

УДК 519.642

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПОРЯДКУ СПЛАЙН-МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСОБЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2024 г. Н. С. Габбасов

423810 Набережные Челны, пр-т Мира, 68/19, Набережночелнинский ин-т Казанского ун-та, Россия

e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

Поступила в редакцию 05.07.2023 г.

Переработанный вариант 05.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Исследовано линейное интегродифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложены и обоснованы специальные обобщенные варианты сплайн-методов. Установлена оптимальность по порядку точности построенных методов. Библ. 16.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, приближенное решение, прямой метод, теоретическое обоснование.

DOI: 10.31857/S0044466924010025 EDN: ZKEWPR

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена приближенному решению линейного интегродифференциального уравнения (ИДУ)

$$(Ax)(t) \equiv x^{(p)}(t) \prod_{j=1}^q (t - t_j)^{m_j} + \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds = y(t), \quad (1.1)$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, числа $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in N$, $j = \overline{1, q}$ и $p \in Z^+$ являются фиксированными; K и y — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами “гладкости” точечного характера, а x — искомая функция. Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1.1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, важен вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность данной задачи. При обсуждении этого вопроса вполне естественно учитывать то, что в случае $p = 0$ ИДУ (1.1) преобразуется в линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Хорошо известно, что УТР находят все более широкие применения как в теории, так и в приложениях. В частности, УТР встречаются в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129]) и приведенную в них библиографию), в теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщенных функций типа D или V . Под D (соответственно V) понимается пространство обобщенных функций, построенных с помощью функционала “дельта-функция Дирака” (соответственно функционала “конечная часть интеграла по Адамару”). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114]. На основе упомянутой выше связи между ИДУ (1.1) и УТР соответствующие идеи и результаты для УТР можно успешно использовать при корректной постановке задачи (1.1), разработке и теоретическом обосновании приближенных методов решения ИДУ (1.1) в пространствах обобщенных функций.

ИДУ (1.1) при $q = 1$, $t_1 = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нетера для такого уравнения в классах гладких и обобщенных функций типа D . В статье [8] построена полная теория разрешимости общего ИДУ (1.1) в некотором пространстве типа D обобщенных функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания

точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближенного решения в пространствах обобщенных функций с соответствующим теоретическим обоснованием. Определенные результаты в этой области получены в работах [8, 9], в которых предложены и обоснованы прямые проекционные методы приближенного решения ИДУ вида (1.1), основанные на применении стандартных и некоторых специальных полиномов.

В настоящей статье предложены обобщенные варианты сплайн-методов, специально приспособленные к численному решению ИДУ (1.1) в некотором пространстве X обобщенных функций типа D . Проведено их теоретическое обоснование в смысле [10, гл. 1, § 1–5]) и установлено, что разработанные методы оптимальны по порядку точности на некотором классе F , порожденном классом H_ω^r , среди всех прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений в пространстве X .

2. О ПРОСТРАНСТВАХ ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ — банахово пространство всех непрерывных на I функций с обычной $\max$ -нормой и $m \in N$. Обозначим через $C\{m; 0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$ множество всех функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (см., например, [11]). Его назовем классом “точечно-гладких” функций (естественно считаем, что $C\{0; 0\} \equiv C$). Построим теперь основное в наших исследованиях пространство:

$$Y \equiv C\{m, p; 0\} \equiv \left\{ y \in C\{m; 0\} : y^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{0, p-1}) \right\},$$

где число $p \in Z^+$ удовлетворяет неравенству $p < m$. Снабдим его нормой

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \quad (2.1)$$

где $T: Y \rightarrow C$ — “характеристический” оператор класса Y , определяемый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) t^i / i! \right] t^{-m} \equiv H(t) \in C, \quad H(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} H(t).$$

Лемма 2.1 (см. [8]). i) Включение $y \in Y$ равносильно выражению

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \quad (2.2)$$

причем $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $y^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$ ($i = \overline{p, m-1}$).

ii) Пространство Y по норме (2.1) полно и нормально вложено в пространство C .

