ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 11, с. 1806–1814

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517

АНАЛИТИЧНОСТЬ И ПСЕВДОАНАЛИТИЧНОСТЬ В МЕТОДЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА[1)]

© 2023 г. В. И. Качалов[1,*], Д. А. Маслов[1,**]

[1] 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ “МЭИ”, Россия

*e-mail: vikachalov@rambler.ru

**e-mail: maslovdma@mpei.ru

Поступила в редакцию 27.03.2023 г.
Переработанный вариант 27.03.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Метод малого параметра позволяет строить решения дифференциальных уравнений в виде степенных рядов и получил большое распространение в математической физике. В большинстве случаев эти ряды являются асимптотически сходящимися. Целью настоящей работы является нахождение условий обычной сходимости рядов по степеням малого параметра, представляющих решения задач теории возмущений. Библ. 17.

Ключевые слова: метод регуляризации С. А. Ломова, голоморфная регуляризация, псевдоаналитичность, ε-регулярное решение, ε-псевдорегулярное решение.

DOI: 10.31857/S0044466923110170, **EDN:** KJODFG

1. ВВЕДЕНИЕ

Заложенный в трудах А. Пуанкаре метод малого параметра является одним из наиболее используемых в математической физике аналитических методов. Суть метода состоит в том, что решение поставленной задачи строится в виде ряда по степеням малого параметра, который либо уже присутствует в решаемой задаче, либо вводится искусственным путем. С другой стороны, наличие малого параметра в дифференциальном уравнении приводит к тому, что поставленная для него начальная или краевая задача становится либо регулярно возмущенной, либо сингулярно возмущенной, а значит, является предметом изучения функционального анализа. В первом случае, как это следует из теорем Пуанкаре о разложении для обыкновенных дифференциальных уравнений [1, гл. VI, § 2], построенные формальные ряды по степеням малого параметра сходятся в обычном смысле к точным решениям, что делает последние аналитически зависящими от параметра. А, именно, если правая часть уравнения

$$\partial_t y = f(t, y, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

аналитична в точке $M_0(t_0, y_0, 0)$, то существует и единственно решение $y(t, \varepsilon)$, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0, \varepsilon) = y^0$, аналитическое в точке $M_0'(t_0, 0)$, т.е. представимое равномерно сходящимся на указанном отрезке рядом по степеням ε (который и строится методом малого параметра).

Однако, если рассматривать дифференциальное уравнение

$$\partial_t u = F(u, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

с неограниченным оператором F, даже аналитически зависящим от ε, то гарантировать обычную сходимость ряда по степеням малого параметра, представляющего решение этого уравнения, в общем случае, нельзя.

Также открытым остается вопрос, является ли сумма $u^f(t, \varepsilon)$ построенного формального ряда точным решением, при условии его обычной сходимости?

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00496).

Еще более сложной является ситуация с сингулярно возмущенными задачами [2–5], поскольку при значении параметра, равном нулю, перестают работать теоремы существования. С другой стороны, параметр ε входит в уравнение

$$\varepsilon\partial_t y = f(t,y), \quad t \in [0,T], \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \tag{3}$$

аналитическим (даже целым) образом. Значит, что-то должно наследовать такую зависимость от ε. Решение $y(t,\varepsilon)$, в общем случае, не может быть аналитическим в точке $\varepsilon = 0$ ("аргумент Дайсона" [6]). Оказывается, и это было доказано в рамках метода голоморфной регуляризации, что уравнение (3) обладает аналитическими по ε первыми интегралами [7, 8]. А уже они определяют так называемое псевдоаналитическое решение задачи Коши (3):

$$y(t,\varepsilon) = Y_0(t,\varepsilon^{-1}) + \varepsilon Y_1(t,\varepsilon^{-1}) + \ldots + \varepsilon^n Y_n(t,\varepsilon^{-1}) + \ldots. \tag{4}$$

Ряд (4) сходится равномерно на отрезке $[0,T]$ в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$, при фиксированном ε в коэффициентах. Он также сходится при каждом фиксированном ε из некоторой достаточно малой окрестности точки $\varepsilon = 0$ равномерно на отрезке $[0,T_\varepsilon]$. При этом разработан алгоритм псевдоаналитического продолжения на весь отрезок задания уравнения, то позволяет решать не только начальные, но и краевые задачи [9].

