
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.635

*Посвящается доктору физико-математических наук профессору
Евгению Михайловичу Шахову в связи с его 90-летием*

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ КОРОТКИХ КАНАЛОВ¹⁾

© 2023 г. И. В. Воронич^{1,*}, В. А. Титарев^{1,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: i.voronich@frcsc.ru

**e-mail: vladimir.titarev@frcsc.ru

Поступила в редакцию 17.05.2023 г.

Переработанный вариант 26.06.2023 г.

Принята к публикации 22.08.2023 г.

На основе S-модельного кинетического уравнения рассматривается задача о перетекании разреженного газа из резервуара высокого давления в резервуар низкого давления через плоскую мембрану с конечным числом пор. Кинетическое уравнение решается численно неявным консервативным методом второго порядка точности, реализованным в собственном расчетном коде Несветай. Для переходных и континуальных режимов получены численные решения уравнений Навье—Стокса сжимаемой среды. Изучается зависимость от числа Кнудсена (Kn) расхода газа через систему пор и действующих на стержни мембраны силы при отношении давлений в резервуарах 2 : 1. Описаны особенности поля течения вблизи мембраны и на удалении от нее. Библ. 49. Фиг. 13. Табл. 3.

Ключевые слова: мембрана, канал, кинетическое уравнение, S-модель, разреженный газ, вычислительная аэродинамика, неструктурированная сетка, параллельные вычисления.

DOI: 10.31857/S0044466923120281, **EDN:** RGYZZW

ВВЕДЕНИЕ

Исследование течений разреженных газов в каналах и трубах важно для многих приложений (см. [1, 2]). К настоящему времени хорошо развиты методы расчета для случая бесконечной длины и произвольного поперечного сечения на основе линеаризованных кинетических моделей (см. [3–5]). Много работ посвящено изучению течений разреженного газа через одиночные каналы и трубы конечной длины на основе нелинейных кинетических уравнений либо метода прямого статистического моделирования Монте-Карло (см. [6–12]). Более сложной является задача моделирования течения газа через мембрану высокой проницаемости, представляющую собой объединение большого количества отверстий (пор), так как в расчетах необходимо учитывать взаимное влияние пор.

Спектр применения современных мембран включает фильтрацию жидкостей и газов, разделение газовых смесей и другие приложения (см. [13–15]). Мембраны изготавливаются с использованием различных методов производства и характеризуются рядом геометрических и топологических свойств: долей площади, занятой порами (геометрическая проницаемость), формой пор в поперечном сечении и в продольном направлении, удлинением пор. Использование современных микро- и нанотехнологий привело к увеличению проницаемости мембран за счет миниатюризации их пор и увеличения количества пор на единицу площади (см. [13]. Некоторые из мембран имеют периодические структуры с высокой геометрической проницаемостью и толщиной, сравнимой с размером пор. Иногда в приложениях вместо мембран для создания потока с заданными свойствами используются обычные проволочные сетки (см. [16, 17]).

¹⁾Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН и МСЦ РАН (г. Москва).

Настоящая работа посвящена прямому численному анализу задачи течения разреженного газа через плоскую мембрану, состоящую из конечного числа коротких пор. Основная цель исследования состоит в изучении влияния степени разреженности газа на расход массы через поры, действующие на стержни мембраны силы и общую картину течения при конечном значении перепада давления. Вычисления проводятся в широком диапазоне чисел Кнудсена. Для больших и умеренных чисел Кнудсена результаты основаны на численном решении кинетического уравнения с S-модельным интегралом столкновений (см. [18, 19]) с помощью собственного трехмерного параллельного решателя (см. Несветай [20]). Для режимов, близких к континуальным, строится решение уравнений Навье—Стокса сжимаемой среды. Полученные результаты для мембраны с конечным числом пор сравниваются с решением для бесконечной системы пор с таким же шагом.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение одноатомного разреженного газа через двухмерную мембрану, состоящую из конечного числа пор и разделяющую два полубесконечных резервуара. Вдали от мембраны газ в резервуарах поддерживается при одинаковой температуре и разных давлениях, что обуславливает возникновение течения газа через мембрану. Структура мембраны описывается геометрической проницаемостью h/H и относительной длиной поры L/h . Здесь h — полувисота поры, H — полупериод структуры (шаг решетки пор). Введем декартову систему координат (x, y) с центром в начале центральной поры $x = y = 0$, ось Ox направлена вдоль пор. Границы поры с номером k задаются условиями

$$0 \leq x \leq L, \quad y_k^- \leq y \leq y_k^+, \quad y_k = -h + 2(h + H)k, \quad y_k^+ = y_k^- + 2h, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (1.1)$$

Центральная пора с номером $k = 0$ соответствует $-h \leq y \leq h$. Полное число пор равно $N = 2k + 1$. Предельный случай $k \rightarrow \infty$ соответствует течению через бесконечную систему каналов (пор). Между порами находятся стержни мембраны высоты $2(H - h)$. Границы стержня с номером k , расположенного между порами k и $k + 1$, выражаются условием

$$0 \leq x \leq L, \quad y_k^+ \leq y \leq y_{k+1}^-.$$

Течение разреженного газа сквозь поры от входного сечения $x = 0$ к выходному сечению $x = L$ обусловлено разницей давлений $p_L - p_R$ между левым резервуаром-источником и правым резервуаром-стоком. Боковые стенки пор и вертикальная стена мембраны поддерживаются при одной и той же постоянной температуре, равной температуре невозмущенного газа на бесконечности $T_w = T_L = T_R$.

Решение задачи зависит от следующих безразмерных величин: отношения давлений p_L/p_R , числа пор N , относительной длины поры L/h , геометрической проницаемости h/H и параметра разреженности δ , который обратно пропорционален числу Кнудсена Kn и определяется по формуле

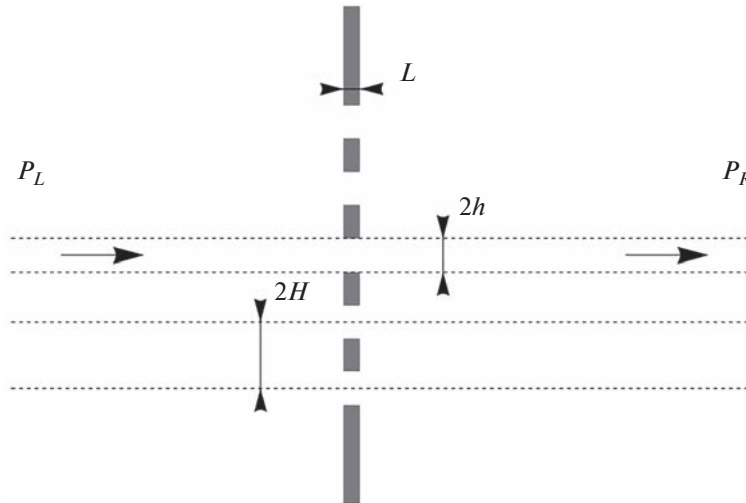
$$\delta = \frac{hp_L}{\mu_L \beta_L}. \quad (1.2)$$

Здесь $\beta_L = \sqrt{2RT_L}$ — наиболее вероятная тепловая скорость, R — газовая константа, μ_L — значение динамической вязкости газа при температуре $T = T_L$. В настоящей работе расчеты ограничиваются случаем умеренного отношения давлений $p_L/p_R = 2$ и коротких пор $L/h = 1$. Число пор принимается равным $N = 5$ ($-2 \leq k \leq 2$), геометрическая проницаемость $h/H = 0.5$. Соответствующая данному выбору схема течения приведена на фиг. 1.

Основными практически интересными характеристиками задачи являются расход газа через поры, действующие на стержни мембраны силы и поле течения в обоих резервуарах. Расход газа через пору с номером l дается формулой

$$\dot{M}_k(x) = \int_{y_k}^{y_k+2h} m n u_x dy, \quad (1.3)$$

где m — масса молекулы.



Фиг. 1. Геометрия задачи и схема течения для $N = 5$, $L/h = 1$, $h/H = 0.5$.

Полная сила, действующая на стержень k , определяется обычным образом: интегрированием по всей поверхности стержня. В расчетах диапазон изменения параметра разреженности охватывает практически важные режимы $0 \leq \delta \leq 200$.

2. РАСЧЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Численный анализ течения основан на использовании как кинетического, так и континуального подходов. Предполагаем, что среда подчиняется уравнению состояния совершенного газа

$$p = \rho RT, \quad \rho = mn, \quad (2.4)$$

где p — давление, ρ — плотность, R — газовая постоянная, T — температура, n — числовая плотность. Энергия единицы объема газа выражается через внутреннюю энергию единицы массы e , плотность и скорость $\mathbf{u}$ газа — по формуле

$$E = \rho \left(e + \frac{1}{2} u_\alpha u_\alpha \right), \quad e = \frac{RT}{\gamma - 1}. \quad (2.5)$$

Здесь предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам. В расчетах приняты значения показателя степени адиабаты $\gamma = 5/3$ и числа Прандтля $Pr = 2/3$. Зависимость вязкости газа μ от температуры предполагается соответствующей модели твердых сфер $\mu \sim \sqrt{T}$, так что

$$\delta = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{Kn} \approx \frac{0.903}{Kn}.$$

Кинетический подход основан на прямом численном решении уравнения Больцмана с S-модельным интегралом столкновений (см. [18, 19]) и используется в диапазоне значений параметра разреженности $0 \leq \delta \leq 50$. S-модель широко использовалась при расчетах течений разреженного газа в каналах и трубах и показала надежные результаты (см., например, [1, 2, 9, 12]). Хотя поставленная двумерная задача допускает существенное упрощение путем введения редуцированных функций распределения (см., например, [21]), в настоящем исследовании переход к редуцированным функциям не применялся, так как в расчетах использовался универсальный трехмерный решатель.

