

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.635

Посвящается профессору Евгению Михайловичу Шахову в связи с его 90-летием

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООБМЕНА ГАЗОВОГО ПОТОКА И ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2023 г. В. Т. Жуков^{1,*}, Н. Д. Новикова^{1,**}, О. Б. Феодоритова^{1,***}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: vic.zhukov@mail.ru,

**e-mail: nn@kiam.ru,

***e-mail: feodor@kiam.ru

Поступила в редакцию 05.04.2023 г.
Переработанный вариант 03.07.2023 г.
Принята к публикации 22.08.2023 г.

Представлен метод расчета нестационарного теплового взаимодействия вязкого газового потока и твердого тела. Метод состоит в выполнении прямого совместного интегрирования по времени уравнений газодинамики многокомпонентной смеси и уравнения теплопроводности в твердом теле на многоблочных неструктурированных сетках. Для расчета одного временного шага используется расщепление системы определяющих уравнений на гиперболическую и параболическую подсистемы. Численный метод обеспечивает аппроксимацию условия сопряжения (непрерывность температуры и нормальной к границе компоненты вектора теплового потока) на интерфейсной границе между газом и твердым телом и эффективен для нестационарных расчетов. Результаты сравнения с аналитическим решением модельной задачи о взаимодействии высокоскоростного потока и нагреваемой пластины подтверждают эффективность предложенного метода. Библ. 23. Фиг. 4.

Ключевые слова: численное моделирование, уравнения Навье–Стокса, теплопроводность, сопряженный теплообмен, газовая смесь, твердое тело.

DOI: 10.31857/S0044466923120335, EDN: RIMZUD

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается модель нестационарного взаимодействия вязкого теплопроводного многокомпонентного газового потока с твердым телом. В качестве твердого тела могут выступать элементы летательного аппарата (ЛА), двигательной установки и другие конструкции. Численный анализ теплообмена газового потока и обтекаемых конструкций является важным инструментом проектирования систем тепловой защиты аэрокосмических аппаратов [1, 2]. Известно, что процессы обтекания и нагрева являются в той или иной степени взаимосвязанными: твердая поверхность подвергается аэродинамическому нагреву, а нагретая твердая поверхность возвращает часть тепла в аэродинамический поток, и так далее. В математической модели теплообмена возникает новый объект — интерфейсная граница контакта “газ–твердое тело”, на которой задаются условия непрерывности температуры и нормальной к границе компоненты вектора теплового потока. Эта задача известна как задача сопряженного теплообмена, Conjugate Heat Transfer (СНТ) [3–8]. Распространенный подход к ее решению состоит в использовании двух компьютерных кодов: газодинамического и твердотельного теплового. Первый код обычно основан на уравнениях Навье–Стокса, второй служит для интегрирования нестационарного параболического уравнения, описывающего теплопроводность в твердом теле. Эти коды периодически обмениваются данными с целью достижения условий сопряжения на интерфейсной границе, см. [5, 8]. В таких алгоритмах есть опасность проявления численной неустойчивости [9, 10]. В пакете ЛОГОС [11] реализован иной подход. Он основан на неявной дискретизации уравнения теплопроводности с решением единой системы линейных уравнений для жидкости и твердых тел относительно температуры. Другие стратегии расчета приведены в [5].

Развиваемая нами новая методика основана на стратегии прямого интегрирования по времени определяющих уравнений на многоблочных неструктурированных конформных сетках без итерирования условий сопряжения и итераций по областям. В отличие от [11] единая дискретизация уравнения теплопроводности не строится, а используются парциальные дискретизации в областях. Последующая обработка интерфейсов обеспечивает эквивалентность предложенного многоблочного алгоритма и прямого подхода, основанного на интегрировании единой консервативной дискретизации уравнения теплопроводности. Следствием эквивалентности является аппроксимация условий сопряжения.

Заметим, что в вычислительной аэродинамике технология многоблочных сеток является эффективной для описания течений со сложной топологией, а в задачах сопряженного теплообмена с многосвязными телами сложной геометрической формы, по нашему мнению, практически необходимой.

Общая постановка задачи включает расширенную систему уравнений Навье—Стокса с добавлением уравнений для учета диффузии химических компонентов в газовой области, что продиктовано необходимостью учета сложных явлений, возникающих в пограничных слоях при высокоскоростном обтекании. В дополнение к выработке тепла через сжатие и трение, а также к переносу тепла теплопроводностью и конвекцией, в ряде приложений необходимо также учитывать перенос тепла молекулярной диффузией. Взаимодействие между конвекцией, теплопроводностью и диффузией осложняется наличием взаимно обратных эффектов: возникновение градиента концентрации из-за изменения температуры (термодиффузия) и появление градиента температуры вследствие изменения поля концентрации (диффузионная теплопроводность). В перспективе будут учтены и химические реакции, приводящие в задачах гиперзвукового обтекания к необходимости учета многокомпонентности газовой смеси, образующейся в результате химических превращений. Для интегрирования по времени определяющих уравнений нами используется явно-итерационная чебышёвская схема LINS (Local Iterations for Navier—Stokes) [12, 13], созданная для решения уравнений Навье—Стокса. Возможности схемы LINS расширены для учета диффузии компонентов и совместного интегрирования уравнения энергии в газе и твердом теле. Теоретическое обоснование чебышёвской схемы для линейного параболического уравнения дано в [14].

Схема LINS является альтернативой традиционным явной и неявной схемам, она не имеет обременительного ограничения на шаг по времени и в отличие от неявной схемы исключает необходимость решения системы линейных уравнений. Предложенная нами схема является консервативной, что важно для нестационарных исследований. В приложении к задаче сопряженного теплообмена схема LINS в силу прямого интегрирования уравнений по времени и консервативной дискретизации автоматически обеспечивает аппроксимацию условий сопряжения. Простая алгоритмическая структура схемы идеально подходит для массивно-параллельных вычислений.

Предложенный нами подход иллюстрируется на примере численного анализа газодинамических и тепловых процессов, возникающих в нестационарной сингулярной задаче сопряженного теплообмена [4, 5]. В этой задаче моделируется высокоскоростное ламинарное течение газа над нагреваемой пластиной. Аналитическое решение указанной задачи получено в [4] с помощью преобразования [15], позволяющего отделить уравнение энергии в газе от уравнений непрерывности и импульса. Сингулярность в аналитическом решении возникает в начальный момент времени. Аналитическое решение и численное моделирование демонстрируют хорошее согласие результатов нестационарного процесса сопряженного теплообмена, за исключением малого интервала времени, в течение которого сказывается влияние сингулярности.

2. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СМЕСИ

Основной математической модели является система уравнений Навье—Стокса, записанная для смеси идеальных газов с учетом теплопроводности и диффузии химических компонентов. Уравнения неразрывности, сохранения импульса и энергии имеют соответственно вид, см. [12, 16, 17]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, & \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p)\mathbf{u}) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время, $\mathbf{u}$ — вектор скорости с компонентами u_1, u_2, u_3 , ρ — плотность смеси, $E = \rho(e + 0.5u^2)$ — полная энергия единицы объема, e — удельная внутренняя энергия (единицы массы), p — давление смеси, $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{J}$ — векторы плотности теплового и диффузионного потоков соответственно.

Тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}$ и вектор плотности теплового потока $\mathbf{q}$ имеют вид

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(\nabla \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]^T - \frac{2}{3} I \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \quad \mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (2)$$

здесь $\mu = \mu(T)$ и $\kappa = \kappa(T)$ — коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности смеси газов соответственно, I — единичная 3×3 — матрица.