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на I функций, в котором введем специальную норму

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)| \quad (z \in C^{(p)}), \quad (2.3)$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 2.2 (см. [8]). Пространство $C^{(p)}$ с нормой (2.3) полно и нормально вложено в пространство C .

Следствие 1. Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в $C^{(p)}$ и норма (2.3) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geq 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leq \|z\|_{C^{(p)}} \leq d \|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^p \|z^{(i)}\|_C$.

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \left\{ z \in C^{(p)} : z^{(i)}(-1) = 0 \quad (i = \overline{0, p-1}) \right\}$ — банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \quad (2.4)$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_i \in R$ — произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ — соответственно дельта-функция Дирака и ее “тейлоровские” производные, действующие на пространстве Y основных функций согласно следующему правилу:

$$\left(\delta^{\{i\}}, y\right) \equiv \int_{-1}^1 \delta^{\{i\}}(t) y(t) dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0) \quad (y \in Y, i = \overline{0, m-p-1}). \quad (2.5)$$

Очевидно, что векторное пространство X является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \quad (2.6)$$

3. ОБОБЩЕННЫЙ ПОЛИГОНАЛЬНЫЙ МЕТОД (ОПМ)

Пусть задано ИДУ (1.1). Для сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I), \quad (3.1)$$

$$V \equiv UD, Df \equiv f^{(p)}(t), Ug \equiv t^m g(t), Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds,$$

где $p \in N \cup \{0\}$, $m \in N$, $p < m$; $y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}$, ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\cdot, s) \in C, K(t, \cdot) \in Y, \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y \quad (i = \overline{0, m-p-1}), \quad (3.2)$$

а $x \in X$ — искомый элемент. Фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора $A : X \rightarrow Y$ установлены в работе [8]; там же указан метод отыскания точного решения ИДУ (1.1) в классе X .

Приближенное решение ИДУ (3.1) построим в виде агрегата

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+n+1} \delta^{\{i\}}(t), \quad (3.3)$$

$$g_n(t) \equiv (Jz_n)(t), \quad z_n(t) \equiv \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(t), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (3.4)$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^t (t-s)^{p-1} z(s) ds;$$

при этом $J : C \rightarrow C^{(p)}$, $(Jz)^{(i)} = J_{p-i-1}z$ ($i = \overline{0, p-1}$), $DJz = z$. Здесь $\{\varphi_i\}_0^n$ — система обычных фундаментальных сплайнов первого порядка (см., например, [12]) по узлам $s_i \equiv -1 + 2i/n$, $i = \overline{0, n}$. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$, $j = \overline{0, n+m-p}$, найдем согласно ОПМ из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(n+m-p+1)$ -го порядка:

$$\int_{-1}^1 w_k(t)(T\rho_n)(t)dt = 0, \quad k = \overline{0, n}, \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}, \quad (3.5)$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ — невязка приближенного решения, а w_k — любая из следующих “весовых” функций:

(α) $w_k(t) = \delta(t - s_k)$ — дельта-функция Дирака;

$$(\beta) \quad w_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in [s_{k-1}, s_k], \\ 0, & t \notin [s_{k-1}, s_k], \end{cases} \quad k = \overline{0, n};$$

причем в последнем случае “веса” полагаем $s_{-1} \equiv s_0$, а также $c_0 \equiv c_n$ или $c_0 \equiv c_1$ (периодический или непериодический случай соответственно).

Следуя работе [13], примем соглашения, полезные при оформлении результатов по обоснованию приближенных методов. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in N$ ($n \geq n_0$) СЛАУ (3.5) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (3.1) по норме пространства X ” заменим простой фразой “метод (3.3)–(3.5) обоснованно применим к уравнению (3.1)”. Во-вторых, для погрешности приближенного решения введем специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$; оценка этой величины определяет скорость сходимости приближенных решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (3.1).

