

ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К АЛГОРИТМУ БУТУЗОВА–НЕФЁДОВА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ШАГОМ¹⁾

© 2024 г. Г. А. Курина^{1,*}, Н. Т. Хоай^{2,**}

¹394018 Воронеж, Университетская пл., 1, Воронежский гос. ун-т, Россия;

119333 Москва, ул. Вавилова, 44/2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

²Нгуен Трай, Тхань Сюань, Ун-т науки, Вьетнамский национальный ун-т, Ханой, Вьетнам

*e-mail: kurina@math.vsu.ru

**e-mail: nguyenthihoai@hus.edu.vn

Поступила в редакцию 03.05.2023 г.

Переработанный вариант 17.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

В. Ф. Бутузовым и Н. Н. Нефёдовым был предложен алгоритм построения асимптотики, содержащей пограничные функции двух типов, для решения дискретной начальной задачи с малым шагом ε^2 и нелинейным членом порядка ε в критическом случае, т.е. вырожденное уравнение при $\varepsilon = 0$ не разрешимо однозначно относительно неизвестной переменной. В настоящей статье построено асимптотическое решение этой же задачи при помощи нового подхода, использующего ортогональные проекторы на $\ker(B(t) - I)$ и $\ker(B(t) - I)'$, где $B(t)$ — матрица, стоящая перед неизвестной переменной в линейной части рассматриваемого уравнения, I — единичная матрица соответствующего размера, штрих означает транспонирование. Такой подход значительно упрощает понимание алгоритма построения асимптотики и позволяет представить задачи для нахождения членов асимптотики любого порядка в явном виде, что очень удобно для исследователей, применяющих асимптотические методы для решения практических задач. Библ. 14. Фиг. 1.

Ключевые слова: дискретные начальные задачи, малый шаг, критический случай, асимптотическое решение, проекторный подход.

DOI: 10.31857/S0044466924010035, EDN: ZJTENU

1. ВВЕДЕНИЕ

Асимптотическое поведение решения начальных задач для сингулярно возмущенных дифференциальных и дискретных (разностных) уравнений в так называемом критическом случае, когда вырожденная задача при нулевом значении параметра не является однозначно разрешимой, впервые изучалось А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузовым (см. [1]).

Многочисленные приложения сингулярно возмущенных систем в критическом случае приведены в [2]. Численные методы для сингулярно возмущенных начальных задач в критическом случае исследовались в [3]. Обзор публикаций, посвященных задачам управления дискретными системами с малым шагом, приведен в [4].

Начальная задача для слабонелинейного дискретного уравнения с малым шагом вида

$$x(t + \varepsilon^2, \varepsilon) = B(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon f(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$x = x(t, \varepsilon) \in X, \quad t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \dots (t \leq T),$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0 \quad (2)$$

в критическом случае рассматривалась в [5]. Здесь и далее $\varepsilon \geq 0$ означает малый параметр, X — вещественное m -мерное пространство, $B(t)m \times m$ -матрица, $f(x, t, \varepsilon)$ есть m -мерная вектор-функция, $B(t)$

¹⁾ Работа Г. А. Куриной выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, грант 21-11-00202, а работа Н. Т. Хоай поддержана Вьетнамским национальным фондом развития науки и технологий (NAFOSTED), грант 101.02-2021.43.

и $f(x, t, \varepsilon)$ предполагаются достаточно гладкими по всем аргументам. Был предложен алгоритм построения асимптотики решения, содержащей пограничные функции двух типов, при этом явные формулировки задач были даны только для нахождения асимптотического решения первого порядка. В этой статье также объясняется причина изучения уравнений вида (1). Эта задача кратко обсуждалась и в [6].

В настоящей статье асимптотическое решение задачи (1), (2) строится с использованием ортогональных проекторов. Этот подход полезен для понимания алгоритма построения асимптотики. Он позволяет, в отличие от [5], получать представления задач для нахождения членов асимптотики любого порядка в явном виде, что очень удобно для исследователей, применяющих асимптотические методы для решения практических задач. Более того, благодаря явным формулам можно написать компьютерную программу для нахождения асимптотического решения любого порядка.

Насколько нам известно, проекторный подход в критическом случае впервые был использован в [7] для асимптотического решения начальной задачи для стандартного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с левой частью вида $\varepsilon dx/dt$ и нелинейным членом порядка ε . Для асимптотического решения дискретного аналога такой задачи этот подход применялся в [8].

Дифференциальным аналогом дискретного уравнения (1) является

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x, t, \varepsilon).$$

Используя проекторный подход, в [9] найдены в явном виде задачи для отыскания любого порядка членов асимптотического решения начальной задачи для последнего уравнения в критическом случае. Отметим, что для этой задачи в [5] приведены явные соотношения только для нахождения асимптотического решения первого порядка.

Предположим, что выполняются основные условия I, II из [5], т.е. для каждого $t \in [0, T]$ матрица $B(t)$ имеет m собственных значений $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)$, удовлетворяющих условиям [label=].

Условие I. $\lambda_j(t) \equiv 1$ для $j = 1, \dots, k$, $k < m$ и k собственных векторов $v_1(t), v_2(t), \dots, v_k(t)$ матрицы $B(t)$, соответствующих этому собственному значению, линейно независимы.

Условие II. $|\lambda_j(t)| < 1$ для $j = k + 1, \dots, m$.

В отличие от условия III в [5], мы предполагаем здесь достаточную гладкость заданных функций в рассматриваемой задаче во всем пространстве.

Следуя [5], будем использовать собственные векторы, имеющие ту же гладкость, что и матрица $B(t)$. Существование таких собственных векторов доказано в [10].