В широком смысле термин диффузионный перенос охватывает вязкость, теплопроводность, молекулярную диффузию, термодиффузию и перенос излучения. Два последних явления мы в данной работе не рассматриваем, ограничиваясь молекулярной (концентрационной) диффузией: каждый компонент, т.е. химически однородное вещество смеси, движется в направлении меньшей концентрации. Для смеси из $N_{sp} > 1$ компонентов с массовыми долями Y_m , $m = 1, \dots, N_{sp}$, уравнения переноса компонентов имеют вид

$$\frac{\partial(\rho Y_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho Y_m \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_m. \quad (3)$$

В правой части каждого из уравнений (3), вообще говоря, может стоять источник — массовая скорость образования компонента m в химических реакциях (он опущен для упрощения изложения).

В уравнениях (3) вектор плотности диффузионного потока $\mathbf{J}_m$ компонента m определяется из закона Фика [16]: $\mathbf{J}_m = -\rho D_m \nabla Y_m$, где D_m — коэффициент диффузии компонента. Входящий в правую часть уравнения энергии вектор $\mathbf{J} = \sum h_m \mathbf{J}_m$ обусловлен диффузией компонентов смеси, здесь h_m — энтальпийные функции компонентов, см. [16]. Здесь и ниже суммирование ведется по индексу $m = 1, \dots, N_{sp}$.

Для смеси газов коэффициенты переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии) в общем случае есть непрерывные функции температуры и концентрации. Они вычисляются по некоторым комбинаторным формулам [12]. В данной работе мы полагаем, что они являются скалярными функциями, но могут быть и тензорами.

Перед изложением алгоритма расчета сопряженного теплообмена дадим описание численной модели течения газовой смеси, т.е. основных этапов решения определяющей системы уравнений (1)–(3). Введем вектор консервативных переменных как $U \equiv \rho(1, u_1, u_2, u_3, e_{\text{tot}}, Y_m, m = 1, \dots, N_{sp})$, где $e_{\text{tot}} = e + 0.5u^2$ — полная энергия единицы массы. Запишем дифференциально-разностную схему, т.е. непрерывную по времени и дискретную по пространству аппроксимацию системы уравнений (1)–(3), на неструктурированной сетке в виде

$$U_t + C_h U + L_h U = 0, \quad (4)$$

где C_h, L_h — соответственно конвективный и диффузионный дискретные операторы, а нижний индекс h — параметр, характеризующий сеточную дискретизацию. В операторе L_h учитываются все диссипативные процессы, т.е. вязкость, теплопроводность и диффузия компонентов. Дискретизация проводится на сетке, состоящей из ячеек в виде многогранников. На такой сетке записывается конечно-объемная схема с определением консервативных переменных в узлах сетки. Ячейки интегрирования представляют собой дуальные объемы, ассоциированные с узлами геометрической сетки. Такая дискретизация называется часто узловой или вершинно-центрированной.

Для системы (4) можно записать двухслойную по времени явную схему с шагом τ : $(U_{j+1} - U_j)/\tau + C_h U_j + L_h U_j = 0$. Здесь U_j, U_{j+1} — сеточные функции на нижнем и верхнем слоях по времени соответственно. Операторы C_h, L_h в этой схеме зависят от решения U_j на нижнем слое по времени. Для устойчивости явная схема требует ограничения $\tau \leq (\tau_{\text{conv}}^{-1} + \tau_{\text{dif}}^{-1})^{-1}$, где $\tau_{\text{conv}}, \tau_{\text{dif}}$ — шаги по времени, диктуемые соответственно гиперболическим (конвективным) и параболическим (диффузионным) ограничениями [18].

Для интегрирования по времени уравнения (4) нами предложена явно-итерационная чебышёвская схема LINS [12], первоначально созданная для решения уравнений Навье—Стокса [13]. Введение уравнений конвекции-диффузии компонентов принципиальных трудностей для схемы LINS не представляет. Эта схема обеспечивает автоматическую аппроксимацию условий теплообмена и эффективную реализацию расчета в многообластном случае, когда разностная дискретизация становится в целом нестандартной (так как шаблон дискретизации интерфейсного узла лежит в нескольких смежных областях). Гиперболический этап использует конвективный шаг $\tau = \tau_{\text{conv}}$, а параболический этап интегрируется с этим же временным шагом даже при доминировании диффузии над конвекцией. Если диффузия (включающая вязкость, диффузию компонентов и теплопроводность) не доминирует над конвекцией, то схема LINS переходит в традиционную явную схему. В дальнейшем мы планируем ввести для гиперболического этапа неявную схему по времени, при этом общая технология многоблочного расчета не изменится.

Методика интегрирования каждого шага по времени реализована на основе расщепления на два этапа. На этапе 1 полагаем $L_h \equiv 0$ и находим решение разностного гиперболического уравнения по явной схеме. Для выполнения этого этапа применяется метод Годунова с расчетом потоков на основе точного решения задачи Римана для многокомпонентной смеси [19]. На этапе 2 полагаем $C_h \equiv 0$ и формулируем разностную параболическую задачу для уравнения вида $U_t + L_h U = 0$ с новыми начальными данными. На этом этапе мы используем схему LINS. Этап 2 разбит на два подэтапа. Сначала выполняются совместно вязкий и диффузионный расчеты с помощью применения схемы LINS к редуцированным (без учета конвективных потоков) уравнениям импульса и многокомпонентного переноса. По завершении первого подэтапа определяются источниковые члены $\nabla \cdot (\tau \cdot \mathbf{u})$, $\nabla \cdot \mathbf{J}$, входящие в правую часть уравнения энергии. На втором подэтапе решается редуцированное уравнение энергии сквозным образом по всем теплопроводным областям, как газовым, так и твердотельным.

Конструкция схемы LINS диктуется исключительно требованием аппроксимации и устойчивости, что принципиально отличает эту схему от чебышёвского ускорения сходимости итерационных процессов, применяемых для решения эллиптических уравнений или для решения неявных схем для параболических уравнений, см. [14]. Для построения нужного многочлена Чебышёва $F_p(L_h)$ степени p необходимо задать верхнюю границу $\lambda_{\max}$ спектра сеточного оператора L_h . Эта граница находится по теореме Гершгорина о кругах спектра [20], т.е. на основе расчета сумм модулей шаблонных коэффициентов, отвечающих оператору L_h . Зависимость $\lambda_{\max}$ от h известна: $\lambda_{\max} \sim h^{-2}$ [21].

Многочлен $F_p(\lambda)$ строится на отрезке $[0; \lambda_{\max}]$, исходя из условий устойчивости и аппроксимации точного оператора послойного перехода $\exp(-\tau\lambda)$. В частности, выполнено $F_p(0) = 1$, $|F_p(\lambda)| \leq 1$. С помощью многочлена F_p строится оператор послойного перехода S схемы LINS как рациональная функция оператора L_h , см. [14]:

$$S(L_h) = (I - F_p^2(L_h))(I + \tau L_h)^{-1}.$$

Оператор S переводит решение U_j с нижнего слоя по времени на следующий слой и реализуется циклом, состоящим из $q = 2p - 1$ элементарных шагов. Каждый из них по трудоемкости эквивалентен одному шагу явной схемы. Множитель $(I + \tau L_h)^{-1}$ в операторе S есть оператор послойного перехода чисто неявной схемы. На спектре оператора L_h выполнено важное неравенство $0 \leq S(\lambda) \leq (1 + \tau\lambda)^{-1}$, что следует из свойств многочлена F_p .