Вернемся к начальной задаче (2). Пусть оператор F таков, что для решения этой задачи методом малого параметра может быть построен формальный ряд

$$u^f(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t) + \ldots. \tag{5}$$

Нетрудно доказать, что таковым является оператор, представимый в виде конечной суммы полилинейных операторов.

Определение 1. Если ряд (5) сходится равномерно на отрезке $[0,T]$, то его сумма $u^r(t,\varepsilon)$ называется ε-регулярным решением уравнения (2).

В конечномерном случае (см. уравнение (1)) ε-регулярное решение автоматически совпадает с точным решением – это гарантирует теорема Пуанкаре о разложении. В случае неограниченного оператора F это не всегда так.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В банаховом пространстве E задана эволюционная задача с малым комплексным параметром ε

$$\partial_t u = Au + \varepsilon B(Gu, Hu), \; t \in [0,T], \quad u|_{t=0} = u^0, \tag{6}$$

где A – замкнутый неограниченный оператор с областью определения D_A; $B : E \times E \to E$ – билинейный ограниченный оператор; операторы G и H могут быть как ограниченными, так и неограниченными.

Условие (A). Оператор A является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{U}(t)$.

Будем искать решение поставленной задачи в виде ряда (5), который подставим в уравнение (6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях этого уравнения:

$$\begin{gathered}
\partial_t u_0 = Au_0, \; u_0|_{t=0} = u^0, \\
\partial_t u_1 = Au_1 + B(Gu_0, Hu_0), \quad u_1|_{t=0} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\partial_t u_n = Au_n + \sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k, Hu_{n-k-1}) = 0, \quad u_n|_{t=0} = 0. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь мы воспользовались билинейностью оператора B и правилом Коши перемножения рядов.

Воспользуемся условием (А) для решения задач серии (7):

$$
\begin{gathered}
u_0(t) = \mathcal{U}(t)u^0, \\
u_1(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(Gu_0(\tau), Hu_0(\tau))d\tau, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_n(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)\left[\sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k(\tau), Hu_{n-k-1}(\tau))\right]d\tau. \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Таким образом, формальный ряд $u^f(t,\varepsilon)$ построен и нужно исследовать его на сходимость.

3. СЛУЧАЙ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ G И H

Пусть $\|u_0(t)\| \leqslant a \ \forall t \in [0,T]$, $\|B\| = b$, $\|G\| = g$, $\|H\| = h$, $\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant q \ \forall t \in [0,T]$, при некоторых положительных a, b, g, h, q. Тогда, при $t \in [0,T]$ имеют место следующие оценки правых частей равенств (8), начиная со второго:

$$
\begin{gathered}
\|u_1(t)\| \leqslant Tqbgha^2, \\
\|u_2(t)\| \leqslant T^2q^2b^2g^2h^2a^3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\|u_n(t)\| \leqslant T^nq^nb^ng^nh^na^{n+1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Из неравенств (9) вытекает равномерная на отрезке $[0,T]$ сходимость ряда (5) при $|\varepsilon| < 1/c$, где $c = Tqbgha$. В итоге доказана следующая

Теорема 1. *Если выполнено условие* (*А*) *и операторы G и H являются ограниченными, то задача Коши* (6) *имеет единственное ε-регулярное решение.*

4. О СВЯЗИ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ С ε-РЕГУЛЯРНЫМ

В этом разделе статьи будет исследован вопрос о том, как соотносятся друг с другом точное и ε-регулярное решения.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то при достаточно малых ε точное решение $u(t,\varepsilon)$ задачи Коши* (6) *существует и совпадает с ее ε-регулярным решением $u^r(t,\varepsilon)$.*

Доказательство. Поскольку A – инфинитезимальный генератор полугруппы $\mathcal{U}(t)$, то задача (6) эквивалентна интегральному уравнению [10, гл. 7, § 3]

$$
u(t) = \mathcal{U}(t)u^0 + \varepsilon\int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(Gu(\tau), Hu(\tau))d\tau. \tag{10}
$$

Обозначим через C_E банахово пространство непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций со значениями в E, с нормой равномерной на отрезке $[0,T]$ сходимости. Пусть $S^1 = \{u(t) \in C_E : \|u(t) - u_0(t)\| \leqslant 1\}$ – замкнутый единичный шар в C_E. Ясно, что при сделанных предположениях оператор

$$
\Phi_\varepsilon[u(t)] = u_0(t) + \varepsilon\int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(Gu(\tau), Hu(\tau))d\tau
$$

при достаточно малых ε отображает S^1 в себя и является сжатием. Поэтому, в соответствии с принципом сжатых отображений, в шаре S^1 существует и единственно решение интегрального уравнения (10), что ввиду его эквивалентности задаче (6), доказывает существование и единственность у нее точного решения $u(t,\varepsilon)$.

