf{x}) := \left| \int_{\zeta_s}^{\zeta_{s+1}} t^{\beta_0-1} \prod_{j=1}^N (t - \zeta_j)^{\beta_j-1} (t-1)^{\beta_{N+1}-1} dt \right|. \quad (1.17)$$

Если все вершины w_s , кроме, быть может, w_{N+2} , конечны, то равенства (1.17) при $s = \overline{0, N}$ образуют требуемую систему из $N+1$ уравнений для определения вектора прообразов $\mathbf{x}$ и коэффициента $\mathcal{H}_0$ (см. [14–17]).

Для дальнейших рассуждений удобно ввести вектор $\mathbf{a}$ и числа b, c , связанные с показателями β_j углов многоугольника по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, \dots, a_N), \quad a_j := 1 - \beta_j, \quad j = \overline{1, N}, \\ b &:= -1 + \sum_{j=0}^{N+1} (1 - \beta_j), \quad c := \sum_{j=0}^N (1 - \beta_j), \end{aligned} \quad (1.18)$$

так что $1 - \beta_{N+1} = 1 + b - c$, $1 - \beta_0 = c - \sum_{j=1}^N a_j$, а кроме того, определить функцию

$$\mathcal{Y}(\mathbf{x}) = \left(\zeta_1, \frac{\zeta_1}{\zeta_2}, \dots, \frac{\zeta_1}{\zeta_N} \right), \quad (1.19)$$

зависящую от N комплексных переменных $(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \mathbf{x}$.

Далее, приведем формулы [20, 38], дающие представления для интегралов (1.17), фигурирующих в левой части (1.16), через функцию Лауричеллы. Такие формулы получаются после преобразования точек ζ_s и ζ_{s+1} с помощью линейной замены переменных в концы единичного отрезка и применения представление типа Эйлера (1.3); интегралы (1.17) при этом выражаются в виде

$$I_k(\mathbf{x}) = C_k \mathcal{F}_k(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x}), \quad k = \overline{0, N}, \quad (1.20)$$

где коэффициенты C_k задаются равенствами

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{\Gamma\left(1 + \sum_{j=1}^N a_j - c\right) \Gamma(1 - a_1)}{\Gamma\left(2 + \sum_{j=2}^N a_j - c\right)}, \quad C_N = \frac{\Gamma(1 - a_N) \Gamma(c - b)}{\Gamma(1 + c - b - a_N)}, \\ C_k &= \frac{\Gamma(1 - a_k) \Gamma(1 - a_{k+1})}{\Gamma(2 - a_k - a_{k+1})}, \quad k = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

а величины $\mathcal{F}_k(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x})$, $k = \overline{0, N}$, определяются через функцию Лауричеллы $F_D^{(N)}$ по формулам

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x}) := \zeta_1^{1 + \sum_{j=2}^N a_j - c} \left(\prod_{j=2}^N \zeta_j^{-a_j} \right) F_D^{(N)}(\mathbf{a}_0; b_0, c_0; \mathbf{x}_0), \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x}) &:= \zeta_k^{\sum_{j=1}^N a_j - c} (\zeta_{k+1} - \zeta_k)^{1 - a_k - a_{k+1}} (1 - \zeta_k)^{c - b - 1} \times \\ &\times \prod_{j=1}^{k-1} (\zeta_k - \zeta_j)^{-a_j} \prod_{j=k+2}^N (\zeta_j - \zeta_k)^{-a_j} F_D^{(N)}(\mathbf{a}_k; b_k, c_k; \mathcal{Y}(\mathbf{1} - \mathbf{x}_k)), \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x}) := \zeta_N^{\sum_{j=1}^N a_j - c} (1 - \zeta_N)^{c - b - a_N} \prod_{j=1}^{N-1} (\zeta_N - \zeta_j)^{-a_j} F_D^{(N)}(\mathbf{a}_N; b_N, c_N; \mathcal{Y}(\mathbf{1} - \mathbf{x}_N)); \quad (1.24)$$

здесь параметры $\mathbf{a}_k$, b_k и c_k записываются через величины (1.18):

$$\mathbf{a}_0 := (a_2, \dots, a_N, 1 + b - c), \quad b_0 := 1 + \sum_{j=1}^N a_j - c, \quad c_0 := 2 + \sum_{j=2}^N a_j - c, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &:= \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+2}, \dots, a_N, 1 + b - c \right), \\ b_k &:= 1 - a_k, \quad c_k := 2 - a_k - a_{k+1}, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{a}_N := \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, a_1, \dots, a_{N-1} \right), \quad b_N := 1 - a_N, \quad c_N := 1 + c - b - a_N, \quad (1.27)$$

векторы $\mathbf{x}_k$ выражаются через прообразы ζ_j , $j = \overline{1, N}$, по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &:= \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}, \dots, \frac{\zeta_1}{\zeta_N}, \zeta_1 \right), \quad \mathbf{x}_N := \left(\frac{1}{\zeta_N}, \frac{\zeta_1}{\zeta_N}, \dots, \frac{\zeta_{N-1}}{\zeta_N} \right), \\ \mathbf{x}_k &:= \left(\frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_k}, \frac{\zeta_1}{\zeta_k}, \dots, \frac{\zeta_{k-1}}{\zeta_k}, \frac{\zeta_{k+2}}{\zeta_k}, \dots, \frac{\zeta_N}{\zeta_k}, \frac{1}{\zeta_k} \right), \quad k = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

а $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ определяется из (1.19).

Мы не рассматриваем случай, когда одна или несколько вершин w_j , $j = \overline{0, N+1}$, являются бесконечно удаленными. Отметим только, что в такой ситуации система уравнений для параметров интеграла (1.15) также может быть записана в терминах функции Лауричеллы (см. [20, 38]).

Примеры решения системы (1.16), (1.20)–(1.28) и вычисления отображающей функции $\mu(\zeta)$ для конкретных областей $\mathcal{B}$ приведены в разд. 6.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ВИДА $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

2.1. Аналитическое продолжение функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в окрестность точки $(1, \dots, 1)$

Прежде всего сформулируем теорему об аналитическом продолжении функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ по всем переменным $z_1, \dots, z_N$ в окрестность точки $(1, \dots, 1)$ (см. [20]). Формулы аналитического продолжения, которые дает эта теорема, соответствуют случаю, когда аргумент функции Лауричеллы лежит достаточно далеко от гиперплоскостей вида $\mathcal{M}_{k,m} := \{z_k = z_m\}$.

Выпишем следующий гипергеометрический ряд (в несколько иных обозначениях, приведенный в [2]):

$$G^{(N,j)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}_j|} (\mathbf{a})_{\mathbf{k}}}{(c)_{|\mathbf{k}_j|} \mathbf{k}!} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \quad (2.1)$$

где выражение $|\mathbf{k}_j|$ для мультииндекса $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ означает $|\mathbf{k}_j| := \sum_{s=j}^N k_s - \sum_{s=1}^{j-1} k_s$, а параметр j может принимать значения $1, \dots, N+1$. Напомним, что символ Похгаммера $(a)_k$ для отрицательных целых значений k определяется из (1.8). Областью сходимости ряда (2.1) при всех $j = \overline{1, N+1}$ является единичный поликруг $\mathbb{U}^N$.

Справедливо следующее утверждение (см. теорему 2 в [20]).

Теорема 1. Если ни одно из чисел $(c - \sum_{s=1}^j a_s - b)$, $j = \overline{1, N}$, не является целым, то аналитическое продолжение функции Лауричеллы (1.5) в область

$$\mathbb{K}^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : 0 < |1 - z_1| < \dots < |1 - z_N| < 1; |\arg(1 - z_s)| < \pi, s = \overline{1, N}\} \quad (2.2)$$

дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N A_j \mathcal{U}_0^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{K}^N, \quad (2.3)$$

где функции $\mathcal{U}_0^{(1)}$, $\mathcal{U}_j^{(1)}$ определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = F_D^{(N)}\left(a_1, \dots, a_N; b, 1 + \sum_{s=1}^N a_s + b - c; 1 - z_1, \dots, 1 - z_N\right), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= (1 - z_j)^{c - \sum_{s=1}^j a_s - b} \left(\prod_{l=j+1}^N (1 - z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times G^{(N, j)} \left(a_1, \dots, a_{j-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_{j+1}, \dots, a_N; c - \sum_{s=1}^{j-1} a_s - b, 1 + c - \sum_{s=1}^j a_s - b; \right. \\ &\left. \frac{1 - z_1}{1 - z_j}, \dots, \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_j}, 1 - z_j, \frac{1 - z_j}{1 - z_{j+1}}, \dots, \frac{1 - z_j}{1 - z_N} \right), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

в (2.4), (2.5) под $F_D^{(N)}$ и $G^{(N, j)}$ понимаются ряды (1.5) и (2.1), а коэффициенты A_j в (2.3) имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^N a_s - b\right)}{\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^N a_s\right)\Gamma(c - b)}, \\ A_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} a_s - b\right)\Gamma\left(\sum_{s=1}^j a_s + b - c\right)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Функции (2.4), (2.5) образуют базис в пространстве решений системы уравнений с частными производными (1.10) в области $\mathbb{K}^N$.

Пусть S_N — группа перестановок множества из N элементов, а $\sigma(\mathbf{z})$ — результат действия некоторого элемента $\sigma \in S_N$ на вектор $\mathbf{z}$, т.е. вектор, получаемый перестановкой компонент $\mathbf{z}$. Введем области, совпадающие с $\mathbb{K}^N$ с точностью до симметрий:

$$\mathbb{K}_\sigma^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{K}^N\}. \quad (2.7)$$

Отметим, что функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$ удовлетворяет следующим соотношениям симметрии, вытекающим непосредственно из представлений в виде интеграла (1.3) или ряда (1.5):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = F_D^{(N)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z})). \quad (2.8)$$

Из теоремы 1 с помощью несложных рассуждений могут быть найдены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы в области $\mathbb{K}_\sigma^N$ для всех $\sigma \in S_N$. Действительно, учитывая, что включение $\mathbf{z} \in \mathbb{K}_\sigma^N$ влечет $\sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{K}^N$, и применяя теорему 1 к правой части (2.8), получаем, что аналитическое продолжения функции $F_D^{(N)}$ в область $\mathbb{K}_\sigma^N$ осуществляется формулой (2.3) с заменой в ее правой части, т.е. в коэффициентах $A_j = A_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ и функциях $\mathcal{U}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$, определяемых из (2.4), (2.5), параметра $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$ и аргумента $\mathbf{z}$ на $\sigma(\mathbf{z})$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Предположим, что для параметров $(a_1, \dots, a_N)$, b , c выполнены соотношения $(c - \sum_{s=1}^j \tilde{a}_s - b) \notin \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, N}$, где σ — элемент группы перестановок S^N , и $\tilde{a}_s$ — элемент с номером s вектора $\sigma(\mathbf{a})$. Тогда

i) аналитическое продолжение ряда (1.5) в область $\mathbb{K}_\sigma^N$, заданную равенством (2.7), дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N A_{j, \sigma} \mathcal{U}_{j, \sigma}^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{K}_\sigma^N, \quad (2.9)$$

где функции $\mathcal{U}_{j, \sigma}^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \mathcal{U}_j^{(1)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z}))$ определяются по формулам (2.4), (2.5) с заменой в них векторов $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$ и $\mathbf{z}$ на $\sigma(\mathbf{z})$, а коэффициенты $A_{j, \sigma} := A_j(\sigma(\mathbf{a}); b, c)$ даются равенствами (2.6) с заменой в них $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$;

ii) набор функций

$$\{\mathcal{U}_{j, \sigma}^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})\}_{j=0}^N, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{K}_\sigma^N, \quad \sigma \in S^N,$$

является базисом в пространстве решений системы (1.10) в области $\mathbb{K}_\sigma^N$, определенной по формуле (2.7).

2.2. Аналитическое продолжение функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в окрестность точки $(1, \dots, 1, \infty, \dots, \infty)$

Построим формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ для случая, когда первые $v-1$ переменных $z_1, \dots, z_{v-1}$ близки к единице, а остальные $N-v+1$ переменных $z_v, \dots, z_N$ принимают большие по модулю значения. Будем предполагать при этом, что справедливы неравенства

$$0 < |1 - z_1| < \dots < |1 - z_{v-1}| < 1 < |1 - z_v| < \dots < |1 - z_N| < \infty. \quad (2.10)$$

Используя соотношение симметрии (2.8), переставим в правой части тождества (1.13) переменное $z_N/(z_N - 1)$ и соответствующий ему параметр $c - \sum_{s=1}^N a_s$ функции Лауричеллы так, чтобы они имели номер v в списке переменных и параметров соответственно, т.е. перепишем (1.13) в виде

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_N)^{-b} F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{u}), \quad (2.11)$$

где через $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{a}, c)$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{z})$ обозначены векторы параметров и переменных после указанной перестановки:

$$\mathbf{a}(\mathbf{a}, c) := \left(a_1, \dots, a_{v-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_v, \dots, a_{N-1} \right), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) := \left(\frac{z_1 - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{v-1} - z_N}{1 - z_N}, \frac{z_N}{z_N - 1}, \frac{z_v - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{N-1} - z_N}{1 - z_N} \right). \quad (2.13)$$

Нетрудно увидеть, что компоненты $u_1, \dots, u_N$ вектора (2.13) определяются по формулам

$$u_j := \frac{z_j - z_N}{1 - z_N}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad u_v := \frac{z_N}{z_N - 1}, \quad u_j := \frac{z_{j-1} - z_N}{1 - z_N}, \quad j = \overline{v+1, N}. \quad (2.14)$$

Вычисляя с помощью (2.14) величины $1 - u_k$, $k = \overline{1, N}$, находим

$$1 - u_j := \frac{1 - z_j}{1 - z_N}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad 1 - u_v := \frac{1}{1 - z_N}, \quad 1 - u_j := \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_N}, \quad j = \overline{v+1, N}. \quad (2.15)$$

Таким образом, если переменные $z_1, \dots, z_N$ удовлетворяют соотношениям (2.10), то, принимая во внимание (2.15), нетрудно заметить, что новые переменные $u_1, \dots, u_N$ функции

$$F_D^{(N)} \left(a_1, \dots, a_{v-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_v, \dots, a_{N-1}; b, c; b, c; u_1, \dots, u_N \right), \quad (2.16)$$

фигурирующей в правой части тождества (2.11), подчинены неравенствам

$$0 < |1 - u_1| < \dots < |1 - u_N| < 1.$$

Учитывая эти неравенства, запишем формулы аналитического продолжения, которые устанавливает теорема 1, применительно к функции (2.16); затем, подставляя результат в правую часть тождества (2.11) и возвращаясь к исходным переменным $z_1, \dots, z_N$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Предположим, что параметры функции Лауричеллы (1.5) таковы, что справедливы соотношения*

$$\left(c - \sum_{s=1}^j a_s - b \right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad \left(b - \sum_{s=j}^N a_s \right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{v, N}.$$