Состояние одноатомного разреженного газа определяется функцией распределения по скоростям $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ — пространственная координата, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ — вектор скорости молекулы, t — время. Макроскопические величины, такие как числовая плот-

ность n , скорость, температура и вектор теплового потока $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, определяются как интегралы функции распределения скоростей по молекулярной скорости:

$$(n, n\mathbf{u}, E, \mathbf{q}) = \int \left(1, \xi, \frac{1}{2}m\xi^2, \frac{1}{2}m\mathbf{v}\mathbf{v}^2\right) f d\xi, \quad v_i = \xi_i - u_i. \quad (2.6)$$

S-модельное кинетическое уравнение для функции распределения имеет вид (см. [18, 19])

$$\begin{aligned} \partial f / \partial t + \xi_\alpha \partial f / \partial x_\alpha &= \nu(f^{(S)} - f), \quad \nu = p/\mu, \\ f^{(S)} &= f_M \left(1 + \frac{4}{5}(1 - \text{Pr})S_\alpha c_\alpha (c^2 - 5/2)\right), \quad f_M = n/(2\pi RT)^{3/2} \exp(-c^2), \\ S_i &= 1/n \int c_i c^2 f d\xi, \quad c_i = v_i/\sqrt{2RT}, \quad c^2 = c_\alpha c_\alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

На поверхности пор и мембраны предполагается условие диффузного молекулярного рассеяния с полной тепловой аккомодацией к заданной температуре поверхности T_w . Плотность отраженных молекул n_w находится из условия непроницаемости, согласно которому поток массы через стенки равен нулю.

Для анализа течения при переходных и континуальных режимах, помимо кинетического уравнения, используются уравнения Навье—Стокса сжимаемой среды, имеющие вид законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \nabla(\mathbf{F} - \mathbf{F}^\nu) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3), \quad \mathbf{F}^\nu = (\mathbf{F}_1^\nu, \mathbf{F}_2^\nu, \mathbf{F}_3^\nu), \quad (2.8)$$

где векторы независимых переменных $\mathbf{U}$, конвективных $\mathbf{F}$ и вязких потоков $\mathbf{F}^\nu$ имеют вид

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + \delta_{1k} p \\ \rho u_2 u_k + \delta_{2k} p \\ \rho u_3 u_k + \delta_{3k} p \\ (E + p)u_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_k^\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1k} \\ \tau_{2k} \\ \tau_{3k} \\ u_\alpha \tau_{\alpha k} - q_k \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронеккера. Выражения для вектора потока и тензора вязких напряжений имеют вид

$$\tau_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div } \mathbf{u} \right), \quad q_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

Коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ связаны друг с другом через определение числа Прандтля следующей формулой:

$$\lambda = \frac{c_p \mu}{\text{Pr}}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

Наконец, на поверхности пор применяется граничное условие прилипания газа и задается фиксированная температура поверхности T_w .

3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

3.1. Метод решения кинетического уравнения

Для решения S-модельного кинетического уравнения (2.7) в настоящей работе используется вариация универсального метода дискретных скоростей, предложенного в [22–25]. Используемый вариант численного метода предназначен для моделирования стационарных течений на неподвижных гексаэдральных расчетных сетках и комбинирует квазимонотонную аппроксимацию оператора переноса второго порядка аппроксимации, консервативную процедуру вычисления входящих в S-модельный интеграл столкновений макропараметров и неявную одношаговую схему продвижения по времени. Полученный таким образом численный метод решения хорошо подходит для расчета всех областей течения, включая области быстрого изменения макроскопических величин и области с разрывами функции распределения.

Подробное описание используемого варианта численного метода можно найти в [23, 24]. Для удобства представления результатов кратко опишем основные детали метода решения. Введем в скоростном пространстве ограниченную расчетную область и сетку с узлами $\xi_j = (\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j})$, $j = 1, \dots, N_\xi$. Кинетическое уравнение (2.7) переписывается в виде системы из N_ξ уравнений для вектора $f_j = f(t, \mathbf{x}, \xi_j)$ значений функции распределения в центрах скоростных ячеек:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\Xi_\alpha \circ \mathbf{f}) = \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{v}(\mathbf{f}^{(S)} - \mathbf{f}). \quad (3.10)$$

Здесь $f_j^{(S)} = f^{(S)}(t, \mathbf{x}, \xi_j)$, Ξ_k — вектор, компонентами которого являются k -компонента молекулярной скорости во всех узлах сетки: $\Xi_k = (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kN_\xi})^T$; через $\circ$ обозначена операция покомпонентного умножения двух векторов: $c = a \circ b$ — вектор с компонентами $c_i = a_i b_i$.

Далее расчетная область в физических переменных разбивается на контрольные объемы (ячейки) V_i , $i = 1, \dots, N_{\text{space}}$, гексаэдральной формы с четырехугольными гранями A_{li} , где l — номер грани. Интегрирование системы (3.10) по ячейке V_i приводит к полудискретной схеме для сеточных значений функции распределения $\mathbf{f}_i$:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial t} = \mathbf{R}_i = -\frac{1}{|V_i|} \sum_{l=1} \Phi_{li} + \mathbf{J}_i, \quad \Phi_{li} = \int_{A_{li}} (\xi_{li} \circ \mathbf{f}) dS. \quad (3.11)$$

Здесь компоненты вектора ξ_{li} равны значениям проекции вектора молекулярной скорости на внешнюю единичную нормаль к грани l пространственной ячейки V_i .

Процедура нахождения численного потока Φ_{li} для грани l ячейки V_i состоит из двух шагов. На первом шаге для достижения второго порядка аппроксимации по пространству используется интерполяция вдоль сеточных линий в направлении нормали к грани (см. [26–28]). Значения $\mathbf{f}_{li}$ функции распределения на внутренней стороне каждой грани ячейки V_i вычисляются по формуле

$$\mathbf{f}_{li} = \mathbf{f}_i + \Psi(\mathbf{S}_L, \mathbf{S}_R) \Delta_l. \quad (3.12)$$

Здесь $\mathbf{S}_L$ и $\mathbf{S}_R$ — левая и правая оценки наклона решения, Δ_l — расстояние от центра ячейки i до центра грани l , функция Ψ — ограничитель наклонов ван Албада, используемый для подавления осцилляций на разрывах. На втором этапе полученные значения функции распределения $\mathbf{f}^-$, $\mathbf{f}^+$ с двух сторон каждой грани сетки используются для нахождения окончательного значения Φ_{li} путем решения задачи Римана для линейного уравнения в направлении, перпендикулярном грани:

$$\Phi_{li} = \frac{1}{2} \xi_{li} \circ [\mathbf{f}^- + \mathbf{f}^+ - \text{sign}(\xi_{li}) \circ (\mathbf{f}^+ - \mathbf{f}^-)] |A_{li}|, \quad (3.13)$$

где $|A_{li}|$ — площадь грани. Для граней сетки, лежащих на границах расчетной области в физическом пространстве, значение $\mathbf{f}^+$ находится путем аппроксимации заданного граничного условия. Для диффузного отражения при заданной температуре поверхности вычисляется плотность отраженных молекул n_w таким образом, чтобы обеспечивалось точное выполнение условия непротекания. Новым элементом численного метода, реализованным в настоящей работе, является специальное граничное условие на границах резервуаров, используемое для поддержания заданных давлений p_L , p_R , что требуется для обеспечения течения газа через мембрану. На каждом временном шаге скорость $\mathbf{u}$ и температура T газа экстраполируются из области течения, тогда как плотность n вычисляется с использованием заданного значения давления (p_L либо p_R) и экстраполированной температуры.

В каждой точке физического пространства макроскопические величины находятся из дискретного аналога условий аппроксимации точного интеграла столкновений S-модельным инте-

гравом, так что обеспечивается выполнение в полудискретной схеме (3.11) условий сохранения массы, импульса и энергии и правильной релаксации потока тепла [29]:

$$\mathbf{H}(\mathbf{W}) = m \sum_{j=1}^{N_\xi} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \\ \mathbf{v}\mathbf{v}^2 \end{pmatrix}_j (f^{(S)} - f)_j \omega_j + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \text{Pr} \mathbf{q} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W} = (n, \mathbf{u}, T, \mathbf{q})^T. \quad (3.14)$$

Система (3.14) восьми нелинейных уравнений решается методом Ньютона. Для ускорения вычислений используется приближенное выражение для Якоби, предложенное в [22]. Отметим, что в специальном случае модели $\text{Pr} = 1$ (кинетическая модель БГК, см. [30]) последние три уравнения для вектора потока тепла $\mathbf{q}$ могут быть опущены, и система (3.14) сводится к использованию только законов сохранения (см. [31, 32]).