В дальнейшем условия 1 и 2 будут дополнены другими предположениями.

На протяжении всей статьи транспонирование обозначается штрихом, I , как обычно, означает тождественный оператор. Для разложения функции $w(t, \varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε : $w(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j w_j(t)$ используется обозначение $[w(t, \varepsilon)]_j = w_j(t)$.

В разд. 2 система (1) стандартным образом разбивается на три системы относительно функций, зависящих от аргументов t и t/ε^i , $i = 1, 2$. В разд. 3 вводятся ортогональные проекторы, которые будут использоваться для нахождения членов асимптотики. Задачи для определения членов асимптотики нулевого и n -го порядков, $n \geq 1$ получаются в разд. 4 и 5 соответственно. В разд. 6 приводится пример, иллюстрирующий применение проекторного подхода к построению асимптотики первого порядка решения задачи вида (1), (2) в критическом случае.

2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ

Асимптотическое решение задачи (1), (2) аналогично [5] ищется в виде

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \sum_{i=1}^2 \Pi_i x(\tau_i, \varepsilon), \quad (3)$$

где

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{x}_j(t), \quad \Pi_i x(\tau_i, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{ij} x(\tau_i), \quad \tau_i = t / \varepsilon^i, \quad i = 1, 2.$$

По традиции (см., например, [6]), ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{x}_j(t)$ с членами, зависящими от исходного аргумента t , называется регулярным рядом, в отличие от пограничных рядов $\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{ij} x(\tau_i)$, $i = 1, 2$, состоящих из так называемых пограничных функций, удовлетворяющих условию $\Pi_{ij} x(\tau_i) \rightarrow 0$ при $\tau_i \rightarrow +\infty$. Будет также использоваться представление

$$f(\bar{x}(t, \varepsilon) + \sum_{i=1}^2 \Pi_i x(\tau_i, \varepsilon), t, \varepsilon) \equiv \bar{f} + \sum_{i=1}^2 \Pi_i f, \quad (4)$$

где $\bar{f} = f(\bar{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{f}_j(t)$, $\Pi_1 f = f(\bar{x}(\varepsilon \tau_1, \varepsilon) + \Pi_1 x(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon \tau_1, \varepsilon) - f(\bar{x}(\varepsilon \tau_1, \varepsilon), \varepsilon \tau_1, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{1j} f(\tau_1)$, и $\Pi_2 f = f(\bar{x}(\varepsilon^2 \tau_2, \varepsilon) + \Pi_1 x(\varepsilon \tau_2, \varepsilon) + \Pi_2 x(\tau_2, \varepsilon), \varepsilon^2 \tau_2, \varepsilon) - f(\bar{x}(\varepsilon^2 \tau_2, \varepsilon) + \Pi_1 x(\varepsilon \tau_2, \varepsilon), \varepsilon^2 \tau_2, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{2j} f(\tau_2)$.

Замечание 2.1. Как и в [5], функции $\bar{x}_j(t)$ при построении асимптотики будут рассматриваться для всех $t \in [0, T]$. В окончательной же асимптотике значения $\bar{x}_j(t)$ используются только при $t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \dots$, что соответствует дискретному изменению t в исходном уравнении (1). Аналогично функции $\Pi_{1j} x(\tau_1)$ при построении асимптотики будут рассматриваться для всех $\tau_1 \geq 0$. В окончательной форме асимптотики значения $\Pi_{1j} x(\tau_1)$ используются только при $\tau_1 = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots$, в соответствии с дискретной заменой t в (1).

Подставляя разложение (3) в (1), используя представление (4) и приравнявая в разложениях по целым неотрицательным степеням ε коэффициенты при одинаковых степенях ε , отдельно зависящие от t и τ_i , $i = 1, 2$, получаем уравнения для коэффициентов рядов в (3)

$$\bar{x}_j(t) + \sum_{k=1}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{1}{k!} \frac{d^k \bar{x}_{j-2k}(t)}{dt^k} = B(t) \bar{x}_j(t) + \bar{f}_{j-1}(t), \quad (5)$$

$$\Pi_{1j} x(\tau_1) + \sum_{k=1}^j \frac{1}{k!} \frac{d^k \Pi_{1(j-k)} x}{d\tau_1^k} = B(0) \Pi_{1j} x(\tau_1) + \Pi_{1(j-1)} f(\tau_1) + [(B(\varepsilon \tau_1) - B(0)) \Pi_{1j} x(\tau_1, \varepsilon)]_j, \quad (6)$$

$$\Pi_{2j} x(\tau_2 + 1) = B(0) \Pi_{2j} x(\tau_2) + \Pi_{2(j-1)} f(\tau_2) + [(B(\varepsilon^2 \tau_2) - B(0)) \Pi_{2j} x(\tau_2, \varepsilon)]_j, \quad j \geq 0. \quad (7)$$

Для записи уравнений (5)–(7) в одинаковом виде для любого $j \geq 0$ будем полагать, что члены разложений с отрицательными индексами равны нулю.

