

---

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

---

УДК 519.634

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ УДЛИНЕННОГО КОНТУРА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ФРУДА

© 2023 г. С. И. Филиппов\*

420111 Казань, ул. Московская, 42, КИУ, Россия

\*e-mail: sf759@bk.ru

Поступила в редакцию 17.05.2022 г.  
Переработанный вариант 13.06.2023 г.  
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Рассматривается задача обтекания удлиненного гладкого контура под свободной поверхностью жидкости. Жидкость идеальная несжимаемая весома. Критические точки разветвления и схода потока находятся на контуре. Задаются погружение контура и его длина. Используется гипотеза о близости модуля скорости на свободной поверхности к его значению в невозмущенном потоке. Применяется нелинейное приближенное выражение интеграла Бернулли на свободной поверхности, связанное с логарифмированием. Используются две вспомогательные плоскости, в которых область течения представляет полуплоскость с исключенным кругом и кольцевую область. Комплексный потенциал определяется в первой параметрической плоскости с использованием конформного отображения на кольцевую область. Выведена система уравнений для нахождения определяющих параметров, для решения которой применяется минимизация функционала и используется метод итераций по двум комплексам параметров. Разработаны алгоритм и программа решения системы. Проведены расчеты гидродинамических характеристик конкретного профиля. Проанализированы результаты для коэффициентов волнового сопротивления, подъемной силы, момента и положения центра контура в зависимости от числа Фруда и циркуляции разного знака. Приведены примеры расчетов нелинейных волн, образующихся на свободной поверхности при значительных числах Фруда. Библ. 9. Фиг. 9.

**Ключевые слова:** удлиненный контур, свободная поверхность, нелинейные волны, большие числа Фруда.

**DOI:** 10.31857/S0044466923110121, **EDN:** KJGDUL

### ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных задач математического моделирования в современной гидродинамике — исследование движения подводных тел со значительными скоростями, что связано с использованием рек, морей и океанов как транспортных артерий. Однако наибольшее развитие до недавнего времени имели исследования, основанные на линейной и нелинейной теории волн малой амплитуды, как, например, работы [1, 2] при не слишком больших числах Фруда. А изучение интервала больших скоростей ограничивалось изучением обтекания гидродинамических особенностей.

Настоящая работа продолжает исследования, связанные с нелинейной аппроксимацией граничного условия на свободной поверхности, предложенной О.М. Киселевым и Г.Г. Тумашевым, основные положения которой представлены в монографии [3]. Движение глубоко погруженного кругового цилиндра данным методом было численно реализовано О.В. Троепольской в совместной с О.М. Киселевым работе [4]. В [5, 6] удалось реализовать метод для мало погруженного кругового цилиндра при минимальном расстоянии от поверхности цилиндра до свободной границы, равном 0.15 длины радиуса. При проведении численных экспериментов обнаружен эффект уменьшения амплитуды волн при приближении цилиндра к свободной поверхности при определенных значениях циркуляции. В [7] были продолжены исследования, начатые в [5], и изучался эллиптический цилиндр небольшого удлинения с произвольным наклоном к горизонтали. В

настоящем исследовании предлагаются результаты по вытянутому контуру, впервые частично представленные на конференции (см. [8]).

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарный поток жидкости со свободной поверхностью, находящийся под действием силы тяжести с ускорением  $g$ . Пусть поток неограничен снизу. Под свободной поверхностью находится гладкий замкнутый контур  $\Omega$  длины  $L$  (фиг. 1). В плоскости  $z = x + iy$  ось  $y$  направлена вертикально вверх, а ось  $x$  — по невозмущенному уровню свободной поверхности  $\Lambda$  в направлении движения жидкости. Считаем, что критические точки  $A, B$  — разветвления и схода потока лежат на контуре  $\Omega$ . Пусть  $H$  — расстояние от разветвляющейся на  $\Omega$  линии тока до свободной поверхности при  $x \rightarrow -\infty$ . Обозначим через  $\alpha$  угол наклона касательной к  $\Omega$ , а через  $s$  — безразмерную дуговую координату, которая отнесена к длине контура и увеличивается при обходе  $\Omega$  так, что контур остается слева. Если  $G(s)$  определяет форму контура, то

$$\alpha = G(s) + 2\pi s, \quad G(s) = G(s+1).$$

Полагаем заданными длину контура  $L_0$ , безразмерную циркуляцию  $\Gamma_0$ , значение числа Фруда  $Fr$ , т.е.  $Fr_0$ :

$$L_0 = \frac{L}{H}, \quad \Gamma_0 = \frac{\Gamma}{2\pi V_0 H}, \quad Fr_0 = \frac{V_0^2}{gH},$$