Неявная одношаговая схема для продвижения по времени получается из (3.11) обычным образом:

$$\frac{\Delta \mathbf{f}_i}{\Delta t} = \mathbf{R}_i^{n+1}, \quad \Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{n+1} - \mathbf{f}_i^n. \quad (3.15)$$

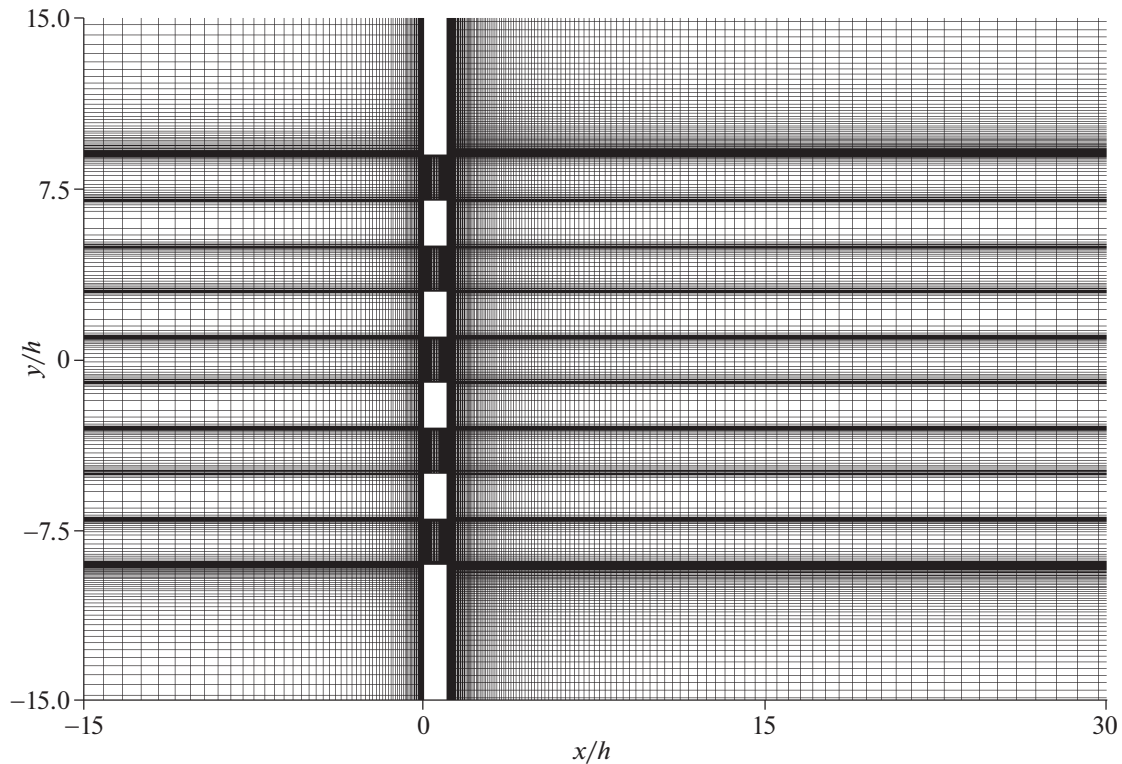
Для вычисления приращений функции распределения по времени $\Delta \mathbf{f}_i$ проводится приближенная линейаризация правой части схемы (3.15). Получающаяся система уравнений решается с помощью подхода LU-SGS, предложенного в [33, 34] для уравнений газодинамики.

Описанный численный метод реализован в параллельном коде (см. [20]), разрабатываемом в ФИЦ ИУ РАН вторым автором. Для проведения вычислений на современных многопроцессорных суперЭВМ с возможностью использования десятков тысяч ядер в пакете Несветай реализована двухуровневая модель параллельных вычислений MPI + OpenMP (см. [35, 36]), которая активно развивается в последние годы в приложении к газодинамическим расчетам (см., например, [37–39]). Примеры успешного применения кода Несветай к расчету различных течений разреженного газа, включающие сравнения с методом прямого численного моделирования, приближенными подходами и экспериментальными данными, можно найти в [9, 11, 12, 23, 25, 40–43].

3.2. Метод решения уравнений Навье–Стокса

Для решения уравнений сплошной среды (2.9) использовался коммерческий пакет Ansys CFX (см. [44]), лицензия на который имеется в ФИЦ ИУ РАН. Вычислительная модель в Ansys строится на основе полных уравнений Навье–Стокса, уравнения состояния, набора численных граничных условий и параметров численного метода. Граничные условия включают в себя условие прилипания на твердых стенках с фиксированной температурой $T = T_w$ и условия на внешних границах. Граничные условия на внешних границах левого резервуара-источника задавались как условие входа с фиксацией полного давления p_0 и температуры T_0 , соответствующих статическим значениям p_L и T_L при текущей скорости потока, при этом величина и направление вектора скорости потока не ограничиваются. Граничные условия на внешних границах правого резервуара-стока заданы с фиксацией среднего по площади статического давления p_R , также без ограничений на вектор скорости. Начальные условия задавались в виде однородных по области распределений скорости $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ и температуры $T = T_L$, а также ступенчатого распределения давления между резервуарами. Для удобства расчета расходов в каналах были введены интерфейсы между расчетными сетками правого и левого резервуаров на входе в каждый канал. Данные интерфейсы не влияют на точность расчета, так как расчетные сетки сопрягаются по принципу 1 : 1 без интерполяции.

Для дискретизации пространственных производных в уравнениях Навье–Стокса используются противопотоковые схемы класса TVD номинально 2-го порядка аппроксимации, с реконструкций внутри элементов с помощью конечноэлементных функций формы (см. [44–46]). Для интегрирования по времени применяется неявный метод Ньютона 1-го порядка аппроксимации и ограничением на шаг по времени через число Куранта на уровне ≈ 100 . Такие методы позволяют достичь достаточно быстрой сходимости к квазистационарному решению за ≈ 5000 – 10000 итераций по времени, обеспечивая разрешение переходных нестационарных процессов.



Фиг. 2. Расчетная сетка в физическом пространстве. Вид в плоскости x – y .

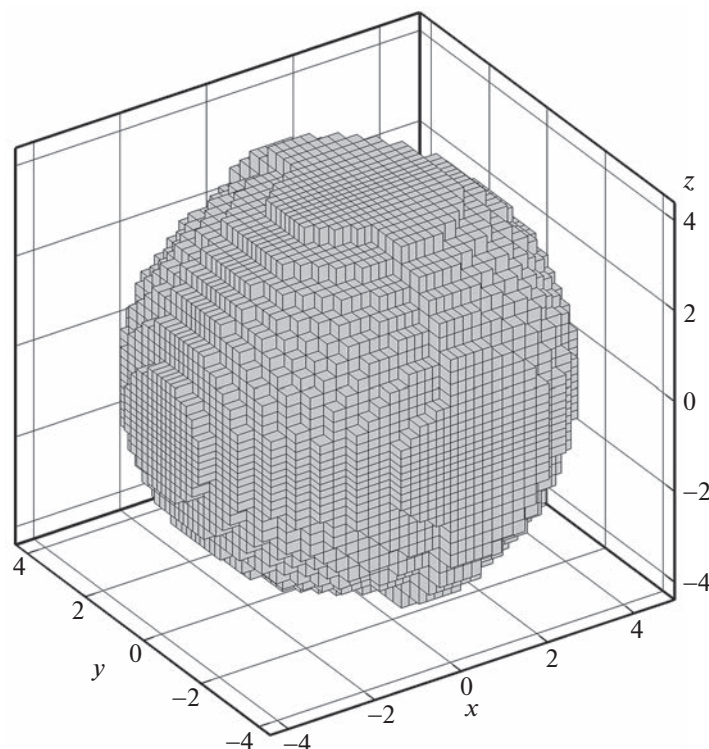
Критерием сходимости расчета является достижение среднеквадратичной невязкой для всех переменных уровня 10^{-5} и ниже в совокупности с установлением интегральных характеристик (расходов через каналы).

3.3. Расчетные сетки и организация вычислений

Для построения расчетных сеток использовалась программа Ansys ICEM CFD (см. [47]). Для учета особенностей решаемой плоской задачи в расчетах использовалась специальным образом построенная пространственная сетка. Как обычно, в расчетах полубесконечные резервуары заменялись расчетной областью конечного размера, в которой использовалась гексаэдральная пространственная сетка. По направлению z вводилось разбиение из одной расчетной точки и выставлялись граничные условия зеркального отражения молекул. Так как при больших значениях параметра разреженности δ течение в правом резервуаре-стоке может становиться нестационарным вследствие распада возникающей составной струи газа, сетка в плоскости x – y соответствовала полной постановке без учета геометрической симметрии.

При решении S-модельного кинетического уравнения (2.7) размер расчетной области, моделирующей резервуар-сток, принимался равным $L \leq x \leq 1000h$, $|y| \leq 500h$. Размер резервуара-источника менее критичен и принимался равным $-150h \leq x \leq 0$, $|y| \leq 100h$. Фигура 2 иллюстрирует особенности пространственной сетки вблизи пор. Размер ячейки по нормали к поверхности поры и вертикальной части мембраны равнялся $0.02h$. Количество ячеек вдоль поры равнялось 35, поперек поры – 25. Общее число ячеек в пространственной сетке равнялось 137 500.

В скоростном пространстве вводилась конечная область интегрирования с размерами $-4\beta_L \leq \xi_x \leq 4.5\beta_L$, $|\xi_y|, |\xi_z| \leq 4\beta_L$. Для большинства режимов течения использовалась равномерная трехмерная сетка с шагом $\Delta\xi \approx 0.45\beta_L$. Однако для режимов с $\delta \leq 5$ более точные результаты для поля течения получаются при использовании неравномерной сетки со сгущением к центру координат. Чтобы уменьшить количество узлов по скорости, углы области были скруглены (см. [48]), так что общее число ячеек по скорости равнялось 3628 для $\delta > 5$ и 23 784 для $\delta \leq 5$.



Фиг. 3. Расчетная сетка в скоростном пространстве, состоящая из 23 784 ячеек.

Фигура 3 иллюстрирует подробную скоростную сетку. Полное число ячеек в шестимерной расчетной сетке равнялось примерно 5×10^8 и 3.2×10^9 соответственно.

Для выхода на установившийся режим течения расчет проводился с большим шагом по времени $\Delta t = 0.2h/\beta_L$, что соответствует числу Куранта порядка 100. Для режимов, соответствующих значениям параметра разреженности $0 \leq \delta \leq 20$, удастся выйти на строго стационарное численное решение за 30 000–100 000 временных шагов. Однако для $50 > \delta > 30$ для получения установившегося расхода массы требуется сделать до 200 000 временных шагов.

Для построения кинетического решения для разных значений δ используется процедура продвижения по δ , организованная следующим образом. Сначала строится решение для $\delta = 1$ как наиболее простого для счета режима. После этого последовательно строятся решения задачи как в сторону свободномолекулярного режима ($\delta = 0.3, 0.1, 0.03$ и 0), так и в сторону режима сплошной среды ($\delta = 5, 10, 20, 30, 50$). При этом в качестве начального условия берется функция распределения, полученная для предыдущего значения δ из списка расчетных режимов.