Подставляя разложение (3) в (2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем равенства

$$\bar{x}_0(0) + \Pi_{10} x(0) + \Pi_{20} x(0) = x^0, \quad (8)$$

$$\bar{x}_j(0) + \Pi_{1j} x(0) + \Pi_{2j} x(0) = 0, \quad j > 0. \quad (9)$$

3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПРОСТРАНСТВА

Положим $A(t) = B(t) - I$. Далее будем использовать разложения пространства X в ортогональные суммы (см., например, [11])

$$X = \ker A(t) \oplus \operatorname{im} A(t)' = \ker A(t)' \oplus \operatorname{im} A(t).$$

Ортогональные проекторы пространства X на подпространства $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$ в этих разложениях будем обозначать через $P(t)$ и $Q(t)$ соответственно. Эти проекторы могут быть записаны в явной форме. А именно, пусть $V(t) = (v_1(t), \dots, v_k(t))$ и $S(t) = (s_1(t), \dots, s_k(t))$, где $s_1(t), \dots, s_k(t)$ — собственные векторы матрицы $A(t)'$, соответствующие собственным значениям $\lambda(t) \equiv 0$. Из условия 1 следует, что матрицы $V(t)V(t)$ и $S(t)'S(t)$ размера $k \times k$ обратимы. Легко проверить, что $P(t) = V(t)(V(t)'V(t))^{-1}V(t)'$

и $Q(t) = S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'$ — ортогональные проекторы пространства X на подпространства $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$ соответственно (см. также [12]).

Нетрудно видеть, что λ является собственным значением матрицы $B(t)$ тогда и только тогда, когда $\lambda - 1$ — собственное значение матрицы $A(t)$. Следовательно, если $\lambda = 1$ — собственное значение матрицы $B(t)$, то $\lambda = 0$ — собственное значение матрицы $A(t)$, а если λ — собственное значение матрицы $B(t)$, удовлетворяющее неравенству $|\lambda| < 1$, то собственное значение $\lambda - 1$ оператора $A(t)$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}(\lambda - 1) < 0$.

Оператор $(I - Q(t))A(t)(I - P(t)) : \operatorname{im} A(t)' \rightarrow \operatorname{im} A(t)$ имеет обратный оператор, который будет обозначаться $A(t)^+$.

Замечание 3.1. Из условия 1 следует, что для каждого $t \in [0, T]$ модуль собственных значений оператора $\tilde{B}(t) = (I - P(t))B(t)(I - P(t)) : \operatorname{im} A(t)' \rightarrow \operatorname{im} A(t)'$ меньше единицы и матрица $S(t)V(t)$ размера $k \times k$ обратима (см. [6]).

Несложно доказать (см., например, [8]), что оператор $Q(t)P(t) : \ker A(t) \rightarrow \ker A(t)'$ обратим для всех $t \in [0, T]$ и справедливо тождество (см. [9])

$$Q(t)\frac{dA}{dt}(t)P(t) = 0. \quad (10)$$

Предположим выполнение еще двух условий [label=, resume]

Условие III. Уравнение $Q(t)f(y(t), t, 0) = 0$, рассматриваемое при всех $t \in [0, T]$, имеет единственное достаточно гладкое изолированное решение $y(t) \in \ker A(t)$.

Условие IV. Оператор

$$(Q(t)P(t))^{-1}Q(t)\bar{f}_x(t)P(t) : \ker A(t) \rightarrow \ker A(t), \quad (11)$$

где $\bar{f}_x(t) = \partial f(\bar{x}_0(t), t, 0) / \partial x$, устойчив при всех $t \in [0, T]$.

Последнее предположение будет сформулировано в следующем разделе.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Из (5) при $j = 0$ следует

$$(I - P(t))\bar{x}_0(t) = 0. \quad (12)$$

Из (6) при $j = 0$ получаем

$$(I - P(0))\Pi_{10}x(\tau_1) = 0. \quad (13)$$

Учитывая (12) и (13), находим из (8) начальное значение

$$(I - P(0))\Pi_{20}x(0) = (I - P(0))x^0. \quad (14)$$

Дискретное уравнение для $\Pi_{20}x(\tau_2)$ следует из (7) при $j = 0$

$$\Pi_{20}x(\tau_2 + 1) = B(0)\Pi_{20}x(\tau_2). \quad (15)$$

Замечание 4.1. Легко видеть, что $B(t)|_{\ker A(t)} = I$. Следовательно, $(I - P(0))B(0)P(0)$ — нулевой оператор, а $P(0)B(0)P(0)$ — тождественный оператор на $\ker A(0)$.

Согласно этому замечанию, уравнение (15) эквивалентно системе двух уравнений

$$(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2 + 1) = \tilde{B}(0)(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2), \quad (16)$$

$$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2 + 1) = P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) + P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2). \quad (17)$$

Учитывая замечание 3.1, мы получаем из (16), (14) единственную пограничную функцию

$$(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2) = \tilde{B}(0)^{\tau_2}(I - P(0))x^0. \quad (18)$$

Используя формулу для решения неоднородного линейного дискретного уравнения (см., например, [13]) и условие $P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) \rightarrow 0$ при $\tau_2 \rightarrow +\infty$, получаем единственное решение $P(0)\Pi_{20}x(\tau_2)$ уравнения (17), которое является пограничной функцией, а именно

$$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) = - \sum_{k=\tau_2}^{\infty} P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_{20}x(k), \quad (19)$$

где $(I - P(0))\Pi_{20}x(k)$ определяется формулой (18). Последнее выражение можно переписать в виде

$$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) = P(0)B(0)(I - P(0))\bar{B}(0)^{\tau_2} B_+(I - P(0))x^0, \quad (20)$$

где B_+ — обратный оператор для оператора $\bar{B}(0) - I : \text{im}A(0)' \rightarrow \text{im}A(0)'$. В силу замечания 3.1 оператор B_+ существует.

Значит, пограничная функция $\Pi_{20}x(\tau_2)$ найдена.

Из (5) при $j = 1$ следует равенство

$$0 = A(t)\bar{x}_1(t) + \bar{f}_0(t).$$

В силу (12) отсюда имеем

$$Q(t)f(P(t)\bar{x}_0(t), t, 0) = 0. \quad (21)$$

Ввиду условия III из (21) определяется $P(t)\bar{x}_0(t)$. Итак, функция $\bar{x}_0(t)$ найдена.