Тогда аналитическое продолжение ряда (1.5) в область

$$\mathbb{S}^{N,v} = \{z \in \mathbb{C}^N : 0 < |1 - z_1| < \dots < |1 - z_{v-1}| < 1 < |1 - z_v| < \dots < |1 - z_N| < \infty; \\ |\arg(1 - z_s)| < \pi, s = \overline{1, N}\} \quad (2.17)$$

дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N B_j \mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (2.18)$$

где функция $\mathcal{U}_0^{(1,\infty)}$ имеет вид

$$\mathcal{U}_0^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := (1 - z_N)^{-b} \times \\ \times F_D^{(N)}\left(a_1, \dots, a_{N-1}, c - \sum_{j=1}^N a_j; b, 1 + b - a_N; \frac{1 - z_1}{1 - z_N}, \dots, \frac{1 - z_{N-1}}{1 - z_N}, \frac{1}{1 - z_N}\right), \quad (2.19)$$

функции $\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}$, $j = \overline{1, v-1}$, определяются равенствами

$$\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_j)^{c - \sum_{s=1}^j a_s - b} \left(\prod_{l=j+1}^N (1 - z_l)^{-a_l} \right) \times \\ \times G^{(N,j)}\left(a_1, \dots, a_{j-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_{j+1}, \dots, a_N; c - \sum_{s=1}^{j-1} a_s - b, 1 + c - \sum_{s=1}^j a_s - b; \right. \\ \left. \frac{1 - z_1}{1 - z_j}, \dots, \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_j}, 1 - z_j, \frac{1 - z_j}{1 - z_{j+1}}, \dots, \frac{1 - z_j}{1 - z_N} \right), \quad j = \overline{1, v-1}, \quad (2.20)$$

функция $\mathcal{U}_v^{(1,\infty)}$ — равенством

$$\mathcal{U}_v^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \prod_{s=v}^N (1 - z_s)^{-a_s} \times \\ \times G^{(N,v)}\left(a_1, \dots, a_N; c - \sum_{s=1}^{v-1} a_s - b, 1 + \sum_{s=v}^N a_s - b; 1 - z_1, \dots, 1 - z_{v-1}, \frac{1}{1 - z_v}, \dots, \frac{1}{1 - z_N}\right), \quad (2.21)$$

а функции $\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}$, $j = \overline{v+1, N}$, — равенствами

$$\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_{j-1})^{\sum_{s=j}^N a_s - b} \left(\prod_{s=j}^N (1 - z_s)^{-a_s} \right) \times \\ \times G^{(N,j)}\left(a_1, \dots, a_{j-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_{j+1}, \dots, a_N; \sum_{s=j-1}^N a_s - b, 1 + \sum_{s=j}^N a_s - b; \right. \\ \left. \frac{1 - z_1}{1 - z_j}, \dots, \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_j}, \frac{1}{1 - z_j}, \frac{1 - z_j}{1 - z_{j+1}}, \dots, \frac{1 - z_j}{1 - z_N} \right), \quad j = \overline{v+1, N}. \quad (2.22)$$

В формулах (2.19)–(2.22) под $F_D^{(N)}$ и $G^{(N,j)}$ понимаются ряды (1.5) и (2.1). В (2.18) коэффициенты B_j имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_N - b)}{\Gamma(a_N)\Gamma(c - b)}, \quad B_j = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} a_s - b\right)\Gamma\left(\sum_{s=1}^j a_s + b - c\right)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad (2.23)$$

$$B_v = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{v-1} a_s - b\right)\Gamma\left(b - \sum_{s=v}^N a_s\right)}{\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^N a_s\right)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad (2.24)$$

$$B_j = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\sum_{s=j-1}^N a_s - b\right)\Gamma\left(b - \sum_{s=j}^N a_s\right)}{\Gamma(a_{j-1})\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \overline{v+1, N}. \quad (2.25)$$

Функции (2.19)–(2.22) образуют базис в пространстве решений системы уравнений с частными производными (1.10) в области $\mathbb{S}^{N,v}$.

Из теоремы 2 с помощью несложных рассуждений могут быть найдены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы в области $\mathbb{S}_\sigma^{N,v}$ для всех $\sigma \in S^N$. Учитывая, что включение $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\sigma^{N,v}$ влечет $\sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{S}^{N,v}$, и применяя теорему 2 к правой части (2.8), получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Предположим, что для параметров $(a_1, \dots, a_N)$, b , c выполнены соотношения

$$\left(c - \sum_{s=1}^j \tilde{a}_s - b\right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad \left(b - \sum_{s=j}^N \tilde{a}_s\right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{v, N}.$$

где σ – элемент группы перестановок S^N , а числа $\tilde{a}_s$, $s = \overline{1, N}$, – элементы вектора $\sigma(\mathbf{a})$. Тогда

i) аналитическое продолжение ряда (1.5) в область $\mathbb{S}_\sigma^{N,v} : \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{S}^{N,v}\}$ дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N B_{j,\sigma} \mathcal{U}_{j,\sigma}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (2.26)$$

где функции $\mathcal{U}_{j,\sigma}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z}))$ определяются по формулам (2.19)–(2.22) с заменой в них векторов $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$ и $\mathbf{z}$ на $\sigma(\mathbf{z})$, а коэффициенты $B_{j,\sigma} := B_j(\sigma(\mathbf{a}); b, c)$ даются равенствами (2.23)–(2.25) с заменой в них $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$;

ii) набор функций

$$\{\mathcal{U}_{j,\sigma}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})\}_{j=0}^N, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{S}_\sigma^{N,v}, \quad \sigma \in S^N,$$

является базисом пространства решений системы (1.10) в области $\mathbb{S}_\sigma^{N,v}$.

3. ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ $F_D^{(N)}$, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМ $\{z_j = z_k\}$

3.1. Формулы аналитического продолжения в окрестность точек вида $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, соответствующие пересечению гиперплоскостей $\{z_m = z_k\}$

Представленные далее в п. 3.1.2 формулы аналитического продолжения (см. [21, 38]) соответствуют случаю, когда $|1 - z_j| < 1$, $j = \overline{1, v}$, а для остальных переменных справедливы соотношения $|z_j| < 1$, $j = \overline{v+1, N}$. При этом предполагается, что некоторые из переменных с номерами $j = \overline{1, v}$ образуют один или несколько наборов, так что внутри каждого набора расстояния между переменными малы по сравнению с расстояниями от них до единицы. Такую ситуацию, как отмечалось выше, называем кроудингом переменных. При изучении аналитического продолжения в ситуации кроудинга нам будет удобно модифицировать обозначения для переменных и параметров функции Лауричеллы.

3.1.1. Используемые обозначения. Представим векторный аргумент $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ функции $F_D^{(N)}$ в виде объединения $q+1 \leq N$ наборов $\mathbf{z}^{(s)}$, $s = \overline{1, q+1}$:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots, \mathbf{z}^{(q+1)}), \quad \mathbf{z}^{(s)} := (z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \dots, z_{p_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, q+1}, \quad (3.1)$$

где набор $\mathbf{z}^{(s)}$ с номером s состоит из p_s элементов, так что $\sum_{s=1}^{q+1} p_s = N$. Несложно установить связь обозначений (3.1) с прежними, использованными в формуле (1.5):

$$z_j^{(s)} = z_m, \quad m = \sum_{l=1}^{s-1} p_l + j, \quad (3.2)$$

так что, например, $\mathbf{z}^{(1)} = (z_1, \dots, z_{p_1})$, $\mathbf{z}^{(2)} = (z_{p_1+1}, \dots, z_{p_1+p_2})$ и $\mathbf{z}^{(q+1)} = (z_{q+1}, \dots, z_N)$.

Будем считать, что компоненты вектора $\mathbf{z}^{(s)}$, т.е. переменные $z_j^{(s)}$ с одинаковым верхним индексом, являются “достаточно близкими” в смысле, который будет уточнен ниже в теореме 0 об аналитическом продолжении. Далее для определенности будем предполагать, что векторы $\mathbf{z}^{(s)}$ с номерами $s = \overline{1, q}$ содержат переменные, близкие к единице, а переменные, образующие $\mathbf{z}^{(q+1)}$, по модулю меньше единицы, т.е. $\mathbf{z}^{(q+1)} \in \{|z_l^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_{q+1}}\}$.

Компоненты векторного параметра $\mathbf{a}$ функции Лауричеллы и компоненты мультииндекса $\mathbf{k}$ в формуле (1.5) переобозначим соответствующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(q+1)}), \quad \mathbf{a}^{(s)} := (a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \dots, a_{p_s}^{(s)}), \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{k}^{(1)}, \dots, \mathbf{k}^{(q+1)}), \quad \mathbf{k}^{(s)} := (k_1^{(s)}, k_2^{(s)}, \dots, k_{p_s}^{(s)}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

так что

$$a_j^{(s)} = a_m, \quad k_j^{(s)} = k_m, \quad m = \sum_{l=1}^{s-1} p_s + j. \quad (3.4)$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения для частичных сумм векторов $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$:

$$|\mathbf{a}_{s,l}| := \sum_{k=s}^l a_k, \quad |\mathbf{a}| := |\mathbf{a}_{1,N}|, \quad |\mathbf{k}_{s,l}| := \sum_{n=s}^l k_n, \quad |\mathbf{k}| := |\mathbf{k}_{1,N}|. \quad (3.5)$$

Отсюда и из (3.3), (3.4) вытекают, например, соотношения

$$|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=1}^{p_s} a_l^{(s)}, \quad |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=1}^{p_s} k_l^{(s)}, \quad \sum_{s=1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| = |\mathbf{a}|, \quad \sum_{s=1}^{q+1} |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| = |\mathbf{k}|, \quad (3.6)$$

а также соотношения

$$|\mathbf{a}_{2,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=1}^{p_s} a_l^{(s)}, \quad |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=2}^{p_s} k_l^{(s)}, \quad s = \overline{1, q}, \quad (3.7)$$

которые потребуются в дальнейшем; в формулах (3.6), (3.7) величины $a_l^{(s)}$, $k_l^{(s)}$ — компоненты векторного параметра $\mathbf{a}$ и мультииндекса $\mathbf{k}$ (см. (3.3), (3.4)).

3.1.2. Формулы аналитического продолжения. Здесь приведены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в окрестность гиперплоскостей, определяемых по формуле (1.12), а также их пересечений, точнее, в новых обозначениях (3.1), (3.2), формулы, справедливые вблизи множества

$$\bigcap_{s=1}^q \mathcal{M}_s, \quad \mathcal{M}_s := \{z_1^{(s)} = \dots = z_{p_s}^{(s)}\}, \quad s = \overline{1, q}; \quad (3.8)$$

при этом рассматриваем окрестности точек $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

Введем область $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N(p_1, \dots, p_{q+1})$ как пересечение

$$\mathbb{P}^N = \bigcap_{j=0}^q \mathbb{P}_j^N, \quad (3.9)$$

где области $\mathbb{P}_j^N = \mathbb{P}_j^N(p_1, \dots, p_{q+1})$, $j = \overline{0, q}$, определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_j^N := \{z \in \mathbb{C}^N : |1 - z_1^{(j)}| + |z_1^{(\alpha)} - z_n^{(\alpha)}| < 1, \alpha = \overline{1, j}, n = \overline{2, p_\alpha}; \\ |1 - z_1^{(j)}| + |z_1^{(j)} - z_m^{(j)}| + |z_1^{(\alpha)} - z_n^{(\alpha)}| < |1 - z_1^{(\alpha)}|, m = \overline{2, p_j}, \alpha = \overline{j+1, q}, n = \overline{2, p_\alpha}; \\ |z_l^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_{q+1}}, |\arg(1 - z_k)| < \pi, k = \overline{1, q}\}, \quad j = \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\mathbb{P}_0^N := \{z \in \mathbb{C}^N : |1 - z_1^{(\alpha)}| + |z_1^{(\alpha)} - z_n^{(\alpha)}| < 1, \alpha = \overline{1, q}, n = \overline{2, p_\alpha}; |z_l^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_{q+1}}\}. \quad (3.11)$$

Имеет место следующее утверждение (см. теорему 2 из [38], а также теорему 2 из [21]), устанавливающее формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, справедливые вблизи пересечения $\bigcap_{s=1}^q \mathcal{M}_s$ гиперплоскостей (3.8) и соответствующие случаю, когда все переменные $z_l^{(s)}$, $l = \overline{1, p_s}$, $s = \overline{1, q}$, близки к единице, а остальные переменные $z_l^{(q+1)}$, $l = \overline{1, p_{q+1}}$, по модулю меньше единицы.

Теорема 3. Если ни одно из чисел $(c - \sum_{s=1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| - b)$, $j = \overline{1, q}$, не является целым, то аналитическое продолжение ряда (1.5) в область (3.9)–(3.11) дается формулой

$$F_D^{(N)}(a; b, c; z) = \sum_{j=0}^q A_j \mathcal{U}_j(a; b, c; z), \quad (3.12)$$

где функции $\mathcal{U}_j$, $j = \overline{0, q}$, определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0(a; b, c; z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \Lambda_0(a; b, c; k) Z_0^k, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{U}_j(a; b, c; z) = (1 - z_1^{(j)})^{c - \sum_{s=1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| - b} \left(\prod_{l=j+1}^q (1 - z_1^{(l)})^{-|a_{1,p_l}^{(l)}|} \right) \sum_{|k|=0}^{\infty} \Lambda_j(a; b, c; k) Z_j^k, \quad j = \overline{1, q}. \quad (3.14)$$

Здесь коэффициенты Λ_j имеют вид

$$\begin{aligned} \Lambda_0(a; b, c; k) = \frac{(b)_{|k|}}{\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right) \left(1 - c + \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| + b, \sum_{s=1}^q |k_{1,p_s}^{(s)}| \right)} \times \\ \times \prod_{s=1}^q \left[\frac{(|a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_s}^{(s)}|)}{(|a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{2,p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right] \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j(a; b, c; k) = \frac{\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |a_{1,p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} |k_{2,p_s}^{(s)}| \right)}{\left(1 + c - \sum_{s=1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^j |k_{2,p_s}^{(s)}| \right) (|a_{1,p_j}^{(j)}| |k_{2,p_j}^{(j)}|)} \times \\ \times \left(\frac{\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| + k_1^{(j)} \right)}{\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right) k_1^{(j)}!} \prod_{s=1, s \neq j}^q \frac{(|a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_s}^{(s)}|)}{(|a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{2,p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \right) \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В формулах (3.13), (3.14) использовано обозначение $Z_j^k = \prod_{s=1}^{q+1} \prod_{l=1}^{p_s} (Z_{j,l}^{(s)})^{k_l^{(s)}}$, где числа $Z_j^{(s,l)}$ – элементы векторов $Z_j^{(s)} = \{Z_{j,1}^{(s)}, \dots, Z_{j,p_s}^{(s)}\}$, $j = \overline{0, q}$, $s = \overline{1, q+1}$, определяемых следующим способом:

если $j = 0$, то для $s = \overline{1, q+1}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} Z_0^{(s)} = (1 - z_1^{(s)}, z_1^{(s)} - z_2^{(s)}, \dots, z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, q}, \\ Z_0^{(q+1)} = (z_1^{(q+1)}, \dots, z_{p_{q+1}}^{(q+1)}), \quad s = q+1; \end{aligned} \quad (3.17)$$

если $j = \overline{1, q}$, то для $s = \overline{1, q+1}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} Z_j^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \quad s = \overline{1, j-1}, \\ Z_j^{(j)} &= \left(1 - z_1^{(j)}, \frac{z_1^{(j)} - z_2^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(j)} - z_{p_j}^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \quad s = j, \\ Z_j^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(j)}}{1 - z_1^{(s)}}, \frac{z_2^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{j+1, q}, \quad Z_j^{(q+1)} = (z_1^{q+1}, \dots, z_{p_{q+1}}^{q+1}), \quad s = q+1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Коэффициенты A_j , $j = \overline{0, q}$, в формуле (3.12) имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)}{\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}|\right)\Gamma(c-b)}, \\ A_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |a_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)\Gamma\left(\sum_{s=1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| + b - c\right)}{\Gamma(|a_{1,p_j}^{(j)}|)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Функции (3.13), (3.14) образуют базис в пространстве решений системы (1.10) в области (3.9)–(3.11).

