

УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© 2024 г. А. П. Солдатов

119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

e-mail: soldatov48@gmail.com

Поступила в редакцию 07.07.2023 г.

Переработанный вариант 07.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Построена фундаментальная матрица решений эллиптических систем второго порядка с постоянными старшими коэффициентами. С помощью нее получено интегральное представление функций, принадлежащих классу Гельдера в замкнутой области с ляпуновской границей. В случае бесконечной области эти функции подчинены степенной асимптотике на бесконечности. Данное представление применено к исследованию смешанно-контактной краевой задачи для эллиптической системы второго порядка с кусочно-постоянными ставшими коэффициентами. Эта задача редуцирована к системе интегральных уравнений, фредгольмовых в области и сингулярных на ее границе. Библ. 24.

Ключевые слова: эллиптическая система, второй порядок, фундаментальная матрица, смешанно-контактная задача, интегральное уравнение, фредгольмовость, индекс.

DOI: 10.31857/S0044466924010103, EDN: ZIXVFT

1. ПОСТАНОВКА СМЕШАННО-КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

В открытом множестве D , ограниченном гладким контуром Γ , для l -вектор-функции $u(z) = (u_1(z), \dots, u_l(z))$, $z = x + iy$, рассмотрим эллиптическую систему

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + L^0 u = f \quad (1.1)$$

с постоянными матричными коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ и подчиненным оператором первого порядка

$$L^0 u = a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_0 u.$$

Условие эллиптичности состоит в том, что матрицы a_{11}, a_{22} обратимы и характеристический многочлен

$$\chi(\zeta) = \det[a_{11} + \zeta(a_{12} + a_{21}) + \zeta^2 a_{22}] \quad (1.2)$$

не имеет вещественных корней.

Кривую Γ разобьем на два контура Γ^0 и Γ^+ , предполагая, что D лежит по обе стороны от Γ^0 и по одну сторону от Γ^+ , при этом Γ^0 ориентируем произвольно, а Γ^+ ориентируем так, чтобы множество D оставалось слева. Для краткости D называем (составной) областью, состоящей из некоторого числа связных компонент $D^1, \dots, D^n$, при $n = 1$ говорим о простой области D . Область D предполагается конечной, т.е. она лежит внутри некоторого круга. Случай “бесконечного” множества D , когда оно содержит внешность некоторого круга, рассмотрим ниже в отдельном разделе.

Связные компоненты контуров Γ^0 и Γ^+ перенумеруем в виде семейств $\Gamma_j^0, 1 \leq j \leq m^0$, и $\Gamma_j^+, 1 \leq j \leq m^+$, соответственно и положим $m = m^+ + 2m^0$. Очевидно, m совпадает с суммарным числом связных компонент контуров ∂D^s , $1 \leq s \leq n$. Введем “одностороннее” замыкание $\bar{D}$ области D , рассматривая окрестности точек контура Γ^0 , лежащие слева и справа от него. Непрерывные в $\bar{D}$ функции по отношению к D являются кусочно-непрерывными. Другими словами, функция $u \in C(D)$ кусочно-непрерывна в области

D , если она непрерывна в замыкании $\overline{D}^s$ каждой связной компоненте области D . Поэтому u допускает соответствующие односторонние граничные значения

$$u^\pm \in C(\Gamma^0), \quad u^+ \in C(\Gamma^+) \quad (1.3)$$

на контурах Γ^0 и Γ^+ . Класс всех кусочно-непрерывных функций обозначим $C(\widehat{D})$. Аналогичный смысл имеет классы $C^1(\widehat{D})$ дифференцируемых функций, а также соответствующие классы $C^\mu(\widehat{D})$, $C^{1,\mu}(\widehat{D})$ кусочно-гельдеровых функций. Эти обозначения используются также для вектор- или матриц-функций. Для класса кусочно-постоянных функций со значениями в некотором конечномерном пространстве X используем обозначение $X(\widehat{D})$. Аналогичный смысл имеет класс $X(\Gamma)$ для кусочно-постоянных функций на контуре Γ (т.е. постоянных на его компонентах). Например, в этих обозначениях кусочно-постоянные старшие коэффициенты a_{ij} уравнения (1.1) принадлежат $\mathbb{R}^{2 \times 2}(\widehat{D})$. В дальнейшем относительно границы Γ составной области D и младших коэффициентов уравнения (1.1) предполагается, что

$$\Gamma = \Gamma^0 \cup \Gamma^+ \in C^{1,\nu}, \quad a_j \in C^\mu(\widehat{D}), \quad 0 < \mu < \nu < 1. \quad (1.4)$$

Обозначим $e = e_1 + ie_2$ комплекснозначную функцию на Γ , который геометрически в точке t контура представляет собой единичный касательный вектор, направленный согласно выбранной ориентации контура. Тогда $n = -ie$ в точке t является единичным вектором нормали к Γ , внешним к D в случае $t \in \Gamma^+$. Матрицы a_{ij} определяют конормальные граничные значения

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = n_1 \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^+ + n_2 \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^+ \quad (1.5)$$

на контуре Γ^+ и аналогичные граничные значения со знаками $\pm$ на Γ^0 .

Пусть Γ^+ разбит на два контура $\Gamma_{(1)}^+$ и $\Gamma_{(2)}^+$, которые составлены, соответственно, из $m_{(1)}^+$ и $m_{(2)}^+$ простых контуров, так что

$$m^+ = m_{(1)}^+ + m_{(2)}^+. \quad (1.6)$$

Смешанно-контактная задача для системы (1.1) определяется смешанными краевыми условиями

$$u^+|_{\Gamma_{(1)}^+} = g_1^+, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu}|_{\Gamma_{(2)}^+} = h^+, \quad (1.7)$$

и контактными условиями

$$(u^+ - u^-)|_{\Gamma^0} = g_1^0, \quad \left(\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right)|_{\Gamma^0} = h^0, \quad (1.8)$$

В предположении (1.4) решение этой задачи ищется в классе $C^{1,\mu}(\widehat{D}) \cap C^2(D)$.

При $\Gamma^+ = \Gamma_{(1)}^+$ и $\Gamma^+ = \Gamma_{(2)}^+$ имеем, соответственно, первую и вторую контактные задачи. Если контур Γ^0 отсутствует и, следовательно, D является простой областью, частными случаями этой задачи служат задача Дирихле

$$u^+ = g \quad (1.9)$$

и Неймана

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = h, \quad (1.10)$$

называемые также первой и второй краевыми задачами.

Применительно к однородной эллиптической системе

$$Lu \equiv a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.11)$$

можно ввести понятие сопряженной функции v к ее решениям u с помощью соотношений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.12)$$

В силу (1.11) это определение корректно, т.е. форма $dv = v_x dx + v_y dy$ в каждой простой подобласти D^s замкнута. Очевидно, в этой подобласти функция v определена по u единственным образом с точностью до постоянного вектора $\xi \in \mathbb{R}^l$ и, вообще говоря, многозначна. При этом

$$\int_{\partial D^s} \frac{\partial u^+}{\partial \nu^s} d_1 t = 0.$$

Суммируя это равенство по s и учитывая, что на каждой компоненте контура Γ^0 определена пара противоположных векторов ν^s и ν^s , приходим к соотношению

$$\int_{\Gamma^0} \left(\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) d_1 t + \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} d_1 t = 0, \quad (1.13)$$

которое справедливо для любого решения $u \in C^1(\widehat{D})$ системы (1.11). В частности, при $\Gamma_{(2)}^+ = \Gamma^+$ правая часть второй контактной задачи должна удовлетворять необходимому условию ортогональности

$$\int_{\Gamma^0} h^0(t) d_1 t + \int_{\Gamma^+} h^+(t) d_1 t = 0. \quad (1.14)$$

С учетом (1.5) и равенства $n = -ie$ из определения (1.12) сопряженной функции следует, что на внешней границе Γ^+ имеем соотношение

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = e_1 \frac{\partial v^+}{\partial x} + e_2 \frac{\partial v^+}{\partial y} = (v^+)',$$

где штрих означает производную по параметру длины дуги на контуре. Поэтому краевое условие (1.10) можно переписать в форме $(v^+)' = g$ с вообще говоря многозначной функцией v^+ , производная которой однозначна.