Так как $\bar{x}_0(t)$ и $\Pi_{20}x(\tau_2)$ уже известны, из (8) находится начальное значение

$$P(0)\Pi_{10}x(0) = P(0)(x^0 - \bar{x}_0(0) - \Pi_{20}x(0)). \quad (22)$$

Из (6) при $j = 1$ получается уравнение

$$\frac{d\Pi_{10}x(\tau_1)}{d\tau_1} = A(0)\Pi_{11}x(\tau_1) + \tau_1 \frac{dB}{dt}(0)\Pi_{10}x(\tau_1) + \Pi_{10}f(\tau_1),$$

откуда следует

$$Q(0)\frac{d\Pi_{10}x(\tau_1)}{d\tau_1} = Q(0)\left(\tau_1 \frac{dB}{dt}(0)\Pi_{10}x(\tau_1) + \Pi_{10}f(\tau_1)\right).$$

Учитывая (13), (10), (12) и (21), получаем уравнение

$$Q(0)\frac{d(P(0)\Pi_{10}x(\tau_1))}{d\tau_1} = Q(0)f(P(0)\bar{x}_0(0) + P(0)\Pi_{10}x(\tau_1), 0, 0),$$

т.е.

$$\frac{d(P(0)\Pi_{10}x(\tau_1))}{d\tau_1} = (Q(0)P(0))^{-1}Q(0)f(P(0)\bar{x}_0(0) + P(0)\Pi_{10}x(\tau_1), 0, 0). \quad (23)$$

В силу (21) функция $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1) = 0$ является точкой покоя системы (23). Предположим выполнение последнего условия [label=, resume].

Условие V. Начальное значение (22) для $P(0)\Pi_{10}x(0)$ принадлежит области влияния точки покоя $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1) = 0$ (соответствующее определение см. в [14]).

Ввиду условия V решение $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1)$ начальной задачи (23), (22) является пограничной функцией (см. Лемму 3.1 в [14]). Значит, функция $\Pi_{10}x(\tau_1)$ определена, и найдена асимптотика нулевого порядка решения задачи (1), (2).

Следующие формулы иллюстрируют последовательность нахождения членов асимптотики нулевого порядка. Представим эти члены в виде суммы компонент из подпространств

$$\bar{x}_0(t) = (I - P(t))\bar{x}_0(t) + P(t)\bar{x}_0(t),$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ \Pi_{10}x(\tau_1) = (I - P(0))\Pi_{10}x(\tau_1) + P(0)\Pi_{10}x(\tau_1), \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ \Pi_{20}x(\tau_2) = (I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2) + P(0)\Pi_{20}x(\tau_2). \end{array}$$

Цифры над слагаемыми означают последовательность определения этих слагаемых.

Замечание 4.2. Задача (23), (22) для нахождения члена асимптотики нулевого порядка для пограничной функции первого типа $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1)$, зависящей от аргумента $\tau_1 = t / \varepsilon$, совпадает с соответствующей задачей в случае аналогичной задачи для дифференциального уравнения в этом критическом случае в [9].

Замечание 4.3. Условия III–V аналогичны соответствующим предположениям, сделанным в [5].

Легко видеть, что записанное с помощью ортогональных проекторов уравнение в условии III, разрешимость которого требуется в данной статье, совпадает с уравнением (17) в [5], разрешимость которого требуется в условии IV из [5].

Совпадение условия IV с соответствующим предположением V в [5] доказано в [9].

Для доказательства утверждения замечания 4.3, касающегося условия V, рассмотрим выражение (12) из [5], записанное в виде $\Pi_{10}x(\tau_1) = P(0)\Pi_{10}x(\tau_1) = V(0)b_0(\tau_1)$, где функция $b_0(\tau_1)$ используется в предположении VI из [5]. Условие V в этой статье аналогично предположению VI из [5], поскольку уравнение (23) можно записать, используя наши обозначения, в виде $db_0(\tau_1) / d\tau_1 = S(0)'P_0f$, что эквивалентно уравнению (20) из [5].

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Предположим, что члены асимптотики (3) до порядка $n - 1$, $n \geq 1$, включительно уже определены.

Из уравнения (5) при $j = n$ получаем

$$A(t)\bar{x}_n(t) = \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{k!} \frac{d^k \bar{x}_{n-2k}(t)}{dt^k} - \bar{f}_{n-1}(t) = \zeta_{n-1}(t),$$

где $\zeta_{n-1}(t)$ — известная функция.

После применения к этому уравнению оператора $I - Q(t)$ имеем

$$(I - Q(t))A(t)(I - P(t))\bar{x}_n(t) = (I - Q(t))\zeta_{n-1}(t).$$

Находим отсюда

$$(I - P(t))\bar{x}_n(t) = A(t)^+(I - Q(t))\zeta_{n-1}(t). \quad (24)$$

Уравнение (6) при $j = n$ имеет вид

$$A(0)\Pi_{1n}x(\tau_1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k \Pi_{1(n-k)}x}{d\tau_1^k} - \Pi_{1(n-1)}f(\tau_1) - [(B(\varepsilon\tau_1) - B(0))\Pi_1x(\tau_1, \varepsilon)]_n = \Pi_{1(n-1)}\zeta(\tau_1),$$

где $\Pi_{1(n-1)}\zeta(\tau_1)$ — известная пограничная функция.