Отметим, что если какой-либо из наборов переменных $\mathbf{z}^{(s)}$ не содержит ни одного элемента, то соответствующая ему сумма в формулах (3.13)–(3.16), (3.19) считается равной нулю, а произведение – единице. Например, если набор с номером $s = q+1$ не содержит элементов, то

$$\prod_{l=1}^{p_{q+1}} (\dots) = 1, \quad \sum_{l=1}^{p_{q+1}} (\dots) = 0, \quad |k_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| = 0.$$

3.2. Формулы аналитического продолжения в окрестность точек вида $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \infty, \dots, \infty)$, соответствующее пересечению гиперплоскостей $\{z_m = z_k\}$

3.2.1. Используемые обозначения. Здесь в п. 3.2 мы также выводим формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ для случая, когда компоненты вектора переменных $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ образуют группы близких величин, однако в отличие от предыдущего п. 3.1 часть переменных по модулю может быть больше единицы. Нетрудно увидеть, что при этом компоненты вектора $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$, определенного в (2.13), (2.14), соответствующим образом делятся на группы.

Будем предполагать (вместо (2.10)), что для некоторых ν, μ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |1 - z_l| &< \dots < |1 - z_{\nu-1}| < 1, \\ |z_j| &< 1, \quad j = \nu, \nu + \mu - 1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$1 < |1 - z_{\nu+\mu}| < \dots < |1 - z_N| < \infty \quad (3.21)$$

(здесь считаем, что $1 \leq \nu \leq N, 0 \leq \mu \leq N - \nu$). Таким образом, аргумент $\mathbf{z}$ функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ принадлежит окрестности точки

$$(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \infty, \dots, \infty).$$

Далее, считая выполненными условия (3.20)–(3.21), вычислим набор переменных (2.14), преобразуем функцию Лауричеллы с помощью тождества (2.11)–(2.13), а затем применим к правой части (2.11) теорему 3 для вывода формул аналитического продолжения.

Для того чтобы воспользоваться теоремой 3, введем обозначения, аналогичные обозначениям из п. 3.1.1. Прежде всего, определим вектор

$$\tilde{\mathbf{z}} := (z_1, \dots, z_{\nu-1}, z_N, z_\nu, \dots, z_{N-1})$$

и представим его в виде объединения $q + 1 \leq N$ наборов

$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots, \mathbf{z}^{(q+1)}),$$

где $\mathbf{z}^{(s)} = (z_1^{(s)}, \dots, z_{p_s}^{(s)})$, за исключением содержащего z_N , составлены из “достаточно близких” величин. Номер, который имеет набор $(z_N, z_v, \dots, z_{\mu-1})$, обозначаем через κ ; здесь, в частности, $z_1^{(\kappa)} = z_N$, $z_2^{(\kappa)} = z_v$ и т.д. Длины векторов $\mathbf{z}^{(s)}$, как и в п. 3.1.1, обозначаем через p_s . Набору $\mathbf{z}^{(q+1)}$ принадлежат такие переменные z_j , $j = \overline{\rho, N-1}$, которые “достаточно близки” к z_N , точнее говоря, выполняются условия

$$\mathbf{z}^{(q+1)} = (z_1^{(q+1)}, \dots, z_{p_{q+1}}^{(q+1)}): \quad |z_j^{(q+1)} - z_N| < |1 - z_N|, \quad j = \overline{1, p_{q+1}}. \quad (3.22)$$

Если таких переменных нет, т.е. $|z_{N-1} - z_N| > |1 - z_N|$, то считаем набор $\mathbf{z}^{(q+1)}$ пустым.

Для примера выпишем следующие наборы $\mathbf{z}^{(s)}$:

$$\mathbf{z}^{(1)} = (z_1, \dots, z_{p_1}), \quad \mathbf{z}^{(2)} = (z_{p_1+1}, \dots, z_{p_1+p_2}), \quad \mathbf{z}^{(q+1)} = (z_\rho, \dots, z_{N-1}),$$

а также набор с номером κ :

$$\mathbf{z}^{(\kappa)} = (z_N, z_v, \dots, z_{v+\mu-1});$$

если $\mu = 0$, то $\mathbf{z}^{(\kappa)}$ состоит из одного нулевого элемента. В соответствии с (3.20)–(3.21) имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |1 - z_j^{(s)}| < 1, \quad s = \overline{1, \kappa-1}, \quad j = \overline{1, p_s}, \quad |z_j^{(\kappa)}| < 1, \quad j = \overline{2, p_\kappa}, \\ 1 < |1 - z_j^{(s)}|, \quad s = \overline{\kappa+1, q+1}, \quad j = \overline{1, p_s}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $p_\kappa = \rho - \mu + 1$, причем

$$|1 - z_1^{(1)}| < \dots < |1 - z_1^{(\kappa-1)}| < 1 < |1 - z_1^{(\kappa+1)}| < \dots < |1 - z_1^{(q+1)}|.$$

Векторный аргумент $\mathbf{u}$ функции $F_D^{(N)}$ в правой части (2.11) представим в виде объединения наборов $\mathbf{u}^{(s)}$, $s = \overline{1, q+1}$:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(q+1)}), \quad \mathbf{u}^{(s)} := (u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, \dots, u_{p_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, q+1}, \quad (3.24)$$

элементы которых выражаются через элементы $\mathbf{z}^{(s)}$ по формулам

$$u_j^{(s)} := \frac{z_j^{(s)} - z_N}{1 - z_N}, \quad s = \overline{1, q+1} \setminus \{\kappa\}, \quad j = \overline{1, p_s}, \quad (3.25)$$

$$u_1^{(\kappa)} := \frac{z_N}{z_N - 1}, \quad u_j^{(\kappa)} := \frac{z_j^{(\kappa)} - z_N}{1 - z_N}, \quad j = \overline{2, p_\kappa}. \quad (3.26)$$

Соответствующие компоненты векторного параметра $\mathbf{a}$ функции Лауричеллы и компоненты мультииндекса $\mathbf{k}$ в формуле (1.5) обозначаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(q+1)}), \quad \mathbf{a}^{(s)} := (a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \dots, a_{p_s}^{(s)}), \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{k}^{(1)}, \dots, \mathbf{k}^{(q+1)}), \quad \mathbf{k}^{(s)} := (k_1^{(s)}, k_2^{(s)}, \dots, k_{p_s}^{(s)}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Согласно (3.26), (2.10) справедливо равенство

$$a_1^{(\kappa)} = c - \sum_{s=1}^N a_s. \quad (3.28)$$

Приведем еще соотношения, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$1 - u_1^{(j)} := \frac{1 - z_1^{(j)}}{1 - z_N}, \quad j = \overline{1, N} \setminus \kappa, \quad 1 - u_1^{(\kappa)} := \frac{1}{1 - z_N}, \quad (3.29)$$

а кроме того,

$$\begin{aligned} u_s^{(j)} - u_1^{(j)} &= \frac{z_1^{(j)} - z_s^{(j)}}{1 - z_N}, \quad j = \overline{1, N \setminus \kappa}, \quad s = \overline{2, p_j}, \\ u_s^{(\kappa)} - u_1^{(\kappa)} &= \frac{z_s^{(\kappa)}}{1 - z_N}, \quad s = \overline{2, p_\kappa}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Напомним обозначения (3.4)–(3.7).

Нетрудно увидеть, что если компоненты вектора $\mathbf{z}^{(s)}$ являются “достаточно близкими”, то согласно (3.25), (3.26) и компоненты вектора $\mathbf{u}^{(s)}$, т.е. переменные $u_j^{(s)}$ с одинаковым верхним индексом, также являются “достаточно близкими”. Кроме того, согласно (3.20)–(3.21), (3.29) векторы $\mathbf{u}^{(s)}$ с номерами $s = \overline{1, q}$ содержат компоненты, достаточно близкие к единице, причем

$$|1 - u_1^{(1)}| < \dots < |1 - u_1^{(q)}| < 1.$$

Согласно (3.22), (3.25) набор $\mathbf{u}^{(q+1)}$ состоит из переменных, которые по модулю меньше единицы, т.е.

$$\mathbf{u}^{(q+1)} \in \{|u_l^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_{q+1}}\}.$$

3.2.2. Формулы аналитического продолжения. Здесь построены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, справедливые вблизи множества

$$\bigcap_{s=1, s \neq \kappa}^{q+1} \mathcal{M}_s, \quad \mathcal{M}_s := \{z_1^{(s)} = \dots = z_{p_s}^{(s)}\}, \quad s = \overline{1, q}, \quad \mathcal{M}_{q+1} := \{z_1^{(q+1)} = \dots = z_{p_{q+1}}^{(q+1)} = z_N\};$$

при этом будем предполагать, что справедливы неравенства

$$0 < |1 - z_1^{(1)}| < \dots < |1 - z_1^{(\kappa-1)}| < 1 < |1 - z_1^{(\kappa+1)}| < \dots < |1 - z_1^{(q)}|.$$

Выполняя аналитическое продолжение функции Лауричеллы в правой части (2.11) с помощью формул, представленных в теореме 3 с заменой соответственно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{z}$ на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{u}$, определенных в (2.12), (2.13), а также с учетом равенств (3.29), (3.30), приходим к следующему утверждению, устанавливающему формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, справедливые вблизи пересечения $\bigcap_{s=1}^q \mathcal{M}_s$ гиперплоскостей (3.8) и соответствующие случаю, когда переменные удовлетворяют неравенствам (3.9), а остальные переменные $z_l^{(q+1)}$, $l = \overline{1, p_{q+1}}$, по модулю меньше единицы.

Теорема 4. *Предположим, что параметры функции Лауричеллы удовлетворяют соотношениям*

$$\left(c - \sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b \right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, \kappa - 1}, \quad \left(b - a_N - \sum_{s=j}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| \right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{\kappa + 1, q}.$$

Тогда аналитическое продолжение ряда (1.5) дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^q B_j \mathcal{V}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (3.31)$$

где функции $\mathcal{V}_j$, $j = \overline{0, q}$, определяются следующим образом:

если $j = 0$, то

$$\mathcal{V}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_N)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_0^{\mathbf{k}}, \quad (3.32)$$

если $j = \overline{1, \kappa - 1}$, то

$$\mathcal{V}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_1^{(j)})^{c - \sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b} \left(\prod_{l=j+1, l \neq \kappa}^q (1 - z_1^{(l)})^{-|\mathbf{a}_{1, p_l}^{(l)}|} \right) (1 - z_N)^{-a_N - |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|} \times \\ \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}, \quad j = \overline{1, \kappa - 1}, \quad (3.33)$$

если $j = \kappa$, то

$$\mathcal{V}_{\kappa}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \left(\prod_{l=\kappa+1}^q (1 - z_1^{(l)})^{-|\mathbf{a}_{1, p_l}^{(l)}|} \right) (1 - z_N)^{-a_N - |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}, \quad j = \kappa, \quad (3.34)$$

а если $j = \overline{\kappa + 1, q}$, то

$$\mathcal{V}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_1^{(j)})^{a_N + \sum_{s=j+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b} \left(\prod_{l=j+1}^q (1 - z_1^{(l)})^{-|\mathbf{a}_{1, p_l}^{(l)}|} \right) (1 - z_N)^{-a_N - |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|} \times \\ \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}, \quad j = \overline{\kappa + 1, q}. \quad (3.35)$$

В формулах (3.32)–(3.35) коэффициенты Λ_j , $j = \overline{0, q}$, определяются следующим образом:

Λ_0 имеет вид

$$\Lambda_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}}{\left(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|, |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| \right) \left(1 - a_N - |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| + b, \sum_{s=1}^q |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}| \right)} \times \\ \times \prod_{s=1}^q \left[\frac{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}|, |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}|, |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right] \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}, \quad (3.36)$$

коэффициенты Λ_j , $j = \overline{1, \kappa - 1}$, даются равенствами

$$\Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right)}{\left(1 + c - \sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^j |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right) (|\mathbf{a}_{1, p_j}^{(j)}|, |\mathbf{k}_{2, p_j}^{(j)}|)} \times \\ \times \left(\frac{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|, |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| + k_1^{(j)})}{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|, |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|) k_1^{(j)}!} \prod_{s=1, s \neq j}^q \frac{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}|, |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}|, |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \right) \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}, \quad (3.37)$$

коэффициент Λ_{κ} – равенством

$$\Lambda_{\kappa}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{\left(c - \sum_{s=1}^{\kappa-1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=\kappa}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{\kappa-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{\kappa-1} |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right)}{\left(1 + a_N + \sum_{s=\kappa+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=\kappa}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{\kappa-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{\kappa} |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right) (|\mathbf{a}_{1, p_{\kappa}}^{(\kappa)}|, |\mathbf{k}_{2, p_{\kappa}}^{(\kappa)}|)} \times \\ \times \left(\frac{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|, |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| + k_1^{(\kappa)})}{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|, |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|) k_1^{(\kappa)}!} \prod_{s=1, s \neq \kappa}^q \frac{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}|, |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}|, |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \right) \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}, \quad (3.38)$$