Основные вычисления проводились с использованием четырех серверов, установленных в ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН. Каждый сервер содержит в себе два CPU Intel Xeon Gold 6338 (32 ядра; 2.0 ГГц; 2 потока на ядро) и 512 Гб оперативной памяти. Для межзловых обменов по MPI используется высокоскоростная сеть InfiniBand EDR с пропускной способностью 100 Гбит/с.

При решении уравнений сплошной среды (2.9) размер расчетной области выбирался приблизительно таким же, как для кинетического уравнения. При этом для аккуратного разрешения пристеночной области при $\delta \geq 100$ шаг сетки по нормали к поверхности пор принимался равным $0.002h$, по нормали к вертикальной стороне мембраны – $0.004h$, число ячеек на полную высоту канала $2h$ равнялось 120. Общее число ячеек в расчетной сетке – 1 264 000. Вычисления проводились на одном сервере ЦКП “Информатика” с использованием 64 ядер.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве примера рассмотрим течение через мембрану одноатомного газа гелия. Молекулярная масса гелия $m = 6.65 \times 10^{-27}$ кг, газовая постоянная $R = 2077.1$ Дж/(кг · К). Для коэффициента динамической вязкости μ принято выражение

$$\mu = \mu_{\text{ref}} \sqrt{\frac{T}{T_{\text{ref}}}},$$

где $T_{\text{ref}} = 273.15$ К, $\mu_{\text{ref}} = 0.000018$ Па с. Поскольку изучаются массовый расход и режим течения как функции параметра разреженности δ , полагаем $T_L = T_{\text{ref}}$, $\mu_L = \mu_{\text{ref}}$ и варьируем значение входного давления p_L с помощью определения параметра разреженности (1.2). Окончательно p_L выражается через параметр разреженности δ и полувысоту поры h по формуле

$$p_L = 0.0192 \frac{\delta}{h}. \quad (4.16)$$

В расчетах принято значение полувысоты поры $h = 0.1$ мм, что является реалистичным значением для тонкой прочной мембраны. Тогда при $\delta = 1$ давление на входе $p_L = 192$ Па.

При анализе результатов удобно использовать безразмерный приведенный массовый расход Q , который определяется как отношение фактического расхода через пору при заданных параметрах задачи к расходу $\dot{M}_{\text{вак}}^0$ при истечении через одиночную щель ($L = 0$) в вакуум ($p_R = 0$) в свободномолекулярном режиме:

$$Q_k(x) = \frac{\dot{M}_k(x)}{\dot{M}_{\text{вак}}^0}, \quad \dot{M}_{\text{вак}}^0 = \frac{h p_L}{\sqrt{\pi} \beta_L}. \quad (4.17)$$

Здесь выражение для $\dot{M}_{\text{вак}}^0$ взято из [49]. Строго говоря, значение расхода массы не должно зависеть от координаты x , однако в расчетах значение $Q_k(x)$ может отклоняться от константы вследствие ошибок дискретизации. В настоящей работе условие постоянства расхода массы вдоль поры выполнялось с точностью не хуже 0.1%.

В табл. 1 приведены рассчитанные значения приведенного расхода массы для каждой поры в зависимости от параметра разреженности. Видно, что зависимость расхода от положения поры мала для режимов, близких к свободномолекулярным, и увеличивается с ростом δ . При $\delta = 200$ отличие расхода массы через центральную пору $k = 0$ от расходов через крайние поры $k = \pm 2$ составляет около 8%. Различие между кинетическим и сплошносредным решениями при $\delta = 30$ и $\delta = 50$ составляет 6 и 4% соответственно. Сравнение расхода через центральную пору Q_0 с решением задачи в случае бесконечного числа пор ($N = \infty$) показывает значительное отличие периодической системы пор от мембраны с $N = 5$ порами. При $\delta < 1$ отличие между результатами может доходить до 50% и уменьшается с ростом величины δ до $\approx 6\%$.

В табл. 2, 3 приведены безразмерные значения действующих на стержни мембраны сил в направлениях x и y в зависимости от параметра разреженности. Видно, что действующая вдоль оси x сила имеет выраженный максимум при $\delta \approx 1$, при этом значения для центральных и боковых стержней отличаются примерно на 2–3%. Значения вертикальной компоненты силы пренебрежимо малы при малых значениях параметра δ , что говорит о малой кривизне линий тока вблизи каналов, но становится заметным при $\delta \geq 1$. При этом вертикальная сила направлена к оси x и прижимает стержни к линии симметрии. При сплошносредных режимах отношение вертикальной силы к горизонтальной силе для крайних стержней $|F_y/F_x| \approx 0.1$. Также заметна потеря симметрии сил с ростом δ . Согласие для сил со сплошносредным режимом заметно лучше, чем для расхода массы. Отличие от результатов для периодической системы пор достаточно заметное во всем диапазоне значений параметра разреженности. При этом для периодической системы каналов сила F_x монотонно падает с ростом значения параметра разреженности δ .

В заключение рассмотрим влияние на поле течения параметра разреженности. На фиг. 4, 5 представлены линии уровня числа Маха и линии тока для $\delta = 1$, полученные решением S-модельного кинетического уравнения (2.7). Хорошо видна стандартная симметричная картина дозвукового течения газа через центральную пору, которая начинает искажаться при переходе к бо-

Таблица 1. Нормированный расход газа как функция параметра разреженности и геометрии задачи: I – решение S-модельного уравнения (2.7), II – решение уравнений Навье–Стокса (2.9)

δ	$N = 5$										$N = \infty$	
	$k = -2$		$k = -1$		$k = 0$		$k = 1$		$k = 2$			
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
0.0	0.423		0.424		0.424		0.424		0.423		0.661	
0.01	0.432		0.434		0.435		0.434		0.432		0.657	
0.1	0.486		0.497		0.500		0.497		0.486		0.667	
0.3	0.551		0.576		0.583		0.576		0.551		0.691	
1.0	0.682		0.719		0.727		0.719		0.682		0.778	
5.0	1.040		1.075		1.080		1.075		1.040		1.132	
10.	1.198	1.032	1.241	1.071	1.248	1.074	1.241	1.071	1.198	1.032	1.307	1.101
20.	1.293	1.209	1.343	1.258	1.350	1.266	1.343	1.258	1.292	1.209	1.421	1.311
30.	1.343	1.280	1.395	1.333	1.402	1.340	1.404	1.333	1.343	1.280	1.468	1.394
50.	1.382	1.343	1.441	1.403	1.447	1.411	1.441	1.403	1.382	1.343	1.516	1.475
100.		1.393		1.468		1.475		1.468		1.393		1.551
200.		1.403		1.506		1.520		1.506		1.403		1.600

Таблица 2. Безразмерная сила $F_x/(hp_L)$ на каждом стержне: I – решение S-модельного уравнения (2.7), II – решение уравнений Навье–Стокса (2.9)

δ	$N = 5$								$N = \infty$	
	$k = -2$		$k = -1$		$k = 0$		$k = 1$			
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
0.0	1.207		1.208		1.208		1.207		0.970	
0.01	1.235		1.239		1.239		1.235		0.970	
0.1	1.399		1.420		1.420		1.399		0.968	
0.3	1.562		1.604		1.604		1.562		0.966	
1.0	1.729		1.776		1.776		1.729		0.954	
5.0	1.703		1.725		1.725		1.703		0.905	
10.	1.592	1.705	1.617	1.725	1.617	1.725	1.592	1.705	0.874	0.906
20.	1.457	1.528	1.487	1.559	1.487	1.559	1.456	1.528	0.851	0.870
30.	1.373	1.416	1.402	1.448	1.402	1.448	1.373	1.416	0.841	0.855
50.	1.313	1.318	1.332	1.340	1.332	1.340	1.313	1.318	0.831	0.840
100.		1.192		1.192		1.192		1.192		0.826
200.		1.113		1.155		1.155		1.113		0.817

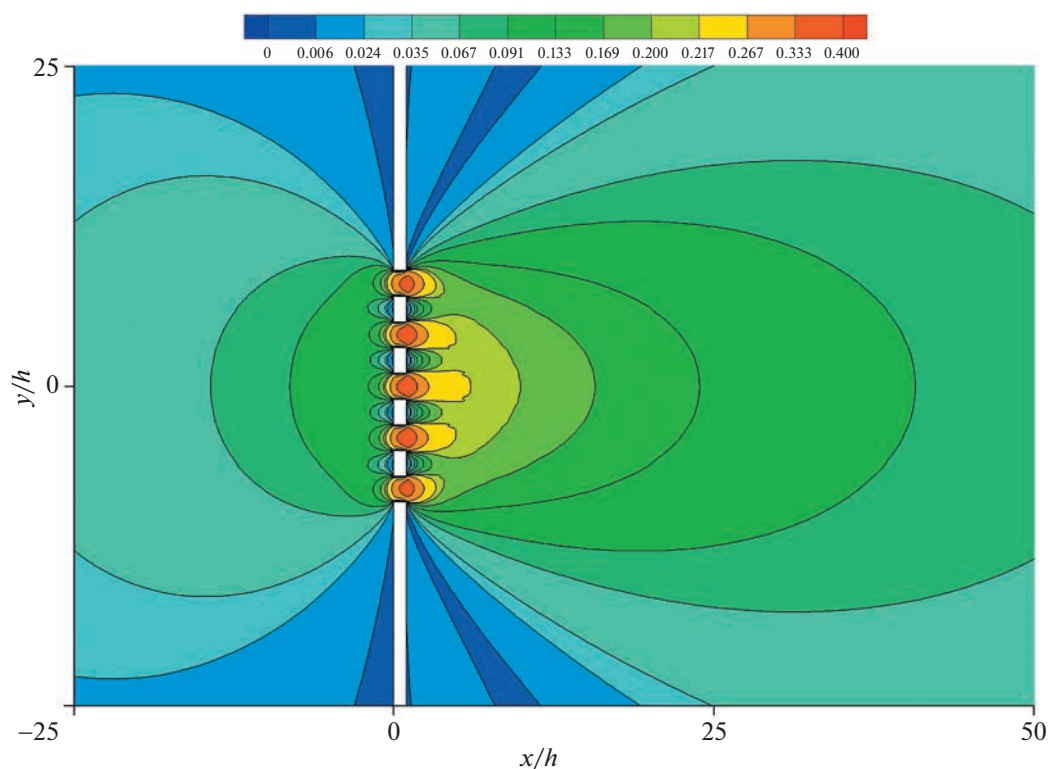
ковым порам. Возвратные течения вблизи пор не формируются. С ростом значения параметра δ картина течения существенно меняется (фиг. 6–9). Ядра формирующихся струй газа становятся сверхзвуковыми. Число Маха достигает значения 1.2 для центральной струи и падает до 1.08 на боковых струях, при этом заметно их притяжение к оси x . За вертикальными частями мембраны между порами формируются области возвратного течения газа.