Отсюда получаем пограничную функцию

$$(I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1) = A(0)^+(I - Q(0))\Pi_{1(n-1)}\zeta(\tau_1). \quad (25)$$

Используя (24), (25), находим из (9) при $j = n$ начальное значение

$$(I - P(0))\Pi_{2n}x(0) = -(I - P(0))\bar{x}_n(0) - (I - P(0))\Pi_{1n}x(0). \quad (26)$$

Из (7) при $j = n$ получаем уравнение для $\Pi_{2n}x(\tau_2)$

$$\Pi_{2n}x(\tau_2 + 1) = B(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) + \Pi_{2(n-1)}f(\tau_2) + [(B(\varepsilon^2\tau_2) - B(0))\Pi_2x(\tau_2, \varepsilon)]_n = B(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) + \Pi_{2(n-1)}\zeta(\tau_2),$$

где $\Pi_{2(n-1)}\zeta(\tau_2)$ — известная пограничная функция.

Ввиду замечания 4.1 это уравнение эквивалентно системе двух уравнений

$$(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2 + 1) = \tilde{B}(0)(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2) + (I - P(0))\Pi_{2(n-1)}\zeta(\tau_2), \quad (27)$$

$$P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2 + 1) = P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) + P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2) + P(0)\Pi_{2(n-1)}\zeta(\tau_2). \quad (28)$$

Учитывая замечание 3.1, из (27), (26) находим пограничную функцию

$$(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2) = \tilde{B}(0)^{\tau_2} (I - P(0))\Pi_{2n}x(0) + \sum_{i=0}^{\tau_2-1} \tilde{B}(0)^{\tau_2-1-i} (I - P(0))\Pi_{2(n-1)}\zeta(i), \quad (29)$$

где $(I - P(0))\Pi_{2n}x(0)$ задается формулой (26).

Используя формулу для решения неоднородного линейного дискретного уравнения (см., например, [13]) и учитывая, что $P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) \rightarrow 0$ при $\tau_2 \rightarrow +\infty$, получаем единственное решение $P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2)$ уравнения (28), а именно,

$$P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) = - \sum_{k=\tau_2}^{\infty} (P(0)\Pi_{2(n-1)}\zeta(k) + P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_{2n}x(k)), \quad (30)$$

где $(I - P(0))\Pi_{2n}x(k)$ задается формулой (29).

Итак, пограничная функция $\Pi_{2n}x(\tau_2)$ найдена.

Запишем уравнение (5) при $j = n + 1$

$$A(t)\bar{x}_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{1}{k!} \frac{d^k \bar{x}_{n+1-2k}(t)}{dt^k} - \bar{f}_n(t). \quad (31)$$

Легко видеть, что сумма в правой части последнего соотношения известна и $\bar{f}_n(t)$ можно представить в виде

$$\bar{f}_n(t) = \bar{f}_x(t)P(t)\bar{x}_n(t) + \zeta_n(t),$$

где $\zeta_n(t)$ — известная функция, зависящая от $\bar{x}_j(t)$, $j < n$, и известного члена $(I - P(t))\bar{x}_n(t)$. Следовательно, уравнение (31) можно переписать в виде

$$A(t)\bar{x}_{n+1}(t) = -\bar{f}_x(t)P(t)\bar{x}_n(t) + \tilde{\zeta}_n(t),$$

где $\tilde{\zeta}_n(t)$ — известная функция.

Из последнего уравнения получаем

$$Q(t)(-\bar{f}_x(t)P(t)\bar{x}_n(t) + \tilde{\zeta}_n(t)) = 0. \quad (32)$$

В силу условия IV оператор $Q(t)\bar{f}_x(t)P(t) : \text{Ker } A(t) \rightarrow \text{Ker } A(t)'$ обратим, и мы можем однозначно определить из (32) функцию $P(t)\bar{x}_n(t)$. Значит, функция $\bar{x}_n(t)$ определена.

Затем из (9) при $j = n$ находим начальное значение

$$P(0)\Pi_{1n}x(0) = -P(0)(\bar{x}_n(0) + \Pi_{2n}x(0)). \quad (33)$$

Из (6) при $j = n + 1$ следует уравнение

$$\frac{d\Pi_{1n}x}{d\tau_1} = A(0)\Pi_{1(n+1)}x(\tau_1) + \Pi_{1n}f(\tau_1) + [(B(\varepsilon\tau_1) - B(0))\Pi_{1n}x(\tau_1, \varepsilon)]_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}\Pi_{1(n-k)}x}{d\tau_1^{k+1}}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \frac{d(P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1))}{d\tau_1} = & (Q(0)P(0))^{-1}Q(0)\left(\Pi_{1n}f(\tau_1) - \frac{d((I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1))}{d\tau_1} + \right. \\ & \left. + [(B(\varepsilon\tau_1) - B(0))\Pi_{1n}x(\tau_1, \varepsilon)]_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}\Pi_{1(n-k)}x}{d\tau_1^{k+1}}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

В силу (10) и (25) функция

$$\begin{aligned} Q(0)[(B(\varepsilon\tau_1) - B(0))\Pi_{1n}x(\tau_1, \varepsilon)]_{n+1} = & Q(0)\left(\tau_1 \frac{dA}{dt}(0)(I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1) + \right. \\ & \left. + [(A(\varepsilon\tau_1) - A(0) - \varepsilon\tau_1 \frac{dA}{dt}(0)(I - P(0)))\Pi_{1n}x(\tau_1, \varepsilon)]_{n+1}\right) \end{aligned}$$

является известной пограничной функцией.

Так как функция $(I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1)$ известна, функция $\Pi_{1n}f(\tau_1)$ имеет вид

$$\Pi_{1n}f(\tau_1) = f_x(\bar{x}_0(0) + \Pi_{10}x(\tau_1), 0, 0)P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1) + \Pi_{1n}\zeta_n(\tau_1),$$

где $\Pi_{1n}\zeta_n(\tau_1)$ — известная пограничная функция, зависящая от $\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $j < n$.