Далее, пусть

$$u^r_{n\varepsilon} = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t) \tag{11}$$

есть частичная сумма ряда (5), представляющего ε-регулярное решение начальной задачи (6). Пользуясь билинейностью оператора B, можно доказать, что сумма (11) удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\partial_t u^r_{n\varepsilon} = Au^r_{n\varepsilon} + \varepsilon B(Gu^r_{n\varepsilon}, Hu^r_{n\varepsilon}) - \varepsilon^{n+1}\sum_{m=0}^{n} B(Gu_m, Hu_{n-m}) - \varepsilon^{n+2}\sum_{m=1}^{n} B(Gu_m, Hu_{n-m+1}) - \\ - \varepsilon^{n+3}\sum_{m=2}^{n} B(Gu_m, Hu_{n-m+2}) - \ldots - \varepsilon^{2n}\left[B(Gu_n, Hu_{n-1}) + B(Gu_{n-1}, Hu_n)\right] - \varepsilon^{2n+1} B(Gu_n, Hu_n).\end{gathered} \tag{12}$$

Если из уравнения (6) вычесть уравнение (12), то получится следующая начальная задача для $u(t,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(t)$:

$$\begin{gathered}\partial_t (u - u^r_{n\varepsilon}) = A(u - u^r_{n\varepsilon}) + \varepsilon\Big[B(Gu, H(u - u^r_{n\varepsilon})) + B(G(u - u^r_{n\varepsilon}), Hu^r_{n\varepsilon})\Big] + \\ + \varepsilon^{n+1}\sum_{m=0}^{n} B(Gu_m, Hu_{n-m}) + \varepsilon^{n+2}\sum_{m=1}^{n} B(Gu_m, Hu_{n-m+1}) + \varepsilon^{n+3}\sum_{m=2}^{n} B(Gu_m, Hu_{n-m+2}) + \ldots \\ \ldots + \varepsilon^{2n}\left[B(Gu_n, Hu_{n-1}) + B(Gu_{n-1}, Hu_n)\right] + \varepsilon^{2n+1} B(Gu_n, Hu_n), \quad (u - u^r_{n\varepsilon})|_{t=0} = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Запишем эквивалентное уравнению (13) интегральное уравнение (опустив переменную интегрирования):

$$\begin{gathered}u - u^r_{n\varepsilon} = \varepsilon\int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)\Big[B(Gu, H(u - u^r_{n\varepsilon})) + B(G(u - u^r_{n\varepsilon}), Hu^r_{n\varepsilon})\Big]d\tau + \\ + \varepsilon^{n+1}\int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)\left[\sum_{m=0}^{n} B(Gu_m, Hu_{n-m}) + \varepsilon\sum_{m=1}^{n} B(Gu_m, Hu_{n-m+1}) + \right. \\ \left. + \varepsilon^2\sum_{m=2}^{n} B(Gu_m, Hu_{n-m+2}) + \ldots + \varepsilon^{n-1}\left(B(Gu_n, Hu_{n-1}) + B(Gu_{n-1}, Hu_n)\right) + \varepsilon^n B(Gu_n, Hu_n)\right]d\tau.\end{gathered} \tag{14}$$