Обоснование вычислительного алгоритма (3.1)–(3.5) дается в следующей теореме.

Теорема 1. Если однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 из [8]), то прямой метод (3.3)–(3.5) обоснованно применим к уравнению (3.1), причем

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n) \right\}, \quad (3.6)$$

где $\Delta_n \equiv 1/n$, $\omega(f; \Delta)$ — модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ ($0 < \Delta \leq 2$), $\omega_t(h; \Delta)$ — частный модуль непрерывности функции $h(t, s)$ по переменной t ; $h \equiv T_t K$, $f_i \equiv T_t \Psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай (α) “веса” w_k . В условиях данной теоремы ИДУ (3.1) представляется в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y, \quad x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}, \quad y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}, \quad (3.7)$$

в котором оператор $A : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим.

Систему (3.3)–(3.5) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства основных пространств:

$$X \supset X_n \equiv J(S_n^1) \oplus \text{span} \left\{ \delta^{\{i\}}(t) \right\}_0^{m-p-1}, \quad Y \supset Y_n \equiv U(S_n^1) \oplus \text{span} \left\{ t^i \right\}_p^{m-1},$$

где $S_n^1 \equiv \text{span} \{ \varphi_i \}_0^n$ — пространство всех сплайнов первого порядка по системе узлов $\{s_i\}_0^n$. Далее зададим линейное проектирующее отображение $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m-p+1} : Y \rightarrow Y_n$ согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-p+1}(y; t) \equiv (UP_n Ty)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!}, \quad (3.8)$$

в котором линейный оператор $P_n : C \rightarrow S_n^1$ каждой функции $f \in C$ ставит в соответствие ее интерполяционный полигон (сплайн первого порядка) $(P_n f)(t) \equiv \sum_{i=0}^n f(s_i) \varphi_i(t)$.

Покажем теперь, что вычислительная схема (3.3)–(3.5) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Gamma_n A x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \Gamma_n y \in Y_n. \quad (3.9)$$

Пусть $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ есть решение уравнения (3.9), т.е. $\Gamma_n \rho_n^* = 0$, $\rho_n^* \equiv A x_n^* - y$. В силу (3.8) и (2.2) последнее равносильно системе

$$(P_n T \rho_n^*)(t) \equiv 0, \quad (\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1},$$

или же

$$(T \rho_n^*)(s_k) = 0, \quad k = \overline{0, n}; \quad (\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}.$$

Итак, СЛАУ (3.5) при “весе” (α) имеет единственное решение $\{c_j^*\}_0^{n+m-p}$, т.е. решение уравнения (3.9) является решением системы (3.3)–(3.5).

Для получения обратного утверждения достаточно провести только что изложенные рассуждения в обратном порядке.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (3.9). В этих целях нам понадобится аппроксимативное свойство оператора Γ_n .

Лемма 3.1. Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leq \omega(Ty; \Delta_n). \quad (3.10)$$

Доказательство данного утверждения легко следует из соотношений (2.2), (3.8), (2.1) и оценки (см., например, [12])

$$\|f - P_n f\|_C \leq \omega(f; \Delta_n), \quad f \in C. \quad (3.11)$$

Уточним структуру аппроксимирующего уравнения (3.9). Поскольку $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$, имеем $\Gamma_n V x_n = V x_n \in Y_n$ при любом элементе $x_n \in X_n$. Следовательно, вычислительный алгоритм (3.3)–(3.5) равносильен функциональному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv V x_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \Gamma_n y \in Y_n. \quad (3.12)$$

Покажем теперь “близость” операторов A и A_n на подпространстве X_n в условиях (3.2). Используя уравнения (3.7) и (3.12), представления (2.2) и (3.8), норму (2.1), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|A x_n - A_n x_n\|_Y = \|K x_n - \Gamma_n K x_n\|_Y = \|T K x_n - P_n T K x_n\|_C. \quad (3.13)$$