а коэффициенты Λ_j , $j = \overline{\kappa + 1, q}$, имеют вид

$$\Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{\left(a_N + \sum_{s=j}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right)}{\left(1 + a_N + \sum_{s=j+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^j |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right) (|\mathbf{a}_{1, p_j}^{(j)}|, |\mathbf{k}_{2, p_j}^{(j)}|)} \times \\ \times \left(\frac{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|, |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| + k_1^{(j)})}{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|, |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|) k_1^{(j)}!} \prod_{s=1, s \neq j}^q \frac{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}|, |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}|, |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \right) \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}. \quad (3.39)$$

В формулах (3.32)–(3.35) использовано обозначение

$$\mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}} := \prod_{s=1}^{q+1} \prod_{l=1}^{p_s} (Z_{j,l}^{(s)})^{k_l^{(s)}}, \quad (3.40)$$

где числа $Z_j^{(s,l)}$ – это элементы векторов $Z_j^{(s)} = \{Z_{j,1}^{(s)}, \dots, Z_{j,p_s}^{(s)}\}$, $j = \overline{0, q}$, $s = \overline{1, q+1}$, определяемых следующим способом:

если $j = 0$, то для $s = \overline{1, q+1}$ векторы $Z_0^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} Z_0^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(s)}}{1 - z_N}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{1 - z_N} \right), \quad s = \overline{1, q} \setminus \{\kappa\}, \\ Z_0^{(\kappa)} &= \left(\frac{1}{1 - z_N}, \frac{-z_2^{(\kappa)}}{1 - z_N}, \dots, \frac{-z_{p_\kappa}^{(\kappa)}}{1 - z_N} \right), \quad s = \kappa, \\ Z_0^{(q+1)} &= \left(\frac{z_1^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{p_{q+1}}^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N} \right), \quad s = q+1. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Если $j = \overline{1, q}$, то для $s = \overline{1, q+1}$ векторы $Z_j^{(s)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} Z_j^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \quad s = \overline{1, j-1} \setminus \{\kappa\}, \\ Z_j^{(j)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(j)}}{1 - z_N}, \frac{z_1^{(j)} - z_2^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(j)} - z_{p_j}^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \quad s = j, \quad s \neq \kappa, \\ Z_j^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(j)}}{1 - z_1^{(s)}}, \frac{z_2^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{j+1, q} \setminus \{\kappa\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$Z_j^{(\kappa)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{1 - z_1^{(j)}}, \frac{z_2^{(\kappa)}}{z_1^{(j)} - 1}, \dots, \frac{z_{p_\kappa}^{(\kappa)}}{z_1^{(j)} - 1} \right), & \kappa < j, \\ (1 - z_1^{(j)}, z_2^{(\kappa)}, \dots, z_{p_\kappa}^{(\kappa)}), & \kappa > j, \end{cases} \quad (3.43)$$

$$Z_j^{(q+1)} = \left(\frac{z_1^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{p_{q+1}}^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N} \right), \quad s = q+1; \quad (3.44)$$

если $j = \kappa$, то векторы $Z_j^{(s)}$ для $s = \overline{1, q+1}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} Z_\kappa^{(s)} &= (1 - z_1^{(s)}, z_1^{(s)} - z_2^{(s)}, \dots, z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, \kappa-1}, \\ Z_\kappa^{(\kappa)} &= \left(\frac{1}{1 - z_N}, -z_2^{(\kappa)}, \dots, -z_{p_\kappa}^{(\kappa)} \right), \quad s = \kappa, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} Z_\kappa^{(s)} &= \left(\frac{1}{1 - z_1^{(s)}}, \frac{z_2^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{\kappa+1, q}, \\ Z_\kappa^{(q+1)} &= \left(\frac{z_1^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{p_{q+1}}^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N} \right), \quad s = q+1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Коэффициенты B_j , $j = \overline{0, q}$, в формуле (3.31) имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_N + |\mathbf{a}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| - b)}{\Gamma(a_N + |\mathbf{a}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}|)\Gamma(c - b)},$$

$$\begin{aligned}
 B_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)\Gamma\left(\sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| + b - c\right)}{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,p_j}^{(j)}|)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \overline{1, \kappa-1}, \\
 B_\kappa &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{\kappa-1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)\Gamma\left(b - a_N - \sum_{s=\kappa+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}|\right)}{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,p_\kappa}^{(\kappa)}|)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \kappa, \\
 B_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\sum_{s=j}^{q+1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| + a_N - b\right)\Gamma\left(b - a_N - \sum_{s=j+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}|\right)}{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,p_j}^{(j)}|)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \overline{\kappa+1, q}.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Функции (3.32)–(3.35) образуют базис в пространстве решений системы (1.10).

Справедливо замечание, аналогичное сформулированному после теоремы 2, т.е. суммы и произведения, соответствующие какому-либо набору $\mathbf{z}^{(s)}$, не содержащему ни одного элемента, полагаются равными соответственно нулю и единице.

Представления функции Лауричеллы в виде экспоненциально сходящихся рядов, которые устанавливают теоремы 1–4, позволяют исследовать аналитически и эффективно вычислять интегралы типа Эйлера (1.10) во всем пространстве $\mathbb{C}^N$, в том числе в сложных случаях кроудинга переменных, т.е. вблизи произвольных пересечений гиперплоскостей (3.8). Область сходимости представления (3.31) вытекает из теоремы 3. Мы не приводим вид этой области при произвольном N , а укажем его на конкретных примерах. Примеры применения теорем 2 и 4 для случаев трех и шести переменных приведены в следующих разд. 4, 5.

4. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМ 2, 4 ДЛЯ ВЫВОДА ФОРМУЛ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ $F_D^{(3)}$

4.1. Используемые обозначения

В данном разделе продемонстрировано применение теоремы 2 к функции $F_D^{(3)}$, определяемой в поликруге $\mathbb{U}^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_j| < 1, j = 1, 2, 3\}$ с помощью гипергеометрического ряда

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(c)_{k_1+k_2+k_3} k_1! k_2! k_3!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} \tag{4.1}$$

и представимой в области $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 2, 3\}$ в виде интеграла типа Эйлера (см. [2]):

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz_1)^{-a_1} (1-tz_2)^{-a_2} (1-tz_3)^{-a_3} dt. \tag{4.2}$$

Выпишем еще необходимые ряды $G^{(3,2)}$ и $G^{(3,3)}$, вид которых вытекает из (2.1):

$$G^{(3,2)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_2+k_3-k_1} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(c)_{k_2+k_3-k_1} k_1! k_2! k_3!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3}, \tag{4.3}$$

$$G^{(3,3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_3-k_1-k_2} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(c)_{k_3-k_1-k_2} k_1! k_2! k_3!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3}, \tag{4.4}$$

ряды (4.3), (4.4) сходятся в поликруге $\mathbb{U}^3$.

4.2. Формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞)

Далее, полагая $v = 1$, $N = 3$ в теореме 0, получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность пересечения гиперплоскостей $\mathcal{M}_j^{(\infty)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_j = 1\}$, $j = 1, 2, 3$.

Теорема 5. Если параметры функции (4.1) таковы, числа $a_3 - b$, $a_2 + a_3 - b$, $a_1 + a_2 + a_3 - b$ не являются целыми, то в области

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : 1 < |1 - z_1| < |1 - z_2| < |1 - z_3|; |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 2, 3\} \quad (4.5)$$

функция Лауричеллы $F_D^{(3)}$ представима в следующем виде:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{j=0}^3 A_j \mathcal{U}_j^{(1, \infty)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3), \quad (4.6)$$

$$\mathcal{U}_0^{(1, \infty)} := (1 - z_3)^{-b} F_D^{(3)}\left(a_1, a_2, c - a_1 - a_2 - a_3; b, 1 + a_3 - b; \frac{1 - z_1}{1 - z_3}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1, \infty)} &:= (1 - z_1)^{-a_1} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times F_D^{(3)}\left(a_1, a_2, a_3; c - b, 1 + a_1 + a_2 + a_3 - b; \frac{1}{1 - z_1}, \frac{1}{1 - z_2}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(1, \infty)} &:= (1 - z_1)^{a_2 + a_3 - b} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times G^{(3, 2)}\left(c - a_1 - a_2 - a_3, a_2, a_3; a_1 + a_2 + a_3 - b, 1 + a_2 + a_3 - b; \frac{1}{1 - z_1}, \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_3^{(1, \infty)} &:= (1 - z_2)^{a_3 - b} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times G^{(3, 3)}\left(a_1, c - a_1 - a_2 - a_3, a_3; a_2 + a_3 - b, 1 - b + a_3; \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где в правых частях равенств (4.7)–(4.10) под $F_D^{(3)}$, $G^{(3, 2)}$, $G^{(3, 3)}$ понимаются ряды (4.1), (4.3), (4.4).

Коэффициенты A_j , $j = \overline{0, 3}$, фигурирующие в (4.6), определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3 - b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c - b)}, & A_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b - a_1 - a_2 - a_3)}{\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b)}, \\ A_2 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 - b)\Gamma(b - a_2 - a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, & A_3 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2 + a_3 - b)\Gamma(b - a_3)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}. \end{aligned}$$

Функции (4.7)–(4.10) образуют базис в пространстве решений системы $E_D^{(3)}$ в области (4.5).

Построим формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3)$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞) , соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_1 - z_3|$ и $|z_2 - z_3|$ малы по сравнению с модулем $|1 - z_3|$.

Используемые в теореме 4 числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) определяются равенствами

$$\begin{aligned} q &= 1, & \kappa &= 1, & p_1 &= 1, & p_2 &= 2, & z_1^{(1)} &= z_3, & z_1^{(2)} &= z_1, & z_2^{(2)} &= z_2, \\ a_1^{(1)} &= c - a_1 - a_2 - a_3, & a_1^{(2)} &= a_2, & a_2^{(2)} &= a_3, & k_1^{(1)} &= k_3, & k_1^{(2)} &= k_1, & k_2^{(2)} &= k_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Применяя теорему 4, построим теперь формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞) , адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости

$$\mathcal{M}_{1,2,3} := \{z_1 = z_2 = z_3\}. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.11) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . По формулам (3.41)–(3.47) получаем

$$Z_0^{(1)} = Z_1^{(1)} = \left(\frac{z_1 - z_3}{1 - z_3} \right), \quad Z_0^{(2)} = Z_1^{(2)} = \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3}, \frac{1}{1 - z_3} \right),$$

т.е. векторы $Z_0^{(1)} = Z_1^{(1)}$ состоят из одного элемента. Отсюда согласно (3.40) получаем

$$Z_0^k = Z_1^k = \left(\frac{z_1 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3}. \quad (4.13)$$

Подставляя найденные коэффициенты Λ_j , величины B_j , а также выражения (4.13) в (3.31)–(3.35), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (4.12), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1, z_2, z_3 , для случая, когда они велики по модулю.

Теорема 6. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ таковы, что $b - a_1 - a_2 - a_3 \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1 - z_3| > 1 + |z_j - z_3|, j = 1, 2; |\arg(1 - z_3)| < \pi\} \quad (4.14)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = & B_0(1 - z_3)^{-b} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (c - a_1 - a_2 - a_3)_{k_3}}{(a_1 + a_2 + a_3)_{k_1+k_2} (1 - a_1 - a_2 - a_3 + b)_{k_3} k_1! k_2! k_3!} \times \\ & \times \left(\frac{z_1 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3} + B_1(1 - z_3)^{-a_1 - a_2 - a_3} \times \\ & \times \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(c - b)_{k_3} (a_1 + a_2 + a_3)_{k_1+k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2}}{(1 + a_1 + a_2 + a_3 - b)_{k_3} (a_1 + a_2 + a_3)_{k_1+k_2} k_1! k_2! k_3!} \left(\frac{z_1 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3}, \end{aligned}$$

где величины B_0 и B_1 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 - b)}{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3)\Gamma(c - b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b - a_1 - a_2 - a_3)}{\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b)}.$$

Построим с помощью теоремы 4 формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3)$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞) , соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_1 - z_2|$ малы по сравнению с модулем $|1 - z_1|$ и модулем $|1 - z_3|$, а $|1 - z_1|/|1 - z_3|$ мала по сравнению с единицей. В теореме 4 числа q, κ, p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) для указанного случая определяются равенствами

$$\begin{aligned} q = 2, \quad \kappa = 1, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad z_1^{(1)} = z_3, \quad z_1^{(2)} = z_1, \quad z_2^{(2)} = z_2, \\ a_1^{(1)} = c - a_1 - a_2 - a_3, \quad a_1^{(2)} = a_1, \quad a_2^{(2)} = a_2, \quad k_1^{(1)} = k_3, \quad k_1^{(2)} = k_1, \quad k_2^{(2)} = k_2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Применяя теорему 4, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞) , адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости

$$\mathcal{M}_{1,2} := \{z_1 = z_2\}. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.15) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . По формулам (3.41)–(3.45) получаем

$$\begin{aligned} Z_0^{(1)} = \left(\frac{1}{1 - z_3} \right), \quad Z_0^{(2)} = \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3}, \frac{z_1 - z_2}{1 - z_3} \right), \\ Z_1^{(1)} = \left(\frac{1}{1 - z_3} \right), \quad Z_1^{(2)} = \left(\frac{1}{1 - z_1}, \frac{z_2 - z_1}{1 - z_1} \right), \end{aligned}$$

$$Z_2^{(1)} = \left(\frac{1}{1-z_1} \right), \quad Z_2^{(2)} = \left(\frac{1-z_1}{1-z_3}, \frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right);$$

здесь векторы $Z_0^{(1)}$, $Z_1^{(1)}$, $Z_2^{(1)}$ состоят из одного элемента. Отсюда согласно (3.40) после перестановки индексов суммирования k_1 и k_3 получаем

$$\begin{aligned} Z_0^{\mathbf{k}} &= \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3}, \\ Z_1^{\mathbf{k}} &= \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2-z_1}{1-z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3}, \\ Z_2^{\mathbf{k}} &= \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_3}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Подставляя найденные коэффициенты Λ_j , величины B_j , а также выражения (4.17) в (3.31)–(3.35), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (4.16), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1, z_2 , для случая, когда все переменные z_1, z_2 и z_3 велики по модулю.

Теорема 7. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ таковы, что $b-a_3 \notin \mathbb{Z}$ и $b-a_1-a_2-a_3 \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1-z_1| > 1 + |z_1-z_2|, |1-z_3| > |1-z_1| + |z_1-z_2|; |\arg(1-z_j)| < \pi, j=1,3\} \quad (4.18)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) &= B_0(1-z_3)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (c-a_1-a_2-a_3)_{k_3}}{(1-a_3+b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3} + B_1(1-z_1)^{-a_1-a_2} (1-z_3)^{-a_3} \times \\ &\quad \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c-b)_{k_1+k_3} (a_1+a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+a_3-b)_{k_1+k_3} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2-z_1}{1-z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3} + B_2(1-z_1)^{a_3-b} (1-z_3)^{-a_3} \times \\ &\quad \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a_3-b)_{k_3-k_1} (c-a_1-a_2-a_3)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+a_3-b)_{k_3-k_1-k_2} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_3}, \end{aligned}$$

где величины B_0 , B_1 и B_2 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3-b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c-b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a_3)}{\Gamma(c-a_1-a_2-a_3)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1+a_2+a_3-b)\Gamma(b-a_3)}{\Gamma(a_1+a_2)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}.$$

Используя формулы симметрии (2.8), на основе теорем 5–7 несложно получить полный набор формул для представления функции $F_D^{(3)}$ в окрестности точки (∞, ∞, ∞) .