Аналогичным образом краевые условия (1.7), (1.8) для уравнения (1.11) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} u^+|_{\Gamma_{(1)}^+} &= g_1^+, \quad (v^+)'|_{\Gamma_{(2)}^+} = (g_2^+)', \\ (u^+ - u^-)|_{\Gamma^0} &= g_1^0, \quad (v^+ - v^-)'|_{\Gamma^0} = (g_2^0)'. \end{aligned}$$

Остановимся подробнее на задачах Дирихле (1.9) и Неймана (1.10) для однородной системы (1.11) в области D , ограниченной ляпуновским контуром Γ .

В 1948 г. А. В. Бицадзе [1] был построен пример эллиптической системы (1.11) с коэффициентами

$$a_{11} = -a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

для которой однородная задача Дирихле в единичном круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Позднее А. В. Бицадзе [2] был описан класс эллиптических систем, названных им слабо связанными, для которых задача Дирихле фредгольмова. Этот класс может быть описан следующими образом [3]. С каждой системой (1.11) можно связать такие матрицы $b, J \in \mathbb{C}^{l \times l}$, что

$$\det \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}J \end{pmatrix} \neq 0, \quad a_{11}b + (a_{11} + a_{11})bJ + a_{11}bJ^2 = 0.$$

При этом матрица J есть прямая сумма верхне-треугольных клеток Жордана, диагональные элементы которой составляют множество корней характеристического уравнения (1.2) в верхней полуплоскости, а матрица b определена с точностью до умножения справа на обратимую матрицу, коммутирующую с J . Тогда условия (1.16) не зависят от указанного выбора b . В этих обозначениях класс слабо связанных систем описывается условием

$$\det b \neq 0. \quad (1.17)$$

Принадлежность этому классу необходима и достаточна [2, 4] для фредгольмовости задачи (1.9), (1.11). С другой стороны, с точки зрения современной общей эллиптической теории [5] фредгольмовость задачи Дирихле обеспечивается так называемым условием дополнительности. Можно показать [6], что это условие необходимо и достаточно для слабой связанности эллиптической системы.

Работа А. В. Бицадзе [1] стимулировала появление различных классов эллиптических систем, для которых задача Дирихле всегда фредгольмова. Наиболее важным из них является введенное М. И. Вишиком [7] понятие сильной эллиптичности. Оно заключается в положительной определенности для всех $z = x + iy \neq 0$ матрицы

$$x^2 a_{11} + xy(a_{12} + a_{21}) + y^2 a_{22}. \quad (1.18)$$

Можно проверить непосредственно [3], что для этих матриц условие (1.17) выполнено. Примером сильно эллиптической системы служит система (1.11) с коэффициентами

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21}^T = p, \quad (1.19)$$

где p — ортогональная матрица, не имеющая вещественных собственных значений. В частности, порядок l системы должен быть обязательно четным. Для этой системы матрицу (1.18) можно записать в виде $(x + yp^T)(x + yp)$, так что она положительно определена.

Еще более узкий класс составляют введенные в [8] так называемые усиленно эллиптические системы. В дополнение к условию эллиптичности он описывается требованием неотрицательной определенности $2l \times 2l$ -матрицы

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

или, что равносильно, условием

$$a_{ji}^T = a_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij} \xi_j) \xi_i \geq 0 \quad (1.21)$$

для любых $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^l$.

Примером подобной системы служит 2×2 -система Ламе плоской анизотропной теории упругости [9] с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, & a_{12} &= \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \\ a_{21} &= \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, & a_{22} &= \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Элементы α_j этих коэффициентов, называемые модулями упругости, подчиняются требованию положительной определенности матрицы.

Составленная из коэффициентов 4×4 -матрица (1.20) неотрицательно определена. В самом деле, одновременная перестановка ее строк и столбцов с номерами 2 и 4 приводит к матрице, которая получается добавлением к 3×3 -матрице (1.23) четвертой строки и столбца $(\alpha_6, \alpha_5, \alpha_3, \alpha_3)$ и которая, очевидно, неотрицательно определена.

Если $(a\xi)\xi = 0$, то $a\xi = 0$ и, значит, $\xi = (0, v, -v, 0)$ с некоторым v . Поскольку векторы $\xi_1 = (0, v)$ и $\xi_2 = (-v, 0)$ линейно зависимы только при $v = 0$, отсюда следует, что система (1.11), (1.22) эллиптическая и, следовательно, усиленно-эллиптическая.

Иначе выглядит критерий фредгольмовости задачи Неймана (1.11), (1.10), изученной в [2, 10, 11]. Его можно сформулировать следующим образом [6, 12]: задача Неймана фредгольмова тогда и только тогда, когда

$$\det c \neq 0, \quad c = a_{21}b + a_{22}bJ. \quad (1.24)$$

В отличие от задачи Дирихле, это требование может быть нарушено даже для усиленно эллиптических систем. Как установлено в [6, 12], любое решение однородной задачи Неймана в конечной области D принадлежит $C^1(\overline{D})$ и интеграл

$$\int_D \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_1 dx_2 = 0.$$

На основании (1.21) отсюда

$$a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2.$$

или, что равносильно, сопряженная функция v к решению u , определяемая соотношениями (1.12), постоянна. Такие решения системы (1.11) назовем вырожденными.

Например, для системы (1.11), (1.19) пространство вырожденных решений содержит решения эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

и, следовательно, бесконечномерно. В частности, для этой системы определитель матрицы (1.24) равен нулю.

Частным случаем вырожденных решений служат многочлены первой степени $u(x, y) = \xi_0 + x\xi_1 + y\xi_2$, коэффициенты $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^l$ которых удовлетворяют системе

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

Многочлены этого вида назовем тривиальными решениями системы (1.1).

Как установлено в [13,] (теорема 5)), для усиленно эллиптической системы условие (1.24) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\xi = a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}\xi = a_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}\xi \Rightarrow \xi = 0, \quad (1.25)$$

и при выполнении этого условия любое ее вырожденное решение является тривиальным. Кроме того, условие (1.24) заведомо выполнено в случае, когда ранг матрицы (1.20) не меньше $2l - 1$.

Как было отмечено выше, система Ламе (1.11), (1.22) усиленно эллиптическая. Нетрудно убедиться, что она также обладает и свойством (1.25). В самом деле, матрица $\beta = \alpha^* = (\det \alpha)\alpha^{-1}$, присоединенная к матрице (1.23), также положительно определена. В явном виде

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_4 & \beta_6 \\ \beta_4 & \beta_2 & \beta_5 \\ \beta_6 & \beta_5 & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_2\alpha_3 - \alpha_5^2 & \beta_2 &= \alpha_1\alpha_3 - \alpha_6^2, \\ \beta_3 &= \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 & \beta_4 &= \alpha_5\alpha_6 - \alpha_3\alpha_4, \\ \beta_5 &= \alpha_4\alpha_6 - \alpha_1\alpha_5, & \beta_6 &= \alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6. \end{aligned}$$

В терминах элементов этой матрицы

$$a_{11}^{-1}a_{12} = \frac{1}{\beta_2} \begin{pmatrix} 0 & -\beta_4 \\ \beta_2 & -\beta_6 \end{pmatrix}, \quad a_{22}^{-1}a_{21} = \frac{1}{\beta_1} \begin{pmatrix} \beta_6 & \beta_1 \\ -\beta_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому если $\xi \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет системе в левой части (1.25), то $\delta\xi_1 = \delta\xi_2 = 0$ с множителем $\delta = \beta_1\beta_2 - \beta_4^2$, который в силу положительной определенности матрицы β положителен.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим эллиптическую систему (1.11) в области D , ограниченной ляпуновским контуром Γ . Классический метод исследования задач Дирихле и Неймана для этой системы основан [2] на представлении ее общего решения через набор аналитических функций и последующим использованием интегралов типа Коши. К сожалению, наличие в этом представлении производных аналитических функций приводит к определенным затруднениям. С другой стороны, это представление существенно упрощается, если вместо аналитических функций использовать решения эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

которая при $J = i$ переходит в классическую систему Коши–Римана.