Следовательно, уравнение (34) линейно относительно $P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1)$. В [14, Лемма 3.1] установлено, что решение задачи (34), (33) при условии IV является пограничной функцией экспоненциального типа.

Результатом предшествующих рассуждений является

Теорема 5.1. *Задачи для определения членов асимптотики вида (3) любого порядка в явном виде могут быть найдены для решения задачи (1), (2) при условиях I–V с помощью ортогональных проекторов $P(t)$ на $\ker A(t)$ и $Q(t)$ на $\ker A(t)'$. Порядок нахождения членов асимптотики следующий: $(I - P(t))x_j(t)$, $(I - P(0))\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $(I - P(0))\Pi_{2j}x(\tau_2)$, $P(0)\Pi_{2j}x(\tau_2)$, $P(t)x_j(t)$, и $P(0)\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $j \geq 0$.*

Замечание 5.1. Хотя исходная задача (1), (2) является дискретной, из дискретных уравнений находятся только члены асимптотики пограничного ряда второго типа, зависящие от аргумента $\tau_2 = t / \varepsilon^2$.

Замечание 5.2. Несмотря на то что, в отличие от [9], в настоящей статье рассматривается дискретное, а не дифференциальное уравнение и тип уравнений (5)–(7) для членов асимптотики отличается существенно от (2.2)–(2.4) в [9], в итоге последовательность нахождения компонент членов асимптотики такая же.

6. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим начальную задачу вида (1), (2) на отрезке $[0, 0.0032]$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(t + \varepsilon^2, \varepsilon) \\ z(t + \varepsilon^2, \varepsilon) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \\ & + \varepsilon \begin{pmatrix} -z(t, \varepsilon) + t - 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \dots, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} y(0, \varepsilon) \\ z(0, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

6.1. Точное решение

Если $t = \varepsilon^2 k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то второе уравнение в (35) имеет вид

$$z(\varepsilon^2(k+1), \varepsilon) = y(\varepsilon^2 k, \varepsilon). \quad (37)$$

Отсюда $z(\varepsilon^2 k, \varepsilon) = y(\varepsilon^2(k-1), \varepsilon)$. Подставляя это соотношение в первое уравнение (35), получаем

$$y(\varepsilon^2(k+1), \varepsilon) = \frac{3}{2}y(\varepsilon^2 k, \varepsilon) - \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)y(\varepsilon^2(k-1), \varepsilon) + \varepsilon(\varepsilon^2 k - 10).$$

Пусть $q(k) = y(\varepsilon^2 k, \varepsilon)$. Ввиду последнего уравнения и первого уравнения в (35) при $t = 0$ имеем начальную задачу

$$\begin{aligned} q(k+1) &= \frac{3}{2}q(k) - \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)q(k-1) + \varepsilon(\varepsilon^2 k - 10), \\ q(0) &= y(0) = 1, \\ q(1) &= y(\varepsilon^2) = 2 - 9\varepsilon. \end{aligned} \quad (38)$$

Единственным решением задачи (38) является

$$q(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \varepsilon^2 k - 10 - \frac{1}{2}\varepsilon + \varepsilon^2,$$

где $\lambda_1 = (3 + \sqrt{1 - 16\varepsilon}) / 4$, $\lambda_2 = (3 - \sqrt{1 - 16\varepsilon}) / 4$ и

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{32\varepsilon^3 - 18\varepsilon^2 - 351\varepsilon + 22 - (10\varepsilon^2 + 71\varepsilon - 30)\sqrt{1 - 16\varepsilon}}{4(1 - 16\varepsilon)}, \\ c_2 &= \frac{32\varepsilon^3 - 18\varepsilon^2 - 351\varepsilon + 22 + (10\varepsilon^2 + 71\varepsilon - 30)\sqrt{1 - 16\varepsilon}}{4(1 - 16\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем решение задачи (35), (36)

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) &= y(\varepsilon^2 k, \varepsilon) = c_1 \lambda_1^{t/\varepsilon^2} + c_2 \lambda_2^{t/\varepsilon^2} + t - 10 - \varepsilon / 2 + \varepsilon^2, \\ z(t, \varepsilon) &= z(\varepsilon^2 k, \varepsilon) = c_1 \lambda_1^{t/\varepsilon^2 - 1} + c_2 \lambda_2^{t/\varepsilon^2 - 1} + t - 10 - \varepsilon / 2. \end{aligned}$$

6.2. Проекторы и вспомогательные операторы

Сравнивая (35), (36) с (1), (2), имеем

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \begin{pmatrix} y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A &= B - I = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ f(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= \begin{pmatrix} -z(t, \varepsilon) + t - 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x^0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как матрица B постоянная, то, опуская для краткости аргумент t в обозначениях, находим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \lambda_2 = 0.5, \ker A = \{(a, a)'\}, \\ V &= (1, 1)', \ker A' = \{(-2a, a)'\}, S = (-2, 1)', \\ \operatorname{im} A &= \{(a, 2a)'\}, \\ \operatorname{im} A' &= \{(a, -a)'\}, \\ P &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \\ Q &= \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^+ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \operatorname{im} A \rightarrow \operatorname{im} A', \\
(QP)^{-1} &= \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 5/2 & 0 \end{pmatrix} : \ker A' \rightarrow \ker A, \\
\tilde{B} &= \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} : \operatorname{im} A' \rightarrow \operatorname{im} A', \\
\tilde{B} - I &= \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -3/4 \end{pmatrix} : \operatorname{im} A' \rightarrow \operatorname{im} A'.
\end{aligned}$$

Последний оператор имеет обратный $B_+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \operatorname{im} A' \rightarrow \operatorname{im} A'$.