При дальнейшем росте значения δ течение теряет симметрию вследствие неустойчивости коллективной струи. Так, при $\delta = 200$ потеря симметрии наблюдается сразу на выходе из пор (см. фиг. 10, 11). Наконец, фиг. 12, 13 иллюстрируют мгновенные линии тока в основной области

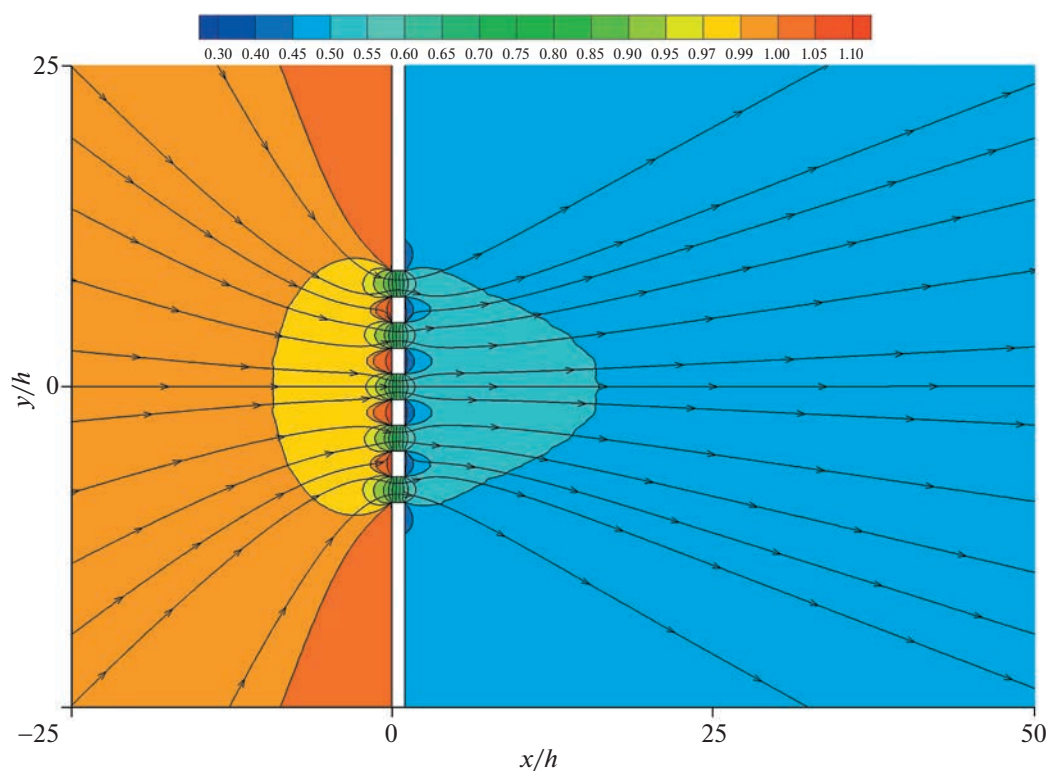
Таблица 3. Безразмерная сила $F_y/(hp_L)$ на каждом стержне: I – решение S-модельного уравнения (2.7), II – решение уравнений Навье–Стокса (2.9)

δ	$N = 5$							
	$k = -2$		$k = -1$		$k = 0$		$k = 1$	
	I	II	I	II	I	II	I	II
0.0	0.000		0.000		0.000		0.000	
0.01	0.000		0.000		0.000		0.000	
0.1	0.000		0.000		0.000		0.000	
0.3	0.005		0.002		−0.002		−0.005	
1.0	0.017		0.005		−0.005		−0.017	
5.0	0.055		0.017		−0.017		−0.055	
10.	0.097	0.071	0.030	0.022	−0.030	−0.022	−0.097	−0.071
20.	0.131	0.115	0.039	0.034	−0.039	−0.034	−0.131	−0.115
30.	0.147	0.133	0.043	0.039	−0.043	−0.039	−0.147	−0.133
50.	0.167	0.153	0.048	0.043	−0.048	−0.043	−0.167	−0.153
100.		0.180		0.049		−0.049		−0.180
200.		0.211		0.058		−0.059		−0.210

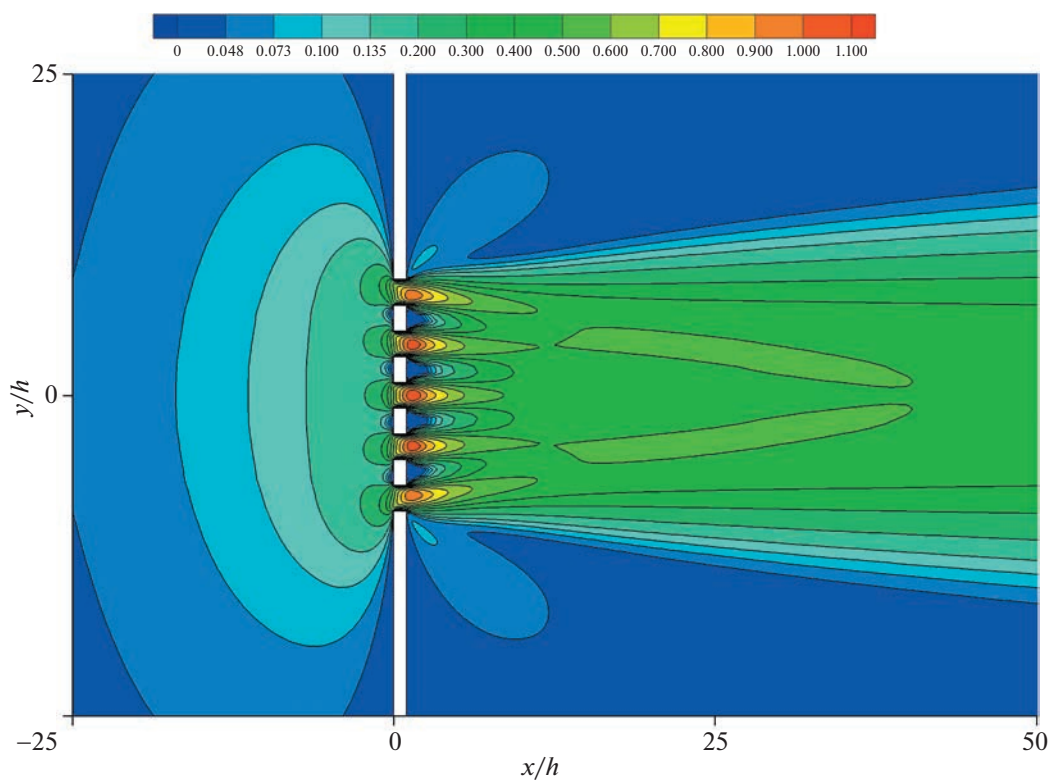
течения вдали от пор. Хорошо видна нестационарная несимметричная картина течения, связанная с двухмерным распадом струи газа. Однако возникающие вдали от мембраны вихревые структуры оказывают слабое влияние на расход газа через поры, который выходит на практически постоянное значение.



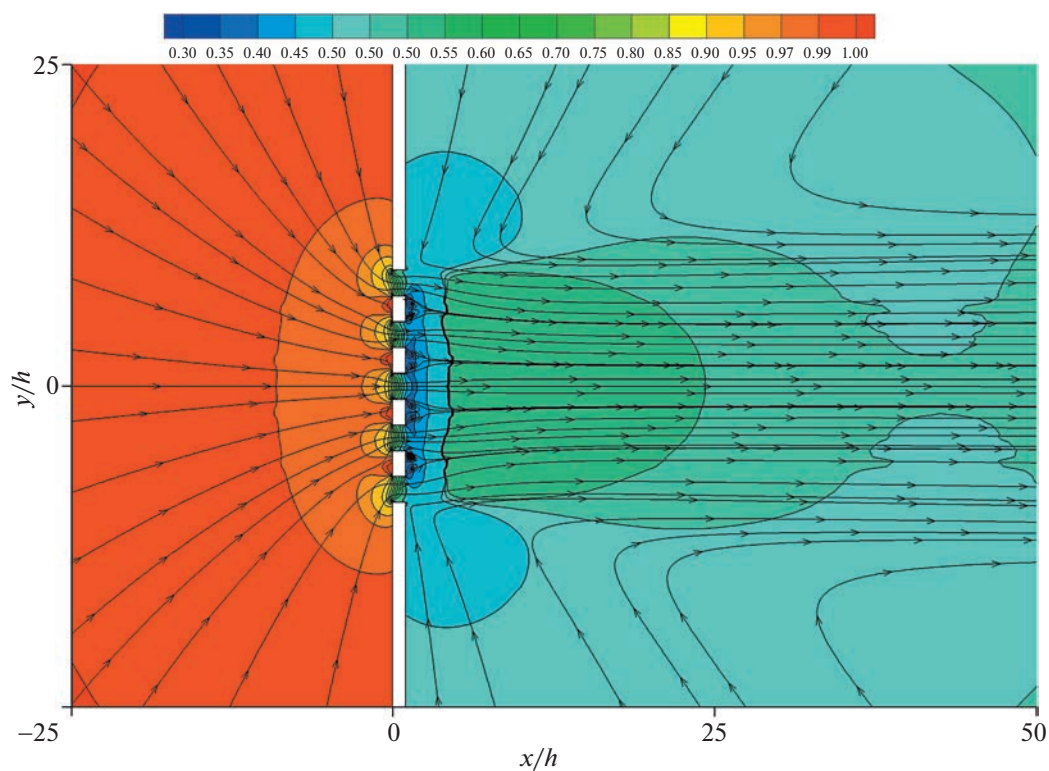
Фиг. 4. Линии уровня числа Маха для $\delta = 1$ вблизи мембраны. Решение S-модельного кинетического уравнения (2.7).