Для тёплицевой матрицы J решения этой системы отвечают аналитическим функциям от гиперкомплексного аргумента, изученным в 1953 г. А. Дуглисом [14]. В общем случае они были подробно изучены в [15]. По этой причине решения системы (2.1) называем J -аналитическими, или функциями, аналитическими по Дуглису. Принятый термин мотивируется, тем, что для функций класса C^1 система (2.1) равносильна существованию в каждой точке z обобщенной производной

$$\phi'(z) = \lim_{t \rightarrow z} (t - z)_J^{-1} [\phi(t) - \phi(z)],$$

которая совпадает с частной производной по x . Здесь и ниже с комплексным числом $z = x + iy$ связывается матрица $z_J = x + yJ$, где $x = x1$ означает скалярную матрицу. Аналогичный смысл имеет и матричный дифференциал $dz_J = dx + Jdy$ в криволинейных интегралах.

Напомним, что J представляет собой жорданову матрицу $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_n)$ с верхне-треугольными клетками Жордана J_i . Если эта матрица имеет единственное собственное значение v , то существует обратимое преобразование $\phi = E\psi$, переводящее аналитические l -вектор-функции ψ комплексной переменной $x + vy$ в J -аналитические вектор-функции по формуле

$$\phi(x + iy) = \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{k!} (J - v)^k \psi^{(k)}(x + vy). \quad (2.2)$$

Здесь учтено, что $(J - v)^l = 0$ и суммирование фактически ведется по $0 \leq k \leq l - 1$. Обратное преобразование дается аналогичной формулой

$$\psi(x + vy) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-y)^k}{k!} (J - v)^k \phi^{(k)}(x + iy), \quad \phi^{(k)} = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}.$$

В общем случае в соответствии с блочно-диагональной структурой матрицы J преобразование E определяется поблочно.

Отметим, что если роль ψ играет скалярная функция $f(x + vy)$, то формулу (2.2) можно рассматривать как значение $f(z_J)$ аналитической функции f от матрицы z_J или, что равносильно, как значение $h(J)$ аналитической функции $h(\zeta) = f(x + \zeta y)$ от матрицы J . В этом случае матрица-функция $\phi(z) = f(z_J)$ коммутирует с J и удовлетворяет системе (2.1). В частности, ее столбцы являются J -аналитическими вектор-функциями.

Связь J -аналитических функций с решениями системы (1.11) описывается следующим образом [6]. В обозначениях (1.16) общее решение $u(z)$ системы (1.11) в односвязной области представимо в виде

$$u = \text{Re} b\phi, \quad (2.3)$$

где J -аналитическая функция ϕ определяется по u с точностью до постоянного слагаемого однозначно. Более точно, справедливо равенство

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2 \left(b^0 \frac{\partial u}{\partial x} + b^1 \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \begin{pmatrix} b^0 & b^1 \\ \bar{b}^0 & \bar{b}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}J \end{pmatrix}^{-1}.$$

При этом для функции v , сопряженной к решению u , имеет место выражение

$$v = \operatorname{Res} \phi + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \quad (2.4)$$

с матрицей c , фигурирующей в (1.24).

Существуют и другие теоретико-функциональные подходы (см., например, [16, 17]) к исследованию системы (1.11).

Подстановка преобразования (2.2) в (2.3) приводит к известному представлению А. В. Бицадзе [2] общего представления решений системы (1.11) через аналитические функции. С другой стороны, представление (2.3) существенно проще, и, кроме того, для функций, аналитических по Дуглису, справедливы все основные результаты классической теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши [15].

Именно, если функция ϕ аналитична по Дуглису в области D , то она бесконечно дифференцируема в этой области и в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ раскладывается в ряд Тейлора

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)_J^k \frac{\phi^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \phi^{(k)} = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}.$$

Если область D ограничена гладким контуром и $\phi \in C(\bar{D})$, то, как и в классической теории, имеют место теорема и формула Коши

$$\int_{\Gamma} dt_J \phi^+(t) = 0; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t - z)_J^{-1} dt_J \phi^+(t) = \begin{cases} \phi(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar{D}, \end{cases} \quad (2.5)$$

где контур Γ ориентирован положительно по отношению к области D .

Если область D многосвязна, то функция ϕ многозначна и при обходе связных компонент границы допускает, вообще говоря, ненулевые приращения, хотя ее производная ϕ' однозначна. Чтобы оставаться в классе однозначных функций, необходимо выделить конечномерное подпространство решений системы (1.11), приводящих к многозначным сопряженным функциям.

Теорема 2.1. Пусть область D ограничена гладким контуром Γ , состоящим из m компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ и ориентированным положительно по отношению к D .

Тогда существуют такие $l \times l$ -матрицы-функции $u_1, \dots, u_{m-1} \in C^\infty(\bar{D})$, столбцы которых являются решениями системы (1.11), что любое ее решение $u \in C^{1,\mu}(\bar{D})$ представимо в виде

$$u = u_1 \xi_1 + \dots + u_{m-1} \xi_{m-1} + \operatorname{Re}(b\phi), \quad \xi_j \in \mathbb{R}^l, \quad (2.6)$$

где функция $\phi \in C^{1,\mu}(\bar{D})$ однозначна и J -аналитична в области D , так что

$$\frac{\partial u^+}{\partial v} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial u_j^+}{\partial v} \xi_j + [\operatorname{Re}(c\phi)]'. \quad (2.7)$$

При этом $u = 0$ в данном представлении влечет $\xi_1 = \dots = \xi_{m-1} = 0$ и $\phi = \eta \in \mathbb{C}^l$.

Доказательство. Пусть для определенности контур Γ_m является внешним, т.е. охватывает все остальные компоненты (которые называем внутренними контурами). В силу замкнутости формы $dv = v_x dx + v_y dy$ имеем равенство

$$\int_{\Gamma} dv = 0,$$

поэтому функция v однозначна тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma_j} dv = 0, \quad 1 \leq j \leq m-1. \quad (2.9)$$

С другой стороны, из первого условия (1.16), очевидного равенства

$$\begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}J \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

и формул (2.3), (2.4) следует, что функция однозначна тогда и только тогда, когда этим свойством обладает v .