На основании (3.1), (2.4), (2.5) и (3.2) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \gamma_i \psi_i(t).$$

Следовательно,

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+1} \psi_i(t),$$

и тогда справедливо равенство

$$(TKx_n)(t) = \int_{-1}^1 h(t, s) g_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+1} f_i(t). \quad (3.14)$$

В силу (3.14), (3.11), леммы 2.2 и определения (2.6) последовательно выводим промежуточную оценку:

$$\|TKx_n - P_n TKx_n\|_C \equiv \max_{t \in I} \left| \int_{-1}^1 (h - P_n^t h)(t, s) g_n(s) ds + \sum_i (-1)^i c_{i+n+1} (f_i - P_n f_i)(t) \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\|g_n\|_C \omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i |c_{i+n+1}| \omega(f_i; \Delta_n) \leq 2\|g_n\|_{(p)} \omega_t(h; \Delta_n) + \\ &+ \|x_n\|_X \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \leq 2 \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \right] \|x_n\|_X. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (3.13) и (3.15) следует искомая оценка “близости” операторов A и A_n :

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq 2 \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \right]. \quad (3.16)$$

На основании оценок (3.16) и (3.10) из теоремы 7 [10, гл. 1, § 4] вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (3.6).

В случае (β) “весовой” функции w_k вычислительная схема (3.3)–(3.5) равносильна операторному уравнению вида (3.9), в котором отображение Γ_n задано по правилу (3.8), где роль оператора P_n играет линейный оператор $Q_n : C \rightarrow S_n^1$, ставящий в соответствие каждой функции $f \in C$ ее “усредненный” интерполяционный сплайн [14]

$$(Q_n f)(t) \equiv \sum_{i=0}^n F_i(f) \varphi_i(t), \quad F_i(f) \equiv \frac{n}{2} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(t) dt, \quad i = \overline{0, n},$$

причем $F_0(f) \equiv F_n(f)$ в периодическом случае, а в общем случае $F_0(f) \equiv F_1(f)$. Из соответствующих результатов работы [14] следует, что в рассматриваемом случае операторов Γ_n и Q_n также имеют место оценки вида (3.10), (3.11). Однако, как легко проверить, оператор Γ_n не является проекционным, т.е. $\Gamma_n^2 \neq \Gamma_n$. Поэтому наряду с уравнением (3.9) введем в рассмотрение операторное уравнение

$$B_n x_n \equiv V x_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y \quad x_n \in X_n, \Gamma_n y \in Y_n. \quad (3.17)$$

Аналогично случаю с “весом” (α) (заменой оператора A_n на B_n) получим оценки

$$\|B_n^{-1}\| = O(1), \quad B_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_1, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_n - x^*\|_X &\equiv O \left\{ \omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n) \right\}, \\ x^* &= A^{-1}y, \quad \tilde{x}_n = B_n^{-1}\Gamma_n y. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Далее, используя известный способ функционального анализа (см., например, [5, гл. 4, § 3, с. 125]) с привлечением соотношений (3.17), (3.18), аппроксимативных свойств оператора Γ_n и “малой” теоремы Банаха, найдем, что

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_2. \quad (3.20)$$

Для оценки погрешности $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|$, $x_n^* = A_n^{-1}\Gamma_n y$, как и в [10, гл. 1, § 3, с. 18], имеем представление

$$x^* - x_n^* = (E - A_n^{-1}\Gamma_n A)(x^* - \tilde{x}_n), \quad x^* = A^{-1}y, \quad \tilde{x}_n = B_n^{-1}\Gamma_n y,$$

и, следовательно, с учетом (3.19) и (3.20) выводим требуемую оценку (3.6): $\Delta x_n^* = O(\|\tilde{x}_n - x^*\|)$. Теорема 1 полностью доказана.