Используя ортогональные проекторы P и Q , построим асимптотическое решение задачи (35), (36) первого порядка.

6.3. Асимптотическое приближение нулевого порядка

Из (12) получаем

$$\bar{y}_0(t) - \bar{z}_0(t) = 0. \quad (39)$$

Из (13) следует, что

$$\Pi_{10}y(\tau_1) - \Pi_{10}z(\tau_1) = 0. \quad (40)$$

Из (18) имеем

$$\Pi_{20}y(\tau_2) - \Pi_{20}z(\tau_2) = \frac{1}{2^{\tau_2-1}},$$

а из (20) следует

$$\Pi_{20}y(\tau_2) + \Pi_{20}z(\tau_2) = -\frac{3}{2^{\tau_2-1}}.$$

Из двух последних равенств получаем $\Pi_{20}y(\tau_2) = -1/2^{\tau_2-1}$, $\Pi_{20}z(\tau_2) = -1/2^{\tau_2-2}$. Решая уравнение (21), получаем

$$\bar{y}_0(t) + \bar{z}_0(t) = 2(t - 10).$$

Отсюда и из (39) следует $\bar{y}_0(t) = \bar{z}_0(t) = t - 10$.

Учитывая (23) и (22), можем записать начальную задачу для $\Pi_{10}y(\tau_1) + \Pi_{10}z(\tau_1)$

$$\frac{d}{d\tau_1}(\Pi_{10}y(\tau_1) + \Pi_{10}z(\tau_1)) = -2(\Pi_{10}y(\tau_1) + \Pi_{10}z(\tau_1)),$$

$$\Pi_{10}y(0) + \Pi_{10}z(0) = 26.$$

Решая эту задачу, получаем $\Pi_{10}y(\tau_1) + \Pi_{10}z(\tau_1) = 26e^{-2\tau_1}$. Отсюда и из (40) получаем $\Pi_{10}y(\tau_1) = \Pi_{10}z(\tau_1) = 13e^{-2\tau_1}$.

Таким образом, мы нашли приближение нулевого порядка асимптотического решения задачи (35), (36)

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_0(t, \varepsilon) &= t - 10 + 13e^{-2t/\varepsilon} - 2^{1-t/\varepsilon^2}, \\
\tilde{z}_0(t, \varepsilon) &= t - 10 + 13e^{-2t/\varepsilon} - 2^{2-t/\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

6.4. Асимптотическое приближение первого порядка

Из (24) при $n = 1$ получаем

$$\bar{y}_1(t) - \bar{z}_1(t) = 0, \quad (41)$$

а из (25) при $n = 1$ следует

$$\Pi_{11}y(\tau_1) - \Pi_{11}z(\tau_1) = -26e^{-2\tau_1}. \quad (42)$$

Из (27) и (26) имеем начальную задачу для $\Pi_{21}y(\tau_2) - \Pi_{21}z(\tau_2)$

$$\Pi_{21}y(\tau_2 + 1) - \Pi_{21}z(\tau_2 + 1) = \frac{1}{2}(\Pi_{21}y(\tau_2) - \Pi_{21}z(\tau_2)) + \frac{1}{2^{\tau_2 - 2}},$$

$$\Pi_{21}y(0) - \Pi_{21}z(0) = 26.$$

Используя формулу для решения дискретной начальной задачи, получаем решение последней задачи

$$\Pi_{21}y(\tau_2) - \Pi_{21}z(\tau_2) = 2(4\tau_2 + 13) \frac{1}{2^{\tau_2}}. \quad (43)$$

Из (30) с учетом (43), учитывая, что $\sum_{k=0}^{\infty} (k / 2^k) = 2$, находим

$$\Pi_{21}y(\tau_2) + \Pi_{21}z(\tau_2) = -(24\tau_2 + 110) \frac{1}{2^{\tau_2}}.$$

Отсюда и из (43) следует $\Pi_{21}y(\tau_2) = -(4\tau_2 + 21) / 2^{\tau_2 - 1}$, $\Pi_{21}z(\tau_2) = -(4\tau_2 + 17) / 2^{\tau_2 - 2}$.

Из (32) получаем

$$2 \left(\frac{d\bar{y}_0(t)}{dt} + \bar{z}_1 \right) - \frac{d\bar{z}_0(t)}{dt} = 0.$$

Отсюда и из (41) находим $\bar{y}_1(t) = \bar{z}_1(t) = -1 / 2$.