Поэтому с каждой внутренней компонентой Γ_j достаточно построить такую 2×2 -матрицу-функцию $u_j \in C^\infty(D)$, столбцы которых являются решениями системы (1.1), что сопряженные к ним многозначные матрицы v_j удовлетворяют условию

$$\int_{\Gamma_i} dv_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, 1 \leq i, j \leq m-1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Пусть точка $z_{j'}$ лежит внутри Γ_j , $1 \leq j \leq m-1$. Следуя [15], рассмотрим многозначную матрицу функцию $\ln(z - z_{j'})_J$, которая понимается как значение аналитической функции $\ln(z - z_{j'})_\zeta$ комплексной переменной ζ в верхней полуплоскости $\text{Im} \zeta > 0$ от матрицы J . Как отмечено выше, ее столбцы которой являются J -аналитическими функциями. При обходе точки $z_{j'}$ против часовой стрелки матрица-функция $\ln(z - z_{j'})_J$ получает приращение, равное скалярной матрице $2\pi i$. В силу обратимости матрицы (2.9) существует единственный вектор $\eta_j \in \mathbb{C}^2$, для которого

$$\text{Re} \left[b \frac{\eta_j}{2\pi i} \right] = 0, \quad \text{Re} \left[c \frac{\eta_j}{2\pi i} \right] = 1.$$

Поэтому матрица-функция

$$v_j(z) = \text{Re} \left[c \frac{\eta_j}{2\pi i} \ln(z - z_{j'})_J \right],$$

сопряженная к

$$u_j(z) = \text{Re} \left[b \frac{\eta_k}{2\pi i} \ln(z - z_{j'})_J \right],$$

будет удовлетворять условиям (2.10).

Как и в случае классических аналитических функций, можем ввести обобщенный интеграл типа Коши

$$(I\phi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t - z)_J^{-1} dt_J \phi(t), \quad z \notin \Gamma, \quad (2.11)$$

определяющий J -аналитическую функцию $\phi = I\phi$, и соответствующий сингулярный интеграл Коши

$$(K\phi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (t - t_0)_J^{-1} dt_J \phi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \quad (2.12)$$

который понимается в смысле главного значения. Как показано в [18], интеграл типа Коши как линейный оператор I ограничен в пространстве Гёльдера $C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(D)$ и справедлива формула Сохоцкого–Племеля

$$2\phi^\pm = \pm\phi + K\phi \quad (2.13)$$

для граничных значений функции $\phi = I\phi$. Если дополнительно выполнено условие гладкости $\Gamma \in C^{1,\nu}$ контура Γ , то этот оператор ограничен и $C^{1,\mu}(\Gamma) \rightarrow C^{1,\mu}(\bar{D})$, $0 < \mu \leq \nu$. В частности, отсюда следует ограниченность сингулярного оператора K в пространствах $C^\mu(\Gamma)$ и $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Отметим, что в $C^{1,\mu}$ -случае существенно используется [18] формула дифференцирования интегралов (2.5), (2.6).

Обсудим еще связь оператора K с классическим сингулярным оператором Коши S , который на ориентируемом составном контуре $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$ действует вдоль его компонент Γ_j по формуле

$$(S\phi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\phi(t) dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma_j, 1 \leq j \leq m. \quad (2.14)$$

Лемма 2.1. Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, и оператор $\bar{S}$ действует по формуле $\bar{S}\phi = \overline{S\phi}$, где черта справа означает комплексное сопряжение.

Тогда каждый из операторов $K - S$, $\bar{S} + S$ компактен в пространствах $C^\mu(\Gamma)$ и $C^{1,\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$.

Хорошо известна теорема Н. И. Мусхелишвили [19] о представлении аналитических функций интегралами типа Коши с вещественной плотностью. Аналог этой теоремы справедлив [20] и для J -аналитических функций. Его удобно объединить вместе с теоремой 2.1.

Теорема 2.2. Пусть область D ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, состоящим из m компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, последняя из которых является внешним контуром.

Тогда любое решение $u \in C^{1,\mu}(\bar{D})$ системы (1.11) единственным образом представимо в виде

$$u = u_1 \xi_1 + \dots + u_m \xi_m + \operatorname{Re}(bI\varphi), \quad \xi_j \in \mathbb{R}^l, \quad (2.15)$$

где $u_m = \operatorname{Im} b$, матрицы-функции $u_1, \dots, u_{m-1} \in C^\infty(\bar{D})$ фигурируют в теореме 2.2 и вещественная l -вектор-функция $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, 1 \leq j \leq m-1, \quad \int_{\Gamma_m} [(\operatorname{Re} b J)\varphi + (\operatorname{Im} b J)\xi_m] d_1 t = 0. \quad (2.16)$$

Доказательство. Аналог теоремы Н. И. Мусхелишвили, о котором шла речь выше, формулируется следующим образом [20]. Любая J -аналитическая в области D функция $\phi \in C^{1,\mu}(\bar{D})$ единственным образом представима в виде $\phi = I\varphi - i\xi$ с некоторыми $\xi \in \mathbb{R}^l$ и вещественной l -вектор-функцией $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$, удовлетворяющей первым $m-1$ условиям (2.16). При этом $\phi = \eta \in \mathbb{C}^l$ влечет

$$\varphi|_{\Gamma_m} = \xi' \in \mathbb{R}^l, \quad I\varphi = \xi'.$$

Совместно с теоремой 2.1 отсюда следует представление (2.15) с $\xi_m = \xi$, причем $u = 0$ влечет $\operatorname{Re}(I\varphi - i\xi) = 0$. Но тогда имеем равенства (2.17), так что с учетом последнего условия (2.16) получим

$$\operatorname{Re}[b(\xi' - i\xi)] = 0, \quad \int_{\Gamma_m} \operatorname{Re}[bJ(\xi' - i\xi)] d_1 t = 0. \quad (2.17)$$

Таким образом, $\operatorname{Re}[b(\xi' - i\xi)] = \operatorname{Re}[bJ(\xi' - i\xi)] = 0$ и на основании (1.16) отсюда $\xi = \xi' = 0$.

Для неоднородной системы (1.1) можно построить фундаментальную матрицу решений, позволяющую свести дело к однородной системе (1.11). В случае системы Ламе с коэффициентами (1.22) подобная матрица была описана в [21]. Аналогичные построения можно провести и в общем случае. Несколько отступая от (1.18), введем матричный многочлен

$$\sigma(z) = y^2 a_{11} - xy(a_{12} + a_{21}) + x^2 a_{22}, \quad z = x + iy,$$

и положим

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma^{-1}(z) d_1 z, \\ e_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma^{-1}(z) [xy(a_{11} - a_{22}) - y^2(a_{12} + a_{21})] d_1 z, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\mathbb{T}$ означает единичную окружность и $d_1 z$ есть элемент длины дуги.

Лемма 2.2. Матрица-функция

$$h_0(\theta) = \sigma^{-1}(e^{i\theta}) \left[\cos \theta \sin \theta (a_{11} - a_{22}) e_1 + \sin^2 \theta (a_{12} + a_{21}) e_1 + a_{22} e_2 a_{22}^{-1} \right] \quad (2.19)$$

допускает π -периодическую первообразную $h(\theta)$.

Доказательство. В обозначениях (2.18) необходимо показать, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_0(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_0(\theta) d\theta = (e_2 + e_1 a_{33}) e_1 + e_1 a_{22} e_2 a_{22}^{-1} = 0, \quad (2.20)$$

где для краткости положено $a_{33} = a_{12} + a_{21}$. С этой целью рассмотрим блочную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_{22}^{-1} a_{11} & -a_{22}^{-1} a_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Соотношение

$$(\zeta - A) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \zeta + a_{22}^{-1}a_{33} & a_{22}^{-1}a_{11} + \zeta^2 + \zeta a_{22}^{-1}a_{33} \end{pmatrix}$$

показывает, что собственные значения матрицы A совпадают с корнями характеристического многочлена (1.2) и, в частности, не лежат на вещественной оси. Введем матрицу

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (x + yA)^{-1} (-y + xA) d_1 z = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (x + yA)^{-1} (dx + A dy), \quad (2.22)$$

где во втором интеграле окружность ориентирована против часовой стрелки. Аналогично [22] убеждаемся, что правую часть этого равенства можно рассматривать как значение $h(A)$ аналитической вне вещественной прямой функции

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{dx + \zeta dy}{x + \zeta y}$$