Следствие 2. Если функции h (по t), f_i и Ty принадлежат классу $C^{(r)}$ (в случае (α) $r = \overline{0, 1}$, а для (β) $r = 0$), то в условиях теоремы 1 верна оценка

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \Delta_n^r \left[\omega_t(h^{(r)}; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i^{(r)}; \Delta_n) + \omega((Ty)^{(r)}; \Delta_n) \right] \right\}. \quad (3.21)$$

Для доказательства данного утверждения вместо использованной в теореме 1 оценки вида (3.11) следует использовать оценку [12]

$$\|f - R_n f\|_C \equiv O\left\{\Delta_n^r \omega\left(f^{(r)}; \Delta_n\right)\right\}, \quad f \in C^{(r)}, \quad (3.22)$$

где $R_n = P_n$ или $R_n = Q_n$ в зависимости от применяемого метода.

4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОДОБЛАСТЕЙ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ (ОМППС)

Приближенное решение задачи (3.1), (3.2) будем искать в виде (3.3), (3.4), где параболический сплайн

$$z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^n c_i B_{2,i}(t)$$

удовлетворяет одному из краевых условий:

$$(\gamma_1) \quad z_n(-1) = z_n(1), \quad z'_n(-1) = z'_n(1) \text{ (периодические условия);}$$

$$(\gamma_2) \quad z_n^{(2)}(s_j - 0) = z_n^{(2)}(s_j + 0), \quad j = 1, n-1.$$

Здесь базисные элементы $B_{2,i}(t)$ суть B -сплайны второго порядка на равномерной сетке с носителем (s_{i-1}, s_{i+2}) (см., например, [15, гл. 1, § 2]). Для определения всех функций $B_{2,i}(t)$ заданную сетку дополним равномерно расположенными узлами: $s_{-2} < s_{-1} < s_0 \equiv -1$, $1 \equiv s_n < s_{n+1} < s_{n+2}$. Набор $\{c_j\}_{-1}^{n+m-p}$ неизвестных параметров найдем согласно ОМППС из СЛАУ вида (3.5) в случае (β) “весовой” функции w_k , $k = \overline{0, n}$.

Теорема 2. Если ИДУ $Ax = 0$ имеет в X лишь тривиальное решение и функции $h(n, t)$, f_i , $i = \overline{0, m-p-1}$, Tu принадлежат пространству $C^{(r)}$, $r = \overline{1, 2}$, то ОМППС обоснованно применим к уравнению (3.1) и для соответствующей погрешности Δx_n^* справедливо неравенство вида (3.21), в котором $r = \overline{1, 2}$.

Доказательство теоремы 2 по сути аналогично доказательству теоремы 1. При этом вычислительная схема ОМППС равносильна операторному уравнению вида (3.9), где $X_n \equiv J(S_n^2) \oplus \text{span}\{\delta^{(i)}(t)\}_0^{m-p-1}$, $Y_n \equiv U(S_n^2) \oplus \text{span}\{t^i\}_p^{m-1}$, S_n^2 – совокупность всех параболических сплайнов на равномерной сетке, обладающих одним из свойств $(\gamma_1), (\gamma_2)$; отображение $\Gamma_n : Y \rightarrow Y_n$ определено согласно закону (3.8), в котором $P_n : C \rightarrow S_n^2$ обозначает сплайновый оператор, введенный и изученный в работе [14]. Там же, в частности, указано, что образ оператора P_n равен производной определенного интерполяционного кубического сплайна. Из соответствующих аппроксимативных свойств последнего (см., например, [15, гл. 2, § 4, с. 89, 93]) непосредственно следует оценка

$$\|f - P_n f\|_C \equiv O\left\{\Delta_n^r \omega\left(f^{(r)}; \Delta_n\right)\right\}, \quad f \in C^{(r)}, \quad r = \overline{1, 2},$$