В [14] приведено строгое изложение конструкции чебышёвского многочлена F_p . Важно, что степень многочлена определяется без участия эмпирических параметров формулой $p = \arg \min \left[\text{ctg}^2(0.25\pi/p) - \tau \cdot \lambda_{\max} \right]$, $p \in \mathbb{Z}^+$. Этой точной формулой следует пользоваться для акуратного перехода схемы LINS в явную схему при $\tau\lambda_{\max} \sim 1$. Вводя обозначение $\lceil x \rceil = \min \{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$, можно записать удобную для практического использования приближенную формулу

$$p = \left\lceil 0.25\pi\sqrt{\tau\lambda_{\max} + 1} \right\rceil. \quad (5)$$

Запишем алгоритм схемы LINS для дифференциально-разностной линейной схемы $U_t + L_h U = f$ с самосопряженным неотрицательно-определенным оператором L_h . Предполагаем, что этот оператор действует в пространстве сеточных функций с однородными краевыми условиями Дирихле или Неймана, а неоднородности учтены в правой части. Схема LINS является двухслойной; алгоритм перехода от сеточной функции U_j к функции U_{j+1} на верхнем слое по времени $t_{j+1} = t_j + \tau$ представляет собой цикл по m , состоящий из $q = 2p - 1$ шагов, каждый из которых имеет вид

$$y^m = \frac{1}{1 + \tau \cdot b_m} \{U_j + \tau b_m y^{m-1} + \tau (-L_h y^{m-1} + f)\}. \quad (6)$$

Здесь начальные данные есть $y^0 = U_j$, а результат через q шагов есть $U_{j+1} = y^q$. Параметры в (6) определены формулами

$$\begin{aligned} \{b_1, \dots, b_q\} &= \{a_1, \dots, a_p, a_2, \dots, a_p\}, \\ a_m &= \lambda_{\max} \cdot (z_1 - \beta_m) / (1 + z_1), \quad z_1 = \cos(0.5\pi/p), \\ \beta_m &\in K_p = \{\cos((i - 0.5)\pi/p), \quad i = 1, 2, \dots, p\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Сеточная функция f включает правую часть и неоднородные составляющие краевых условий. Эта функция может определяться данными с нижнего слоя, либо, например, так $f = f_j$, $m = 1$, $f = 0.5(f_j + f_{j+1})$, $m > 1$.

Параметры $\{a_m, m = 1, \dots, p\}$ в формулах (7) выражаются через нули β_m многочлена Чебышёва T_p рода на стандартном отрезке $-1 < z < 1$, в который отображается отрезок $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\max}$ при линейной замене переменных $z = z_1 - (z_1 + 1)\lambda/\lambda_{\max}$, где $\lambda_0 = \lambda_{\max} \cdot (z_1 - 1)/(z_1 + 1) \in [-1/\tau; 0]$. Нули многочлена $T_p(z)$ упорядочены для устойчивости [21].

Многочлен $F_p(\lambda)$ получается из многочлена $T_p(z)$ следующим образом:

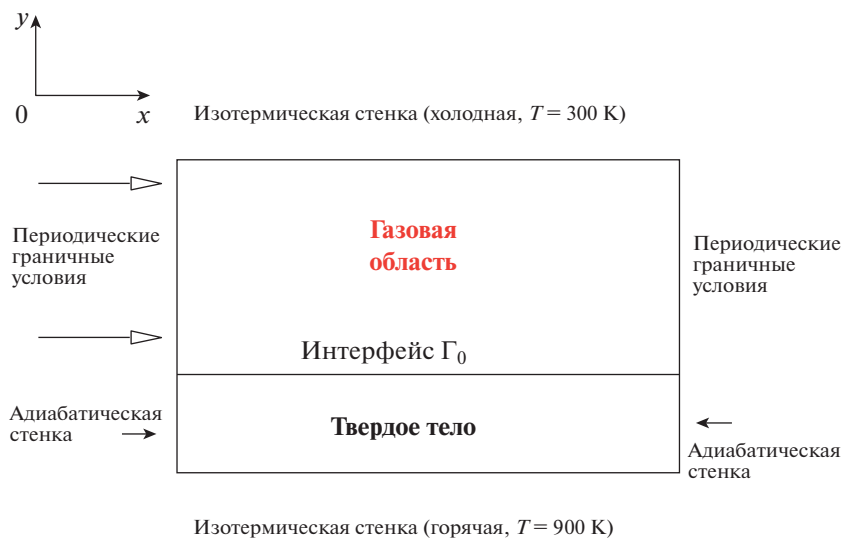
$$\begin{aligned} F_p(\lambda) &= H_p(\lambda)/H_p(-1/\tau), \\ H_p(\lambda) &= (a_1 - \lambda) \cdot (a_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_p - \lambda) \equiv T_p(z_1 - (z_1 + 1)\lambda/\lambda_{\max}). \end{aligned}$$

Заметим, что для явной схемы $(U_{j+1} - U_j)/\tau + L_h U_j = 0$ шаг τ ограничен условием устойчивости $\tau \leq 2/\lambda_{\max}$, т.е. $\tau \sim O(h^2)$. Для схемы LINS такого рода ограничения нет, но из аппроксимационных соображений следует брать шаг интегрирования τ не слишком большим. Мы выбираем $\tau = \tau_{\text{conv}} \sim O(h)$ из условия устойчивости конвективного, т.е. гиперболического этапа. При таком выборе τ применение LINS на каждом временном шаге эквивалентно числу явных шагов $q = 2p - 1$, асимптотически равному $O(h^{-1/2})$, так как в (5) $\lambda_{\max} \sim h^{-2}$. Можно сделать вывод, что по сравнению с явной схемой эффективный (в терминах вычислительных затрат) размер временного шага схемы LINS составляет $O(h^{3/2})$. Подчеркнем, что формально величина шага τ может быть произвольной, так как схема сохраняет устойчивость при любом значении $\tau > 0$ за счет выполнения цикла (7).

Заметим, что в практических расчетах по неявным схемам, разрешаемым методами подпространств Крылова, превышение гиперболического числа Куранта обычно не является слишком большим, особенно при расчетах переходных режимов. Конечно, в расчетах на установление, т.е. при отыскании стационарного состояния, особенно на заключительной стадии, шаг по времени может быть большим. Но в нестационарных задачах теплового нагрева аэродинамических поверхностей многокомпонентным газом интегрирование с шагом $\tau \sim \text{const} \cdot h$ является физически корректным.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА

Для изложения методики ограничимся рассмотрением течения сплошной среды в простейшей области, представленной на фиг. 1. В плоскости Oxy эта область является прямоугольником.



Фиг. 1. Область расчета.

Нижняя граница газовой области (интерфейс Γ_0 на фиг. 1) является обтекаемой поверхностью твердого тела, а верхняя граница — твердая изотермическая стенка. Горизонтальный размер обтекаемой пластины согласован с размером газовой области. В твердом теле записывается уравнение теплопроводности для температуры вместе с калорическим уравнением состояния:

$$\partial \varepsilon / \partial t = \operatorname{div}(\kappa(T) \operatorname{grad} T) + f, \quad \varepsilon = \varepsilon(T). \quad (8)$$

В простейшем случае $\varepsilon = c \cdot T$. Здесь теплопроводность $\kappa(T)$, теплоемкость c и источник тепла f являются функциями координат и температуры. Полагаем, что известны прямая и обратная зависимости внутренней энергии и температуры: $\varepsilon = \varepsilon(T)$, $T = T(\varepsilon)$.

На интерфейсной границе “твердое тело—газ” ставятся условия теплообмена в виде непрерывности температуры и теплового потока (идеальный контакт):

$$[T] = 0, \quad [\kappa \partial T / \partial n] = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_0, \quad (9)$$

где через $[]$ обозначен скачок функции при переходе границы контакта, а производная вычисляется по нормали, внешней по отношению к газовой области. В случае анизотропной среды с тензорным коэффициентом теплопроводности условие непрерывности теплового потока имеет более сложный вид, см. [18].

Пластина обтекается ламинарным потоком, мгновенно ускоренным в начальный момент времени из состояния покоя до постоянной скорости с числом Маха $M_\infty = 3$. Детальные данные задачи приведены в разд. 5.

Как сказано в разд. 2, расчетная схема строится на основе расщепления определяющей системы уравнений на гиперболический и параболический этапы. На параболическом этапе сначала решаются уравнения импульса и многокомпонентной диффузии, т.е. происходит учет вязкости и диффузии в газе, а затем решается уравнение для внутренней энергии с учетом всех уже полученных результатов. Данное уравнение записывается в виде уравнения (8) и является единым для газовой среды и твердого тела.

4. МНОГООБЛОЧНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

На примере сформулированной в разд. 3 задачи изложим алгоритм решения задачи сопряженного теплообмена. В нашей расчетной схеме уравнение теплопроводности (8) интегрируется по времени “сквозным”, “прямым” образом с автоматической аппроксимацией условий теплообмена (9). Точнее, мы строим схему, которая алгебраически эквивалентна алгоритму вида (6), записанному для уравнения теплопроводности (8). По форме эта схема является многообластной: каждый шаг цикла (7) производится по всем узлам многоблочной сетки с дальнейшей кор-

ректировкой сеточных значений внутренней энергии и температуры на интерфейсах. Но отдельная аппроксимация условий (9) не делается, она достигается автоматически. Точнее, условия сопряжения аппроксимируются на дискретном уровне в случае консервативной аппроксимации уравнения теплопроводности при следующих требованиях. Во-первых, сетка является согласованной с поверхностью контакта: в каждой из смежных областей может быть построена своя неструктурированная сетка, но на интерфейсе сетки состыкованы “узел в узел”. Во-вторых, сеточные функции определены в узлах сетки, а тепловые потоки вычисляются на гранях дуальных объемов.

Напомним, что для газовой области основными сеточными переменными являются полная энергия единицы объема $E = \rho(e + 0.5 u^2)$, где $e = e(T)$ — внутренняя энергия единицы массы газа, плотность ρ , компоненты вектора скорости среды u_1, u_2, u_3 . Нам удобно работать с внутренней энергией единицы объема $\varepsilon = \rho \cdot e$. Для этой функции записано уравнение теплопроводности (8), обеспечивающее аппроксимацию условий сопряжения. Именно это уравнение положено в основу сквозного расчета температуры в газовой среде и твердом теле. Заметим, что для идеального газа $e(T) = c_V \cdot T$, где $c_V = c_V(T)$ — теплоемкость газа при постоянном объеме, и, следовательно, $\varepsilon(\rho, T) = \rho e = \rho c_V \cdot T$. Теплоемкость идеального газа не зависит от температуры. Для реальных газов теплоемкость зависит, вообще говоря, также и от самой температуры. Но алгоритм схемы LINS (7) обоснован для линейного случая. В случае нелинейного калорического уравнения состояния мы проводим линеаризацию внутренней энергии $\varepsilon(T) \approx \varepsilon(T_d) + \varepsilon_T(T_d) \cdot (T - T_d) = B + A \cdot T$ при температуре T_d , взятой с нижнего слоя по времени, с коэффициентами $A = \varepsilon_T(T_d)$, $B = \varepsilon(T_d) - A \cdot T_d$. Здесь $\varepsilon_T = \partial \varepsilon / \partial T$.

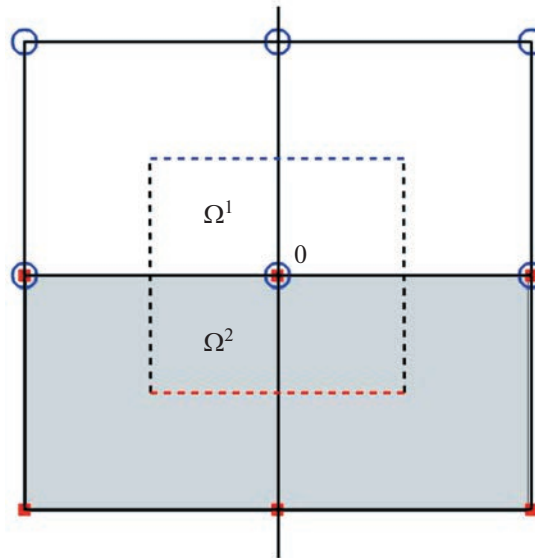
В алгоритме (6) под оператором D_h , в соответствии с разделением параболического этапа на две подзадачи, понимаются следующие операторы. В первой подзадаче — это оператор, отвечающий редуцированным уравнениям импульса и многокомпонентной диффузии. Он действует в пространстве сеточных вектор-функций вида $u_1, u_2, u_3, Y_m, m = 1, \dots, N_{sp}$. Во второй подзадаче этот оператор отвечает единому уравнению теплопроводности (8) для газовой и твердотельной областей. Он действует в пространстве сеточных функций, описывающих распределение температуры.

Запишем сначала для упрощения объяснения традиционную явную схему для уравнения теплопроводности (8) с помощью метода контрольных объемов в двумерном случае и в предположении, что в газовой области и твердом теле введена единая прямоугольная сетка. Полагаем, что сеточные функции T и ε заданы в узлах ячеек, а сетка согласована с линиями разрыва теплофизических свойств, т.е. коэффициентов c, κ, f уравнения (8). Пусть на плоскости Oxy линией разрыва коэффициентов (интерфейсом “газ–твердое тело”) является линия $y = 0$, см. фиг. 2, а вне линии разрыва коэффициенты и решение являются достаточно гладкими. Рассмотрим дуальную ячейку, ассоциированную с узлом сетки с номером 0, лежащим на интерфейсе. Она показана на фиг. 2 штриховой линией и состоит из двух половин — верхней части 1, лежащей в газе, и нижней части 2, лежащей в твердом теле (затененная область). Обозначим эти части через Ω^1 и Ω^2 . Объем дуальной ячейки является суммой парциальных объемов: $\Omega = \Omega^1 + \Omega^2$. Интегрируя уравнение (8) по дуальному объему, связанному с узлом с номером 0, получаем в этом узле схему:

$$\Omega \frac{\varepsilon_0^{n+1} - \varepsilon_0^n}{\Delta t} = \Delta(T^n) + f_0, \quad (10)$$

где $\Delta(T^n)$ — поток тепла через границу этой ячейки, T^n — температура, полученная на предыдущем шаге по времени обращением уравнения состояния, $\varepsilon_0^{n+1}, \varepsilon_0^n$ — новые и старые значения функции ε , f_0 — правая часть в интерфейсном узле. Дискретизация (10) использует сеточные значения функции T^n на 9-точечном шаблоне узлов, показанном на фиг. 2. Часть узлов шаблона лежит в газовой области, часть — в твердом теле. Эти узлы показаны на фиг. 2 кружками и квадратами соответственно.

Рассмотрим случай уравнения состояния $\varepsilon = c \cdot T$. Обобщение на случай нелинейного уравнения с учетом введенной линеаризации очевидно. Для консервативной аппроксимации (10) уравнения (8) в узлах сетки должны быть определены теплоемкость c_0 и правая часть f_0 . Чтобы



Фиг. 2. Дуальная ячейка (штриховая линия) узла 0.

не вводить обозначения, связанные с двумерностью, предположим, что сверху и снизу от разрыва c , f постоянны и равны c_0^1 , c_0^2 и f_0^1 , f_0^2 соответственно. Их аппроксимация c_0 , f_0 в узле на интерфейсе основана на следующих равенствах (см., например, [18]):

$$\int_{\Omega} c dV = c_0 \cdot \Omega; \quad \int_{\Omega} c dV = \int_{\Omega^1} c dV + \int_{\Omega^2} c dV = c_0^1 \cdot \Omega^1 + c_0^2 \cdot \Omega^2. \quad (11)$$

Отсюда $c_0 = c_0^1 \cdot \Omega^1 / \Omega + c_0^2 \cdot \Omega^2 / \Omega$, формула для расчета f записывается аналогично.

После расчета внутренней энергии ε^{n+1} по явной схеме во всех узлах сетки производим пересчет температуры обращением уравнения состояния. В случае идеального газа имеем $T^{n+1} = \varepsilon^{n+1} / c$ во всех узлах, включая интерфейсные узлы.

