

УДК 512.643.8

ПОЛУЧЕНИЕ ИЗВЕСТНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О σ -КОММУТИРОВАНИИ ($\sigma \neq 0, \pm 1$) ТЁПЛИЦЕВОЙ И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ В РАМКАХ УНИФИЦИРОВАННОГО ПОДХОДА¹⁾

© 2024 г. В. Н. Чугунов^{1,*}, Х. Д. Икрамов^{2,**}¹Москва, ИВМ РАН, Россия²119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

*e-mail: chugunov.vadim@gmail.com

**e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 07.05.2023 г.

Переработанный вариант 07.05.2023г.

Принята к публикации 16.09.2023г.

В предыдущей публикации авторов был предложен унифицированный подход к конструированию пар матриц (T, H) , решающих задачу о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц. В данной статье этот подход применяется к выводу двух классов решений, полученных В. Н. Чугуновым ранее из частных соображений. Библ. 7.

Ключевые слова: тёплицева матрица, ганкелева матрица, σ -коммутирование, ϕ -циркулянт.

DOI: 10.31857/S0044466924010057, **DOI:** ZKAYOS

1. ВВЕДЕНИЕ

Тёплицевой называется комплексная $n \times n$ -матрица T , имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

а ганкелевой называется комплексная $n \times n$ -матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Переставив столбцы тёплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей тёплицевой матрицы T . Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H = TP_n,$$

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Чугунова В.Н. Московским центром фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (Соглашение № 075-15-2022-286 с Минобрнауки РФ).

где $\mathcal{P}_n$ есть так называемая перъединичная матрица:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Тёплицева матрица (1) называется *циркулянт*ом, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

*косым циркулянт*ом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

*φ-циркулянт*ом, когда

$$t_{-j} = \varphi t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $\varphi \in \mathbb{C}$.

Матрицы K и M σ -коммутируют (или квазикоммутируют), если найдется такое число σ , что $KM = \sigma MK$ (см. [1]). В этой же работе [1] отмечается, что квазикоммутативность является важным соотношением в квантовой физике ([2,3]), а также в теории представлений аффинных алгебр Гекке (Hecke) ([4]).

Задача о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц заключается в описании пар ненулевых матриц (T, H) таких, что T — тёплицева, H — ганкелева и выполняется соотношение

$$TH = \sigma HT. \quad (3)$$

Необходимо сказать несколько слов о параметре σ . Произвольный выбор σ возможен лишь в случае, когда хотя бы одна из матриц T или H вырождена. Если же обе матрицы невырождены, то σ является одним из корней n -й степени из единицы. В данной работе от параметра σ мы требуем, чтобы $\sigma \neq 0, \pm 1$.

Заметим, что, так как след произведения двух матриц не меняется при перестановке сомножителей и $\sigma \neq 1$, то матрицы TH и HT имеют нулевой след.

В работе [5] сформулирована и доказана следующая

Теорема 1. *Ненулевые тёплицева матрица T и ганкелева матрица H σ -коммутируют ($\sigma \neq 0, \pm 1$), если T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:*

*Класс 1. Матрица T является циркулянт*ом

$$T = F_n^* D_1 F_n,$$

*а H — ганкелевым циркулянт*ом

$$H = F_n^* D_2 F_n P_n.$$

Здесь F_n — (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ — первообразный корень n -й степени из единицы; $D_1 = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)})$

и $D_2 = \text{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)})$ — диагональные матрицы; при этом

$$d_1^{(2)}d_1^{(1)} = 0,$$

$$d_j^{(2)}(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+2-j}^{(1)}) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Класс 2. Матрица T является косым циркулянтном

$$T = G_{-1}F_n^*D_1F_nG_{-1}^*,$$

а H — ганкелевым косым циркулянтном

$$H = G_{-1}F_n^*D_2F_nG_{-1}^*P_n,$$

где

$$G_{-1} = \text{diag}(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1}),$$