откуда с учетом (2.2), (3.8) и (2.1) легко выводится соотношение

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \equiv O\left\{\Delta_n^r \omega\left((Ty)^{(r)}; \Delta_n\right)\right\}, \quad Ty \in C^{(r)}, \quad r = \overline{1, 2}.$$

Тогда с помощью этих двух оценок дальнейшее доказательство повторяет по существу доказательство теоремы 1 в случае (α) “веса” w_k

5. ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

В дальнейшем при оптимизации прямых проекционных методов решения ИДУ (3.1) существенную роль будет играть

Теорема 3. Пусть ИДУ (3.1) имеет решение вида

$$x^*(t) = z^*(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i^* \delta^{(i)}(t), \quad Dz^* = DTUx^* \in C^{(r)}$$

при данном $y \in Y$ и соответствующий аппроксимирующий оператор A_n в ОПМ и ОМППС непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $\Gamma_n y \in Y_n$ представима в виде

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \Delta_n^r \omega \left(\left(DTUx^* \right)^{(r)}; \Delta_n \right) \right\},$$

причем $r = 0$ для (β) ОПМ, $r = \overline{0,1}$ при (α) ОПМ и $r = \overline{0,2}$ в случае ОМППС.

Доказательство. В силу теоремы 6 из [10, гл. 1, § 3, с. 17] и (3.9) имеем

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \|\Gamma_n\| \|x^* - x_n\|_X \right\},$$

где $x_n \in X_n$ — пока произвольный элемент. Выберем его следующим образом:

$$x_n(t) = \left(JP_n DTUx^* \right)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i^* \delta^{\{i\}}(t),$$

где P_n — сплайновый оператор, соответствующий рассматриваемому методу. Тогда требуемая оценка следует из определений норм (2.6), (2.3) и аппроксимативных свойств оператора P_n (см., например, [12; 14; 15, гл. 2, § 4, с. 93]).

6. К ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИДУ

Предварительно приведем необходимые определения и постановку задачи. Пусть X и Y — банаховы пространства, а X_n и Y_n — их соответствующие произвольные подпространства одинаковой размерности $N = N(n) < +\infty$, $n \in N$, причем $N \rightarrow \infty$ при $(n \rightarrow \infty)$. Обозначим через $\Lambda_n \equiv \{\lambda_n\}$ некоторое множество линейных операторов λ_n , отображающих Y на Y_n . Далее рассмотрим два класса однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Ax = y, \quad x \in X, y \in Y, \quad (6.1)$$

и

$$\lambda_n Ax_n = \lambda_n y, \quad x_n \in X_n, \lambda_n \in \Lambda_n, n \in N, \quad (6.2)$$

соответственно. Пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ — решения уравнений (6.1) и (6.2) соответственно, а $F \equiv \{f\}$ — класс коэффициентов (т.е. исходных данных) уравнения (6.1), порождающий класс $X^* \equiv \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя работе [10, гл. 2, § 1], величину

$$V_N(F) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{\lambda_n \in \Lambda_n} V(F; \lambda_n; X_n, Y_n), \quad (6.3)$$

где

$$V(F; \lambda_n; X_n, Y_n) \equiv \sup_{f \in F} (f; \lambda_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^*\|_X,$$

назовем *оптимальной оценкой погрешности* всевозможных прямых проекционных методов λ_n ($\lambda_n \in \Lambda_n$) решения уравнения (6.1) на классе F .

Определение 1 (см. [10, гл. 2, § 1]). Пусть существуют подпространства $X_n^0 \subset X, Y_n^0 \subset Y$ размерности $N = N(n) < +\infty$ и операторы $\lambda_n^0 : Y \rightarrow Y_n^0, \lambda_n^0 \in \Lambda_n$, при которых выполняется условие

$$V_N(F) \asymp V(F; \lambda_n^0; X_n^0, Y_n^0), \quad N \rightarrow \infty, \quad (6.4)$$

где символ $\asymp$ означает, как обычно, слабую эквивалентность. Тогда метод (6.1), (6.2) при $X_n = X_n^0, Y_n = Y_n^0$ и $\lambda_n = \lambda_n^0$ называется *оптимальным по порядку точности* на классе F среди всех прямых проекционных методов λ_n ($\lambda_n \in \Lambda_n$) решения уравнений (6.1).