от матрицы A . Поскольку $h(\zeta) = \pm i$ в полуплоскости $\pm \operatorname{Im} \zeta > 0$, то $[\chi(A)]^2 = \chi^2(A) = -1$. Таким образом, матрица E обратима и

$$E^2 = -1. \quad (2.23)$$

Прямая проверка показывает, что

$$(x + yA)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa_{22} - ya_{33} & -y \\ ya_{11} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (x + yA)^{-1} (-y + xA) &= \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa_{22} - ya_{33} & -y \\ ya_{11} & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y & x \\ -xa_{11} & -ya_{22} - xa_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy(a_{11} - a_{22}) + y^2 a_{33} & (x^2 + y^2)a_{22} \\ -(x^2 + y^2)a_{11} & xy(a_{11} - a_{22}) - x^2 a_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому в блочном 2×2 -виде матрица E определяется равенством

$$E = \begin{pmatrix} e_2 & e_1 \\ -e_1 a_{11} & e_2 \end{pmatrix},$$

где в дополнение к (2.18) положено

$$e_{2'} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma^{-1}(z) [xy(a_{11} - a_{22}) + y^2 a_{33}] d_1 z = e_2 + e_1 a_{33}.$$

С учетом (2.23) отсюда $(E^2)_{12} = (e_2 + e_1 a_{33})e_1 a_{22} + e_1 a_{22} e_1 = 0$, что доказывает (2.25).

В обозначениях леммы 2.2 положим

$$\omega(z) = (\ln|z|)e_1 + h(\arg z). \quad (2.25)$$

Теорема 2.3. Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$.

Тогда оператор

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_D \omega(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in D,$$

ограничен $C^\mu(\bar{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\bar{D})$, $0 < \mu < \nu$, и служит правым обратным к оператору L в (1.11), т.е. функция $u = Tf$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в области D .

Теорема означает, в частности, что с точностью до постоянного множителя ω представляет собой фундаментальную матрицу решений системы (1.1).

Доказательство. Исходя из матрицы (2.21), удобно с каждым комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу $z_A = xI + yA$, которая при $z \neq 0$ обратима. Рассмотрим интеграл

$$U(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_D (\zeta - z)_A^{-1} \varphi(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.27)$$

с векторной плотностью $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^1(\bar{D})$. Как установлено в [18] (см. лемму 3.5.2), эта функция непрерывно дифференцируема в области D и ее производные вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \alpha_1 \varphi(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} (\zeta - z)_A^{-2} \varphi(\zeta) d_2 \zeta, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \alpha_2 \varphi(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} A (\zeta - z)_A^{-2} \varphi(\zeta) d_2 \zeta, \end{aligned}$$

с матричными коэффициентами

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x (x + yA)^{-1} d_1 z, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} y (x + yA)^{-1} d_1 z,$$

и двумерными сингулярными интегралами.

Таким образом, функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} = -E\varphi$$

с матрицей $E = -\alpha_2 + \alpha_1 A$, фигурирующей в (2.22).

Выберем теперь плотность $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ интеграла (2.27) в форме

$$\varphi = E\tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = (0, a_{22}^{-1}f). \quad (2.28)$$

Тогда с учетом (2.23)

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{\varphi}.$$

Полагая $U = (u_1, u_2)$, в обозначениях (2.21) это уравнение можем записать в форме системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{33} \frac{\partial u_2}{\partial x} = f. \quad (2.29)$$

В силу (2.22), (2.28) вектор $\varphi = (e_1 f, e_2 a_{22}^{-1} f)$. Следовательно, вектор U имеет своими компонентами

$$u_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \left[(\zeta - z)_A^{-1} \right]_{k1} e_1 + \left[(\zeta - z)_A^{-1} \right]_{k2} e_2 a_{22}^{-1} \right\} f(\zeta) d_2 \zeta, \quad k = 1, 2.$$

Расписывая элементы матрицы (2.24), в соответствии с (2.18) отсюда приходим к выражениям

$$u_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \omega_k(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad k = 1, 2,$$

с ядрами

$$\omega_1(z) = \sigma^{-1}(z) \left[x a_{22} e_1 - y (a_{33} e_1 + a_{22} e_2 a_{22}^{-1}) \right], \quad \omega_2(z) = \sigma^{-1}(z) (x a_{22} e_2 a_{22}^{-1} + y a_{11} e_1).$$

Первое равенство (2.30) показывает, что форма $u_1 dx + u_2 dy$ замкнута в области D и, следовательно, в односвязной подобласти $D_0 \subseteq D$ существует функция $u \in C^2(D - 0)$, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2.$$

В частности, второе равенство (2.29) означает, что u является решением уравнения $Lu = 0$ в области D_0 .

Таким образом, для любых точек $z_0, z_1 \in D_0$ разность $u(z_1) - u(z_0)$ можем записать в форме криволинейного интеграла

$$\int_{z_0}^{z_1} u_1(z) dx + u_2(z) dy = -\frac{1}{2\pi} \int_D f(\zeta) d_2 \zeta \int_{z_0}^{z_1} \omega_1(\zeta - z) dx + \omega_2(\zeta - z) dy.$$

В полярных координатах $z = re^{i\theta}$ имеем:

$$\omega_1 dx + \omega_2 dy = (x\omega_1 + y\omega_2) \frac{dr}{r} + (-y\omega_1 + x\omega_2) d\theta.$$

Прямая проверка показывает, что

$$x\omega_1(z) + y\omega_2(z) = e_1, \quad -y\omega_1(z) + x\omega_2(z) = h_0(\theta)$$

с π -периодической функцией $h_0(\theta)$ из (2.19). Поэтому форма $\omega_1 dx + \omega_2 dy$ точна и в обозначениях (2.25) совпадает с $d\omega$. Следовательно,

$$u(z_1) - u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_D f(\zeta) [\omega(\zeta - z_1) - \omega(\zeta - z_0)] d_2 \zeta,$$

так что функция u совпадает с Tf и служит решением уравнения $Lu = f$ во всей области D .

Таким образом,

$$\frac{\partial(Tf)}{\partial x} = T_1 f, \quad \frac{\partial(Tf)}{\partial y} = T_2 f$$

с операторами

$$(T_j f)(z) = \int_D \omega_j(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in D.$$

К операторам T_j можно применить теорему 3.5.2 из [18], согласно которой при $0 < \mu < \nu$ они ограничены $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому оператор T ограничен $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\overline{D})$, что завершает доказательство теоремы.

3. ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ СМЕШАННО-КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Обратимся к смешанно-контактной задаче для общего уравнения (1.1) в составной области $D = D^1 \cup \dots \cup D^n$, решение которой в обозначениях (1.11) ищется в классе

$$C_L^{1,\mu}(\widehat{D}) = \left\{ u \in C^{1,\mu}(\widehat{D}) \cap C^2(D), \quad Lu \in C^\mu(\widehat{D}) \right\}. \quad (3.1)$$

Соответственно, правая часть уравнения (1.1) и граничные данные задачи берутся в классах $f \in C^\mu(\widehat{D})$ и $g_1^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma^0)$, $g_1^+ \in C^{1,\mu}(\Gamma^+)$, $h^0 \in C^\mu(\Gamma^0)$, $h^+ \in C^\mu(\Gamma^+)$.

С помощью теорем 2.2, 2.3 смешанно-контактную задачу редуцируем к эквивалентной системе интегральных уравнений, фредгольмовых в области и сингулярных на ее границе. При определенных условиях эта система принадлежит к так называемому нормальному типу, что приводит к фредгольмовости смешанно-контактной задачи. Отметим, что применительно к уравнению (1.11) этот подход (в рамках общей схемы для однородных эллиптических уравнений и систем произвольного порядка с постоянными и только старшими коэффициентами) был реализован в [23].