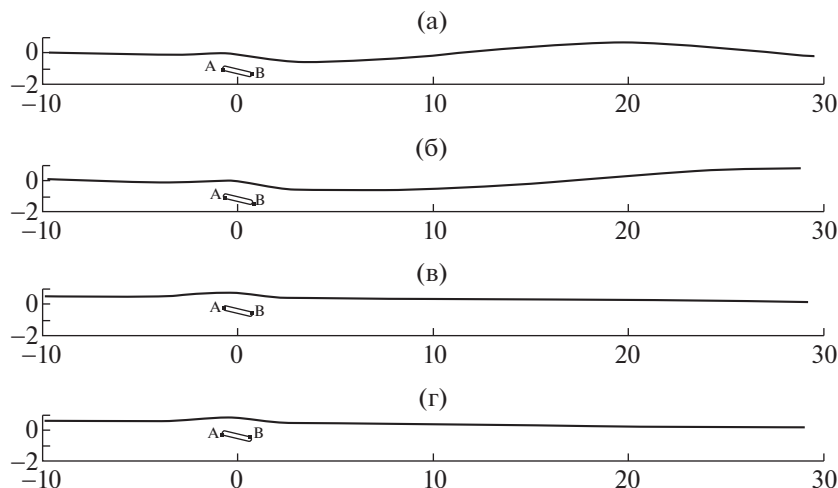
где  $V$  — модуль скорости,  $V_0$  — значение  $V$  в невозмущенном потоке,  $\Gamma$  — циркуляция скорости по контуру.

Считая, что на свободной поверхности  $V$  мало отличается от  $V_0$ , интеграл Бернулли для свободной поверхности

$$\ln V_0 + \frac{1}{2} \ln(1 - 2vy) - \ln V = 0$$

запишем в приближенном виде

$$\ln V_0 - vy - \ln V = 0. \quad (1.1)$$



**Фиг. 1.** Картина течения при  $\Gamma_0 = -0.025$ ,  $L_0 = 3.5$ ,  $H = 1$ . Варианты (а), (б), (в), (г) соответствуют  $Fr_0 = \{5, 7, 10, 100\}$ .

Коэффициент давления  $C_p = \left( \frac{p - p_0}{\rho V_0/2} \right)$  на свободной поверхности имеет порядок  $\eta^2$ , где  $\eta = vy$  на свободной поверхности при  $\eta \rightarrow 0$ ,  $p$  – давление в жидкости,  $p_0$  – давление газа над свободной границей,  $\rho$  – плотность жидкости.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Введем параметрическую плоскость  $t = u + iv$ , в которой область течения будет представлять нижнюю полуплоскость с исключенным кругом

$$|t - t_0| < \frac{2r}{1 - r^2}, \quad (2.1)$$

где  $t_0 = -i(1 + r^2)/(1 - r^2)$ ,  $r$  – положительно и меньше единицы. Бесконечно удаленные точки физической и параметрической плоскостей соответствуют друг другу. В плоскости  $t$  контуру  $\Omega$  отвечает окружность с уравнением

$$t = t_0 + 2r \exp(i\omega)/(1 - r^2), \quad (\text{Im } \omega = 0). \quad (2.2)$$

Свободная поверхность в области  $t$  – ось  $u$  ( $v = 0$ ).

Пусть функция  $z(t)$  – конформное отображение параметрической области течения на физическую область,  $w$  – комплексный потенциал, тогда

$$\text{Re} \left( \ln \frac{dz}{dt} + ivz \right) - \ln \left| \frac{dw}{dz} \right| - \ln V_0 = 0, \quad t \in \Lambda_t, \quad (2.3)$$

$$\text{Im } z(t) \rightarrow 0, \quad v = 0, \quad u \rightarrow -\infty, \quad (2.4)$$

$$\frac{dw}{dt} \rightarrow K \quad (K = \text{const}), \quad u \rightarrow -\infty \quad \text{или} \quad v \rightarrow -\infty. \quad (2.5)$$

Условие (2.3) соответствует (1.1), условия (2.4), (2.5) характеризуют затухание возмущений,  $K > 0$ .