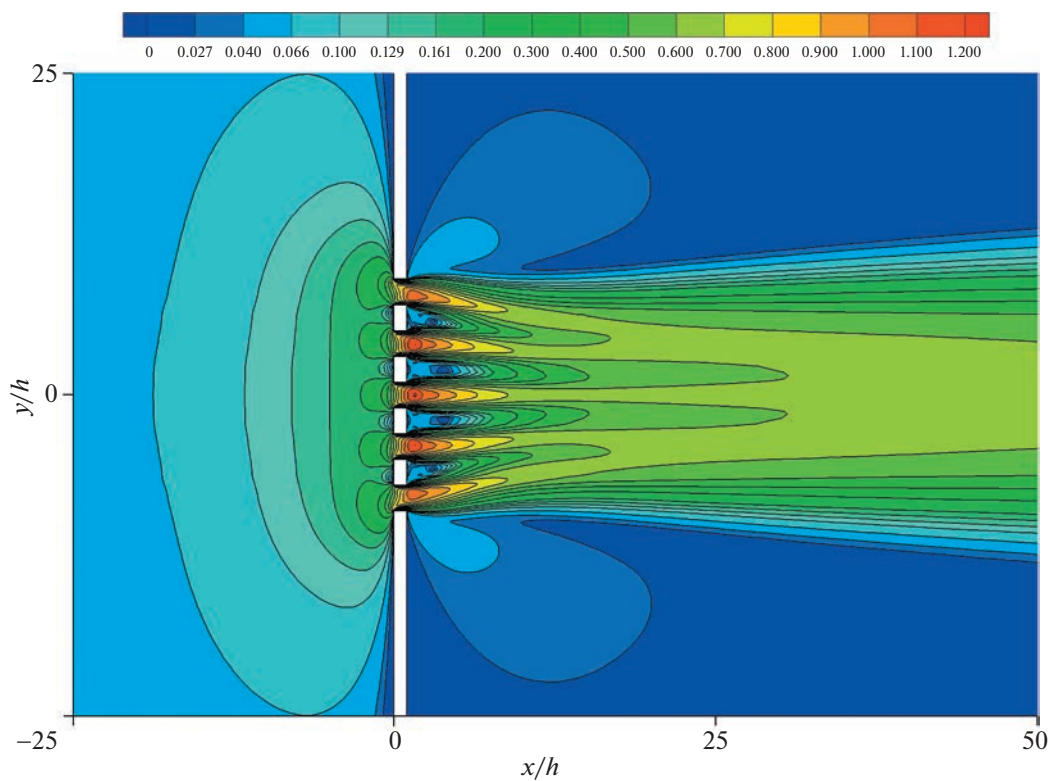
Фиг. 5. Безразмерное давление p/p_L и линии тока для $\delta = 1$ вблизи мембраны. Решение S-модельного кинетического уравнения (2.7).



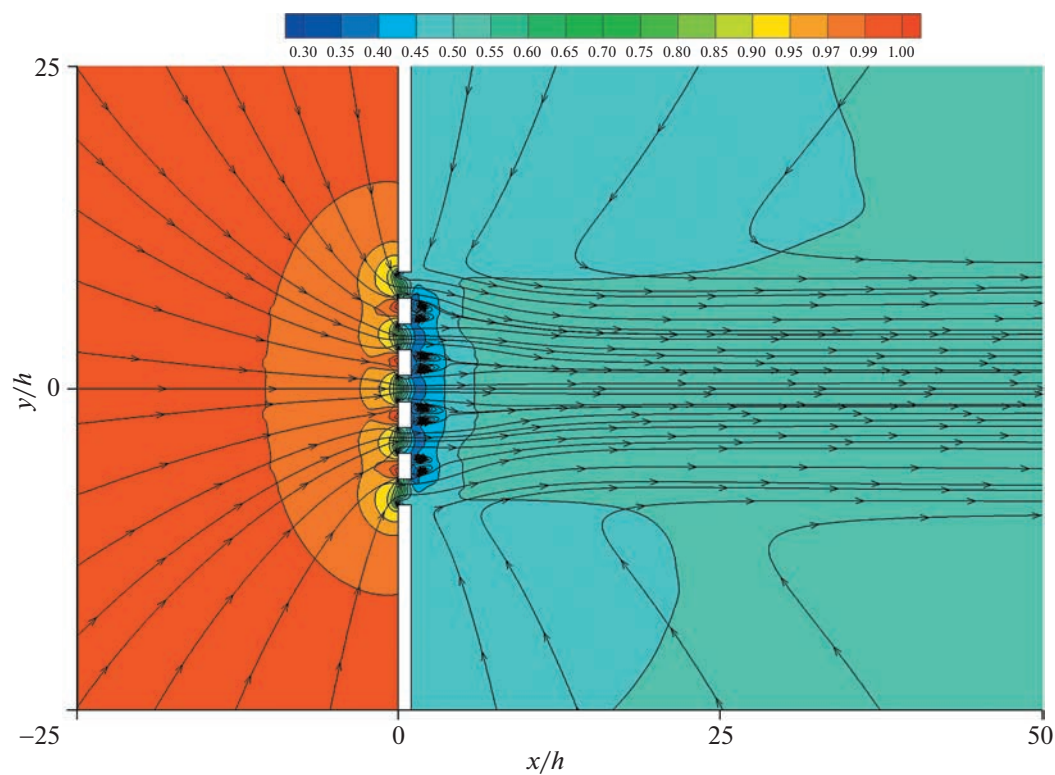
Фиг. 6. Линии уровня числа Маха для $\delta = 20$ вблизи мембраны. Решение S-модельного кинетического уравнения (2.7).



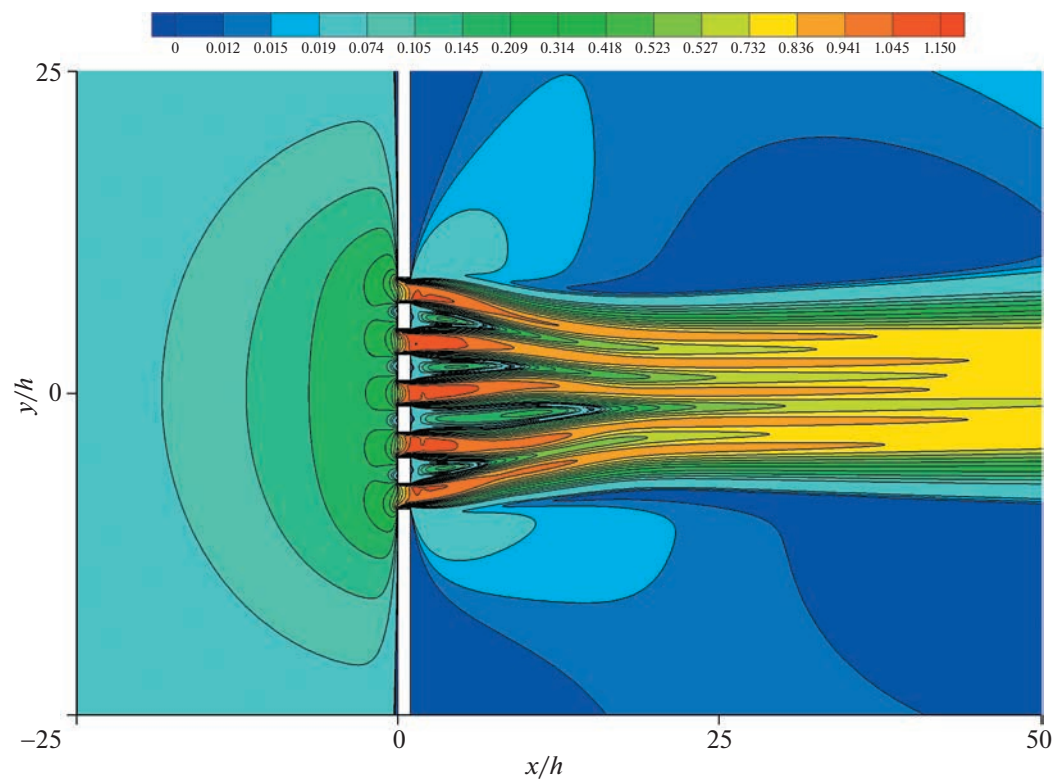
Фиг. 7. Безразмерное давление p/p_L и линии тока для $\delta = 20$ вблизи мембраны. Решение S-модельного кинетического уравнения (2.7).