4.3. Формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, \infty, \infty)$

Далее, полагая $v=2$, $N=3$ в теореме 2, получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность пересечения гиперплоскостей $\mathcal{M}_1^{(1)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_1 = 1\}$, $\mathcal{M}_j^{(\infty)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_j = \infty\}$, $j=2,3$.

Теорема 8. Если параметры функции (4.1) таковы, что числа a_3-b , a_2+a_3-b , $a_1+a_2+a_3-b$ не являются целыми, то в области

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1-z_1| < 1 < |1-z_2| < |1-z_3|; |\arg(1-z_j)| < \pi, j=1,2,3\} \quad (4.19)$$

функция Лауричеллы $F_D^{(3)}$ представима в следующем виде:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{j=0}^3 A_j \mathcal{U}_j(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3), \quad (4.20)$$

где функции $\mathcal{U}_j$, $j = \overline{0, 3}$, определяются по формулам

$$\mathcal{U}_0 := (1 - z_3)^{-b} F_D^{(3)}\left(a_1, a_2, c - a_1 - a_2 - a_3; b, 1 + a_3 - b; \frac{1 - z_1}{1 - z_3}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &:= (1 - z_1)^{c - a_1 - b} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times F_D^{(3)}\left(c - a_1 - a_2 - a_3, a_2, a_3; c - b, 1 + c - a_1 - b; 1 - z_1, \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2 &:= (1 - z_1)^{-a_1} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times G^{(3,2)}\left(a_1, a_2, a_3; c - a_1 - b, 1 + a_2 + a_3 - b; 1 - z_1, \frac{1}{1 - z_2}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_3 &:= (1 - z_2)^{a_3 - b} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times G^{(3,3)}\left(a_1, c - a_1 - a_2 - a_3, a_3; a_2 + a_3 - b, 1 - b + a_3; \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}\right); \end{aligned} \quad (4.24)$$

в правых частях равенств (4.21)–(4.24) под $F_D^{(3)}$, $G^{(3,2)}$, $G^{(3,3)}$ понимаются ряды (4.1), (4.3), (4.4). Коэффициенты A_j , $j = \overline{0, 3}$, фигурирующие в (4.20), определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3 - b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c - b)}, & A_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + b - c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}, \\ A_2 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a_1 - b)\Gamma(b - a_2 - a_3)}{\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, & A_3 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2 + a_3 - b)\Gamma(b - a_3)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}. \end{aligned}$$

Функции (4.21)–(4.24) образуют базис в пространстве решений системы $E_D^{(3)}$ в области (4.19).

Построим с помощью теоремы 4 формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3)$ в окрестность точки $(1, \infty, \infty)$, соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_2 - z_3|$ малы по сравнению с модулем $|1 - z_3|$, а переменное z_1 – в окрестности единицы. В теореме 4 соответствующие такому случаю числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) определяются равенствами

$$\begin{aligned} q &= 2, & \kappa &= 2, & p_1 &= 1, & p_2 &= 1, & p_3 &= 1, & z_1^{(1)} &= z_1, & z_1^{(2)} &= z_3, & z_1^{(3)} &= z_2, \\ a_1^{(1)} &= a_1, & a_1^{(2)} &= c - a_1 - a_2 - a_3, & a_1^{(3)} &= a_2, & k_1^{(1)} &= k_1, & k_1^{(2)} &= k_3, & k_1^{(3)} &= k_2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Применяя теорему 4, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, \infty, \infty)$, адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости

$$\mathcal{M}_{2,3} := \{z_2 = z_3\}. \quad (4.26)$$

Подставляя (4.25) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . Согласно (3.40)–(3.45) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_0^{\mathbf{k}} &= \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3}\right)^{k_3}, & \mathbf{Z}_1^{\mathbf{k}} &= (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3}\right)^{k_2} \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right)^{k_3}, \\ \mathbf{Z}_2^{\mathbf{k}} &= (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3}\right)^{k_3}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Подставляя найденные выражения для Λ_j , B_j , а также (4.27) в (3.31), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (4.26), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_2, z_3 , для случая, когда они велики по модулю, а z_1 близко к единице.

Теорема 9. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ таковы, что $(b - a_2 - a_3) \notin \mathbb{Z}$ и $(c - a_1 - b) \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1 - z_1| < 1, |1 - z_3| > 1 + |z_2 - z_3|; |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 3\} \quad (4.28)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = & B_0(1 - z_3)^{-b} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (c - a_1 - a_2 - a_3)_{k_3}}{(a_2 + a_3)_{k_2} (1 - a_2 - a_3 + b)_{k_1+k_3} k_1! k_2! k_3!} \times \\ & \times \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3} + B_1(1 - z_1)^{c-a_1-b} (1 - z_3)^{-a_2-a_3} \times \\ & \times \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(c - b)_{k_1+k_3} (c - a_1 - a_2 - a_3)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_2 + a_3)_{k_2+k_3}}{(1 + c - a_1 - b)_{k_1+k_3} (a_2 + a_3)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3} \right)^{k_3} + \\ & + B_2(1 - z_3)^{-a_2-a_3} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(c - a_1 - b)_{k_3-k_1} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_2 + a_3)_{k_2+k_3}}{(1 + a_2 + a_3 - b)_{k_3-k_1} (a_2 + a_3)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3}, \end{aligned}$$

где величины B_0 , B_1 и B_2 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2 + a_3 - b)}{\Gamma(a_2 + a_3)\Gamma(c - b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + b - c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a_1 - b)\Gamma(b - a_2 - a_3)}{\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}.$$

Используя формулы симметрии (2.8), на основе теорем 8, 9 несложно получить весь набор формул для представления функции $F_D^{(3)}$ в окрестности точки $(1, \infty, \infty)$.

4.4. Формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, 1, \infty)$

Далее, полагая $v = 3$, $N = 3$ в теореме 2, получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность пересечения гиперплоскостей $\mathcal{M}_j^{(1)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_j = 1\}$, $j = 1, 2$, $\mathcal{M}_3^{(\infty)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_3 = \infty\}$.

Теорема 10. Если параметры функции (4.1) таковы, что числа $a_3 - b$, $a_1 + b - c$, $a_1 + a_2 + b - c$ не являются целыми, то в области

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1 - z_1| < |1 - z_2| < 1 < |1 - z_3|; |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 2, 3\} \quad (4.29)$$

функция Лауричеллы $F_D^{(3)}$ представима в следующем виде:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{j=0}^3 A_j \mathcal{U}_j^{(1, \infty)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3), \quad (4.30)$$

где функции $\mathcal{U}_j$, $j = \overline{0, 3}$, определяются по формулам

$$\mathcal{U}_0^{(1, \infty)} := (1 - z_3)^{-b} F_D^{(3)}\left(a_1, a_2, c - a_1 - a_2 - a_3; b, 1 + a_3 - b; \frac{1 - z_1}{1 - z_3}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1, \infty)} := & (1 - z_1)^{c-a_1-b} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ & \times F_D^{(3)}\left(c - a_1 - a_2 - a_3, a_2, a_3; c - b, 1 + c - a_1 - b; 1 - z_1, \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\mathcal{U}_2^{(1,\infty)} := (1-z_2)^{c-a_1-a_2-b} (1-z_3)^{-a_3} \times \\ \times G^{(3,2)} \left(a_1, c-a_1-a_2-a_3, a_3; c-a_1-b, 1+c-a_1-a_2-b; \frac{1-z_1}{1-z_2}, 1-z_2, \frac{1-z_2}{1-z_3} \right), \quad (4.33)$$

$$\mathcal{U}_3^{(1,\infty)} := (1-z_3)^{-a_3} G^{(3,3)} \left(a_1, a_2, a_3; c-a_1-a_2-b, 1+a_3-b; 1-z_1, 1-z_2, \frac{1}{1-z_3} \right); \quad (4.34)$$

в правых частях равенств (4.31)–(4.34) под $F_D^{(3)}$, $G^{(3,2)}$, $G^{(3,3)}$ понимаются ряды (4.1), (4.3), (4.4). Коэффициенты A_j , $j = \overline{0,3}$, фигурирующие в (4.30), определяются следующими равенствами:

$$A_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3-b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c-b)}, \quad A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1+b-c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}, \\ A_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a_1-b)\Gamma(a_1+a_2+b-c)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad A_3 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a_1-a_2-b)\Gamma(b-a_3)}{\Gamma(c-a_1-a_2-a_3)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}.$$

Функции (4.31)–(4.34) образуют базис в пространстве решений системы $E_D^{(3)}$ в области (4.29).

Построим с помощью теоремы 4 формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3)$ в окрестность точки $(1, 1, \infty)$, соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_1 - z_2|$ – достаточно малая величина, а переменное z_3 принимает большие по модулю значения. В теореме 4 соответствующие такому случаю числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) определяются равенствами. В теореме 4 соответствующие такому случаю числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) определяются равенствами

$$q = 2, \quad \kappa = 2, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad z_1^{(1)} = z_1, \quad z_2^{(1)} = z_2, \quad z_1^{(2)} = z_3, \\ a_1^{(1)} = a_1, \quad a_2^{(1)} = a_2, \quad a_1^{(2)} = c-a_1-a_2-a_3, \quad k_1^{(1)} = k_1, \quad k_2^{(1)} = k_2, \quad k_1^{(2)} = k_3. \quad (4.35)$$

Применяя теорему 4, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, 1, \infty)$, адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости

$$\mathcal{M}_{1,2} := \{z_1 = z_2\}. \quad (4.36)$$

Подставляя (4.35) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . Записывая (3.40)–(3.45) с учетом (4.35), находим

$$\mathbf{Z}_0^{\mathbf{k}} = \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3}, \quad \mathbf{Z}_1^{\mathbf{k}} = (1-z_1)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_3}, \\ \mathbf{Z}_2^{\mathbf{k}} = (1-z_1)^{k_1} (z_1-z_2)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3}. \quad (4.37)$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов Λ_j , чисел B_j и произведений (4.37) в (3.31)–(3.35), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (4.36), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1, z_2 , для случая, когда они близки к единице, а z_3 принимает большие по модулю значения.

Теорема 11. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ таковы, что $(b-a_3) \notin \mathbb{Z}$ и $(c-a_1-a_2-b) \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1-z_1| + |z_1-z_2| < 1, |1-z_3| > 1; |\arg(1-z_j)| < \pi, j = 1, 3\} \quad (4.38)$$

дается формулой

$$\begin{aligned}
 F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = & B_0(1-z_3)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (c-a_1-a_2-a_3)_{k_3}}{(1-a_3+b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} \times \\
 & \times \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3} + B_1(1-z_1)^{c-a_1-b} (1-z_3)^{-a_3} \times \\
 & \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c-b)_{k_1+k_3} (c-a_1-a_2-a_3)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+c-a_1-a_2-b)_{k_1-k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} (1-z_1)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_3} + B_2(1-z_3)^{-a_3} \times \\
 & \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c-a_1-a_2-b)_{k_3-k_1-k_2} (a_1+a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+a_3-b)_{k_3-k_1-k_2} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} (1-z_1)^{k_1} (z_1-z_2)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3},
 \end{aligned}$$

где $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$, а величины B_0 , B_1 и B_2 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3-b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c-b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1+a_2+b-c)}{\Gamma(a_1+a_2)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a_1-a_2-b)\Gamma(b-a_3)}{\Gamma(c-a_1-a_2-a_3)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}.$$

Используя формулы симметрии (2.8), на основе теорем 10, 11 несложно получить весь набор формул для представления функции $F_D^{(3)}$ в окрестности точки $(1, 1, \infty)$.

5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 4 ДЛЯ СЛУЧАЯ $N = 6$ ПЕРЕМЕННЫХ

Построим формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(6)}(a_1, \dots, a_6; b, c; z_1, \dots, z_6)$ в окрестность точки $(1, 1, \infty, \dots, \infty)$, соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_1 - z_2|$, $|z_3 - z_4|$ и $|z_5 - z_6|$ малы по сравнению с 1, $|1 - z_3|$ и $|1 - z_6|$ соответственно. В теореме 4 числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2), соответствующие указанному случаю, определяются равенствами

$$\begin{aligned}
 q &= 3, \quad \kappa = 2, \quad p_1 = p_3 = 2, \quad p_2 = p_4 = 1, \\
 z_1^{(1)} &= z_1, \quad z_2^{(1)} = z_2, \quad z_1^{(2)} = z_6, \quad z_1^{(3)} = z_3, \quad z_2^{(3)} = z_4, \quad z_1^{(4)} = z_5, \\
 a_1^{(1)} &= a_1, \quad a_2^{(1)} = a_2, \quad a_1^{(2)} = c - \sum_{j=1}^6 a_j, \quad a_1^{(3)} = a_3, \quad a_2^{(3)} = a_4, \quad a_1^{(4)} = a_5, \\
 k_1^{(1)} &= k_1, \quad k_2^{(1)} = k_2, \quad k_1^{(2)} = k_6, \quad k_1^{(3)} = k_3, \quad k_2^{(3)} = k_4, \quad k_1^{(4)} = k_5.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Далее используем обозначения $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_6)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_6)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_6)$, $|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^6 k_j$.

Применяя теорему 4, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, 1, \infty, \dots, \infty)$, адекватно представляющую эту функцию вблизи пересечения гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_{1,2} := \{z_1 = z_2\}, \quad \mathcal{M}_{3,4} := \{z_3 = z_4\}, \quad \mathcal{M}_{5,6} := \{z_5 = z_6\}. \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . Далее находим произведения $\mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}$, определенные согласно (3.40), из (3.40)–(3.45) с учетом (4.35). Подставляя найденные коэффициенты Λ_j , величины B_j , а также выражения $\mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}$ в (3.31)–(3.35), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность пересечения гиперплоскостей (5.2), т.е. в ситуации кроудинга пар переменных (z_1, z_2) , (z_3, z_4) и (z_5, z_6) , для случая, когда z_1, z_2 близки к единице, а $z_3, \dots, z_6$ велики по модулю.