В основе построения комплексного потенциала  $w(t)$  лежат формулы, предложенные Милн-Томсоном (см. [9]) для бесциркуляционного течения в области, ограниченной осью  $u$  и окружностью  $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ ,  $b > a$ , с вектором скорости набегающего потока, направленного по оси  $u$ . Модуль скорости равен  $V$ . Тогда для области  $z$

$$w = -iVz + 2iVa^2z \left[ (z^2 - b^2)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(b + x_n)^2 (z^2 - x_n^2)} \right], \quad (2.6)$$

$$z = x + iy, \quad x_0 = b, \quad x_n = b - a^2/(b + x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Преобразуя выражение (2.6), используем замены

$$V = KV_0, \quad z = it, \quad x_n = \xi_{n+1},$$

учитывая циркуляционность течения, получим

$$w = KV_0 \left( t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n t}{t^2 + \xi_n^2} - i\delta \ln \frac{t+i}{t-i} \right), \quad (2.7)$$

$$\delta = \Gamma/(2\pi KV_0), \quad A_1 = 2a^2, \quad A_n = 2a^2 / \prod_{k=1}^{n-1} (b + \xi_k)^2, \quad n = 2, 3, \dots$$

И, наконец, следует положить  $a = \frac{2r}{1 - r^2}$ ,  $b = \frac{1 + r^2}{1 - r^2}$ , т.е.

$$\xi_n = \frac{1 + r^{2n}}{1 - r^{2n}}, \quad A_n = \frac{8r^{2n}}{(1 - r^{2n})^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Введем в рассмотрение кольцевую область  $r < |\zeta| < 1$ , соответствующую области течения, используя конформные отображения

$$t = i(\zeta + 1)/(\zeta - 1), \quad \zeta = (t + i)/(t - i). \quad (2.9)$$

Окружность  $\zeta = r \exp(i\sigma)$  соответствует окружности  $\Omega_t$ :

$$\omega = -\frac{\pi}{2} + \sigma + 2 \operatorname{arctg} \frac{r \sin \sigma}{1 - r \sin \sigma}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2} + \omega - 2 \operatorname{arctg} \frac{r \cos \omega}{1 - r \sin \omega}. \quad (2.10)$$

Из (2.7)–(2.9) можно получить

$$\begin{aligned} g_0 = t|_{\Omega_t} &= -i \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik\sigma} \right), \quad g_n = \frac{A_n t}{t^2 + \xi_n^2} \Big|_{\Omega_t} = 2i \left( \sum_{k=1}^{\infty} r^{(2n-1)k} e^{-ik\sigma} - \sum_{k=1}^{\infty} r^{(2n+1)k} e^{ik\sigma} \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} g_n &= -i + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \sin n\sigma, \quad -i\delta \ln \frac{t+i}{t-i} \Big|_{\Omega_t} = \delta(\sigma - i \ln r), \quad \phi|_{\Omega_t} = KV_0 \left( 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \sin n\sigma \right), \\ \psi|_{\Omega_t} &= -KV_0 (1 + \delta \ln r), \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} \phi \Big|_{\Omega_t} = KV_0 \left( 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1 - r^{2n}} \cos n\sigma + \delta \right), \end{aligned}$$

где  $\phi$  и  $\psi$  – потенциал скорости и функция тока. Так как  $\psi|_{\Omega_e}$  не зависит от  $\sigma$ , то окружность  $\Omega_t$  есть линия тока.

Когда  $\delta$  удовлетворяет неравенству

$$-4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1 - r^{2n}} < \delta < 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} nr^n}{1 - r^{2n}}, \quad (2.11)$$

из уравнения для  $\delta$

$$KV_0 \left( 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1 - r^{2n}} \cos n\sigma + \delta \right) = 0$$

получаются корни  $\sigma = \beta \in (0, \pi)$ ,  $\sigma = 2\pi - \beta$  и по формулам (2.2), (2.10) для критических точек  $t_A, t_B$  на  $\Omega_t$  имеем

$$\begin{aligned} t_A &= t_0 - \frac{2r}{1 - r^2} e^{-i\omega_\beta}, \quad t_B = t_0 + \frac{2r}{1 - r^2} e^{i\omega_\beta}, \\ \omega_\beta &= -\frac{\pi}{2} + \beta + 2 \operatorname{arctg} \frac{r \sin \beta}{1 - r \cos \beta}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

При выполненном условии (2.11) критические точки лежат на контуре. Так как

$$H = \frac{1}{V_0} (\psi|_{S_1 S_2} - \psi|_{\Omega}) = K(1 + \delta \ln r) = \frac{K}{1 - \Gamma_0 \ln r}, \quad (2.13)$$

$$\Gamma_0 = \frac{\delta}{1 + \delta \ln r}, \quad \delta = \frac{\Gamma_0}{1 - \Gamma_0 \ln r}. \quad (2.14)$$