$\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$ — корень n -й степени из (-1) . Диагональные матрицы $D_1 = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)})$

и $D_2 = \text{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)})$ должны удовлетворять соотношениям

$$d_1^{(2)}(d_1^{(1)} - \sigma d_2^{(1)}) = 0, \quad d_2^{(2)}(d_2^{(1)} - \sigma d_1^{(1)}) = 0,$$

$$d_j^{(2)}(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+3-j}^{(1)}) = 0, \quad j = 3, 4, \dots, n.$$

Класс 3. Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \sigma P_r \end{pmatrix},$$

где α и β — произвольные числа, $0_{r,r}$ — нулевая $r \times r$ -матрица.

Класс 4. Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \sigma P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & P_r \end{pmatrix}.$$

Здесь α и β — произвольные числа.

Матричные классы, описанные в этой теореме, найдены из разных соображений, а именно благодаря искусственно придуманным ограничениям на форму тёплицевой и ганкелевой матриц. Они соответствуют наиболее простым множествам решений. Однако в [6] авторами предложен унифицированный подход к получению полного решения. Сущность его состоит в сужении множества всех пар матриц (T, H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи, после чего задача о σ -коммутировании исследуется на каждой конкретной более узкой комбинации наборов (T, H) . В упомянутой работе [6] в рамках новой схемы строится множество решений рассматриваемой задачи, являющееся частным случаем объединения классов 3 и 4 теоремы 1:

Теорема 2. Ненулевые тёплицева матрица T и ганкелева матрица H σ -коммутируют при $\sigma = i\kappa$, $\kappa = \pm 1$, если эти матрицы имеют четный порядок $n = 2r$ и следующий вид:

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 + \kappa\nu)I_r \\ i(\nu - \kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \beta \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i\nu P_r \end{pmatrix},$$

где $v = \pm 1$, α и β — произвольные числа.

Цель настоящей публикации — показать, что все пары матриц из классов 3 и 4 теоремы 1 также могут быть получены на основе метода, изложенного в [6].

Структура статьи следующая. В разд. 2 кратко изложен прием сужения множества всех пар матриц (T, H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи; далее в разд. 3 демонстрируется применение этого приема к выводу в полном объеме классов 3 и 4 теоремы 1.

Для дальнейшего нам понадобится следующий факт.

Лемма 1 (см. [7]). *Две нескаларные тёплицевы матрицы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ коммутируют тогда и только тогда, когда $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ принадлежат хотя бы одному из следующих классов:*

Класс 1'. Обе матрицы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ верхнетреугольные или же обе нижнетреугольные.

Класс 2'. Матрицы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ суть ϕ -циркулянты для одного и того же числа $\phi \neq 0$.

Класс 3'. Одна из матриц $\tilde{T}_1$ или $\tilde{T}_2$ является линейной функцией от другой.

2. КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О σ -КОММУТИРОВАНИИ ТЁПЛИЦЕВОЙ И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ

Здесь мы кратко напомним предложенный в [6] процесс построения множеств наборов пар матриц (T, H) , объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи. Основную роль в этом процессе играет следующее утверждение.

Лемма 2 (см. [6]). *Всякую пару (T, H) , решающую задачу о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц, можно представить в виде*

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 (A - \sigma A^T), \\ H &= \beta_1 B P_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где A и B — нескаларные тёплицевы матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} AB &= BA, \\ A^T B + B A^T &= \mu AB, \\ \mu &= \frac{1 + \sigma^2}{\sigma}, \\ \mu &\neq \pm 2, \end{aligned} \quad (5)$$

α_1, β_1 — произвольные числа.

Сформулированная лемма позволяет считать основным уравнением соотношение

$$A^T B + B A^T = \mu AB. \quad (6)$$

Обозначим элементы первой строки матрицы A через $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, а элементы ее первого столбца — через $a_0, a_{-1}, \dots, a_{-(n-1)}$. Аналогично, элементы первой строки матрицы B обозначим через $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, а элементы первого столбца — через $b_0, b_{-1}, \dots, b_{-(n-1)}$.