Из (34), (42) и (33) получаем следующую начальную задачу

$$\frac{d\Pi_{11}z}{d\tau_1} = -2\Pi_{11}z - 130e^{-2\tau_1},$$

$$\Pi_{11}z(0) = 137 / 2.$$

Решая эту задачу, с учетом (42) получаем

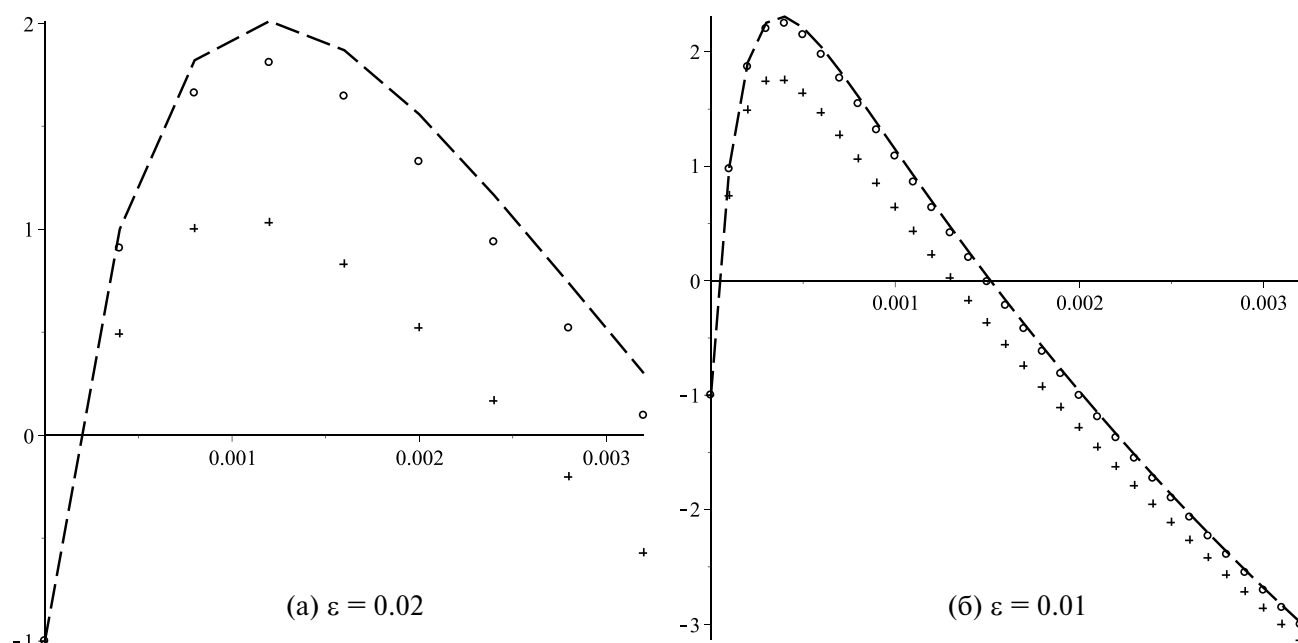
$$\Pi_{11}y(\tau_1) = \left(-130\tau_1 + \frac{85}{2} \right) e^{-2\tau_1},$$

$$\Pi_{11}z(\tau_1) = \left(-130\tau_1 + \frac{137}{2} \right) e^{-2\tau_1}.$$

В результате находим приближение первого порядка асимптотического решения задачи (35), (36)

$$\tilde{y}_1(t, \varepsilon) = \tilde{y}_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} + \left(-130\frac{t}{\varepsilon} + \frac{85}{2} \right) e^{-2t/\varepsilon} - 2 \left(4\frac{t}{\varepsilon^2} + 21 \right) 2^{-t/\varepsilon^2} \right),$$

$$\tilde{z}_1(t, \varepsilon) = \tilde{z}_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} + \left(-130\frac{t}{\varepsilon} + \frac{137}{2} \right) e^{-2t/\varepsilon} - 4 \left(4\frac{t}{\varepsilon^2} + 17 \right) 2^{-t/\varepsilon^2} \right).$$



Фиг. 1. Траектория $z(t, \varepsilon)$ и ее приближения.

Если разложить точное решение и построенное асимптотическое решение первого порядка при $t = \varepsilon^2 k$ в ряды по целым неотрицательным степеням ε , то получим совпадение соответствующих коэффициентов при ε^0 и ε^1 в обоих рядах.

Результаты, полученные с помощью Maple 17, представлены на фиг. 1 для траектории $z(t, \varepsilon)$ при (а) $\varepsilon = 0.02$ и (б) $\varepsilon = 0.01$. Штриховая линия соединяет точки, соответствующие значениям точного решения при $t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \dots$, линия, состоящая из крестиков, представляет приближение нулевого порядка, а линия, состоящая из кружочков, — приближение первого порядка. В силу (37) график $y(\varepsilon^2 k, \varepsilon)$ отличается от графика $z(\varepsilon^2 k, \varepsilon)$ только сдвигом на ε^2 единиц влево.

Статья написана во время работы авторов во Вьетнамском институте перспективных исследований в области математики (VIASM). Авторы хотели бы поблагодарить VIASM за создание плодотворной исследовательской среды во время визита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б. Дифференциальные и разностные системы уравнений с малым параметром в случае, когда невозмущенная (вырожденная) система находится на спектре // Дифференц. ур-ния. 1970. Т. 6. № 4. С. 650–664.
2. Gu Z. M., Nefedov N. N., O'Malley R. E. Jr. On Singular Singularly Perturbed Initial Value Problems // SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49. No. 1. P. 1–25.
3. O'Malley R. E. Jr., Flaherty J. E. Analytical and Numerical Methods for Nonlinear Singular Singularly-Perturbed Initial Value Problems // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 38. No. 2. P. 225–248.
4. Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu D. S. Discrete singularly perturbed control problems (a survey) // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2017. V. 24. P. 335–370.
5. Бутузов В. Ф., Нефёдов Н. Н. Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Дифференц. ур-ния. 1976. Т. 12. № 10. С. 1736–1747.
6. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: МГУ, 1978.
7. Kurina G. A. Projector Approach to Constructing Asymptotic Solution of Initial Value Problems for Singularly Perturbed Systems in Critical Case // Axioms. 2019. V. 8. No. 2. P. 56.

8. Курина Г. А., Хоай Н. Т. Проекторный подход к построению асимптотики решения начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае // Дифференц. ур-ния. 2023. Т. 59. № 1. С. 73–84.
9. Курина Г. А., Хоай Н. Т. Проекторный подход к алгоритму Бутузова–Нефёдова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущенных задач в критическом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 12. С. 2073–2084.
10. Sibuya Y. Some global properties of matrices of functions of one variable // Math. Ann. 1965. V. 161. P. 67–77.
11. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966.
12. Bretscher O. Linear Algebra with Applications, 5th ed. Pearson, 2012.
13. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2001.
14. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.