Перейдем к рассмотрению отображающей функции  $z(t)$ . Согласно представлению  $w$ ,

$$\frac{dw}{dt} = KV_0 E(t), \quad E(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\xi_n^2 - t^2}{(t^2 - \xi_n^2)^2} - \frac{2\delta}{1 + t^2}. \quad (2.15)$$

Из условия (2.3) тогда получим

$$\operatorname{Re} \left( \ln \frac{dz}{dt} + i\nu z \right) = \ln K + \ln |E(t)|, \quad t \in \Lambda_t. \quad (2.16)$$

Условие (2.16) с учетом условий затухания (2.4), (2.5) примет вид

$$\ln \frac{dz}{dt} + i\nu z = iat + ib + \ln K + \ln F(t), \quad (2.17)$$

где

$$a = \nu K = \frac{1 - \Gamma_0 \ln r}{Fr_0} = \frac{(1 + \delta \ln r)^{-1}}{Fr_0}, \quad b = \text{const}, \quad (2.18)$$

$$|F(t)| = |E(t)|, \quad t \in \Lambda, \quad F(\infty) = 1. \quad (2.19)$$

Удобно представить  $F(t)$  в виде произведения трех функций

$$F(t) = E(t)Q(t)R(t), \quad (2.20)$$

$$Q(t) = \frac{(t - \bar{t}_A)(t - \bar{t}_B)(t - t_0)^2}{(t - t_A)(t - t_B)(t - t_0)}, \quad R(t) = \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (t - t_0)^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} (t - \bar{t}_0)^{-n}},$$

$$B_n = b_n + i d_n,$$

что позволяет удовлетворить (2.19).

Из решения (2.17) с условием (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \nu z = at + b - i \ln T(t), \quad \frac{dz}{dt} = KU(t), \quad U(t) = F(t)/T(t), \\ T(t) = 1 + ia e^{-iat} \int_{-\infty}^t e^{iat} (F(t) - 1) dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

В результате необходимо определить параметры  $r, b_n, d_n$ . Остальные параметры выражены через  $r$  по формулам (2.1), (2.8), (2.12), (2.13), (2.18).

### 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Пусть функции  $E(t), R(t), F(t), T(t), U(t)$  при  $t \in \Omega_t$  имеют обозначения  $E_*(\omega), R_*(\omega), F_*(\omega), T_*(\omega), U_*(\omega)$ . Используя формулы (2.21), можно получить

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \omega + \arg U_*(\omega), \quad s = s_0 + \int_0^\omega |U_*(\omega)| d\omega \bigg/ \int_0^{2\pi} |U_*(\omega)| d\omega, \quad (3.1)$$

где  $s_0$  — решение уравнения

$$2\pi s + G(s) - \arg U_*(0) - \frac{\pi}{2} = 0. \quad (3.2)$$

Задание числа Фруда, циркуляции и длины контура приводит к уравнениям (2.14), (2.18) и

$$\frac{2r(1 - \Gamma_0 \ln r)}{1 - r^2} \int_0^{2\pi} |U_*(\omega)| d\omega = L_0. \quad (3.3)$$

Выберем большое целое число  $M$ . Пусть при  $n \geq M$  коэффициенты  $B_n = 0$ . Введем в рассмотрение два комплекта  $\mu$  и  $\tau$ , первый из которых зависит от параметров, связанных с  $r$ , а второй представляет вектор коэффициентов  $B_n$  ( $n = \overline{1, M-1}$ ).

Расположим на окружности  $\Omega_t$  точки

$$t_j = t_0 + 2r e^{i\omega_j} / (1 - r^2), \quad \omega_j = \pi j / N, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

и рассмотрим функционал

$$W = \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_j - 2\pi s_j - G(s_j))^2. \quad (3.4)$$