Согласно лемме 1, для коммутирующих тёплицевых матриц A и B возможны лишь следующие четыре случая: 1) обе матрицы A и B являются верхними треугольными; 2) обе матрицы A и B — нижние треугольные; 3) обе матрицы A и B суть ϕ -циркулянты для одного и того же числа $\phi \neq 0$; 4) $B = \theta A + \omega I_n$.

Для получения классов 3 и 4 теоремы 1 мы уделим особое внимание третьему случаю, а именно рассмотрим уравнение (6), когда A и B — ϕ -циркулянты для одного и того же числа $\phi \neq 0, \pm 1$. Матрица в правой части является тёплицевой, значит, и матрица в левой части должна быть тёплицевой, что может быть достигнуто благодаря лемме 3.

Лемма 3 (см. [6]). *Пусть A и B — ϕ -циркулянты для одного и того же числа $\phi \neq 0, \pm 1$. Матрица $A^T B + B A^T$ является тёплицевой тогда и только тогда, когда A и B представимы в виде*

$$A = \gamma (a_0 I_n + U^c + \phi U^T), \quad B = \delta (b_0 I_n + U + \phi U^{cT}), \quad (7)$$

где U и U^c — строго верхние треугольные тёплицевы матрицы с элементами первых строк $0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ и $0, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1$ соответственно, а γ и δ — произвольные числа.

Кроме того, матрица в правой части соотношения (6) является φ -циркулянтom как произведение φ -циркулянтom, поэтому и в его левой части должен стоять φ -циркулянт. Условия для этого дает

Лемма 4 (см. [6]). Пусть A и B — φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица $A^T B + B A^T$ является φ -циркулянтom тогда и только тогда, когда B — скалярное кратное инволютивного φ -циркулянта.

Так как матрица B может быть определена с точностью до скалярного кратного, то, не ограничивая общности, будем считать, что B — инволютивный φ -циркулянт.

Учитывая коммутирование матриц A и B , перепишем решаемое уравнение в виде

$$\left(A^T - \frac{\mu}{2}A\right)B + B\left(A^T - \frac{\mu}{2}A\right) = 0,$$

или, в силу инволютивности B ,

$$B\left(A^T - \frac{\mu}{2}A\right)B = -\left(A^T - \frac{\mu}{2}A\right).$$

При преобразовании подобия след матрицы не меняется, поэтому матрица $A^T - \frac{\mu}{2}A$ имеет нулевой след, а из ее тёплицевости следует, что $\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)a_0 = 0$ и, так как $\mu \neq 2$, то $a_0 = 0$. Благодаря леммам 3 и 4 можем записать выражения для матриц A и B в виде

$$A = \gamma(U^c + \varphi U^T), \quad B = \delta(b_0 I_n + U + \varphi U^{cT}).$$

Так как из уравнения (6) следует, что матрицы A и B могут быть определены с точностью до скалярного кратного, то, используя (7), будем считать справедливым следующее представление

$$A = U^c + \varphi U^T, \quad B = b_0 I_n + U + \varphi U^{cT}. \quad (8)$$

3. ВЫВОД КЛАССОВ 3 И 4

В данном разделе на основании выражений (8) для матриц A и B покажем, что классы 3 и 4 теоремы 1 являются решением задачи о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц в случае $A = B - b_0 I_n$. Уравнение (6) приобретает вид

$$(B - b_0 I_n)^T B + B(B - b_0 I_n)^T = \mu(B - b_0 I_n)B,$$

упрощаемый до соотношения

$$B^T B + B B^T = \mu I_n + (2 - \mu)b_0 B. \quad (9)$$

Введем циркулянт C и косой циркулянт S с одинаковой первой строкой

$$\frac{1}{2}(0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}).$$

С помощью этих матриц можем записать выражения для U и U^c

$$U = C + S, \quad U^c = C^T - S^T, \quad (10)$$

откуда

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(U + U^{cT}), \\ S &= \frac{1}{2}(U - U^{cT}). \end{aligned} \quad (11)$$