Видим, что при определении сеточных функций c , f в соответствии с формулой (11) сквозной алгоритм на единой сетке (с общей нумерацией узлов для газовой области и твердого тела) во всей расчетной области содержит обработку на интерфейсе сеточных функций c , f . Обычно для однородности пересчет коэффициентов из центров ячеек в узлы делается в каждом узле сетки.

Приступим к объяснению предлагаемого сквозного метода расчета сопряженного теплообмена между газодинамическими течениями и телами сложной геометрической формы. Метод пригоден для расчетов на многоблочных неструктурированных сетках (в том числе — для многосвязных тел). В многоблочном случае сетки для газовой области и твердого тела строятся независимо, но с одной оговоркой — на интерфейсе “газ–твердое тело” они состыкованы узел в узел. В будущем мы откажемся от этого ограничения. Метод может быть обобщен для произвольного расположения и сочетания многоблочных неструктурированных сеток. Граница одного блока может примыкать к нескольким блокам. Дополнительно указывается принадлежность узлов сетки интерфейсу для выполнения процедуры коррекции температуры с целью обеспечения консервативности схемы.

Идею метода мы сначала проиллюстрируем на примере построения явной схемы, которая алгебраически эквивалентна изложенному выше сквозному алгоритму, но по форме является многообластной: расчет производится единым циклом по всем узлам многоблочной сетки, затем корректируются сеточные значения внутренней энергии и температуры на интерфейсах “газ — твердое тело”.

Выполним интегрирование уравнения энергии (8) отдельно по верхней и нижней частям дуальной ячейки. Эти части с объемами Ω^1 , Ω^2 лежат по разные стороны интерфейса, в разных под областях (см. фиг. 2). По-прежнему для простоты объяснения мы используем одномерную ин-

терпретацию алгоритма. Граница верхней части Ω^1 состоит из двух участков. Один участок лежит строго внутри газовой области, второй — на интерфейсе; обозначим эти участки как S^1 и S^0 . Соответствующие участки границы нижней части Ω^2 , лежащей по другую сторону интерфейса, обозначим как S^2 и S^0 . Обозначим поток энергии через границу S^0 как Q^0 , а потоки через границы S^1 и S^2 как Q^1 и Q^2 соответственно. Получаем парциальные разностные соотношения в интерфейсном узле с номером 0:

$$\Omega^1 \frac{\varepsilon_1^{n+1} - \varepsilon_0^n}{\Delta t} = Q^1 - Q^0 + \Omega^1 f_0, \quad \Omega^2 \frac{\varepsilon_2^{n+1} - \varepsilon_0^n}{\Delta t} = Q^0 - Q^2 + \Omega^2 f_0. \quad (12)$$

На нижнем слое по времени имеем по построению алгоритма $\varepsilon_1^n = \varepsilon_2^n = \varepsilon_0^n$ — это единое значение для двойного узла, имеющее смысл среднего значения по полной дуальной ячейке. Переменная ε_0^n вычисляется по формуле вида $\varepsilon_0^n = \varepsilon_1^n \Omega^1 / \Omega + \varepsilon_2^n \Omega^2 / \Omega$. Аналогично вычисляется правая часть f_0 по переменным f_1^n, f_2^n .

В уравнениях (12) поток Q^0 нам неизвестен, но его знание и не требуется. Для определенности полагаем $Q^0 = 0$, т.е. парциальные разностные уравнения теплопроводности вида (12) в газе и твердом теле записываются при адиабатическом краевом условии на интерфейсе, т.е. при равенстве нулю нормальной компоненты теплового потока. Парциальные уравнения не аппроксимируют по отдельности исходное уравнение теплопроводности (8), но при суммировании уравнений (12) аппроксимация обеспечивается.

Переменные $\varepsilon_1^{n+1}, \varepsilon_2^{n+1}$ являются сеточными атрибутами первой и второй областей; они представляют внутреннюю энергию единицы объема в парциальных ячейках Ω^1 и Ω^2 .

Суммируя первое и второе уравнения (12), получаем

$$\Omega \frac{\varepsilon_1^{n+1} \Omega^1 / \Omega + \varepsilon_2^{n+1} \Omega^2 / \Omega - \varepsilon_0^n}{\Delta t} = Q^2 - Q^1 + \Omega f_0. \quad (13)$$

Из сопоставления (13) и с учетом равенства $\Delta(T^n) = Q^2 - Q^1$ получаем, что следует определить новую переменную на верхнем слое в узле на интерфейсе в виде

$$\varepsilon_0^{n+1} = \varepsilon_1^{n+1} \Omega^1 / \Omega + \varepsilon_2^{n+1} \Omega^2 / \Omega. \quad (14)$$

При таком определении парциальные дискретизации (12) в областях с последующим расчетом интерфейсных значений по формуле (14) алгебраически тождественны схеме сквозного счета (10). Если интерфейсный узел лежит на границе l областей (двух и более), то формула обработки парциальных значений ε_i^{n+1} (и им аналогичных) принимает вид

$$\varepsilon_0^{n+1} = \sum_{i=1}^{i=l} \gamma_i \varepsilon_i^{n+1}, \quad \gamma_i = \Omega_i / \Omega, \quad i = 1, \dots, l. \quad (15)$$

Так как алгоритм LINS (6), (7) основан на цикле, каждый шаг которого подобен одному шагу явной схемы, то изложенная выше многоблочная процедура решения задачи сопряженного теплообмена легко реализуется при использовании схемы LINS.

Приведем ее алгоритм для случая прямого интегрирования уравнения энергии (8) в газе и твердом теле с выделением интерфейсов между ними. Алгоритм реализован для многоблочных трехмерных неструктурированных сеток, конформных на интерфейсах. Единственный входной параметр схемы LINS (помимо шага τ) — это оценка на текущем слое по времени верхней границы $\lambda_{\max}$ сеточного аналога дифференциального оператора

$$L \cdot T = (\partial \varepsilon / \partial T)^{-1} \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T). \quad (16)$$

В отличие от обычной реализации схемы LINS, для задачи сопряженного теплообмена оценка $\lambda_{\max}$ находится на многоблочной сетке.

Переход к новой итерации схемы LINS делается после завершения каждого шага цикла вида (6) по всей сетке. Необходимая для проведения итераций температура T (для расчета тепловых

потоков) на всех промежуточных итерациях определяется по внутренней энергии с помощью линеаризованного уравнения состояния.

Явная структура алгоритма обеспечивает автоматическую аппроксимацию условий теплообмена и элегантную аддитивную форму метода в многообластном случае, когда разностная дискретизация становится в целом нестандартной (так как шаблон дискретизации интерфейсного узла может лежать в нескольких смежных областях).

Детализируем алгоритм LINS для случая пары областей “газ – твердое тело”. Пусть дискретизация построена в каждой области, включая сеточные узлы, лежащие на интерфейсе. Дискретизация на интерфейсе является парциальной, она будет полноценной после пересчета в каждом узле на интерфейсе единых значений внутренней энергии и температуры, см. пункт 6 алгоритма ниже в этом же разделе.

В газовой области определен шаг интегрирования τ из условия устойчивости конвективного, т.е. гиперболического этапа. Сначала проведен расчет этого этапа, затем выполнен параболический подэтап – совместно вязкий и диффузионный. Этот подэтап состоит из явно-итерационной процедуры (7), примененной к редуцированным уравнениям импульса и уравнениям многокомпонентного переноса. По их завершении готовятся источники членов $\nabla \cdot (\tau \cdot \mathbf{u})$, $\nabla \cdot \mathbf{J}$, входящие в правую часть уравнения энергии.

На втором параболическом подэтапе решается редуцированное уравнение энергии сквозным образом по всем теплопроводным областям, как газовым, так и твердотельным.

Заметим, что такое разделение удобно для включения в схему уравнений химической кинетики, так как уравнение энергии является замыкающим законом сохранения с учетом суммарного теплового потока.

Алгоритм расчета сопряженной задачи теплопроводности имеет следующий вид.