Используем метод итераций. Если  $\mu^{(k)}, \tau^{(k)}$  —  $k$ -е приближение, то применим его для определения  $F_1(\omega)$  и  $T_1(\omega)$  в (3.3), которое совместно с (2.8), (2.1), (2.12), (2.20) дает возможность нахождения  $\mu^{(k+1)}$ . Минимизируя функционал  $W$ , найдем  $\tau^{(k+1)}$ , используя  $\mu^{(k+1)}, \tau^{(k)}$  для  $F_1, T_1$  в (3.1), (3.2). Для минимизации функционала применялся метод сопряженных градиентов при следующих соотношениях:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial c_n} &= 2 \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_j - 2\pi s_j - G(s_j)) \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial c_n} - (2\pi + G'(s_j)) \frac{\partial s_j}{\partial c_n} \right), \\ \frac{\partial s_j}{\partial c_n} &= \frac{\partial s_0}{\partial c_n} + \left( \int_0^{2\pi} |U_*| d\omega \int_0^{\omega_j} \frac{\partial |U_*|}{\partial c_n} d\omega - \int_0^{2\pi} \frac{\partial |U_*|}{\partial c_n} d\omega \int_0^{\omega_j} |U_*| d\omega \right) / \left( \int_0^{2\pi} |U_*| d\omega \right)^2, \\ \frac{\partial s_0}{\partial c_n} &= \frac{1}{2\pi + G'(s_0)} \frac{\partial \alpha_0}{\partial c_n}, \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial c_n} = \text{Im} \left( \frac{1}{R_*} \frac{\partial R_*}{\partial c_n} \right), \quad \frac{\partial |U_*|}{\partial c_n} = |U_*| \text{Re} \left( \frac{1}{R_*} \frac{\partial R_*}{\partial c_n} \right), \\ c_n &= b_n, \quad d_n, \quad \frac{\partial R_*}{\partial b_n} = S_* \left( (t_\omega - t_0)^{-n} - R_*(t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right), \\ \frac{\partial R_*}{\partial d_n} &= i S_* \left( (t_\omega - t_0)^{-n} + R_*(t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right), \quad S_* = \left( 1 + \sum_{n=1}^{M-1} \bar{B}_n (t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

На последнем шаге  $(k+1)$ -го приближения находим  $T_*$  при  $\mu^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}$ .

Для вычисления сопротивления, подъемной силы и момента относительно точки  $z_0$  воспользуемся формулами Чаплыгина–Блазиуса, тогда для коэффициентов данных характеристик имеем формулы

$$C_x - iC_y = \frac{i}{V_0^2 H} \oint_{\Omega_t} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{dt} dt, \quad C_m = -\frac{1}{V_0^2 H^2} \text{Re} \oint_{\Omega_t} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{dt} (z - z_0) dt,$$

т.е.

$$\begin{aligned}C_x - iC_y &= -\frac{2r}{1-r^2} (1 - \Gamma_0 \ln r) \int_0^{2\pi} \frac{E_*^2(\omega)}{U_*(\omega)} e^{i\omega} d\omega, \\ C_m &= \text{Fr}_0 \frac{2r}{1-r^2} (1 - \Gamma_0 \ln r) \int_0^{2\pi} \frac{E_*^2(\omega)}{U_*(\omega)} \left( \frac{2ar}{1-r^2} (e^{i\omega} - e^{i\omega_a}) - i \ln \frac{T_*(\omega)}{T_*(\omega_a)} \right) e^{i\omega} d\omega,\end{aligned}$$

$z_0 = z_a$ ,  $z_a$  — точка на контуре  $\Omega$ , у которой  $\omega = \omega_a$ .

Из формулы (2.21) можно получить вид свободной поверхности.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

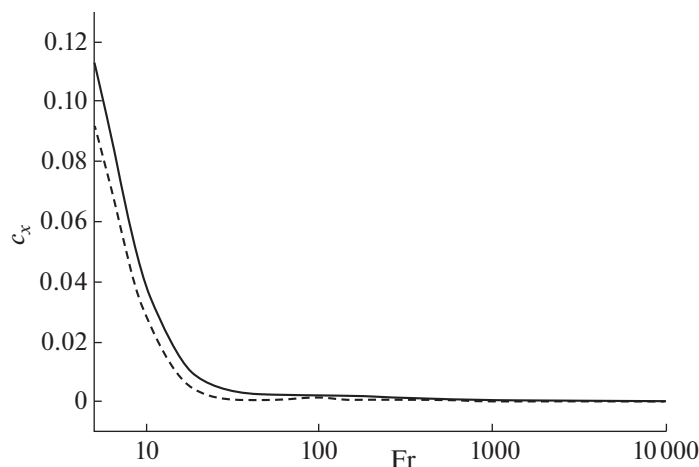
Контур, для которого проводились расчеты, изображен на фиг. 1. Уравнение профиля имеет вид