Использование (8) и (10) позволяет представить матрицы B и A как

$$B = b_0 I_n + U + \varphi U^{cT} = b_0 I_n + C + S + \varphi(C - S) = b_0 I_n + (1 + \varphi)C + (1 - \varphi)S,$$

$$A = U^c + \varphi U^T = C^T - S^T + \varphi C^T + \varphi S^T = (1 + \varphi)C^T - (1 - \varphi)S^T.$$

Так как $A = B - b_0 I_n$, то $C^T = C$ и $S^T = -S$.

Подставляя выражение для B в уравнение (9), получаем условие

$$\begin{aligned} & (b_0 I_n + (1 + \varphi)C + (1 - \varphi)S) \times (b_0 I_n + (1 + \varphi)C - (1 - \varphi)S) + \\ & + (b_0 I_n + (1 + \varphi)C - (1 - \varphi)S) \times (b_0 I_n + (1 + \varphi)C + (1 - \varphi)S) = \\ & = \mu I_n + (2 - \mu)b_0 \times (b_0 I_n + (1 + \varphi)C + (1 - \varphi)S). \end{aligned}$$

Раскроем здесь скобки:

$$\begin{aligned} & 2b_0^2 I_n + 4b_0(1 + \varphi)C + 2(1 + \varphi)^2 C^2 - 2(1 - \varphi)^2 S^2 + (1 - \varphi^2) \times (SC - CS + CS - SC) = \\ & = 2b_0^2 I_n + (1 - b_0^2)\mu I_n + (2 - \mu)b_0 \times (1 + \varphi)C + (2 - \mu)b_0(1 - \varphi)S. \end{aligned}$$

Это соотношение может быть записано в виде

$$(2 + \mu)b_0(1 + \varphi)C + 2(1 + \varphi)^2 C^2 = (1 - b_0^2)\mu I_n + (2 - \mu)b_0 \times (1 - \varphi)S + 2(1 - \varphi)^2 S^2.$$

Матрица, стоящая в левой части, является циркулянтном, а матрица в правой части — косым циркулянтном, поэтому последнее равенство возможно лишь в виде системы

$$\begin{aligned} & (2 + \mu)b_0(1 + \varphi)C + 2(1 + \varphi)^2 C^2 = \xi I_n, \\ & (2 - \mu)b_0(1 - \varphi)S + 2(1 - \varphi)^2 S^2 = \left(\xi - (1 - b_0^2)\mu\right) I_n. \end{aligned}$$

Деля первое уравнение на $(1 + \varphi)^2 / 2$, а второе на $(1 - \varphi)^2 / 2$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{(2 + \mu)b_0}{(1 + \varphi)} 2C + 4C^2 = \frac{2\xi}{(1 + \varphi)^2} I_n, \\ & \frac{(2 - \mu)b_0}{(1 - \varphi)} 2S + 4S^2 = \frac{2(\xi - (1 - b_0^2)\mu)}{(1 - \varphi)^2} I_n, \end{aligned}$$

а с учетом (11) имеем совокупность уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{(2 + \mu)b_0}{(1 + \varphi)} (U + U^{cT}) + (U + U^{cT})^2 = \frac{2\xi}{(1 + \varphi)^2} I_n, \\ & \frac{(2 - \mu)b_0}{(1 - \varphi)} (U - U^{cT}) + (U - U^{cT})^2 = \frac{2(\xi - (1 - b_0^2)\mu)}{(1 - \varphi)^2} I_n, \end{aligned}$$