1. Инициализация. До начала расчета первого временного шага проводится обработка интерфейсных границ с определением на этих границах кратностей узлов l , весовых множителей $\gamma_i = \Omega_i / \Omega$, $i = 1, \dots, l$, значений внутренней энергии ϵ по формулам (15) и температуры по уравнению состояния $\epsilon = \epsilon(T)$, нелинейному в общем случае.

На каждом шаге по времени производится переход на следующий временной слой: выполняются нижеследующие пункты 2–7:

2. Расчет в газовой области гиперболического этапа и параболического (вязкого и диффузионного) этапов.

3. Вычисление по всем областям коэффициентов вида $A = \epsilon_T(T_d)$, $B = \epsilon(T_d) - A \cdot T_d$, получаемых линеаризацией внутренней энергии $\epsilon(T)$ по температуре T_d с нижнего слоя. Пересчет этих коэффициентов на интерфейсе по смежным областям имеет вид $A = \sum \gamma_i A_i$, $B = \epsilon(T_d) - A \cdot T_d$, где суммирование ведется по индексу $i = 1, \dots, l$, как в формулах (15).

4. Нахождение оценки $\lambda_{\max}$ максимального собственного числа оператора L_h на основе сумм модулей шаблонных коэффициентов, расчет числа итераций $q = 2p - 1$ схемы.

5. Расчет в цикле по $m = 1, \dots, q$ одной итерации схемы LINS (два этапа).

5.1. Определение функции ϵ^m по значениям ϵ_{conv} и ϵ^{m-1} , T^{m-1} во всех узлах сетки:

$$\epsilon^m = \frac{1}{1 + \tau_{\text{conv}} b_m} \left\{ \epsilon_{\text{conv}} + \tau_{\text{conv}} b_m \epsilon^{m-1} + \frac{\tau_{\text{conv}}}{\Omega} \Delta(T^{m-1}) + f \right\}.$$

Здесь $\Delta(T^{m-1})$ – тепловой поток через границу ячейки с объемом Ω . По завершении цикла в каждом узле на интерфейсе получаем набор значений ϵ_i^m , $i = 1, \dots, l$.

5.2. Коррекция интерфейсных значений для обеспечения аппроксимации уравнения энергии: на каждой итерации m в каждом узле на интерфейсе единые значения внутренней энергии и температуры вычисляются по формулам $\epsilon_f = \sum \gamma_i \epsilon_i^m(T)$, $\gamma_i = \Omega_i / \Omega$, $T^m = (\epsilon_f - B)/A$; занесение полученных общих значений в основные сеточные переменные: $\epsilon_f \rightarrow \epsilon_i^m$, $T^m \rightarrow T_i^m$, $i = 1, \dots, l$.

6. Завершение итераций по m : используя найденную внутреннюю энергию ϵ , находим новую температуру T с помощью уравнения состояния. Например, в случае аппроксимации уравнения

состояния многочленом 5-й степени, находим во всех узлах сетки сеточную функцию T из решения методом Ньютона нелинейного уравнения типа $b_0 + b_1T + \dots + b_5T^5 = \varepsilon/\rho$.

7. Если шаг по времени не последний, то делается переход к п. 2.

В вышеприведенном алгоритме в неявном виде используется разностный аналог дифференциального оператора (16), записанного для уравнения теплопроводности в газовой среде и твердом теле, с линеаризацией по нижнему слою.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для верификации представленного метода выбрана модельная задача об обтекании пластины конечной толщины внезапно ускоренным потоком [4]. Этот тест является существенно нестационарным и используется для оценки методов расчета сопряженного теплообмена, см., например, [5]. Здесь мы ограничимся изложением модельной задачи и демонстрационными результатами. Систематическому исследованию точности предложенного метода будет посвящена отдельная работа.

На фиг. 1 показаны геометрия задачи и наглядная формулировка краевых условий. Расчетная двумерная область состоит из горизонтальной пластины $d \times b$ длиной d , толщиной b и расположенной над ней газовой областью размера $d \times b$. На нижней границе пластины поддерживается постоянная температура T_e . В газовой области верхняя граница — стенка с постоянной температурой $T_b = 300$, нижняя — это интерфейсная граница “газ–твердое тело”. Здесь и далее значения размерных величин приводятся в системе СИ, в частности, температура измеряется в градусах Кельвина. В рамках газодинамической задачи на интерфейсной границе ставится условие непротекания, в полной задаче — непрерывность температуры и нормальной к границе компоненты вектора теплового потока (условия сопряжения). На боковых границах расчетной области заданы условия периодичности. В направлении оси Oz область расчета считаем однородной и бесконечной, т.е. решение задачи от координаты z не зависит. В силу краевых условий решение не зависит также от координаты x , но первые две компоненты u_1, u_2 вектора скорости $\mathbf{u}$ являются ненулевыми функциями координаты y .

При $t = 0$ температура однородна как в газе, так и в твердом теле: $T(x, y, z, 0) = T_0 = T_\infty$, газ покоится, давление в газе $p = p_\infty = 101\,325$. В начальный момент времени $t = 0$ газ мгновенно ускоряется от состояния покоя до постоянной скорости U_∞ (число Маха M_∞). Референсная скорость звука в газе равна 347 м/с, параметры набегающего потока $M_\infty = 3$, $Pr = 0.72$, $\gamma = 1.4$, характерный линейный размер задачи $L = b$. Число Рейнольдса $Re_\infty = \rho_\infty \cdot L \cdot U_\infty / \mu(T_\infty) \approx 3.4 \times 10^6$, где $\mu(T_\infty)$ — вязкость газа при $T = T_\infty$.

В [4] предложено использовать для характеристики сопряженного теплообмена два безразмерных параметра

$$P = (b/L) \sqrt{Re_\infty} \cdot \lambda_f(T_\infty) / \lambda_s, \quad t_{fs} = Lb^{-2} \alpha_s / U_\infty. \quad (17)$$

Параметр t_{fs} — это отношение характерных временных масштабов основных процессов в газе и твердом теле (в данной задаче $t_{fs} = 1$), $\alpha_s = \kappa_s / c_s$ — коэффициент температуропроводности твердого тела, равный отношению коэффициента теплопроводности к теплоемкости единицы объема. Параметр P из формул (17) является аналогом числа Бюна $Bu = \Lambda = P \cdot \sqrt{Pr}$, введенного А.В. Лыковым [6].

В газе коэффициенты вязкости и теплопроводности заданы линейными функциями температуры: $\mu(T) = \mu^0 \cdot T / T_\infty$, $\lambda_f(T) = \lambda_f^0 \cdot T / T_\infty$. Для каждого компонента (кислород и азот) смеси взяты одинаковые константы $\mu_0 = 1.8 \times 10^{-5}$, $\lambda_f^0 = 0.025437$ и коэффициент диффузии $D = \mu / (\rho Sc)$, где $Sc = 0.9$ — число Шмидта. Удельная теплоемкость смеси при постоянном объеме задана константой $c_v = 725$. Для твердого тела в уравнении (8) плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность заданы постоянными $c = \rho_s c_s = 0.8981$, $\kappa = \lambda_s = 46.7$, что соответствует постановке задачи в [4, 5].

Параметры задачи подобраны так, что сопряженный теплообмен является существенным процессом. Принято считать, что при $Bu < 0.1$ эффектами теплообмена через интерфейс можно

пренебречь, т.е. задача может быть решена как несопряженная [6]. В сформулированной выше задаче число Брьюна $B_{\Gamma} \approx 0.80$. Иногда для характеристики теплообмена используют число Нуссельта $Nu = \chi \cdot b / \lambda_f$, где χ — коэффициент теплообмена газа с твердой средой, для нас величина χ неизвестна. Число Нуссельта в данной задаче найдено с помощью аналитического решения, см. ниже (20).