$$\alpha = 2\pi s + a_0 + \sum_{k=1}^4 a_k \sin 4k\pi s,$$

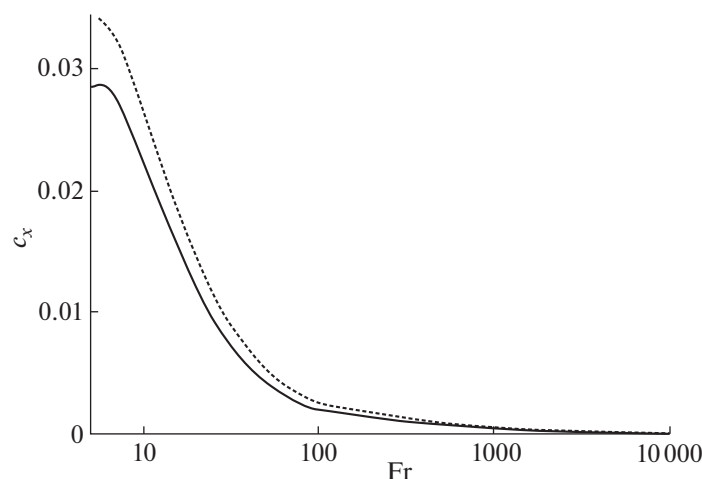
где коэффициенты  $a_k$  следующие:

|       |       |       |       |        |
|-------|-------|-------|-------|--------|
| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$  |
| −0.27 | −0.87 | 0.3   | −0.09 | −0.025 |

В расчетах полагалось  $N = 150\text{--}200$ ,  $M = 40\text{--}65$ ,  $L_0 = 3.5$ ,  $H = 1$ . На фиг. 2–7 представлены расчеты коэффициентов волнового сопротивления  $C_x$ , подъемной силы  $C_y$  и момента  $C_m$  в зави-



**Фиг. 2.** Зависимость коэффициента волнового сопротивления от числа Фруда для положительных значений циркуляции.

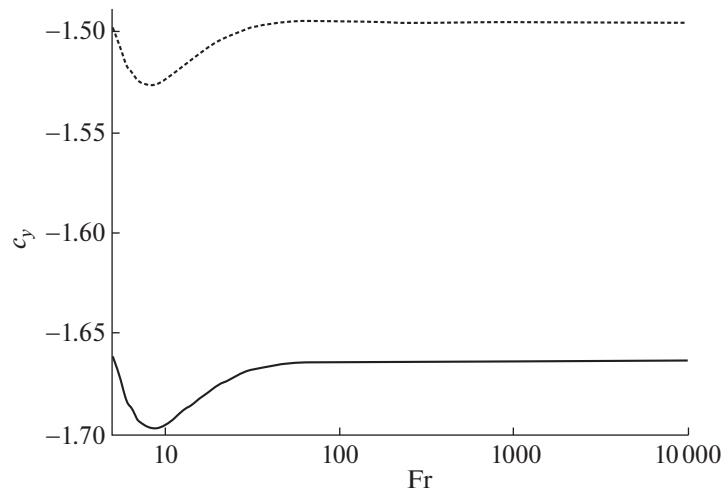


**Фиг. 3.** Зависимость  $C_x(Fr)$  для отрицательных значений циркуляции.

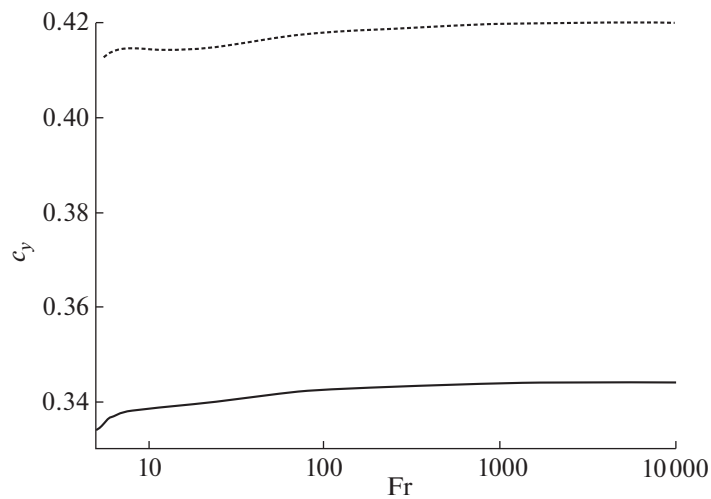
симости от числа Фруда в диапазоне  $5 \leq Fr \leq 10^4$ . На фиг. 8, 9 изображено положение центра контура в потоке. По горизонтальной оси применена шкала десятичного логарифма. Левая граница интервала связана с критерием применимости развиваемого в работе метода. Расчеты проводились для двух значений положительной циркуляции  $\Gamma_0 = \{0.09; 0.1\}$  и отрицательной циркуляции  $\Gamma_0 = \{-0.03; -0.025\}$ . Сплошные линии соответствуют большим значениям циркуляции, штриховые — меньшим. На фиг. 2, 3 представлены результаты для коэффициента волнового сопротивления  $C_x(Fr)$ . При положительной циркуляции (фиг. 2) большие значения имеют место для больших значений  $\Gamma$ , а для отрицательной циркуляции (фиг. 3) — для меньших значений  $\Gamma$ . Для отрицательной циркуляции в рассмотренном диапазоне параметров кривые имеют максимум.