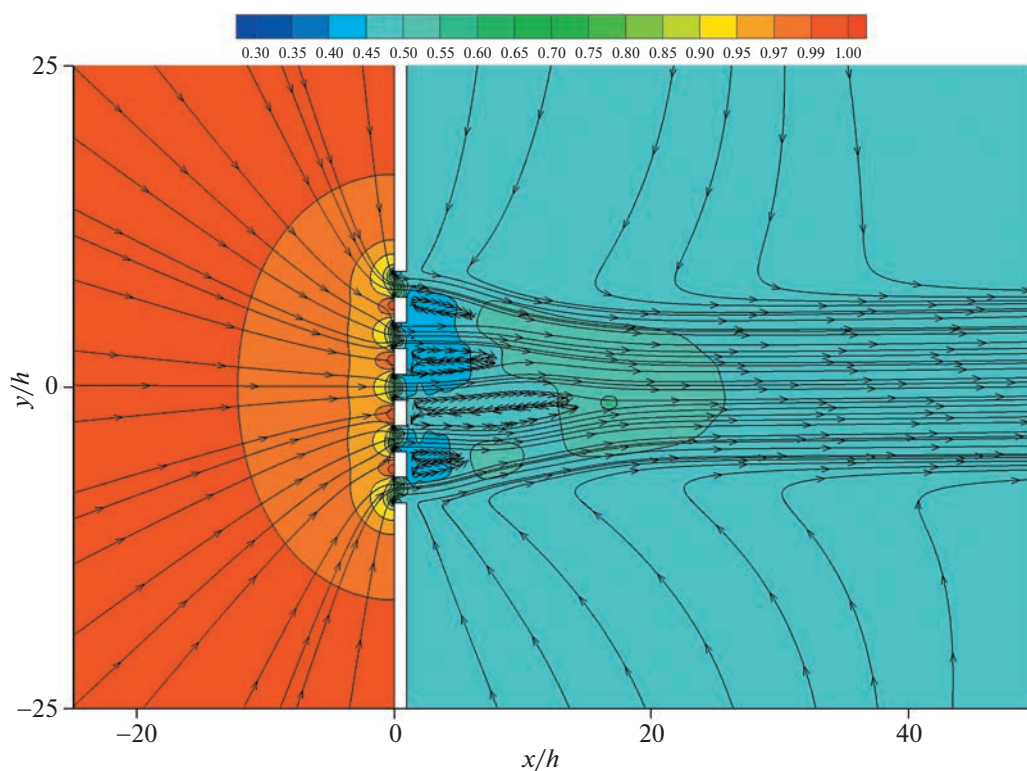
Фиг. 8. Линии уровня числа Маха для $\delta = 50$ вблизи мембраны. Решение S-модельного кинетического уравнения (2.7).



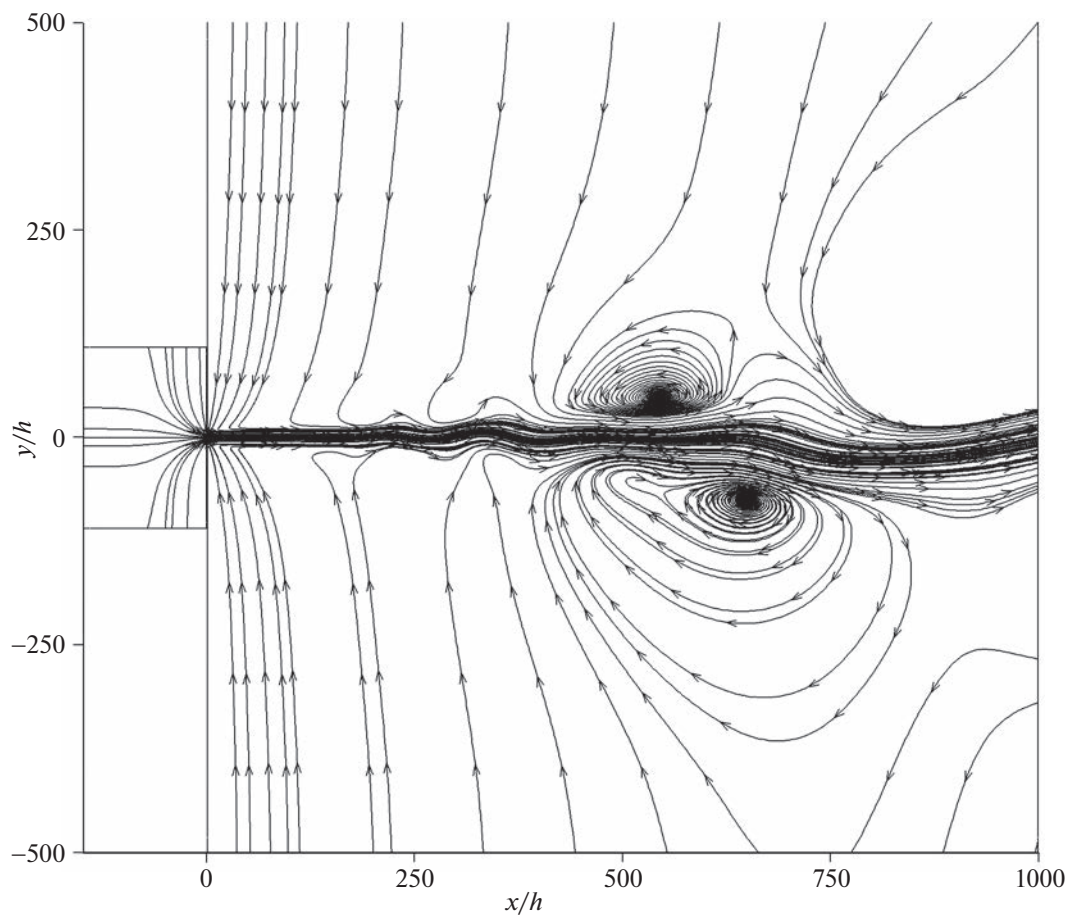
Фиг. 9. Безразмерное давление p/p_L и линии тока для $\delta = 50$ вблизи мембраны. Решение S-модельного кинетического уравнения (2.7).



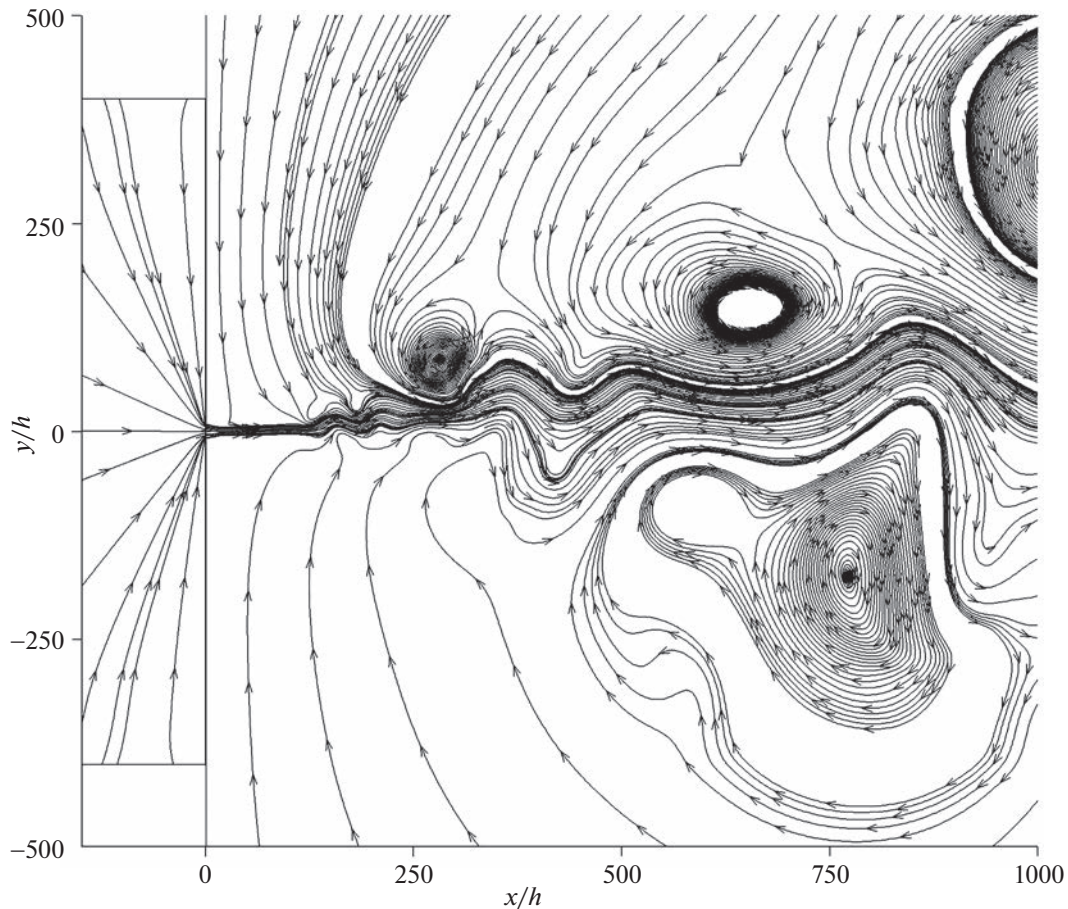
Фиг. 10. Линии уровня числа Маха для $\delta = 200$ вблизи мембраны. Решение уравнений Навье—Стокса (2.9).



Фиг. 11. Безразмерное давление p/p_L и линии тока для $\delta = 200$ вблизи мембраны. Решение уравнений Навье—Стокса (2.9).



Фиг. 12. Линии тока для $\delta = 50$ в основной части течения. Решение S-модельного кинетического уравнения (2.7).