Рассматриваемая задача является нестационарной, хорошо подходит для проверки расчетных схем и близка по постановке работам [4, 5]. Отличие состоит в задании на верхней границе газовой области краевого условия “изотермическая стенка” вместо экстраполяционных условий, а также рассмотрение воздуха как двухкомпонентной смеси кислорода и азота в целях методической отладки новой численной модели.

Интерес представляют несколько вариантов задачи в зависимости от задания краевых условий на нижней границе пластины: а) изотермический случай, задана постоянная температура T_e ; б) адиабатический случай, тепловой поток равен 0. Случай а) включает режимы нагревания $T_e > T_0$ и охлаждения $T_e < T_0$. Случай б) дает решение важной задачи, состоящей в симметричном обтекании толстой пластины (толщиной $2d$), обтекаемой газом с двух сторон.

Ниже рассмотрена задача только для режима нагревания $T_e > T_0$ с параметрами $T_e = 900$, $T_0 = 300$. Отметим, что на малом начальном отрезке времени пластина нагревается с двух сторон, как с горячей нижней стороны, так и со стороны газа. С течением времени в газе формируется узкий пограничный слой, от интерфейса вверх со звуковой скоростью движется волна сжатия. Она отражается от верхней границы и достигает интерфейса уже в конце изучаемого переходного процесса.

Для получения аналитического решения используется преобразование координат, позволяющее отделить уравнение энергии от уравнений непрерывности и импульса и придать уравнениям пограничного слоя форму, близкую к форме уравнений пограничного слоя несжимаемой жидкости (преобразование Дородницына [15]). В [4] это преобразование распространено на сжимаемый случай. Замена переменных имеет вид

$$\eta = \left(\sqrt{\text{Re}_{\infty}} / b \right) \int_0^y \rho / \rho_{\infty} dy, \quad t^* = t U_{\infty} / b. \quad (18)$$

Аналитическое решение $\theta_{\text{anal}} = \theta(\tau)$ для безразмерной температуры $\theta = (T - T_{\infty}) / T_{\infty}$ как функции безразмерного времени $\tau = t^* = t U_{\infty} / b$ приведено в [4, 5]:

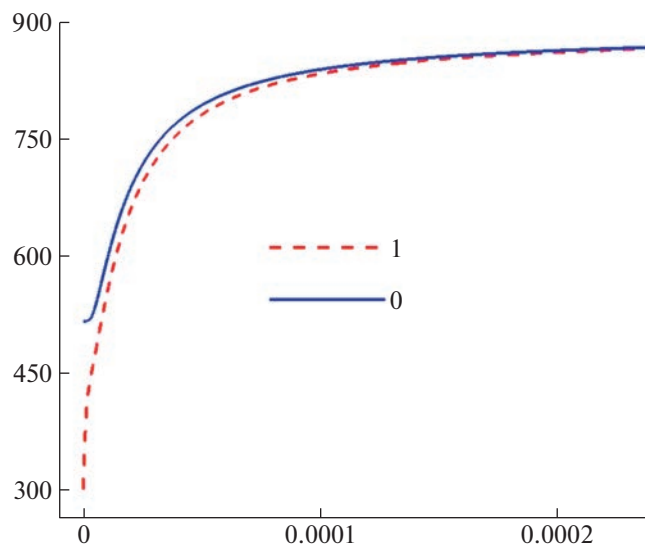
$$\theta_{\text{anal}}(\tau) = \theta_{w0} \left[1 - \kappa \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \text{erfc} \left(\frac{n+1}{\sqrt{\tau}} \right) \right] + k \theta_e \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \text{erfc} \left(\frac{2n+1}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (19)$$

где $\Lambda = P \sqrt{\text{Pr}}$, $A = (1 - \Lambda) / (1 + \Lambda)$, $\theta_{w0} = \theta_{aw} \Lambda / (1 + \Lambda)$, $\theta_e = T_e / T_{\infty} - 1$, $k = 2 / (1 + \Lambda)$, $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$ — дополнительная функция ошибок, θ_{aw} — безразмерная температура стенки, получающаяся при установлении процесса обтекания пластины с заменой условия сопряженного теплообмена на условие теплоизолированной стенки. В рассматриваемом случае $\theta_{aw} = 1.6$ согласно [5], т.е. $T_{aw} = 780$. Ряды в (19) сходятся абсолютно, так условие $\Lambda = P \sqrt{\text{Pr}} > 0$ обеспечивает ограниченность модуля $A = (1 - \Lambda) / (1 + \Lambda)$ единицей. Следуя [5], на интерфейсе определим число Нуссельта как $Nu = P \cdot \partial \theta / \partial \eta$, где аргумент η определен в (18):

$$Nu(\tau) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\tau}} \left[\theta_{aw} - \theta_{w0} + k \cdot \theta_{w0} \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \exp \left(-\frac{(n+1)^2}{\tau} \right) - \right. \\ \left. - k \cdot \theta_e \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \exp \left(-\frac{(2n+1)^2}{4\tau} \right) \right]. \quad (20)$$

Из (20) следует, что точка $\tau = 0$ является особой, в решении возникает сингулярность. При $\tau \rightarrow 0$ решение является конечным: $\theta_{\text{anal}}(0) \approx 0.73$, т.е. $T_{\text{anal}}(0) = 517$, а тепловой поток Q_{anal} , вычисляемый с помощью (20) по формуле $Q_{\text{anal}} = Nu \cdot \lambda_s T_{\infty} / L$, бесконечен.

Априори определить интервал времени, в котором сингулярность значима, а также найти физические параметры, управляющие длительностью начального интервала, достаточно трудно,



Фиг. 3. Температура на интерфейсе: 0 — аналитическое решение (сплошная линия), 1 — численный расчет (штриховая линия).

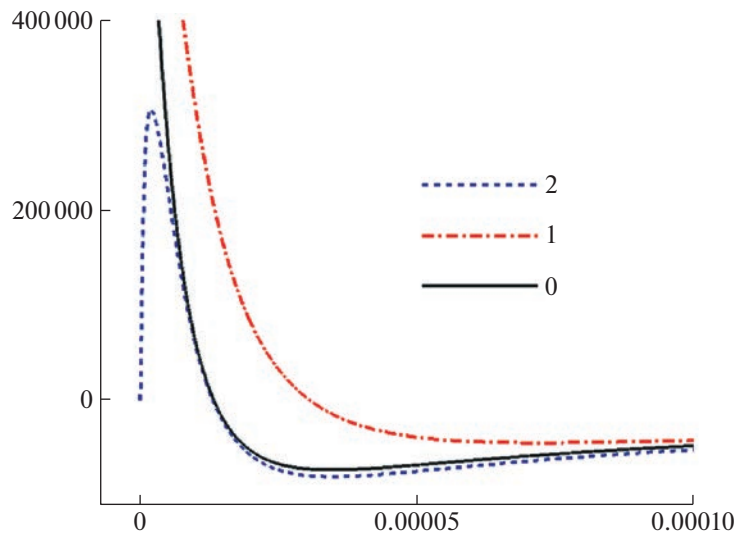
особенно в трехмерных математических моделях импульсного обтекания. В одномерном случае это легко сделать с помощью формулы (19), которая описывает в явном виде зависимость решения от параметров задачи и является хорошим тестом для верификации методов. Отметим, что из-за сингулярности мы можем наблюдать сходимость численных решений к точному вне малого начального интервала. При заданных параметрах хорошее соответствие аналитического и численных потоков наблюдается уже при $t > 2.4 \times 10^{-6}$, что отвечает безразмерному времени $t^* > 0.05$.

Расчеты проведены на прямоугольных сетках с числом ячеек $N_x \times N_y$. Число шагов N_x по оси Ox взято постоянным и небольшим (решение от x не зависит), $N_x = 5$. По оси Oy сетка измельчалась до достижения разумного совпадения с аналитическим решением в интервале наблюдения $t > 2.4 \times 10^{-6}$. В итоге численный анализ задачи проводился на достаточно подробной равномерной сетке с числом узлов $N_y = 10^4$ с шагом $h = 10^{-5}$.