На фиг. 4, 5 даны расчеты коэффициента подъемной силы в зависимости от числа Фруда. Расчетные значения имеют знак, противоположный знаку циркуляции, и большие значения достигаются при меньшей циркуляции любого знака. При  $\Gamma > 0$  (фиг. 4) кривые имеют минимум, а при  $\Gamma < 0$  (фиг. 5) — монотонно растут.

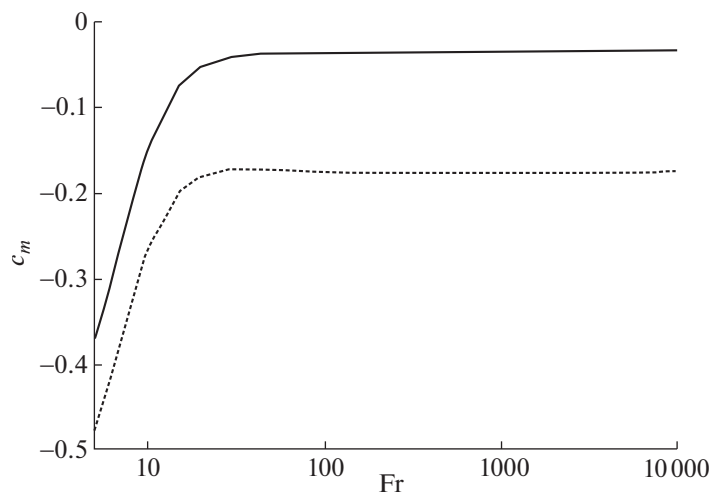
На фиг. 6, 7 изображены зависимости коэффициента момента  $C_m(Fr)$  относительно точки  $\omega = 0$ . Большие значения характеристики достигаются при больших значениях циркуляции лю-



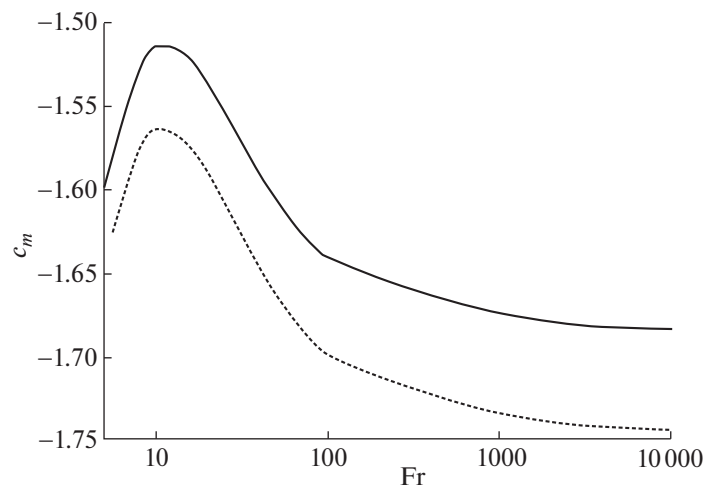
**Фиг. 4.** Зависимость коэффициента подъемной силы от числа Фруда для  $\Gamma > 0$ .



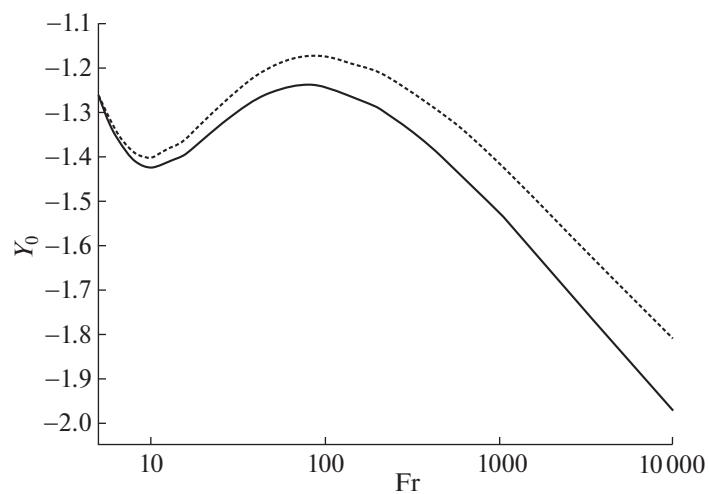
**Фиг. 5.** Зависимость  $C_y(Fr)$  для  $\Gamma < 0$ .