Рассмотрим теперь оптимизацию на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in F$) ИДУ вида (3.1) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству YH_ω^r , т.е. при K (по t), $\psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0)$, $i = \overline{0, m-p-1}$, $y \in YH_\omega^r \equiv \left\{ g \in Y \equiv C\{m, p; 0\} \mid Tg \in H_\omega^r \right\}$, где $H_\omega^r \equiv \left\{ f \in C^{(r)} \mid \omega(f^{(r)}; \Delta) \leq \omega(\Delta) \right\}$, $\omega(\Delta)$ — некоторый заданный модуль непрерывности; в частности, $H_\omega^r = H_\alpha^r(M)$ при $\omega(\Delta) = M\Delta^\alpha$, $M \equiv \text{const} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $r+1 \in N$. Тогда в силу теоремы 2 из [8] имеем

$$X^* \equiv \left\{ x^* \in X \mid Ax^* = y; K, \psi_i, y \in YH_\omega^r \right\} = XH_\omega^r,$$

где $XH_\omega^r \equiv \left\{ x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\} \mid DTUx \in H_\omega^r \right\}$, $\omega^* \equiv e^* \omega$, $1 \leq e^* \equiv \text{const}$.

Далее пусть

$$X_n^0 \equiv J(S_n^k) \oplus \text{span} \left\{ \delta^{\{i\}}(t) \right\}_0^{m-p-1}, Y_n^0 \equiv U(S_n^k) \oplus \text{span} \left\{ t^i \right\}_p^{m-1},$$

где $k = 1$ для ОПМ, $k = 2$ в случае ОМППС; а $\Lambda_n^0 \equiv \{\lambda_n\}$ — семейство всех линейных операторов $\lambda_n : Y \rightarrow Y_n^0$.

Теорема 4. Пусть $F = YH_\omega^r$, $\Lambda_n = \Lambda_n^0$. Тогда

$$V_N(F) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}), \quad N = n + m - p + 1, \quad (6.5)$$

и этот оптимальный порядок реализуют ОМП и ОМППС, причем для (β) ОПМ $r = 0$, при (α) ОПМ $r = \overline{0, 1}$, а в случае ОМППС $r = \overline{0, 2}$.

Доказательство. Пусть $\Pi_l \equiv \text{span} \left\{ t^i \right\}_0^l$ — класс всех алгебраических полиномов степени не выше l и

$$X_n \equiv \Pi_{n+m-p-1}^\delta \equiv J(\Pi_{n-1}) \oplus \text{span} \left\{ \delta^{\{i\}}(t) \right\}_0^{m-p-1}$$

есть $(n + m - p)$ -мерное подпространство пространства X . Согласно формуле (2.6) введем величину

$$E_{n+m-p-1}^\delta(x) \equiv \inf_{x_n \in X_n} \|x - x_n\|_X, \quad x \in X, \quad (6.6)$$

называемую наилучшим приближением обобщенной функции $x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ элементами из X_n . На основании доказательства теоремы 1.5.14 [5, гл. 1, § 5] ясно, что (6.6) просто выражается через наилучшее равномерное приближение:

$$E_{n+m-p-1}^\delta(x) \equiv E_{n-1}(DTUx), \quad (6.7)$$

где $E_l(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ полиномами из Π_l , $l \geq 0$.