Теорема 3.1. Пусть в дополнение к (1.4) выполнены условия

$$\det d^0 \neq 0 \Rightarrow \Gamma^0, \quad \det d^+ \neq 0 \Rightarrow \Gamma^+, \quad (3.2)$$

где кусочно-постоянные матрицы $b, c \in \mathbf{R}^{l \times l}(\widehat{D})$ фигурируют в (2.3), (2.4) и

$$d^0 = \begin{pmatrix} b^+ & \bar{b}^- \\ c^+ & \bar{c}^- \end{pmatrix}, \quad d^+ = \begin{cases} b^+ \Rightarrow \Gamma_{(1)}^+, \\ c^+ \Rightarrow \Gamma_{(2)}^+. \end{cases}$$

Тогда смешанно-контактная задача (1.7), (1.8) для уравнения (1.1) фредгольмова в классе (3.1) и ее индекс равен нулю.

Доказательство. Удобно сужения кусочно-постоянных функций на компоненту D^s снабжать верхним индексом s . В соответствии с этим теорему 2.3 можем распространить на оператор

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^s} \omega^s(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in D^s, \quad s = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

который ограничен $C^\mu(\widehat{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\widehat{D})$, $0 < \mu < \nu$, и служит правым обратным к оператору L в (1.11), т.е. функция $u = Tf$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в составной области D . В частности, относительно нормы

$$|u| = |u|_{C^{1,\mu}} + |Lu|_{C^\mu}$$

пространство $C_L^{1,\mu}(\widehat{D})$ банахово. Из этих же соображений общее решение $u \in C_L^{1,\mu}$ уравнения $Lu = \psi$ можно представить в виде

$$u = T\psi + u^0 \quad (3.4)$$

с общим решением $u^0 \in C^{1,\mu}(\widehat{D})$ однородного уравнения $Lu^0 = 0$.

Рассмотрим банахово пространство

$$C^{1,\mu}(\partial\widehat{D}) = C^{1,\mu}(\partial D^1) \times \dots \times C^{1,\mu}(\partial D^n), \quad (3.5)$$

оно состоит из векторов $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, компоненты φ^j которых являются l -вектор-функциями на контурах ∂D^s . В каждой области D^j операторы I^s и K^s определяются формулами (2.11) и (2.12) по отношению к J^s и контуру ∂D^s . В свою очередь, аналогично (3.3) они определяют операторы I и K на векторах $\varphi \in C^{1,\mu}(\partial\widehat{D})$. Таким образом, при $0 < \mu < \nu$ оператор I ограничен $C^{1,\mu}(\partial\widehat{D}) \rightarrow C^{1,\mu}(\widehat{D})$, а K ограничен в $C^{1,\mu}(\partial\widehat{D})$.

Чтобы описать граничные значения $(I\varphi)^\pm$ на Γ^0 и $(I\varphi)^\pm$ на Γ^+ , с каждым простым контуром $\Gamma_j^0, 1 \leq j \leq m^0$, свяжем две компоненты D_j^+ и D_j^- составной области D , которые граничат по этому контуру и лежат, соответственно, слева и справа от него. Аналогично пусть простая область D_j^+ граничит с компонентой Γ_j^+ контура Γ^+ . В этих обозначениях каждому элементу $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ пространства (3.5) поставим в соответствие тройку функций $\varphi_+ \in C^{1,\mu}(\Gamma^+)$ и $\varphi_\pm^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma^0)$ по правилу

$$\varphi_+|_{\Gamma_j^+} = \varphi^s|_{\Gamma_j^+}, \partial D^s = D_j^+; \quad \varphi_\pm^0|_{\Gamma_j^0} = \varphi^s|_{\Gamma_j^0}, D^s = D_j^\pm. \quad (3.6)$$

Очевидно, полученное отображение $\varphi \rightarrow (\varphi_+, \varphi_+^0, \varphi_-^0)$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств $C^\mu(\partial\widehat{D}) \rightarrow C^\mu(\Gamma^+) \times C^\mu(\Gamma^0) \times C^\mu(\Gamma^0)$. Напомним еще, что S означает классический сингулярный оператор, действующий вдоль связанных компонент контуров ∂D^s .

Утверждается что для любого $\varphi \in C^{1,\mu}(\partial\widehat{D})$ справедливы формулы

$$2(I\varphi)^\pm|_{\Gamma_0} = \pm\varphi_\pm^0 + S\varphi_\pm^0 + (N_0\varphi)_\pm^0, \quad 2(I\varphi)^\pm|_{\Gamma^+} = \varphi_+ + S\varphi_+ + (N_0\varphi)_+, \quad (3.7)$$

с некоторым оператором N_0 , компактным в пространстве $C^{1,\mu}(\partial\widehat{D})$.

Действительно, на основании формул Сохоцкого–Племеля (2.13) в принятых обозначениях можем записать

$$2(I\varphi)^\pm(t_0) = \pm\varphi_\pm^0(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j^0} (t - t_0)_{j^s} dt_{j^s} \varphi_\pm^0(t) + \dots, \quad t_0 \in \Gamma_j^0, D^s = D_j^\pm,$$

$$2(I\varphi)^+(t_0) = \varphi_+(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j^+} (t - t_0)_{j^s} dt_{j^s} \varphi_+(t) + \dots, \quad t_0 \in \Gamma_j^+, D^s = D_j^+,$$

где многоточие означает сумму соответствующих интегралов по связным компонентам контура ∂D^s , отличным от Γ_j^0 в первом равенстве и Γ_j^+ во втором равенстве. Поскольку эти интегралы формируют очевидные компактные операторы, остается воспользоваться леммой 2.1.

Теорема 2.2, примененная к каждой компоненте D^s , позволяет сформулировать аналогичный результат по отношению ко всей составной области D . Заметим, что $m = m^+ + 2m^0$ совпадает с $m^1 + \dots + m^n$, где m^s означает число компонент контура ∂D^s . В соответствии с этим введем разбиение множества $\{1, 2, \dots, m\}$ на подмножества O^s из m^s элементов, $1 \leq s \leq n$, и обозначим далее $\Gamma_k, k \in O^s$, связные

компоненты контура ∂D^s , причем внешнюю его компоненту Γ^s внешней компоненту этого контура, охватывающую все остальные, обозначим отдельно как Γ^s . В принятых обозначениях сумму $\sum u_k \xi_k$ в (2.15), отвечающую области D^s , запишем в виде $\sum_{O^s} u_k \xi_k$, полагая $u_k = \text{Im} b^s$ для $k \in O^s, \Gamma_k = \Gamma^s$. При этом функции $u_k, k \in O^s$, продолжим нулем с D^s на D . Кроме того, положим

$$p_k = \text{Re}(b^s J^s), \quad q_k = \text{Im}(b^s J^s); \quad k \in O^s, \Gamma_k = \Gamma^s,$$

и $p_k = 1, q_k = 0$ для остальных значений k . Тогда согласно теореме 2.2, примененной к областям D^s , общее решение u^0 уравнения $Lu^0 = 0$ единственным образом представимо в том же виде (2.15):

$$u^0 = u_1 \xi_1 + \dots + u_m \xi_m + \text{Re}(bI\varphi), \quad \xi_s \in \mathbb{R}^l, \quad (3.8)$$

где вещественная l -вектор-функция $\varphi \in C^{1,\mu}(\partial \widehat{D})$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_k} [p_k \varphi(t) + q_k \xi_k] d_1 t = 0, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (3.9)$$

Совместно с (3.4) эти формулы можем рассматривать как представление общего элемента u класса (3.2) через тройку (ψ, φ, ξ) , составленную из $\psi \in C^\mu(\widehat{D})$, $\varphi \in C^{1,\mu}(\partial \widehat{D})$ и $\xi \in (\mathbb{R}^l)^m$.