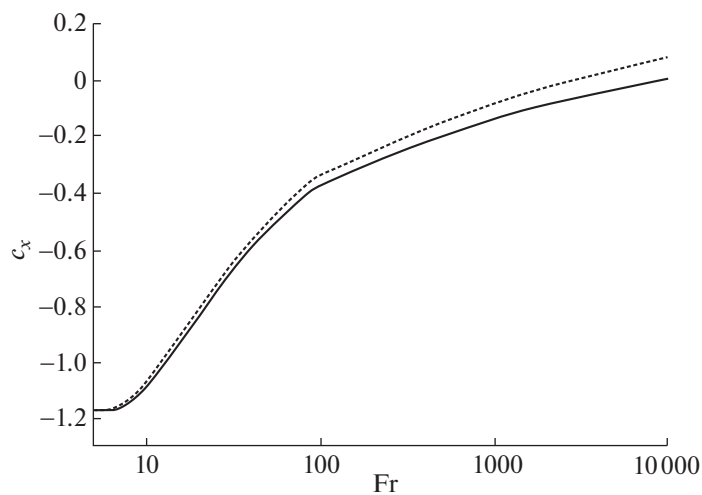
**Фиг. 6.** Зависимость коэффициента момента от числа Фруда при положительной циркуляции.



Фиг. 7. Зависимость  $C_m(Fr)$  для  $\Gamma < 0$ .



Фиг. 8. Положение безразмерной ординаты центра контура от числа Фруда для положительной циркуляции.



Фиг. 9. Положение  $Y_0(Fr)$ ,  $\Gamma < 0$ .

бого знака. При  $\Gamma > 0$  (фиг. 6) значения  $C_m$  монотонно растут при увеличении числа Фруда, а при отрицательной циркуляции (фиг. 7) имеют максимум.

На фиг. 8, 9 представлены графики нахождения ординаты центра контура в зависимости от числа Фруда. При  $\Gamma > 0$  (фиг. 8) кривые имеют и минимум, и максимум, и большие значения на всем интервале чисел Фруда получены для меньших значений циркуляции. При отрицательной циркуляции (фиг. 9) контур “всплывает” и тем интенсивнее, чем меньше  $\Gamma$  и больше число Фруда. При  $Fr \approx 7$  есть минимум. Можно также отметить линейность зависимости  $Y_0(Fr)$  при  $Fr > 10^3$ , однако это достигается при значительно больших числах Фруда, чем для кругового цилиндра и контура малого удлинения.

Пример изменения свободной поверхности с нелинейными волнами представлен на фиг. 1 для четырех значений числа Фруда при  $\Gamma_0 = -0.025$ . Контур при увеличении числа Фруда поднимается к свободной поверхности. На фиг. 1 видно, как с увеличением скорости увеличивается длина волн, изменяется их амплитуда и меняется положение точек разветвления и схода потока на контуре.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Filippov S.I.* Flow past a submerged hydrofoil // *Fluid Dynamics*. 2001. V. 36. № 3. P. 489–496.
2. *Кириллин К.В., Филиппов С.И.* Обтекание крылового профиля над границей раздела двухслойной вязкой жидкости при наличии свободной поверхности и твердого дна // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50. № 9. С. 1632–1639.
3. *Киселев О.М., Котляр Л.М.* Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 156 с.
4. *Киселев О.М., Тропольская О.В.* О поступательном движении цилиндра под свободной поверхностью // *Изв. РАН. МЖГ*. 1996. № 6. С. 9–22.
5. *Киселев О.М., Филиппов С.И.* Движение подводного контура при больших числах Фруда и малом погружении // *Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского*. Казань: Унипресс, 1999. Т. 3. С. 106–116.
6. *Kiselev O.M., Filippov S.I.* Motion of a cylinder below the free surface of a fluid at large Froude numbers // *Fluid Dynamics*. 2000. V. 35. № 4. P. 496–506.
7. *Филиппов С.И.* Моделирование движения подводного эллиптического контура при больших скоростях // *Вестник Казанского технологического ун-та*. 2021. Т. 24. № 9. С. 65–69.
8. *Филиппов С.И.* Движение гладкого вытянутого контура при больших числах Фруда // *Материалы XXII НТК по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'21)*. М.: Изд-во МАИ, 2021. С. 473–474.
9. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 656 с.