Фиг. 13. Линии тока для $\delta = 200$ в основной части течения. Решение уравнений Навье—Стокса (2.9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено численное исследование течения разреженного газа через решетку из пяти коротких плоских каналов (пор), имитирующих течение через мембрану. Анализ основан на численном решении S-модельного кинетического уравнения и уравнений Навье—Стокса сжимаемой среды. Получены поля течения для режимов течения от свободномолекулярного до сплошносредного. Продемонстрированы заметное отличие расхода газа в рассматриваемой конфигурации от случая периодической системы каналов и связанные с этим особенности поля течения: наличие краевых эффектов, возникновение коллективной струи, которая с уменьшением числа Кнудсена распадается на вихревые структуры на некотором удалении от мембраны вследствие неустойчивости. При значениях числа Кнудсена $Kn \leq 0.02$ получено хорошее согласование расхода массы и действующих на стержни мембраны сил в кинетическом и континуальном решениях. Для продольной компоненты силы обнаружен эффект максимума по значению числа Кнудсена, которого не наблюдается в периодической системе каналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sharipov F., Seleznev V. Data on internal rarefied gas flows // J. Phys. Chem. Ref. Data. 1997. V. 27. № 3. P. 657–706.
2. Sharipov F., Seleznev V. Flows of rarefied gases in channels and microchannels. Russian Academy of Science, Ural Branch, Institute of Thermal Physics, 2008. in Russian.
3. Titarev V.A., Shakhov E.M. Nonisothermal gas flow in a long channel analyzed on the basis of the kinetic S-model // Comput. Math. and Math. Phys. 2010. V. 50. № 12. P. 2131–2144.
4. Pantazis S., Valougeorgis D. Rarefied gas flow through a cylindrical tube due to a small pressure difference // Europ. J. Mech. / B Fluids. 2013. V. 38. P. 114–127.

5. *Valougeorgis D., Vasileiadis N., Titarev V.* Validity range of linear kinetic modeling in rarefied pressure driven single gas flows through circular capillaries // *Europ. J. Mech. / B Fluids, Special Issue on Non-equilibrium Gas Flows*. 2017. V. 64. P. 2–7.
6. *Varoutis S., Valougeorgis D., Sharipov F.* Simulation of gas flow through tubes of finite length over the whole range of rarefaction for various pressure drop ratios // *J. Vac. Sci. Technol. A*. 2009. V. 27. № 6. P. 1377–1391.
7. *Aristov V.V., Frolova A.A., Zabelok S.A., Arslanbekov R.R., Kolobov V.I.* Simulations of pressure-driven flows through channels and pipes with unified flow solver // *Vacuum, Special Issue “Vacuum Gas Dynamics: Theory, experiments and practical applications”*. 2012. V. 86. № 11. P. 1717–1724.
8. *Varoutis S., Day C., Sharipov F.* Rarefied gas flow through channels of finite length at various pressure ratios // *Vacuum*. 2012. V. 86. № 12. P. 1952–1959.
9. *Titarev V.A., Shakhov E.M.* Computational study of a rarefied gas flow through a long circular pipe into vacuum // *Vacuum, Special Issue “Vacuum Gas Dynamics: Theory, experiments and practical applications”*. 2012. V. 86. № 11. P. 1709–1716.
10. *Shoev G.V., Bondar Y.A., Khotyanovsky D.V., Kudryavtsev A.N., Ivanov M.S., Maruta K.* Numerical study of shock wave entry and propagation in a microchannel // *Thermophys. Aeromech.* 2012. V. 19. № 1. P. 17–32.
11. *Titarev V.A.* Rarefied gas flow in a circular pipe of finite length // *Vacuum*. 2013. V. 94. P. 92–103.
12. *Titarev V.A., Shakhov E.M.* Rarefied gas flow into vacuum through a pipe composed of two circular sections of different radii // *Vacuum. SI “Advances in Vacuum Gas Dynamics”*. 2014. V. 109. P. 236–245.
13. *Dou H., Xu Mi, Wang B., Zhang Z., Wen G., Zheng Y., Luo D., Zhao L., Yu A, Zhang L., Jiang Z., Chen Z.* Microporous framework membranes for precise molecule/ion separations // *Chemic. Soc. Rev.* 2021. V. 50. P. 986–1029.
14. *Taassob A., Bordbar A., Kheirandish S., Zarnaghsh A., Kamali R., Rana A.S.* A review of rarefied gas flow in irregular micro/nanochannels // *J. Micromechan. and Microengineer.* 2021. V. 31. P. 113002.
15. *Wu L., Ho M., Germanou L., Gu X., Liu C., Xu K., Zhang Y.* On the apparent permeability of porous media in rarefied gas flows // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 822. P. 398–417.
16. *Popov S.P., Tcheremissine F.G.* Subsonic rarefied gas flow over a rack of flat transverse plates // *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.* 2008. V. 49. № 1. P. 46–52.
17. *Plotnikov M. Yu.* Hydrogen dissociation in rarefied gas flow through a wire obstacle // *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.* 2018. V. 59. № 5. P. 794–800.
18. *Shakhov E.M.* Approximate kinetic equations in rarefied gas theory // *Fluid Dynamic.* 1968. V. 3. № 1. P. 112–115.
19. *Shakhov E.M.* Generalization of the Krook kinetic relaxation equation // *Fluid Dynamic.* 1968. V. 3. № 5. P. 95–96.
20. *Titarev V.A.* Computer package Nesvetay-3D for modelling three-dimensional flows of monatomic rarefied gases // *Science & Education. Scientific periodical of the Bauman MSTU*. 2014. № 6. P. 124–154.
21. *Konopel'ko N.A., Titarev V.A., Shakhov E.M.* Unsteady rarefied gas flow in a microchannel driven by a pressure difference // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2016. V. 56. № 3. P. 470–482.
22. *Titarev V.A.* Implicit numerical method for computing three-dimensional rarefied gas flows using unstructured meshes // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2010. V. 50. № 10. P. 1719–1733.
23. *Titarev V.A.* Application of model kinetic equations to hypersonic rarefied gas flows // *Computers and Fluids, Special issue “Nonlinear flow and transport”*. 2018. V. 169. P. 62–70.
24. *Titarev V.A.* Application of the Nesvetay node for solving three-dimensional high-altitude aerodynamics problems // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2020. V. 60. № 4. P. 737–748.
25. *Titarev V.A., Morozov A.A.* Arbitrary Lagrangian-Eulerian discrete velocity method with application to laser-induced plume expansion // *Appl. Math. and Comput.* 2022. V. 429. P. 127241.
26. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных течений газовой динамики // *Уч. зап. ЦАГИ*. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
27. *Kolgan V.P.* Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics // *J. Comput. Phys.* 2011. V. 230. № 7. P. 2384–2390.
28. *van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme V: a second order sequel to Godunov's method // *J. Comput. Phys.* 1979. V. 32. P. 101–136.
29. *Titarev V.A.* Conservative numerical methods for model kinetic equations // *Computers and Fluids*. 2007. V. 36. № 9. P. 1446 – 1459.
30. *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // *Phys. Rev.* 1954. V. 94. № 511. P. 1144–1161.
31. *Mieussens L.* Discrete-velocity models and numerical schemes for the Boltzmann-BGK equation in plane and axisymmetric geometries // *J. Comput. Phys.* 2002. V. 162. № 2. P. 429–466.

32. *Gusarov A.V., Smurov I.* Gas-dynamic boundary conditions of evaporation and condensation: numerical analysis of the Knudsen layer // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. № 12. P. 4242–4255.
33. *Yoon S., Jameson A.* Lower-upper symmetric-gauss-seidel method for the Euler and Navier Stokes equations // *AIAA J.* 1988. V. 26. № 9. P. 1025–1026.
34. *Men'shov I.S., Nakamura Y.* An implicit advection upwind splitting scheme for hypersonic air flows in thermochemical nonequilibrium // *A Collection of Technical Papers of 6th Int. Symp. on CFD*. V. 2. P. 815. Lake Tahoe, Nevada, 1995.
35. *Titarev V.A., Dumbser M., Utyuzhnikov S.V.* Construction and comparison of parallel implicit kinetic solvers in three spatial dimensions // *J. Comput. Phys.* 2014. V. 256. P. 17–33.
36. *Titarev V.A., Utyuzhnikov S.V., Chikitkin A.V.* OpenMP + MPI parallel implementation of a numerical method for solving a kinetic equation // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2016. V. 56. № 11. P. 1919–1928.
37. *Gorobets A.V.* Parallel Algorithm of the NOISEtte Code for CFD and CAA Simulations // *Lobachevskii J. Math.* 2018. V. 39. № 4. P. 524–532.
38. *Gorobets A.V., Duben A.P.* Technology for supercomputer simulation of turbulent flows in the good new days of exascale computing // *Supercomputing Frontiers and Innovation*. 2021. V. 8. № 4. P. 4–10.
39. *Alvarez-Farre X., Gorobets A., Trias F.X.* A hierarchical parallel implementation for heterogeneous computing. Application to algebra-based CFD simulations on hybrid supercomputers // *Comput. and Fluid*. 2021. V. 214. P. 104768.
40. *Titarev V.A., Utyuzhnikov S.V., Shakhov E.M.* Rarefied gas flow through a pipe of variable square cross section into vacuum // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2013. V. 53. № 8. P. 1221–1230.
41. *Titarev V.A., Shakhov E.M.* Unsteady rarefied gas flow with shock wave in a channel // *Fluid Dynamic*. 2018. V. 53. № 1. P. 143–151.
42. *Titarev V.A., Frolova A.A., Rykov V.A., Vashchenkov P.V., Shevyrin A.A., Bondar Ye.A.* Comparison of the Shakhov kinetic equation and DSMC method as applied to space vehicle aerothermodynamics // *J. Comput. Appl. Math.* 2020. V. 364. P. 1–12.
43. *Titarev V.A., Shakhov E.M.* A hybrid method for the computation of a rarefied gas jet efflux through a very long channel into vacuum // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2020. V. 60. № 11. P. 1936–1949.
44. *Ansys CFX – Solver Theory Guide*. Release 2021R2. Ansys, Inc. 2021.
45. *Barth T., Jespersen D.C.* The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // *AIAA paper* 89-0366. 1989.
46. *Rao S.S.* *The Finite Element Method in Engineering*. 6th ed. Elsevier, 2018.
47. *Ansys ICEM CFD Help Manual*, version 2021 R2. 2021.
48. *Frolova A.A.* Analysis of the boundary conditions for rarefied molecular gases with partial accommodation coefficients and energy exchange // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2021. V. 61. № 10. P. 1672–1681.
49. *Koshamarov Yu.A., Ryzhov Yu.A.* *Applied Rarefied Gas Dynamics*. Moscow, Mashinostroenie, 1977. in Russian.