Подстановка (3.4), (3.8) в уравнение (1.1) дает соотношение

$$\psi + L^0 T\psi + L^0 \left[\text{Re}(bI\varphi) + \sum_{s=1}^m \mu_s^+ \xi_s \right] = f. \quad (3.10)$$

Точно так же, подставляя это представление в краевые условия (1.7), получим

$$(T\psi)^+ + \text{Re}(bI\varphi)^+ + \sum_{s=1}^m \mu_s^+ \xi_s = g_1^+ = 0 \quad \Gamma_{(1)}^+, \quad (3.11)$$

и аналогичное выражение

$$\frac{\partial(T\psi)^+}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial \nu} \text{Re}(bI\varphi)^+ + \sum_{s=1}^m \frac{\partial \mu_s^+}{\partial \nu} \xi_s = h^+ = 0 \quad \Gamma_{(2)}^+. \quad (3.12)$$

Аналогичным образом перепишутся и контактные условия (1.8) на контуре Γ^0 :

$$\left[(T\psi)^+ - (T\psi)^- \right] + \text{Re} \left[(bI\varphi)^+ - (bI\varphi)^- \right] + \sum_{s=1}^m (u_s^+ - u_s^-) \xi_s = g_1^0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left[(T\psi)^+ - (T\psi)^- \right] + \text{Re} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(bI\varphi)^+ - (bI\varphi)^- \right] + \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial \nu} (u_s^+ - u_s^-) \xi_s = h^0. \quad (3.14)$$

Согласно (2.7) имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \text{Re}(bI\varphi)^+ = \left[\text{Re}(cI\varphi)^+ \right]', \quad (3.15)$$

причем функция $\text{Re}(cI\varphi)^+$ однозначна на контуре. Другими словами, левая часть этого равенства допускает непрерывно дифференцируемую однозначную первообразную на составном контуре. В частности, из (3.12) следует, что

$$\int_{\Gamma_{2,j}^+} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(T\psi)^+ + \sum_{s=1}^m \mu_s^+ \xi_s \right] d_1 t = \int_{\Gamma_{2,j}^+} h^+(t) d_1 t, \quad 1 \leq j \leq m_{(2)}^+, \quad (3.16a)$$

где $\Gamma_{2,j}^+$ означают связные компоненты контура $\Gamma_{(2)}^+$.

Аналогичным образом из (3.14) следует, что

$$\int_{\Gamma_j^0} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(T\psi)^+ - (T\psi)^- + \sum_{s=1}^m (u_s^+ - u_s^-) \xi_s \right] d_1 t = \int_{\Gamma_j^0} h^0(t) d_1 t, \quad 1 \leq j \leq m^0. \quad (3.16b)$$

Эти равенства составляют дополнительные к (3.9) $m_{(2)}^+ + m^0$ условия ортогональности, которым должны удовлетворять ψ и ξ .

В общем случае не каждая функция φ , заданная и непрерывная на контуре Γ , допускает непрерывно дифференцируемую первообразную. Для существования такой первообразной необходимо и достаточно, чтобы все интегралы от φ на связных компонентах $\Gamma_j, 1 \leq j \leq m$, контура Γ были равны нулю. Очевидно, этим свойством обладает функция

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{s(\Gamma_j)} \int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t, \text{ на } \Gamma_j,$$

где $s(\Gamma_j)$ есть длина контура Γ_j . Обозначим $\varphi^{(-1)}$ первообразную функции $\tilde{\varphi}$, которая фиксируется условием

$$\int_{\Gamma_j} \varphi^{(-1)}(t) d_1 t = 0.$$

В результате получаем линейное отображение $C(\Gamma) \rightarrow C^1(\Gamma)$, для которого $[\varphi^{(-1)}]'$ отличается от φ кусочно-постоянным слагаемым.

Важно заметить, что если функция φ непрерывно дифференцируема на Γ и ее производная представима в виде суммы некоторого конечного числа функций $\psi_s \in C(\Gamma)$, то $\varphi = \sum_s \psi_s^{(-1)} + \eta$ с некоторым кусочно-постоянным слагаемым η . В соответствии с этим равенство (3.12) переписывается в следующем эквивалентном виде:

$$T_{(2)}^+ \psi + \operatorname{Re}(cI\varphi)^+ + \sum_{s=1}^m \mu_{(2)s}^+ \xi_s = g_2^+ + \eta_j \text{ на } \Gamma_{(2)j}^+, \quad 1 \leq j \leq m_{(2)}^+, \quad (3.17)$$

где для краткости положено

$$T_{(2)}^+ \psi = \left[\frac{\partial (T\psi)^+}{\partial v} \right]^{(-1)}, \quad u_{(2)s}^+ = \left[\frac{\partial u_s^+}{\partial v} \right]^{(-1)}, \quad g_2^+ = \left[\frac{\partial h^+}{\partial v} \right]^{(-1)}.$$

Аналогично переписывается и соотношение (3.14) в виде

$$T^0 \psi + \operatorname{Re}[(cI\varphi)^+ - (cI\varphi)^-] + \sum_{s=1}^m \mu_s^0 \xi_s = g_2^0 + \eta_j^0 = 0 \text{ на } \Gamma_j^0, \quad 1 \leq j \leq m^0, \quad (3.18)$$

где для краткости положено

$$T^0 \psi = \left[\frac{\partial ((T\psi)^+ - (T\psi)^-)}{\partial v} \right]^{(-1)}, \quad u_s^0 = \left[\frac{\partial (u_s^+ - u_s^-)}{\partial v} \right]^{(-1)}, \quad g_2^0 = \left[\frac{\partial h^0}{\partial v} \right]^{(-1)}.$$

Заметим, что оператор $T_{(2)}^+$ ограничен $C^\mu(\widehat{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\Gamma_{(2)}^+)$, а T^0 ограничен $C^\mu(\widehat{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\Gamma^0)$. Соответственно, функции $u_{(2)s}^+ \in C^{1,\mu}(\Gamma_{(2)}^+)$ и $u_s^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma^0)$.

Таким образом, рассматриваемая задача редуцирована к эквивалентной системе уравнений (3.10), (3.11), (3.13) и (3.17), (3.18) относительно набора

$$\begin{aligned} (\psi, \varphi) &\in X_1 \times X_2 = C^{1,\mu}(\Gamma^+) \times [C^{1,\mu}(\Gamma^0)]^2, \\ (\xi, \eta) &\in Y_1 \times Y_2 = (\mathbb{R}^l)^m \times (\mathbb{R}^l)^{m*}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где для краткости $m^* = m_{(2)}^+ + m^0$. При этом должны выполняться дополнительные условия (3.9), (3.16).