Из этого уравнения вытекают следующие оценки:

$$\begin{gathered}\left\|u(t,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(t)\right\| \leqslant |\varepsilon|\, bgh\int_0^t \|\mathcal{U}(t-\tau)\|\left\|u(\tau,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\|d\tau + |\varepsilon|^{n+1}\, Tq\left[\sum_{m=0}^{n}\|B(Gu_m, Hu_{n-m})\|_{C_E} + \right. \\ + |\varepsilon|\sum_{m=1}^{n}\|B(Gu_m, Hu_{n-m+1})\|_{C_E} + |\varepsilon|^2\sum_{m=2}^{n}\|B(Gu_m, Hu_{n-m+2})\|_{C_E} + \ldots + |\varepsilon|^{n-1}\|B(Gu_n, Hu_{n-1})\|_{C_E} + \\ \left. + \|B(Gu_{n-1}, Hu_n)\|_{C_E} + |\varepsilon|^n\|B(Gu_n, Hu_n)\|_{C_E}\right] \leqslant |\varepsilon|\, bgh\int_0^t \|\mathcal{U}(t-\tau)\|\left(\|u(\tau,\varepsilon)\| + \left\|u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\|\right)\times \\ \times\left\|u(\tau,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\|d\tau + |\varepsilon|^{n+1}\, Tqbgh[(n+1)a^2bghc^n + |\varepsilon|\, na^2bghc^{n+1}\, |\varepsilon|^2\,(n-1)a^2bghc^{n+2} + \ldots \\ \ldots + 2|\varepsilon|^{n-1}\, a^2bghc^{2n-1} + |\varepsilon|^n\, a^2bghc^{2n}],\end{gathered} \tag{15}$$

где $c = Tqbgha$.

Если $|\varepsilon| < \dfrac{1}{2Tbghq(1+a)}$, то $\rho = |\varepsilon| c < \dfrac{a}{2(1+a)} < \dfrac{1}{2}$, и из цепочки неравенств (15) следует, что

$$\left\|u(t,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(t)\right\| \leqslant |\varepsilon|\, bgh\int_0^t \|\mathcal{U}(t-\tau)\|\left(\|u(\tau,\varepsilon)\| + \left\|u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\|\right)\left\|u(\tau,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\| d\tau +$$

$$+ |\varepsilon|^{n+1} Tqa^2 bgh\rho^2[n + 1 + n\rho(1 + \rho + \ldots + \rho^{n-1})] \leqslant |\varepsilon|\, bgh\int_0^t \|\mathcal{U}(t-\tau)\|\left(\|u(\tau,\varepsilon)\| +\right.$$

$$\left. + \left\|u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\|\right)\left\|u(\tau,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\| d\tau + |\varepsilon|\, Tqa^2 bgh\rho^n\left(n + 1 + \frac{n\rho}{1-\rho}\right) \leqslant$$

$$\leqslant |\varepsilon|\, bgh\int_0^t \|\mathcal{U}(t-\tau)\|\left(\|u(\tau,\varepsilon)\| + \left\|u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\|\right)\left\|u(\tau,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\| d\tau + \rho^n\varepsilon Tqa^2 bgh(2n+1),$$

так как $\rho(1-\rho)^{-1} < 1$ при $0 < \rho < 1/2$.

Обозначим через $\mathcal{K}(t,\tau,\varepsilon) = |\varepsilon|\, bgh\|\mathcal{U}(t-\tau)\|\left(\|u(\tau,\varepsilon)\| + \left\|u^r_{n\varepsilon}(\tau)\right\|\right)$ ограниченную при $0 \leqslant t,\ \tau \leqslant T$ функцию, поскольку последовательность $\{u^r_{n\varepsilon}(t)\}$ является сходящейся. В соответствии с неравенством Гроноулла-Беллмана

$$\left\|u(t,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(t)\right\| \leqslant \rho^n |\varepsilon|\, Tqa^2 bgh(2n+1)e^{\int_0^t \mathcal{K}(t,\tau,\varepsilon)d\tau},$$

и, поскольку $(2n+1)\rho^n \to 0$ при $n \to \infty$, то и $\left\|u(t,\varepsilon) - u^r_{n\varepsilon}(t)\right\|_{C_E} \to 0$ при $n \to \infty$. В итоге $u(t,\varepsilon) = u^r(t,\varepsilon)$ и теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения (уравнение типа Больцмана)

$$\partial_t u + y\partial_x u = \varepsilon\iint_\Pi e^{-\xi^2}(u^2(t,\xi,y) - u^2(t,x,\eta))d\xi d\eta,\quad u|_{t=0} = e^{-x^2}.$$

В качестве E возьмем банахово пространство непрерывных и ограниченных в замкнутой полосе

$$\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\},$$

с нормой равномерной сходимости; область определения оператора $A = -y\partial_x$ состоит из непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по y функций из E; билинейный оператор

$$B(u,v) = \iint_\Pi e^{-\xi^2}(u(\xi,y)v(\xi,y) - u(x,\eta)v(x,\eta))d\xi d\eta,$$

действующий из $E \times E$ в E, очевидно, является ограниченным.