На фиг. 3 приведены профили по времени температуры на интерфейсе при $0 < t < 2.4 \times 10^{-4}$. Показано численное (штриховая линия) и аналитическое решение (сплошная линия), получаемое с помощью (19). Видно, что при $t = 0$ приближенное расчетное значение равно 0, но с ростом t оно достаточно быстро (в масштабе времени переходного процесса) сближается с аналитическим.

На фиг. 4 показаны профили по времени аналитического теплового потока, определенного с помощью формулы (19), и односторонних потоков, вычисленных по приближенному решению с помощью трехточечных аппроксимаций второго порядка точности по шагу сетки. Обозначения: 0 — аналитический поток (сплошная линия), 1 — поток со стороны твердого тела (штрихпунктир), 2 — поток со стороны газа (штриховая линия). Графики показаны для $t < 10^{-4}$, далее в выбранном масштабе они практически сливаются.

При $t > 2.4 \times 10^{-4}$ относительное различие односторонних тепловых потоков и их отклонение от аналитического потока составляют менее 5%, а погрешность расчета температуры — менее 0.3%. Односторонние численные потоки заметно различаются в начальный момент времени. Тепловая волна от горячей нижней границы достигает интерфейса не мгновенно, а за несколько шагов по времени (в силу свойств схемы LINS). В частности, это происходит из-за ограниченности фактического разностного шаблона узлов. Влияние горячей точки распространяется за шаг по времени на $q = 2p - 1$ узлов в разные стороны, где p — степень чебышёвского многочлена, см. формулу (5). К тому же, в газе в близких к интерфейсу узлах сетки возникает газодинамический нагрев. Но основная причина различий односторонних тепловых потоков — проявление сингу-



Фиг. 4. Тепловые потоки на интерфейсе: 0 — аналитический (сплошная линия), 1 — поток со стороны пластины (штрих-пунктир), 2 — поток со стороны газа (штриховая линия).

лярности. Для контроля выполнена имитация одномерного расчета с использованием неявной схемы, реализуемой прогонкой и схемой LINS. Результаты оказались практически одинаковыми.

Шаг по времени выбирался из условия устойчивости конвективной подзадачи с коэффициентом запаса 0.5. Параболический диффузионно-вязкий этап интегрировался по схеме LINS, т.е. редуцированные уравнения импульса и многокомпонентной диффузии решались совместно. Так как на выбранной сетке верхняя граница спектра совместного диффузионно-вязкого оператора $\lambda_{\max} = 1.4 \times 10^7$ обеспечивает устойчивость явного счета, то схема LINS автоматически переходит в явную схему. Для дискретного оператора, отвечающего аппроксимации уравнения теплопроводности в газе и твердом теле $\lambda_{\max}^T = 4 \times 10^{12}$. Поэтому сквозной расчет теплопроводного этапа в газе и твердом теле в соответствии с формулой (5) требует $q = 161$ явных итераций схемы LINS. В этом случае явная схема потребовала бы более 10 тысяч шагов.

Более детальное описание результатов решения модельной задачи приведено в [22]. Алгоритм совместного решения расширенной системы Навье—Стокса и теплопроводности в твердом теле работает в общей среде кода NOISEtte—MCFL [23].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный в данной работе метод решения задачи сопряженного теплообмена относится к прямой стратегии расчета. Он основан на сквозном интегрировании по времени уравнения теплопроводности в газовой области и твердом теле. Метод автоматически обеспечивает аппроксимацию условий сопряженного теплообмена на интерфейсных границах между газом и твердотельной конструкцией. Алгоритм пригоден для расчета задач сопряженного теплообмена между газодинамическими течениями и телами сложной геометрической формы при использовании многоблочных неструктурированных сеток. В многоблочном случае сетки для газовой области и твердого тела строятся независимо, но на интерфейсах они состыкованы узел в узел. В будущем это ограничение может быть снято.

Получен надежный, высокоточный, консервативный метод для решения задачи нестационарного сопряженного теплообмена. Анализ нестационарной задачи о нагреве высокоскоростного потока горячей пластиной, представленный в данной работе, подтверждает перспективность предлагаемого подхода к решению нестационарных задач сопряженного теплообмена. Планируемое включение в состав компьютерного кода процессов химической кинетики усилит роль диффузионных процессов, повысит практическое значение метода и расширит область его прикладного применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dimitrienko Y.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N.* Coupled problems of high-speed aerodynamics and thermomechanics of heat-shielding structures // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018. V. 1141. P. 012094.
2. *Зинченко В.И., Гольдин В.Д.* Решение сопряженной задачи нестационарного теплообмена при сверхзвуковом обтекании затупленного по сфере конуса // *Инженерно-физический журнал*. 2020. Т. 93. № 2. С. 431–442.
3. *Meng F., Banks J.W., Henshaw W.D., Schwendeman D.W.* A stable and accurate partitioned algorithm for conjugate heat transfer // *J. Computational Physics*. 2017. V. 344. № 1. С. 51–85.
4. *Pozzi A., Tognaccini R.* Time singularities in conjugated thermo-fluid-dynamic phenomena // *J. Fluid Mech.*, 2005. V. 538. С. 361–376.
5. *Radenac E., Gressier J., Millan P.* Methodology of numerical coupling for transient conjugate heat transfer // *Computers & Fluids*. 2014. V. 100. С. 95–107.
6. *Luikov A.V.* Conjugate convective heat transfer problems // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 1974. V. 17. P. 1207–1214.
7. *Feodoritova O.B., Krasnov M.M., Novikova N.D., Zhukov V.T.* A Numerical Method for Conjugate Heat Transfer Problems in Multicomponent Flows // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. V. 2028. P. 012024.
8. *Galanin M.P., Zhukov V.T., Klyushnev N.V. et al.* Implementation of an iterative algorithm for the coupled heat transfer in case of high-speed flow around a body // *Comput. & Fluids*. 2018. V. 172. P. 483–491.
9. *Загускин В.Л., Кондрашов В.Е.* О счете уравнений теплопроводности и газовой динамики прогонкой по отдельным областям // *Докл. АН СССР*. 1965. Т. 163. № 5. С. 1107–1109.
10. *Giles M.B.* Stability analysis of numerical interface conditions in fluid structure thermal analysis // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1997. V. 25. № 4. С. 421–436.
11. *Коротков А.В.* Конечно-объемная дискретизация прямого метода решения задач сопряженного теплообмена в пакете программ “ЛОГОС” // *Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева*. 2022. № 3. С. 7–21.
12. *Feodoritova O.B., Novikova N.D., Zhukov V.T.* An explicit iterative scheme for 3D multicomponent heat conducting flow simulation // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 2028. P. 012022.
13. *Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.* Об одном подходе к интегрированию по времени системы уравнений Навье–Стокса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 2. С. 267–280.
14. *Жуков В.Т.* О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // *Матем. моделирование*. 2010. Т. 22. № 10. С. 127–158.
15. *Дородницын А.А.* Пограничный слой в сжимаемом газе // *Прикл. матем. и механика*. 1942. Т. 6. № 6. С. 449–486.
16. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987.
17. *Суржигов С.Т.* Компьютерная аэрофизика спускаемых космических аппаратов. Двухмерные модели. М.: Физматлит, 2018.
18. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М: Едиториал УРСС, 2003.
19. *Борисов В.Е., Рыков Ю.Г.* Моделирование течений многокомпонентных газовых смесей с использованием метода двойного потока // *Матем. моделирование*. 2020. Т. 32. № 10. С. 3–20.
20. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
21. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
22. Программный комплекс NOISEtte–MCFL для расчета многокомпонентных реагирующих течений / В.Е. Борисов [и др.] // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2023. № 6. 23 с.
23. *Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.* О прямом методе решения задачи сопряженного теплообмена газовой смеси и твердого тела // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2023. № 12. 36 с.