Далее заметим, что из определения N -го колмогоровского поперечника $d_N(L, X)$ множества L в пространстве $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ (см., например, [16, гл. 1, § 1]) и соотношения (6.7) легко следует равенство

$$d_N(L, X) = d_{N-m+p}(DTU(L), C), \quad N > m - p,$$

откуда с учетом $d_l(H_\omega^r, C) \asymp l^{-r} \omega(l^{-1})$, $l \in N$ (см., например, [16, гл. 3, § 3]) вытекает слабая эквивалентность

$$d_N(XH_\omega^r, X) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}), \quad N > r + m - p, \quad r + 1 \in N. \quad (6.8)$$

Известно [10, гл. 4, § 2], что $V_N(F) \geq d_N(X^*, X)$. Следовательно, из (6.8) следует, что

$$V_N(F) \geq d_N(XH_\omega^r, X) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}). \quad (6.9)$$

С другой стороны, согласно определению $V_N(F)$ (6.3) и теореме 3, находим верхнюю оценку

$$V_N(F) \leq \sup_{x^* \in XH_\omega^r} \|x^* - x_n^*\|_X = O \left\{ N^{-r} \omega(N^{-1}) \right\}, x_n^* = A_n^{-1} \Gamma_n y.$$

Отсюда и из соотношений (6.9), (6.4) получаем утверждение теоремы 4 с оценкой (6.5). Требуемое доказано.

Следствие 3. Если $F = YH_{\alpha}^r(M)$, то имеет место $V_N(F) \asymp MN^{-r-\alpha}$. При этом ОПМ и ОМППС оптимальны по порядку точности на классе F среди всех прямых проекционных методов решения ИДУ (3.1) в пространстве X , причем для (β) ОПМ $r + \alpha \leq 1$, при (α) ОПМ $r + \alpha \leq 2$, а в случае ОМППС $r + \alpha \leq 3$.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 1. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемых методов. Один из результатов в этом направлении легко получить из теорем 1 и 2, а именно, из них вытекает простое следствие: если исходные данные h, f_i и Tu уравнения (3.1) принадлежат классу H_{α}^r (при (β) ОПМ $r = 0$, для (α) ОПМ $r = 0, 1$, в случае ОМППС $r = 0, 2; 0 < \alpha \leq 1$), то в условиях теорем 1 и 2 соответственно справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-r-\alpha})$.

Замечание 2. В силу определения нормы в пространстве $X \equiv D_{-1}^{\{p\}}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) приближенных решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 3. Определенный выбор “веса” w_k в ОПМ порождает конкретный прямой метод. Именно, в случае (α) (соответственно, (β)) имеем истинность установленных результатов для обобщенного метода коллокации (соответственно, подобластей) решения ИДУ (3.1).

Замечание 4. Так как в условиях теорем 1 и 2 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_3,$$

то ясно [10, гл. 1, § 5], что предложенные в настоящей работе прямые методы для ИДУ (3.1) устойчивы относительно малых возмущений исходных данных. Это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперед заданной степенью точности. Более того, если ИДУ (3.1) хорошо обусловлено (см., например, [10, гл. 1, § 5, с. 24]), то хорошо обусловленной является также СЛАУ (3.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bart G. R., Warnock R. L. Linear integral equations of the third-kind // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. Кейз К. М., Цвайфель П. Ф. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
3. Бжухатлов Х. Г. Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. ур-ния. 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
4. Расламбеков С. Н. Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. 1983. № 10. С. 51–56.
5. Габбасов Н. С. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань.: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. 176 с.
6. Замалиев Р. Р. О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Казань: КФУ, 2012. 114 с.
7. Абдурахман. Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Ростов-на-Дону, 2003. 142 с.
8. Габбасов Н. С. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. Габбасов Н. С. Коллокационные методы для одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 9. С. 1234–1241.
10. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. 232 с.
11. Пресдорф З. Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Матем. исследования. 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
12. Габдулхаев Б. Г., Душков П. Н. О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью // Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям. Казань, 1974. С. 37–57.

13. *Габбасов Н. С.* К численному решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1721–1733.
14. *Агачев Ю. Р.* О сходимости метода сплайн-подобластей для интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1981. № 6. С. 3–10.
15. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
16. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.