Решение ищем в виде ряда по степеням малого параметра:

$$u^r(t,x,y,\varepsilon) = u_0(t,x,y) + \varepsilon u_1(t,x,y) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t,x,y) + \ldots,$$

коэффициенты которого являются решением серии задач. Поскольку непрерывная полугруппа задается формулой $\mathcal{U}\varphi \equiv \varphi(t - xy, y)$, то

$$u_0(t,x,y) = e^{-(x-ty)^2}.$$

Для определения $u_1(t,x,y)$ имеем следующее уравнение:

$$\partial_t u_1 + y\partial_x u = \iint_\Pi e^{-\xi^2}(e^{-2(\xi-ty)^2} - e^{-2(x-t\eta)^2})d\xi d\eta.$$

Пользуясь формулой решения линейного неоднородного уравнения в банаховом пространстве (см. формулы (8)), имеем

$$u_1(t,x,y) = \int_0^t \left[2\sqrt{\pi}e^{2(t-\tau)^2 y^2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-2(x-y(t-\tau))^2 + 2(t-\tau)^2}\frac{\operatorname{erf}(\sqrt{2}(x+t-\tau)) - \operatorname{erf}(\sqrt{2}(x-t+\tau))}{t-\tau}\right]d\tau,$$

где $\operatorname{erf}(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\theta e^{-\xi^2}d\xi$ – интеграл ошибок.

5. СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННОГО БИЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Далее будем изучать начальную задачу

$$\partial_t u = Au + \varepsilon B(Gu, Hu), \quad u|_{t=0} = u^0, \tag{16}$$

где H – замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D_H \supset D_A$.

Сформулируем и докажем утверждение об аппроксимации уравнения (16) уравнением с неограниченным билинейным оператором.

Теорема 3. *Пусть наряду с уравнением* (16) *задано уравнение*

$$\partial_t v = Av + \varepsilon B(Gv, Lv), \quad t \in [0, T], \tag{17}$$

с тем же начальным условием, в котором L является ограниченным оператором. Тогда, если $u(t,\varepsilon)$ есть точное решение задачи Коши (16), *ограниченное на отрезке $[0,T]$ при всех достаточно малых ε, то существует константа $C_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ такая, что*

$$\|u(t,\varepsilon) - v(t,\varepsilon)\| \leqslant C_\varepsilon \|(H - L)u(t,\varepsilon)\|, \tag{18}$$

где $v(t,\varepsilon)$ – решение начальной задачи для уравнения (17).

Доказательство. Представим уравнение (16) в виде

$$\partial_t u = Au + \varepsilon B(Gu, Lu) + \varepsilon B(Gu, (H - L)u)$$

и вычтем из него уравнение (17):

$$\partial_t(u - v) = A(u - v) + \varepsilon[B(G(u - v), Lu) + B(Gv, L(u - v))] + \varepsilon B(Gu, (H - L)u), \quad (u - v)|_{t=0} = 0. \tag{19}$$

Составим интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (19):

$$u - v = \varepsilon\int_0^t \mathcal{U}(t - \tau)[B(G(u - v), Lu) + B(Gv, L(u - v))]d\tau + \varepsilon\int_0^t \mathcal{U}(t - \tau)B(Gu, (H - L)u)d\tau.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\|u - v\| \leqslant |\varepsilon|\, bg\int_0^t \|\mathcal{U}(t - \tau)\|(\|Lu\| + \|v\|\|L\|)\|u - v\|\,d\tau + |\varepsilon|\, Tqbg\|u\|\|(H - L)u\|,$$

к которому можно применить неравенство Гронуола–Беллмана:

$$\|u - v\| \leqslant |\varepsilon|\, Tqbg\|u\| \exp\{|\varepsilon|\, Tqbg(\|Lu\|_{C_E} + \|v\|_{C_E}\|L\|)\}\|(H - L)u\|. \tag{20}$$

Оценка (20) совпадает с неравенством (18) при очевидном выборе C_ε. То, что $C_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ вытекает из ограниченности решения $u(t,\varepsilon)$ и оператора L. Теорема доказана.

6. СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ И ε-ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу с положительным ε

$$\varepsilon\partial_t u = \tilde{A}u + \varepsilon^2 B(Gu, Hu), \quad u|_{t=0} = u^0, \tag{21}$$

и потребуем выполнения условия ($\widetilde{A}$): оператор $\widetilde{A}$ является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы $\widetilde{\mathcal{U}}(t)$. Будем искать решение задачи Коши (21) в виде ряда

$$u^f(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon u_1(t, \varepsilon^{-1}) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t, \varepsilon^{-1}) + \ldots \tag{22}$$

с коэффициентами, определяемыми из серии начальных задач

$$
\begin{gathered}
\varepsilon\partial_t u_0 = \tilde{A}u_0, \quad u_0|_{t=0} = u^0, \\
\varepsilon\partial_t u_1 = \tilde{A}u_1 + \varepsilon B(Gu_0, Hu_0), \quad u_1|_{t=0} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varepsilon\partial_t u_n = \tilde{A}u_n + \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k, Hu_{n-k-1}), \quad u_n|_{t=0} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Заметим, что все задачи серии (23) являются сингулярно возмущенными и, поэтому, в соответствии с формулами решений таких задач [11, гл. I, § 6] имеем

$$
\begin{gathered}
u_0(t, \varepsilon^{-1}) = \tilde{\mathcal{U}}(\varepsilon^{-1}t)u^0, \\
u_1(t, \varepsilon^{-1}) = \int_0^t \tilde{\mathcal{U}}(\varepsilon^{-1}(t-\tau))B(Gu_0(\tau, \varepsilon^{-1}), Hu_0(\tau, \varepsilon^{-1}))d\tau, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_n(t, \varepsilon^{-1}) = \int_0^t \tilde{\mathcal{U}}(\varepsilon^{-1}(t-\tau))\left[\sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k(\tau, \varepsilon^{-1}), Hu_{n-k-1}(\tau, \varepsilon^{-1}))\right]d\tau, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Определение 2. Если ряд (22) сходится равномерно по $t \in [0, T]$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, то его сумма $u^{pr}(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ называется ε-псевдорегулярным решением задачи Коши (21).

Сформулируем утверждения, аналогичные доказанным ранее теоремам, относящимся к регулярному случаю.

Теорема 4. *Если выполнено условие* ($\widetilde{A}$) *и операторы* G *и* H *являются ограниченными, то начальная задача* (21) *имеет* ε*-псевдорегулярное решение* $u^{\text{pr}}(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$*, совпадающее с ее точным решением* $u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$.

Пусть H — замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D_H \supset D_{\tilde{A}}$. Предположим, что задана еще одна начальная задача

$$
\varepsilon\partial_t v = \tilde{A}v + \varepsilon^2 B(Gv, Lv), \quad v|_{t=0} = u^0, \tag{25}
$$

с ограниченным оператором L.

Теорема 5. *Если* $u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ — *точное решение задачи Коши* (21) (*с неограниченным оператором* H), *ограниченное на отрезке* $[0, T]$, *то существует константа* $C_\varepsilon \to 0$ *при* $\varepsilon \to +0$ *такая, что*

$$
\|u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) - v(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \leqslant C_\varepsilon \|(H - L)u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\|. \tag{26}
$$

Следствие из теоремы 5. *Пусть последовательность операторов* $\{L_m\}_{m=1}^{\infty}$ *сильно сходится к оператору* H. *Тогда для любого целого неотрицательного n существует натуральное m такое, что при всех достаточно малых положительных* ε

$$
\|u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) - v_{n\varepsilon}^{[m]}(t, \varepsilon^{-1})\| \leqslant Q_n \varepsilon^{n+1},
$$

где $v_{n\varepsilon}^{[m]}$ *есть n-я частичная сумма ряда, представляющего* ε*-псевдорегулярное решение уравнения* (25), *когда* $L = L_m$; Q_n — *константа, не зависящая от* ε.

Эти утверждения доказываются так же, как и аналогичные им в регулярном случае, с учетом того, что $\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant 1 \ \forall t \geqslant 0$.