Теорема 12. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(6)}$ таковы, что $(c - a_1 - a_2 - b) \notin \mathbb{Z}$ и $(a_5 + a_6 - b) \notin \mathbb{Z}$, $(a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - b) \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1 - z_1| + |z_1 - z_2| < 1, |1 - z_3| > 1 + |z_3 - z_4|, \\ |1 - z_6| > 1 + |z_5 - z_6|, |1 - z_6| > |1 - z_3| + |z_3 - z_4|; |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 3, 6\} \quad (5.3)$$

дается формулой

$$F_D^{(6)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^3 B_j \mathcal{U}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (5.4)$$

где функции $\mathcal{U}_j$, $j = \overline{0, 3}$, имеют вид

$$\mathcal{U}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_6)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}}{(a_5 + a_6)_{k_5} (1 - a_5 - a_6 + b)_{|\mathbf{k}| - k_5}} \times \\ \times \frac{(a_1 + a_2)_{k_1 + k_2} (a_2)_{k_2} (a_3 + a_4)_{k_3 + k_4} (a)_{k_4} (a_5)_{k_5} \left(c - \sum_{j=1}^6 a_j\right)_{k_6}}{(a_1 + a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3! (a_3 + a_4)_{k_4} k_4! k_5! k_6!} \times \\ \times \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_6}\right)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_6}\right)^{k_2} \left(\frac{1 - z_3}{1 - z_6}\right)^{k_3} \left(\frac{z_3 - z_4}{1 - z_6}\right)^{k_4} \left(\frac{z_5 - z_6}{1 - z_6}\right)^{k_5} \left(\frac{1}{1 - z_6}\right)^{k_6}, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{U}_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_1)^{c - a_1 - b} (1 - z_3)^{-a_3 - a_4} (1 - z_6)^{-a_5 - a_6} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c - b)_{k_1 + k_3 + k_6}}{(1 + c - a_1 - a_2 - b)_{k_1 + k_3 + k_6 - k_2} (a_1 + a_2)_{k_2}} \times \\ \times \frac{(c - |\mathbf{a}|)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3 + a_4)_{k_3 + k_4} (a_4)_{k_4} (a_5)_{k_5} (a_5 + a_6)_{k_5 + k_6}}{k_1! k_2! k_3! (a_3 + a_4)_{k_4} k_4! k_5! (a_5 + a_6)_{k_5} k_6!} \times \\ \times (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1}\right)^{k_2} \left(\frac{1 - z_3}{1 - z_6}\right)^{k_3} \left(\frac{z_3 - z_4}{1 - z_3}\right)^{k_4} \left(\frac{z_5 - z_6}{1 - z_6}\right)^{k_5} \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_6}\right)^{k_6}, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{U}_2(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_3)^{-a_3 - a_4} (1 - z_6)^{-a_5 - a_6} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c - a_1 - a_2 - b)_{k_6 + k_3 - k_1 - k_2}}{(1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - b)_{k_3 + k_6 - k_1 - k_2}} \times \\ \times \frac{(a_1 + a_2)_{k_1 + k_2} (a_2)_{k_2} (a_3 + a_4)_{k_3 + k_4} (a_4)_{k_4} (a_5)_{k_5} (a_5 + a_6)_{k_5 + k_6}}{k_1! (a_1 + a_2)_{k_2} k_2! k_3! (a_3 + a_4)_{k_4} k_4! (a_5 + a_6)_{k_5} k_5! k_6!} \times \\ \times (1 - z_1)^{k_1} (z_1 - z_2)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3}\right)^{k_3} \left(\frac{z_4 - z_3}{1 - z_3}\right)^{k_4} \left(\frac{z_5 - z_6}{1 - z_6}\right)^{k_5} \left(\frac{1}{1 - z_6}\right)^{k_6}, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{U}_3(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_3)^{a_5 + a_6 - b} (1 - z_6)^{-a_5 - a_6} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{j=3}^6 a_j - b\right)_{k_6 - k_1 - k_2 - k_3}}{(1 + a_5 + a_6 - b)_{k_6 - k_1 - k_2 - k_3 - k_4} (a_3 + a_4)_{k_4}} \times \\ \times \frac{(a_1 + a_2)_{k_1 + k_2} (a_2)_{k_2} \left(c - \sum_{j=1}^6 a_j\right)_{k_3} (a_4)_{k_4} (a_5)_{k_5} (a_5 + a_6)_{k_5 + k_6}}{k_1! (a_1 + a_2)_{k_2} k_2! k_3! k_4! k_5! (a_5 + a_6)_{k_5} k_6!} \times \\ \times \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_3}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3}\right)^{k_3} \left(\frac{z_3 - z_4}{1 - z_3}\right)^{k_4} \left(\frac{z_5 - z_6}{1 - z_6}\right)^{k_5} \left(\frac{1 - z_3}{1 - z_6}\right)^{k_6}, \quad (5.8)$$

где $|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^6 k_j$. Коэффициенты имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a_5 + a_6 - b)}{\Gamma(a_5 + a_6) \Gamma(c - b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a_1 + a_2 + b - c)}{\Gamma(a_1 + a_2) \Gamma(b)}, \\ B_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a_1 - a_2 - b) \Gamma\left(b - \sum_{j=3}^6 a_j\right)}{\Gamma\left(c - \sum_{j=1}^6 a_j\right) \Gamma(b) \Gamma(c - b)}, \quad B_3 = \frac{\Gamma(c) \Gamma\left(\sum_{j=3}^6 a_j - b\right) \Gamma(b - a_5 - a_6)}{\Gamma(a_3 + a_4) \Gamma(b) \Gamma(c - b)}.$$

Функции (5.5)–(5.8) являются решением системы уравнений с частными производными Лауричеллы $E_D^{(6)}$.

Представления функции $F_D^{(N)}$ для частных значений N демонстрируют, что теоремы 2, 4 дают эффективный алгоритм для построения формул аналитического продолжения функции Лауричеллы (1.5). Полученные формулы аналитического продолжения составляют основу эффективного численного алгоритма для вычисления интегралов типа Эйлера (1.3) вне области сходимости степенного ряда (1.1), которым она исходно определена. Таким образом, результаты настоящей работы могут быть востребованы при решении прикладных проблем, где возникают ряды вида (1.1) и (1.3). Одним из перспективных приложений формул аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ является проблема кроудинга параметров интеграла Кристоффеля–Шварца, возникающая при построении конформного отображения многоугольников, которая рассматривается в следующем разд. 6.

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРАЛА КРИСТОФФЕЛЯ–ШВАРЦА В СИТУАЦИИ КРОУДИНГА

6.1. Численное решение системы уравнений для параметров и вычисление отображающей функции $\mu(\zeta)$

Для решения указанной в п. 1.4 системы нелинейных трансцендентных уравнений (1.16), (1.17), которой удовлетворяют параметры интеграла Кристоффеля–Шварца (1.15), мы применяем численные методы типа итерационной процедуры Ньютона (см., например, [16, 17, 31]). Основные трудности, возникающие при реализации этих численных алгоритмов, связаны, во-первых, с высокоточным вычислением возникающих в ней интегралов и, во-вторых, с выбором хорошего начального приближения для неизвестных параметров.

В п. 1.4 приведен вид системы уравнений (1.16), (1.20)–(1.28), где гипергеометрические интегралы типа Эйлера (1.17) записаны через функцию Лауричеллы $F_D^{(N)}$. Таким образом, задача о вычислении интегралов, фигурирующих в системе трансцендентных уравнений для параметров, сведена к вопросу об эффективном вычислении функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$.

Если векторные аргументы $\mathbf{x}_0$ и $\mathcal{U}(\mathbf{1} - \mathbf{x}_k)$ функций Лауричеллы $F_D^{(N)}$, фигурирующих в (1.22)–(1.24), принадлежат поликругу $\mathbb{U}_\rho^N := \{(w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{C}^N : |w_j| < \rho, j = \overline{1, N}\}$ с достаточно малым $\rho > 0$, то для их вычислений можно использовать N -кратный ряд (1.5). Вместе с тем, при реализации метода Ньютона аргументы одной или нескольких из функций (1.22)–(1.24) не удовлетворяют такому условию. В этом несложно убедиться, непосредственно анализируя эти формулы с учетом того, что величины ζ_j располагаются на единичном отрезке неравномерно, а в случае выраженного кроудинга образуют группы весьма близких величин. Типичной является ситуация, когда часть переменных $z_1, \dots, z_v$ функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ принимают очень большие по модулю (отрицательные) значения, а остальные переменные $z_{v+1}, \dots, z_N$ чрезвычайно близки к единице (но $z_j < 1, j = \overline{v+1, N}$).

В ряде случаев, когда непосредственное суммирование ряда (1.5) является неэффективным (или невозможным), для вычисления функции Лауричеллы полезными оказываются приведенные ниже два тождества, способ получения которых указан в [38]. Для того чтобы сформулировать первое из них, введем следующий ряд, относящийся к классу гипергеометрических рядов Горна:

$$\mathcal{H}_v^{(N)}(\mathbf{a}; b_1, b_2, c; \mathbf{w}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{\left(b_1, \sum_{j=v+1}^N k_j\right) \left(b_2, \sum_{j=1}^v k_j\right) (a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}}{\left(c, \sum_{j=1}^N k_j\right) k_1! \cdots k_N!} w_1^{k_1} \cdots w_N^{k_N}; \quad (6.1)$$

здесь $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_N)$, b_1, b_2, c – комплексные параметры, $\mathbf{w} := (w_1, \dots, w_N)$ – векторное переменное, выражение (α, k) означает символ Похгаммера (1.7), $v = \overline{0, N}$ – целочисленный параметр. Ряд $\mathcal{H}_v^{(N)}$ сходится в поликруге $\mathbb{U}^N = \{|w_j| < 1, j = \overline{1, N}\}$, в чем нетрудно убедиться, используя резуль-

таты [2]. Упомянувшееся выше первое тождество для функции Лауричеллы имеет следующий вид (см. формулу (2.12) в [38]):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \prod_{j=1}^v (1 - z_j)^{-a_j} \mathcal{H}_v^{(N)} \left(a_1, \dots, a_N; b, c - b, c; \frac{z_1}{z_1 - 1}, \dots, \frac{z_v}{z_v - 1}, z_{v+1}, \dots, z_N \right), \quad (6.2)$$

где $\mathcal{H}_v^{(N)}$ определяется из (6.1) с соответствующей подстановкой параметров и переменных и справедливо в области

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_j| < |z_j - 1|, |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = \overline{1, v}, |z_\alpha| < 1, \alpha = \overline{v+1, N}\},$$

в которой сходится ряд в правой части (6.2). Отметим, что при $v = N$ равенство (6.2) переходит в известную формулу (см. [2])

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \prod_{j=1}^N (1 - z_j)^{-a_j} F_D^{(N)} \left(a_1, \dots, a_N; c - b, c; \frac{z_1}{z_1 - 1}, \dots, \frac{z_N}{z_N - 1} \right). \quad (6.3)$$

Второе из тождеств для $F_D^{(N)}$, о которых сказано выше, имеет вид (см. формулу (2.13) в [38]):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_1)^{-b} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{\left(b, \sum_{j=1}^N k_j \right) \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, k_1 + \sum_{j=v+1}^N k_j \right) (a_2)_{k_2} \dots (a_N)_{k_N}}{\left(c, \sum_{j=1}^N k_j \right) \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, \sum_{j=v+1}^N k_j \right) k_1! \dots k_N!} \times \\ \times \left(\frac{z_1}{z_1 - 1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - 1} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{z_1 - z_v}{z_1 - 1} \right)^{k_v} \left(\frac{z_{v+1}}{1 - z_1} \right)^{k_{v+1}} \dots \left(\frac{z_N}{1 - z_1} \right)^{k_N} \quad (6.4)$$

и представляет функцию Лауричеллы в области

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_1| + |z_\alpha| < |z_1 - 1|, \alpha = \overline{v+1, N}; |z_1 - z_j| < |z_1 - 1|, j = \overline{2, v}; |\arg(1 - z_1)| < \pi\}.$$

Еще один способ вычисления интеграла (1.3), когда суммирование ряда (1.5) неприменимо, заключается в следующем. Разобьем точками $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$ интервал $(0, 1)$ на $M + 1$ частей $I_m := (\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1})$ и представим (1.3) в виде суммы интегралов $\mathcal{F}_m$, взятых по I_m , а затем каждый из них с помощью формулы типа Эйлера выразим через функцию Лауричеллы с соответствующими параметрами и переменными. Далее к величинам $\mathcal{F}_m, m = \overline{1, M - 1}$, применим тождество (6.2), а к $\mathcal{F}_0$ применим формулу (6.3). В результате получим следующее представление для интеграла (1.3):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \sum_{m=0}^M \mathcal{F}_m(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (6.5)$$

где величины $\mathcal{F}_m$ имеют вид

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = b^{-1} \varepsilon_1^b (1 - \varepsilon_1)^{c-b-1} \prod_{j=1}^N (1 - \varepsilon_1)^{-a_j} \times \\ \times F_D^{(N+1)} \left(a_1, \dots, a_N, 1 + b - c; 1, 1 + b; \frac{\varepsilon_1 z_1}{\varepsilon_1 z_1 - 1}, \dots, \frac{\varepsilon_1 z_N}{\varepsilon_1 z_N - 1}, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - 1} \right), \quad (6.6)$$

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \varepsilon_m^{b-1} (1 - \varepsilon_m)^{c-b-1} \Delta_m \prod_{j=1}^v (1 - \varepsilon_{m+1} z_j)^{-a_j} \prod_{j=v+1}^N (1 - \varepsilon_m z_j)^{-a_j} \mathcal{H}_v^{(N+2)} \times \\ \times \left(a_1, \dots, a_N, 1 - b, 1 + b - c; 1, 1, 2; \frac{\Delta_m z_1}{\varepsilon_{m+1} z_1 - 1}, \dots, \frac{\Delta_m z_v}{\varepsilon_{m+1} z_v - 1}, \frac{\Delta_m z_{v+1}}{\varepsilon_m z_{v+1} - 1}, \dots, \frac{\Delta_m z_N}{\varepsilon_m z_N - 1}, -\frac{\Delta_m}{\varepsilon_m}, \frac{\Delta_m}{1 - \varepsilon_m} \right), \quad (6.7)$$

$$\mathcal{F}_M(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\varepsilon_M^{b-1} (1 - \varepsilon_M)^{c-b}}{c - b} \prod_{j=1}^N (1 - \varepsilon_M z_j)^{-a_j} \times \\ \times F_D^{(N+1)} \left(a_1, \dots, a_N, 1 - b; 1, c - b; \frac{(1 - \varepsilon_M) z_1}{1 - \varepsilon_M z_1}, \dots, \frac{(1 - \varepsilon_M) z_N}{1 - \varepsilon_M z_N}, -\frac{1 - \varepsilon_M}{\varepsilon_M} \right); \quad (6.8)$$

в (6.7) использовано обозначение $\Delta_m := \varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m$. В правых частях формул (6.6)–(6.8) символы $F_D^{(N)}$ и $\mathcal{H}_v^{(N)}$ означают гипергеометрические ряды (1.5) и (6.1) соответственно. Ориентируясь на решение системы (1.16), (1.20)–(1.28), мы полагаем

$$K = \left\lceil \log_Q \max_{j=1, \overline{v}} |z_j| \right\rceil, \quad M = K - 1 + \left\lceil -\log_Q \min_{j=v+1, \overline{N}} \frac{|1 - z_j|}{|z_j|} \right\rceil, \quad (6.9)$$

где $[\lambda]$ – целая часть λ , число $Q > 1$ (в реальных вычислениях можно принять $Q = 2$), а $\log_Q$ – логарифм по основанию Q , и определяем точки ε_m , фигурирующие в (6.5)–(6.8), по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{Q^{m-1}}{\max_{j=1, \overline{v}} |z_j|}, \quad m = \overline{1, K-1}, \quad \varepsilon_K = Q^{-1}, \\ \varepsilon_m &= 1 - \left(\min_{j=v+1, \overline{N}} \frac{|1 - z_j|}{|z_j|} \right) Q^{M-m}, \quad m = \overline{K+1, M}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Подход, основанный на таком способе разбиения интервала интегрирования $[0, 1]$, нами заимствован из [16], где этот прием был использован при выводе квадратурных формул для вычисления интегралов гипергеометрического типа.