или систему

$$\begin{aligned} & \frac{(2 + \mu)b_0}{(1 + \varphi)} U + \frac{(2 + \mu)b_0}{(1 + \varphi)} U^{cT} + U^2 + UU^{cT} + U^{cT}U + (U^{cT})^2 = \frac{2\xi}{(1 + \varphi)^2} I_n, \\ & \frac{(2 - \mu)b_0}{(1 - \varphi)} U - \frac{(2 - \mu)b_0}{(1 - \varphi)} U^{cT} + U^2 - UU^{cT} - U^{cT}U + (U^{cT})^2 = \frac{2(\xi - (1 - b_0^2)\mu)}{(1 - \varphi)^2} I_n. \end{aligned}$$

Сумму уравнений этой системы

$$\frac{(4 - 2\varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U + \frac{(-4\varphi + 2\mu)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U^{cT} + 2U^2 + 2(U^{cT})^2 = \frac{2(1 - \varphi^2)\xi + 2(\xi - (1 - b_0^2)\mu)(1 + \varphi)^2}{(1 + \varphi)^2(1 - \varphi)^2}I_n$$

после деления на 2 запишем в виде

$$\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U + \frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U^{cT} + U^2 + (U^{cT})^2 = \frac{(1 - \varphi^2)\xi + (\xi - (1 - b_0^2)\mu)(1 + \varphi)^2}{(1 + \varphi)^2(1 - \varphi)^2}I_n.$$

Так как U — тёплица строго верхняя треугольная матрица, то последнее соотношение эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \varphi^2)\xi + (\xi - (1 - b_0^2)\mu)(1 + \varphi)^2}{(1 + \varphi)^2(1 - \varphi)^2}I_n &= 0, \\ \frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U + U^2 &= 0, \\ \frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U^{cT} + (U^{cT})^2 &= 0, \end{aligned}$$

которая может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \varphi^2)\xi + (\xi - (1 - b_0^2)\mu)(1 + \varphi)^2}{(1 + \varphi)^2(1 - \varphi)^2}I_n &= 0, \\ \left(\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}I_n + U \right)U &= 0, \\ \left(\frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}I_n + U^{cT} \right)U^{cT} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (12). Если величина $\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}$ не равна нулю, то матрица $\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}I_n + U$ невырождена и $U = 0$. Следовательно, для получения решения в рассматриваемом случае должно выполняться равенство

$$\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)} = 0. \tag{13}$$

Рассуждая аналогично относительно третьего уравнения системы (12), заключаем, что если выражение $\frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}$ отлично от нуля, то $U^c = 0$ и потому $U = 0$. Значит, нужно наложить ограничение

$$\frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)} = 0. \tag{14}$$

Так как $\varphi \neq 0, \pm 1$, то условия (13) и (14) можно записать как систему

$$\begin{aligned} (2 - \varphi\mu)b_0 &= 0, \\ (\mu - 2\varphi)b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет только решение $b_0 = 0$. Если же $b_0 \neq 0$, то $\mu = 2\phi$ и должно выполняться соотношение $\phi^2 = 1$, что противоречит условию задачи. Итак, $b_0 = 0$ и система (12) сводится к виду

$$U^2 = (U^{cT})^2 = 0. \quad (15)$$

Для исследования этих условий будем различать случаи четного и нечетного порядка n . Если $n = 2r + 1$, то условие $U^2 = 0$ влечет за собой равенства $\{U\}_{1,2} = \{U\}_{1,3} = \dots = \{U\}_{1,r+1} = 0$, или $u_1 = u_2 = \dots = u_r = 0$, а условие $(U^c)^2 = 0$ влечет соотношения $\{U^c\}_{1,2} = \{U^c\}_{1,3} = \dots = \{U^c\}_{1,r+1} = 0$, или $u_{n-1} = u_{n-2} = \dots = u_{r+1} = 0$, что в совокупности означает $U = 0$.