Пример 2. Построим приближенное решение задачи Коши

$$
\varepsilon\partial_t u = \tilde{A}u - \varepsilon^2 B(u, Hu), \quad t \in (0, T], \quad u|_{t=0} = u^0.
$$

Здесь, $E = C[0,1]$ – банахово пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций переменной x; оператор $\tilde{A} = \partial_x^2$, с областью определения $D_{\tilde{A}} = \{w(x) \in C[0,1] : \partial_x^2 w \in C[0,1],\ w(0) = w(1) = 0\}$; оператор G совпадает с тождественным оператором I; оператор $H = \partial_x$, с областью определения $D_H^\mu = \{w(x) \in C[0,1] : \partial_x w \in C[0,1],\ \mu w(0) - w(1) = 0\}$, $\mu \in (0,1)$; билинейный оператор $B(u,v) = -uv$; $u^0 = \varphi(x) \in D_A$.

Резольвента оператора H задается формулой

$$R_H(\lambda) = \frac{1}{\mu - e^\lambda}\left(\mu\int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)d\xi + e^\lambda \int_x^1 e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)d\xi\right),$$

и при всех $\lambda > 0$ (и заданном $\mu \in (0,1)$) подчинена оценке $\|R_H(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$ [12, гл. II, п. 1.3]. В этих условиях [11, гл. I, § 2] последовательность ограниченных операторов

$$L_m = -mI - m^2 R_H(m)$$

при $m \to \infty$ сильно сходится к оператору H. С помощью них составим серию сингулярно возмущенных задач

$$\varepsilon\partial_t v = \tilde{A}v - \varepsilon^2 B(v, H_m v),\ \ t \in (0,T],\ \ v|_{t=0} = u^0. \tag{27}$$

Сжимающая полугруппа задается с помощью функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности [13, гл. IV, § 1]

$$G(t/\varepsilon, x; s) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k s)\sin(\pi k x)e^{-\pi k^2 t/\varepsilon}.$$

Построим ε-псевдорегулярное решение задачи (27) (оно совпадает с ее точным решением):

$$V_m(t, x, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = v_0(t, x, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon v_1(t, x, \varepsilon^{-1}) + \ldots,$$

где

$$v_0(t, x, \varepsilon^{-1}) = \int_0^1 G(t\varepsilon^{-1}, x; s)\varphi(s)ds,$$

$$v_1(t, x, \varepsilon^{-1}) = -\int_0^t \left[\int_0^1 G((t-\tau)\varepsilon^{-1}, x; s)(v_0(\tau, s, \varepsilon^{-1})H_m[v_0(\tau, s, \varepsilon^{-1})])ds\right]d\tau,$$

и т.д.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время теория сингулярных возмущений представляет собой активно развивающуюся область математики. При этом решаются новые задачи путем комбинирования различных методов и подходов как ранее разработанных, так и вновь созданных [14—17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М.: Наука, 1973.
3. *Волков В.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. С. 1851—1860.
4. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
5. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.
6. *Krivoruchenko M.I., Nadyozhin D.K., Yudin A.V.* Hydrostatic equilibrium of stars without electroneutrality constraint // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. № 15. P. 1—20. id 083016.

7. *Качалов В.И.* О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 64–71.
8. *Besova M.I., Kachalov V.I.* Analytical Aspects of the Theory of Tikhonov Systems // Mathematics. 2022. 10:1, 72 (published online). 14 pp. www.mdpi.com/2227-7390/10/1/72.
9. *Kachalov V.I.* Holomorphic Regularization of Boundary-Value Problems for Tikhonov Systems // J. Mathem. Sciences. 2022. V. 268. № 1. P. 63–69.
10. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений диференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
11. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
12. *Дезин А.А.* Воспоминания и избранные труды по математике. М.: Макс Пресс, 2011.
13. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
14. *Malek S.* On Boundary Layer Expansions For a Singularly Perturbed Problem With Confluent Fuchsian Singularities // Mathematics. 2020. V. 8. № 2. P. 189.
15. *Glizer V.Y.* Asymptotic Analysis of Spectrum and Stability for One Class of Singularly Perturbed Neutral-Type Time Delay Systems // Axioms. 2021. V. 10. № 4. P. 325 (published online).
16. *Bobodzhanov A.A., Safonov V.F., Kachalov V.I.* Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // Axioms. 2019. V. 8. № 27. https://doi.org/10.3390/axioms8010027
17. *Нефедов Н.Н.* Периодические контрастные структуры в задаче реакция-диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 4. С. 601–612.