Необходимо подчеркнуть, что если величины ζ_k , $k = \overline{1, N}$, располагаются “резко неравномерно” на отрезке $[0, 1]$, т.е. имеет место сильный кроудинг, то для разработки алгоритма вычисления функции Лауричеллы и решения проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца набора тождеств (6.2)–(6.4) и (6.5)–(6.10) недостаточно и требуется применять формулы аналитического продолжения вида (1.9). Совокупность таких формул построена в [20, 21, 38], а также в разд. 3 настоящей работы. При использовании формул аналитического продолжения эффект кроудинга является благоприятствующим фактором.

Вопрос о построении начального приближения в настоящей статье решается методом продолжения по параметру. При этом в качестве начального приближения для искомых величин ζ_k принимаются точки, равномерно разбивающие единичный интервал $(0, 1)$. Отметим, что в [34, 35, 43] для построения приближений было предложено использовать асимптотики для параметров, которые в ряде случаев удается эффективно (с явно выписанными коэффициентами) построить с помощью теории вариации отображающей функции при деформировании области (см. [43, 44]).

После того, как параметры конформного отображения (1.15) определены, следующей задачей является вычисление самой отображающей функции $w = \mu(\zeta)$. Предположим, что некоторая вершина w_m конечна. Тогда, полагая $\tilde{\zeta} = \zeta_m$ и $\tilde{w} = w_m$ в интеграле (1.15) и выполняя в нем замену переменного $t = \zeta_m + (\zeta - \zeta_m)\xi$, $\xi \in (0, 1)$, с учетом формулы типа Эйлера (1.3) приходим к следующему представлению:

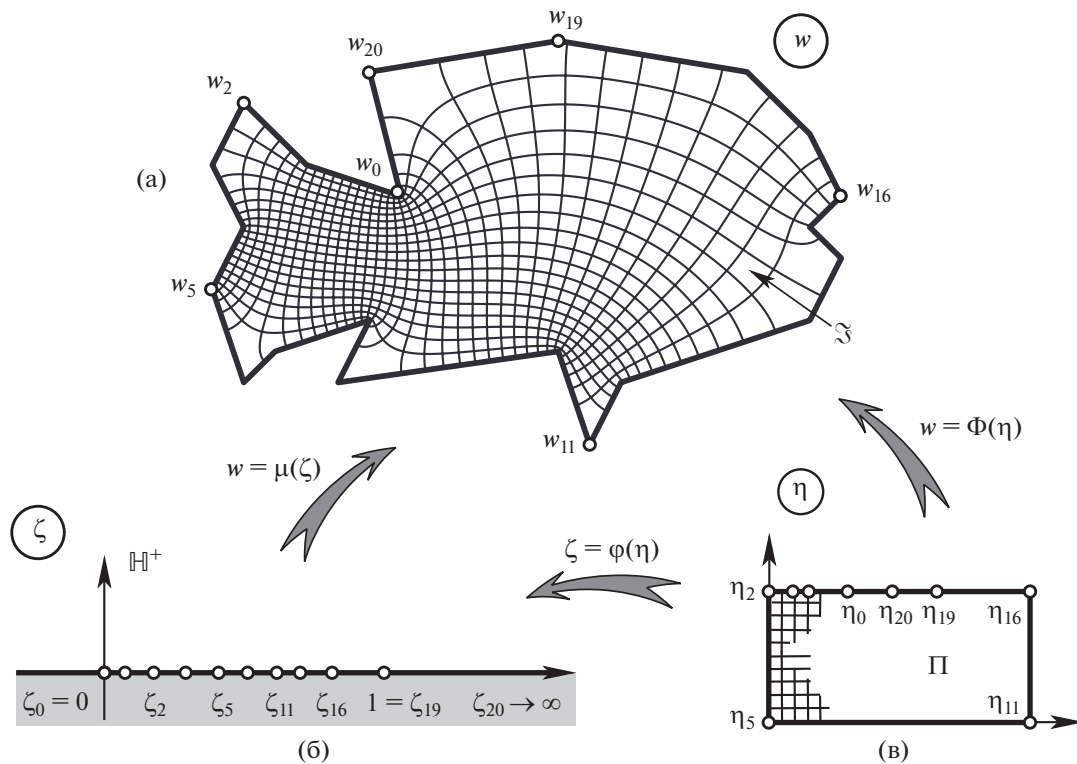
$$\begin{aligned} \mu(\zeta) &= w_m + \mathfrak{D}_m e^{i\pi\theta_m} (\zeta - \zeta_m)^{1-a_m} \times \\ &\times F_D^{(N+1)} \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, a_1, \dots, a_{m-1}, a_{m+1}, \dots, a_N, 1 + b - c; 1 - a_m, 2 - a_m; \mathfrak{U}(\mathbf{1} - \mathbf{X}_m) \right), \end{aligned} \quad (6.11)$$

где параметры a_j , b и c определены в формуле (1.18), функция $\mathfrak{U}$ имеет вид (1.19), а постоянные величины $\mathfrak{D}_m$, θ_m и вектор $\mathbf{X}_m(\zeta)$ даются равенствами

$$\mathfrak{D}_m = \mathcal{H}_0 (1 - a_m)^{-1} \zeta_m^{\sum_{j=1}^N a_j - c} \prod_{j=1}^{m-1} (\zeta_m - \zeta_j)^{-a_j} \left(\prod_{j=m+1}^N (\zeta_j - \zeta_m)^{-a_j} \right) (1 - \zeta_m)^{c-b-1}, \quad (6.12)$$

$$\theta_m = \frac{\arg(w_{N+2} - w_{N+1})}{\pi} + c - b - \left(\sum_{l=m+1}^N a_l \right) - 1, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{X}_m(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{\zeta_m}, \frac{\zeta_1}{\zeta_m}, \dots, \frac{\zeta_{m-1}}{\zeta_m}, \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m}, \dots, \frac{\zeta_N}{\zeta_m}, \frac{1}{\zeta_m} \right); \quad (6.14)$$


 Фиг. 2. Конформное отображение многоугольника $\tilde{\mathcal{G}}$.

здесь $m = \overline{1, N}$, а если $m = 0$ и $m = N + 1$, то равенства (6.11)–(6.14) требуют модификации и выводятся аналогичным путем. Для вычисления конформного отображения по формуле (6.11) в зависимости от диапазона изменения ζ могут быть использованы представления (6.2)–(6.4), (6.5)–(6.10) и формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы (см. разд. 2, 3).

Описанный выше метод решения проблемы параметров интеграла Кристоффеля – Шварца и вычисления конформного отображения многоугольников (с числом вершин $N \geq 4$), основанный на формулах аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ и тождествах (6.2)–(6.4) и (6.5)–(6.10), был реализован в виде алгоритма на языке C++. В следующем п. 6.2 продемонстрированы результаты вычисления с помощью этого алгоритма на примере двух областей сложного вида.

6.2. Численная реализация

Пример 1. Продемонстрируем результаты предыдущих разделов работы на примере вычисления конформного отображения полуплоскости $\mathbb{H}^+$ на 21-угольную область $\tilde{\mathcal{G}}$, представленную на фиг. 2а. Координаты вершин $w_j = u_j + iv_j$, $j = \overline{0, 20}$, этой области на комплексной плоскости w следующие:

$$\begin{aligned} w_0 &= 0.5 - 2i, & w_1 &= -1 - 1.5i, & w_2 &= -2 - 0.5i, & w_3 &= -2.5 - 1.5i, \\ w_4 &= -2 - 2.5i, & w_5 &= -2.5 - 3.5i, & w_6 &= -2 - 5i, & w_7 &= -1.5 - 4.5i, \\ w_8 &= -4i, & w_9 &= -0.5 - 5i, & w_{10} &= 3 - 4.5i, & w_{11} &= 3.5 - 6i, \\ w_{12} &= 4 - 5i, & w_{13} &= 7 - 4i, & w_{14} &= 7.5 - 3i, & w_{15} &= 7 - 2.5i, \\ w_{16} &= 7.5 - 2i, & w_{17} &= 7 - i, & w_{18} &= 6, & w_{19} &= 3 + 0.5i, & w_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Показатели углов β_j для такой области вычисляются по несложным соотношениям через координаты вершин (6.15). Нормировка отображения $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \tilde{\mathcal{R}}$ следующая (см. фиг. 2а, 2б):

$$\mu(0) = w_0, \quad \mu(1) = w_{19}, \quad \mu(\infty) = w_{20}. \quad (6.16)$$

Параметрами интеграла (1.15), требующими вычислений, являются величины $\mathcal{H}_0$ и восемнадцать прообразов ζ_j , $j = \overline{1, 18}$. Вычисленные с помощью представленного алгоритма значения разностей искоемых величин $\zeta_{j+1} - \zeta_j$ следующие:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 0.18927637714006, \quad \zeta_2 - \zeta_1 = 0.39051404654876 \times 10^{-2}, \\ \zeta_3 - \zeta_2 &= 0.67344758433178 \times 10^{-3}, \quad \zeta_4 - \zeta_3 = 0.52745621854192 \times 10^{-2}, \\ \zeta_5 - \zeta_4 &= 0.85839482665681 \times 10^{-2}, \quad \zeta_6 - \zeta_5 = 0.35574987202544 \times 10^{-2}, \\ \zeta_7 - \zeta_6 &= 0.961525803960653 \times 10^{-3}, \quad \zeta_8 - \zeta_7 = 0.48832126634923 \times 10^{-1}, \\ \zeta_9 - \zeta_8 &= 0.29428773532504 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{10} - \zeta_9 = 0.2148992289738, \\ \zeta_{11} - \zeta_{10} &= 0.36289795336284 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{12} - \zeta_{11} = 0.89708949689757 \times 10^{-2}, \\ \zeta_{13} - \zeta_{12} &= 0.87211356153212 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{14} - \zeta_{13} = 0.85387381037496 \times 10^{-2}, \\ \zeta_{15} - \zeta_{14} &= 0.10073852356786 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{16} - \zeta_{15} = 0.1122732932667 \times 10^{-1}, \\ \zeta_{17} - \zeta_{16} &= 0.134061231550203 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{18} - \zeta_{17} = 0.29831093841533 \times 10^{-1}, \\ 1 - \zeta_{18} &= 0.28905818745045. \end{aligned} \quad (6.17)$$

После решения системы предынтегральный множитель вычисляем по формуле $\mathcal{H}_0 = L_0/I_0(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (\zeta_1, \dots, \zeta_{18})$, и находим значение $\mathcal{H}_0 = 0.86207417118788$.

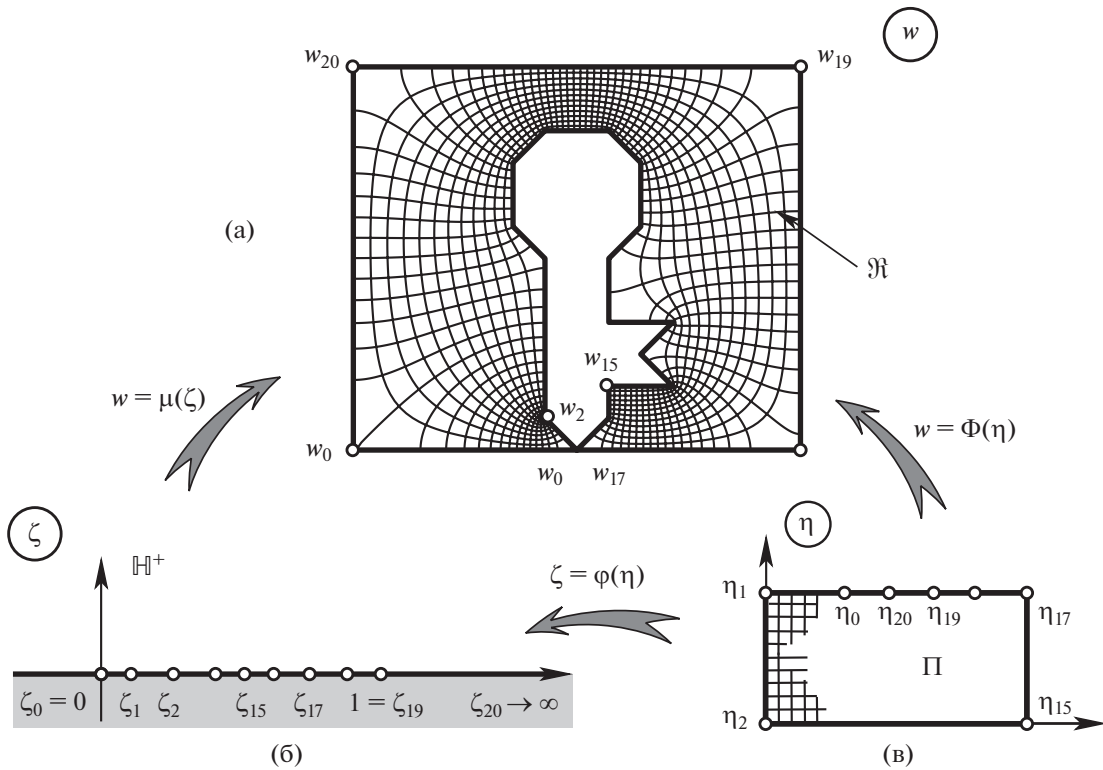
Для иллюстрации отображения $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \tilde{\mathcal{R}}$ удобно воспользоваться вспомогательным конформным отображением $\varphi : \Pi \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$ прямоугольника Π на полуплоскость $\mathbb{H}^+$ (см. фиг. 2б, 2в) и вначале отобразить естественную для Π декартову сетку в $\mathbb{H}^+$, а затем с помощью функции $z = \mu(\zeta)$ перевести ее в область $\tilde{\mathcal{R}}$. Таким образом, мы изобразим в области $\tilde{\mathcal{R}}$ образ прямоугольной декартовой сетки (изначально построенной в прямоугольнике Π) при отображении $\Phi : \Pi \xrightarrow{\text{conf}} \tilde{\mathcal{R}}$. Подчиняя отображение φ условиям

$$\varphi(ih) = \zeta_2, \quad \varphi(0) = \zeta_5, \quad \varphi(d) = \zeta_{11}, \quad \varphi(d + ih) = \zeta_{16} \quad (6.18)$$