При $n = 2r$ условия (15) позволяют указать следующий вид матрицы U :

$$U = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

В этом случае $U = U^c$, матрицы A и B совпадают и являются скалярным кратным матрицы

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \phi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы A и B в уравнении (6) определены с точностью до скалярных множителей, то это уравнение, расписанное как

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & \phi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \phi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \phi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \phi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \mu \phi \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r \end{pmatrix},$$

преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} \phi^2 I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \phi^2 I_r \end{pmatrix} = \mu \phi \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r \end{pmatrix},$$

что можно записать как

$$\begin{pmatrix} (\phi^2 + 1)I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & (\phi^2 + 1)I_r \end{pmatrix} = \mu \phi \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r \end{pmatrix}.$$

Приходим к соотношению

$$\phi^2 + 1 = \mu \phi.$$

В силу определения μ оно эквивалентно равенству

$$\frac{1 + \phi^2}{\phi} = \frac{1 + \sigma^2}{\sigma},$$

которое, благодаря условиям $\phi \neq 0$ и $\sigma \neq 0$, можно преобразовать к виду

$$\sigma + \phi^2 \sigma - \phi - \sigma^2 \phi = 0,$$

или

$$(\sigma - \phi)(1 - \phi\sigma) = 0.$$

Последнее равенство возможно, если

$$\sigma = \varphi \text{ или } \sigma = \frac{1}{\varphi}.$$

Используя лемму 2, получаем

$$T = \alpha_1 [A - \sigma A^T] = \alpha_1 \left[\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \right] = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 - \sigma\varphi)I_r \\ (\varphi - \sigma)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \beta_1 B P_n = \beta_1 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} P_n = \beta_1 \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \varphi P_r \end{pmatrix}.$$

Если $\sigma = \varphi$, то, положив $\alpha_1 = \frac{\alpha}{1 - \varphi^2}$ и $\beta_1 = \beta$, имеем

$$T = \frac{\alpha}{1 - \varphi^2} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 - \varphi^2)I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \beta \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \varphi P_r \end{pmatrix};$$

$$TH = \alpha\beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi P_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$HT = \alpha\beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & P_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$TH = \varphi HT.$$

Матрицы T и H являются σ -коммутирующими для $\sigma = \varphi$. Приходим к классу 3 теоремы 1.

При $\sigma = \frac{1}{\varphi}$ для $\alpha_1 = \frac{\alpha\varphi}{\varphi^2 - 1}$ и $\beta_1 = \beta$

$$T = \frac{\alpha\varphi}{\varphi^2 - 1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \beta \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \varphi P_r \end{pmatrix};$$

$$TH = \alpha\beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ P_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$HT = \alpha\beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \varphi P_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Теперь

$$TH = \frac{1}{\varphi} HT.$$

Матрицы T и H являются σ -коммутирующими для $\sigma = \frac{1}{\varphi}$. Получаем класс 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guterman A. E., Markova O. V., Mehrmann V.* Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices// *Linear Algebra and Appl.* 2019. V. 568. P. 135–154.
2. *Kassel C.* Quantum Groups, Grad. Texts in Math. V. 155. New York: Springer-Verlag, 1995.
3. *Manin Yu. I.* Quantum Groups and Non-commutative Geometry. CRM. Montréal. 1988.
4. *Chriss N., Ginzburg V.* Representation Theory and Complex Geometry. Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1997.
5. *Чугунов В. Н.* О некоторых множествах пар σ -коммутирующих ($\sigma \neq 0, \pm 1$) тёплицевой и ганкелевой матриц // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXXII. Зап. научн. сем. ПОМИ. Т. 482, ПОМИ, СПб. 2019. С. 288–294.
6. *Чугунов В. Н., Икрамов Х. Д.* Об одном частном решении задачи о σ -коммутировании ($\sigma \neq 0, \pm 1$) тёплицевой и ганкелевой матриц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 11. С. 1817–1828.
7. *Гельфгат В. И.* Условия коммутирования тёплицевых матриц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 1. С. 11–14.