(т.е. точки $\eta_2, \eta_5, \eta_{11}, \eta_{16}$ границы $\partial\Pi$ переходят в точки $\zeta_2, \zeta_5, \zeta_{11}, \zeta_{16}$ на $\partial\mathbb{H}^+$), находим его в виде

$$\varphi(\eta) = \frac{\zeta_5(\zeta_{11} - \zeta_2) - \zeta_2(\zeta_{11} - \zeta_5)\text{sn}^2(k, \eta)}{\zeta_{11} - \zeta_2 - (\zeta_{11} - \zeta_5)\text{sn}^2(k, \eta)}, \quad k = \left[\frac{(\zeta_{16} - \zeta_2)(\zeta_{11} - \zeta_5)}{(\zeta_{16} - \zeta_5)(\zeta_{11} - \zeta_2)} \right]^{1/2}; \quad (6.19)$$

здесь $\text{sn}(k, \eta)$ — эллиптическая функция Якоби (см. [14, 45]) с модулем k , вычисляемым через найденные параметры (6.17) конформного отображения (1.15) согласно второму равенству (6.19). При этом заранее неизвестные в (6.18) длина d и высота h прямоугольника Π находятся через эллиптические интегралы по формулам $d = K(k)$ и $h = K'(k)$, где k определяется из (6.19); вычисленные значения следующие: $K = 3.6298490712230$, $K' = 1.5753115752655$. На фиг. 2а в области $\tilde{\mathcal{R}}$ изображена сетка, в которую переходит построенная в прямоугольнике Π декартова сетка 35×18 при отображении $\Phi(\eta) = \mu \circ \varphi(\eta)$, где $z = \mu(\zeta)$ — интеграл Кристоффеля—Шварца (1.15), соответствующий области $\tilde{\mathcal{R}}$, а $\zeta = \varphi(\eta)$ — вспомогательное отображение (6.19) прямоугольника на полуплоскость.


 Фиг. 3. Конформное отображение многоугольника $\mathfrak{H}$.

Пример 2. Еще одной иллюстрацией результатов предыдущих разделов работы является вычисление конформного отображения полуплоскости $\mathbb{H}^+$ на 21-угольную область $\mathfrak{H}$, представленную на фиг. 3а; граница области изображает “ключ в прямоугольнике”. Координаты вершин $w_j = u_j + iv_j$, $j = \overline{0, 20}$, этой области на комплексной плоскости w следующие:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= 0, & w_1 &= 3.5, & w_2 &= 3 + 0.5i, & w_3 &= 3 + 3i, \\
 w_4 &= 2.5 + 3.5i, & w_5 &= 2.5 + 4.5i, & w_6 &= 3 + 5i, & w_7 &= 4 + 5i, \\
 w_8 &= 4.5 + 4.5i, & w_9 &= 4.5 + 3.5i, & w_{10} &= 4 + 3i, & w_{11} &= 4 + 2i, \\
 w_{12} &= 5 + 2i, & w_{13} &= 4.5 + 1.5i, & w_{14} &= 5 + i, & w_{15} &= 4 + i, \\
 w_{16} &= 4 + 0.5i, & w_{17} &= 3.5, & w_{18} &= 7, & w_{19} &= 7 + 6i, & w_{20} &= 6i.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Нормировка отображения $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{H}$ следующая (см. фиг. 3а, 3б): $\mu(0) = w_0$, $\mu(1) = w_{19}$, $\mu(\infty) = w_{20}$. Неизвестными параметрами интеграла (1.15), требующими вычислений, являются множитель $\mathcal{H}_0$ и прообразы ζ_j , $j = \overline{1, 18}$. Вычисленные с помощью разработанного алгоритма значения разностей искомых прообразов ζ_j следующие:

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= 0.208757213499398 \times 10^{-1}, & \zeta_2 - \zeta_1 &= 0.803383224377802 \times 10^{-3}, \\
 \zeta_3 - \zeta_2 &= 0.71893774825471 \times 10^{-1}, & \zeta_4 - \zeta_3 &= 0.83715343170527 \times 10^{-1}, \\
 \zeta_5 - \zeta_4 &= 0.46890993371997, & \zeta_6 - \zeta_5 &= 0.30769085066261, \\
 \zeta_7 - \zeta_6 &= 0.45088062145884 \times 10^{-1}, & \zeta_8 - \zeta_7 &= 0.88956406963448 \times 10^{-3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_9 - \zeta_8 &= 0.75809778668161 \times 10^{-4}, & \zeta_{10} - \zeta_9 &= 0.49915637107855 \times 10^{-5}, \\
\zeta_{11} - \zeta_{10} &= 1.47379705935193 \times 10^{-6}, & \zeta_{12} - \zeta_{11} &= 2.6237907814061 \times 10^{-6}, \\
\zeta_{13} - \zeta_{12} &= 1.1340126123975 \times 10^{-6}, & \zeta_{14} - \zeta_{13} &= 4.3130563379541 \times 10^{-7}, \\
\zeta_{15} - \zeta_{14} &= 1.3226041825502 \times 10^{-7}, & \zeta_{16} - \zeta_{15} &= 5.5986421975656 \times 10^{-9}, \\
\zeta_{17} - \zeta_{16} &= 2.6997492754035 \times 10^{-9}, & \zeta_{18} - \zeta_{17} &= 3.84200183255817 \times 10^{-7}, \\
1 - \zeta_{18} &= 0.46377824127798,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

а значение предынтегрального множителя $\mathcal{H}_0 = 0.90197443407226$. Необходимо отметить, что точки ζ_j , $j = \overline{1, 18}$, как показали вычисления (6.21), расположены внутри интервала $(0, 1)$ крайне неравномерно, т.е. имеет место эффект кроудинга. Например, все прообразы ζ_j , $j = \overline{10, 18}$, образуют набор весьма близких величин на интервале длиной порядка 10^{-5} .

Для иллюстрации отображения $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{H}$ вначале отобразим естественную для прямоугольника Π декартову сетку в полуплоскость $\mathbb{H}^+$, а затем с помощью функции $z = \mu(\zeta)$ переведем ее в область $\mathfrak{H}$. Таким образом, мы представим в области $\mathfrak{H}$ образ прямоугольной декартовой сетки при отображении $\Phi : \Pi \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{H}$. Вспомогательное отображение φ подчиним следующим условиям:

$$\varphi(ih) = \zeta_1, \quad \varphi(0) = \zeta_2, \quad \varphi(d) = \zeta_{15}, \quad \varphi(d + ih) = \zeta_{17} \tag{6.22}$$

(т.е. точки $\eta_1, \eta_2, \eta_{15}, \eta_{17}$ границы $\partial\Pi$ переходят в точки $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{15}, \zeta_{17}$ на $\partial\mathbb{H}^+$), находим его в виде

$$\varphi(\eta) = \frac{\zeta_2(\zeta_{15} - \zeta_1) - \zeta_1(\zeta_{15} - \zeta_2)\text{sn}^2(k, \eta)}{\zeta_{15} - \zeta_1 - (\zeta_{15} - \zeta_2)\text{sn}^2(k, \eta)}, \quad k = \left[\frac{(\zeta_{17} - \zeta_1)(\zeta_{15} - \zeta_2)}{(\zeta_{17} - \zeta_2)(\zeta_{15} - \zeta_1)} \right]^{1/2}. \tag{6.23}$$

Величины d и h в (6.22) даются равенствами $d = K(k)$ и $h = K'(k)$, где k определяется с помощью второго соотношения (6.23); результаты вычислений следующие: $K = 14.2316808808993$, $K' = 1.57079632679763$. На фиг. 3а в области $\mathfrak{H}$ представлена сетка, которая является образом декартовой сетки 91×11 , построенной в прямоугольнике Π , после отображения $\Phi(\eta) = \mu \circ \varphi(\eta)$, где $z = \mu(\zeta)$ — это интеграл Кристоффеля—Шварца (1.15), соответствующий области $\mathfrak{H}$, а $\zeta = \varphi(\eta)$ — вспомогательное отображение (6.23) прямоугольника на полуплоскость.

В завершение отметим, что ключевым моментом при выполнении вычислений было применение к функции $F_D^{(18)}$ формул, которые в работе представлены для функции Лауричеллы с произвольным числом переменных. Такие формулы обеспечили эффективное (практически с машинной точностью) вычисление $F_D^{(18)}$ на каждом шаге итерационного алгоритма Ньютона. Значения параметров (6.17), (6.21) были найдены путем численного решения систем уравнений (1.16), (1.20)–(1.24), соответствующих областям $\tilde{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{H}$, с точностью 14 значащих цифр. Все расчеты проводились с использованием стандартной мантииссы в 16 значащих цифр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Exton H. Multiple hypergeometric functions and application. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1976.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
4. Kraniotis G.V. Periaapsis and gravitomagnetic precessions of stellar orbits in Kerr and Kerr–de Sitter black hole spacetimes // Class. Quant. Grav. 2007. V. 24. P. 1775–1808.
5. Primoa A., Tancredic L. Maximal cuts and differential equations for Feynman integrals. An application to the three-loop massive banana graph // Nucl. Phys. B. 2017. V. 921. P. 316–356.
6. Berge J., Massey R., Baghi Q., Touboul P. Exponential shapelets: basis functions for data analysis of isolated features // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2019. V. 486. № 1. P. 544–559.

7. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* Application of hypergeometric functions of two variables in wireless communication theory // *Lobachevskii J. Math.* 2019. V. 40. 7. P. 938–953.
8. *Akerblom N., Flohr M.* Explicit formulas for the scalar modes in Seiberg–Witten theory with an application to the Argyres–Douglas point // *J. High Energy Phys.* 2005. V. 2. № 057. P. 24.
9. *Looijenga E.* Uniformization by Lauricella functions: an overview of the theory of Deligne–Mostow. In “Arithmetic and geometry around hypergeometric functions.” *Progress in mathematics.* V. 260. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag AG, 2005.
10. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. II // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 11. С. 1873–1893.
11. *Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V.* Generalized Euler integrals and A -hypergeometric functions // *Adv. Math.* 1990. V. 84. P. 255–271.
12. *Matsumoto K.* Relative twisted homology and cohomology groups associated with Lauricella’s F_D , 2019. ArXiv:1804.00366v2.
13. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного М.: Наука, 1953.
15. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
16. *Trefethen L.N.* Numerical computation of the Schwarz – Christoffel transformation // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1980. V. 1. P. 82–102.
17. *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. V. 1–3. New York: John Wiley & Sons, 1991.
18. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // *Rendiconti Circ. Math. Palermo.* 1893. V. 7. P. 111–158.
19. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions. *Aspects of Mathematics.* V. E16. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn, 1991.
20. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана–Гильберта и некоторые приложения // *Успехи матем. наук.* 2018. Т. 73. № 6 (444). С. 3–94.
21. *Безродных С.И.* Формулы для вычисления функции Лауричеллы в ситуации кроудинга переменных // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 62. № 12. С. 2054–2076.
22. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретах В.С.* Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // *Успехи матем. наук.* 1992. Т. 47. Вып. 4 (286). С. 3–82.
23. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Horn hypergeometric series with an arbitrary number of variables // *Integral Transform. Spec. Funct.* 2020. V. 31. 10. P. 788–803.
24. *Садыков Т.М., Цих А.К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
25. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn functions $H_6(a, b, b', w, z)$ and $H_8^{(c)}(a, b; w, z)$ // *Integral Transform. Spec. Funct.* 2021. Published online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.2017427>
26. *Ananthanarayan B., Beraay S., Friot S., Marichev O., Pathak T.* On the evaluation of the Appell F_2 double hypergeometric function, 2021; arXiv:2111.05798v1
27. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn function $H_7(a, b, b'; c; w, z)$ // *Integral Transform. Spec. Funct.* 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2022.2056600>
28. *Kalmykov M., Bytev V., Kniehl B., Moch S.-O., Ward B., Yost S.* Hypergeometric functions and Feynman diagrams. In: *Blümlein J., Schneider C.* (eds) *Anti-Differentiation and the Calculation of Feynman Amplitudes. Texts & Monographs in Symbolic Computation (A Series of the Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University, Linz, Austria).* Springer, Cham, 2021.
29. *Zemach C.* A conformal map formula for difficult cases // *J. Comput. Appl. Math.* 1986. V. 14. P. 207–215.
30. *Krikeles B.C., Rubin R.L.* On the crowding of parameters associated with Schwarz–Christoffel transformation // *Appl. Math. Comput.* 1988. V. 28. № 4. P. 297–308.
31. *Голузин Г., Канторович Л., Крылов В., Мелентьев П., Муратов М., Стенин Н.* Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. Л.–М.: Наука, 1937.
32. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматлит, 1962.
33. *Gaier D.* Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin: Springer-Verlag, 1964.
34. *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана–Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2002. Т. 42. № 3. С. 277–312.
35. *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана–Гильберта в областях сложной формы и ее приложение // *Spectr. Evolut. Problem.* 2006. Т. 16. С. 51–61.

36. *Богатырев А.Б.* Конформное отображение прямоугольных семиугольников // Матем. сб. 2012. Т. 203. № 12. С. 35–56.
37. *Накипов Н.Н., Насыров С.Р.* Параметрический метод нахождения аксессуарных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца // Уч. зап. Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158. № 2. С. 202–220.
38. *Безродных С.И.* Функция Лауричеллы и конформное отображение многоугольников // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 4. С. 500–520.
39. *Banjai L.* Revisiting the Crowding Phenomenon in Schwarz–Christoffel Mapping // SIAM J. Sci. Comput. 2008. V. 30. № 2. P. 618–636.
40. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Конформное отображение L -образной области в аналитическом виде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 12. С. 1943–1980.
41. *Trefethen L.N., Driscoll T.A.* Schwarz–Christoffel transformation. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2005.
42. *Driscoll T.A.* A MATLAB toolbox for Schwarz–Christoffel mapping // ACM Transact. Math. Soft. 1996. V. 22. P. 168–186.
43. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Докторская дисс. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
44. *Власов В.И.* О вариации отображающей функции при деформировании области // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 6. С. 1299–1302.
45. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.