Запишем указанную систему в кратком операторном виде

$$N_{11}\psi + N_{12}\varphi + P_{11}\xi = f, \quad N_{21}\psi + N_{22}\varphi + P_{21}\xi + P_{22}\eta = g, \quad (3.20)$$

где $g = (g^+, g^0)$ и $g^0 = (g_1^0, g_2^0)$. В силу (7.7) оператор N_{22} , рассматриваемый в пространстве X_2 , представим в виде

$$N_{22} = \operatorname{diag}(M^+, M^0) + N_0, \quad (3.21)$$

где оператор N_0 компактен, а операторы M^+ и M^0 действуют по правилу

$$\begin{aligned} 2M^+\varphi_+ &= \operatorname{Re}\left[d^+\left((1+S)\varphi_+\right)\right], \quad \varphi_+ \in X_1, \\ 2\left(M^0\varphi^0\right)_1 &= \operatorname{Re}\left[b^+\left((1+S)\varphi_+^0\right) + b^-\left((1-S)\varphi_-^0\right)\right], \\ 2\left(M^0\varphi^0\right)_2 &= \operatorname{Re}\left[c^+\left((1+S)\varphi_+^0\right) + c^-\left((1-S)\varphi_-^0\right)\right], \end{aligned}$$

где $\varphi^0 = (\varphi_+^0, \varphi_-^0) \in X_2$. Поскольку функция φ_-^0 вещественна, имеем очевидное соотношение

$$\operatorname{Re}\left[b^-\left((1-S)\varphi_-^0\right)\right] = \operatorname{Re}\left[\overline{b^-}\left((1-\bar{S})\varphi_-^0\right)\right]$$

и аналогичное соотношение справедливо по отношению к матрице c . На основании леммы 2.1 отсюда

$$2M^0\varphi^0 = \operatorname{Re}d^0\left(\varphi^0 + S\varphi^0\right) + 2K^0\varphi^0,$$

где оператор K^0 компактен в пространстве $\left[C^{1,\mu}\left(\Gamma^+\right)\right]^2$. В силу (3.2) к операторам M^+ и M^0 можем применить результаты классической теории [19] сингулярных интегральных уравнений, согласно которой эти операторы фредгольмовы и их индексы равны нулю. Поэтому с учетом (3.21) оператор N_{22} обладает этим же свойством.

Явные выражения операторов N_{11} , N_{12} и N_{21} не приводим, отметим только, что $N_{11} \sim 1$, $N_{12} \sim 0$, где запись $N_1 \sim N_2$ означает, что оператор $N_1 - N_2$ компактен. Таким образом,

$$N \sim \begin{pmatrix} 1 & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix},$$

так что на основании общих свойств фредгольмовых операторов [24] отсюда заключаем, что оператор N фредгольмов и его индекс равен нулю.

Что касается конечномерных операторов P_{ij} , то в обозначениях (3.19) они действуют $P_{ij} : Y_j \rightarrow X_i$. Точно так же дополнительные условия (3.9), (3.16) можно записать в операторном виде

$$Q_{11}\varphi + Q_{12}\xi = 0, \quad Q_{21}\psi + Q_{22}\xi = \tilde{\eta}, \quad (3.22)$$

где $Q_{11} : X_2 \rightarrow Y_1, Q_{12} : Y_1 \rightarrow Y_1, Q_{21} : X_1 \rightarrow Y_2, Q_{22} : Y_1 \rightarrow Y_2$ и $\tilde{\eta} \in Y_2$ представляет собой значение некоторого линейного функционала от $h = (h^+, h^0)$. Поэтому совместно (3.20) и (3.22) представляют собой конечномерное расширение оператора N , действующего в $X = X_1 \times X_2$, до оператора N в пространстве $X \times Y$, $Y = Y_1 \times Y_2$. Поэтому операторы N и $\tilde{N}$ фредгольмово эквивалентны и их индексы совпадают, что завершает доказательство теоремы 3.1.

Для некоторых усиленно эллиптических систем, т.е. эллиптических систем (1.11), удовлетворяющих (1.21), требование (3.2) теоремы всегда выполнено.

Лемма 3.1. Пусть система (1.11) усиленно-эллиптическая и удовлетворяет условию (1.25).

Тогда условие (3.2) теоремы 3.1 выполнено.

Доказательство достаточно провести для каждой компоненты контура Γ^0 , не ограничивая общности можно считать, что $b^\pm, c^\pm \in \mathbb{R}^{l \times l}$. Предположим противное, т.е. $\det d = 0$. Тогда найдется такой ненулевой вектор $\eta = (\eta^+, \eta^-) \in \mathbb{C}^{2l}$, что

$$b^+\eta^+ - \overline{b^-\eta^-} = 0, \quad c^+\eta^+ - \overline{c^-\eta^-} = 0.$$

В частности,

$$\operatorname{Re}\left(b^+ \frac{\eta^+}{t+i} - b^- \frac{\eta^-}{t-i}\right) = \operatorname{Re}\left(c^+ \frac{\eta^+}{t+i} - c^- \frac{\eta^-}{t-i}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Пусть D^+ и D^- означают, соответственно, верхнюю и нижнюю полуплоскости, рассмотрим в $D^\pm$ эллиптическую систему (1.11) с коэффициентами $a_{ij} = a_{ij}^\pm$. Связь между матрицами $b^\pm$ и $c^\pm$

осуществляется как в (1.16) и (1.24) по $a_{ij}^\pm$ и $J^\pm$. По отношению к аналитической в $D = D^+ \cup D^-$ аналитической вектор-функции

$$\psi(z) = \begin{cases} \eta^+(z+i)^{-1}, & z \in D^+, \\ \eta^-(z-i)^{-1}, & z \in D^-, \end{cases}$$

равенство (3.23) переходит в

$$\operatorname{Re}(b^+\psi^+ - b^-\psi^-)|_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}(c^+\psi^0 - c^-\psi^-)|_{\mathbb{R}} = 0. \quad (3.24)$$

Рассмотрим $J^\pm$ -аналитические функции $\phi^\pm(x, y)$ в области $D^\pm$, связанные с $\psi^\pm$ соотношением (2.2). В этом соотношении предполагается, что матрица $J^\pm$ имеет единственное собственное значение $v = v^\pm$, $\operatorname{Im} v > 0$. В общем случае блочно-диагональной матрицы $J^\pm$ это соотношение нужно понимать поблочно. Очевидно, для $\operatorname{Im} v > 0$ преобразование $x + iy \rightarrow x + vy$ переводит полуплоскость $D^\pm$ на себя и оставляет ее граничные точки $x \in \mathbb{R}$ неподвижными. При этом $\phi^\pm(x) = \psi^\pm(x)$. Поэтому соотношение (3.7) справедливо и для $\phi^\pm$. Но тогда для функций $u = \operatorname{Re} b\phi$, удовлетворяющих системе (1.11) в области $D^\pm$, и сопряженной к ней функции $v = \operatorname{Re} c\phi$ имеют место контактные соотношения

$$(u^+ - u^-)|_{\mathbb{R}} = (v^+ - v^-)|_{\mathbb{R}} = 0$$

на прямой $\mathbb{R}$.

Пользуясь формулой Грина, обычным образом выводим соотношение

$$\int_D \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}} \left[u^+ (v^+)' - u^- (v^-)' \right] ds,$$

интегралы в котором на основании (3.25) равны нулю. В силу (1.21) отсюда следует равенство нулю частных производных функции $u = \operatorname{Re} b\phi$. Но тогда J -аналитическая функция ϕ должна быть постоянной, что противоречит ее определению.

Отметим, что существуют эллиптические системы, для которых все три условия (3.2) нарушены. Например, для системы Бицадзе (1.11), (1.15) роль b и c играют матрицы

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm i & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix},$$

каждая из которых вырожденна. С другой стороны, если области $D^\pm$ граничат по контуру Γ^0 , и в этих областях рассматриваются системы (1.15) с разными знаками, то $b^- = b^+$, так что 4×4 -матрица d^0 в (3.2) имеет две одинаковые первые строки и, следовательно, также является вырожденной.

4. СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

До сих пор составная область D была конечной, т.е. лежала внутри некоторого круга. Пусть эта область бесконечна, т.е. содержит внешность некоторого круга. В этом случае решение смешанно-контактной задачи будем искать в соответствующих весовых классах Гёльдера со степенным поведением на бесконечности.

Введем весовое пространство Гёльдера в неограниченной области D с аналогичным поведением на бесконечности. Именно, исходя из весовой функции $\rho_\lambda(z) = (1 + |z|)^\lambda$ произвольного порядка $\lambda \in \mathbb{R}$, обозначим $C_\lambda^\mu(\widehat{D}, \infty)$ пространство всех функций $\phi \in C(\widehat{D})$, для которых конечна норма

$$|\phi| = \sup_{z \in D} |(\rho_{-\lambda}\phi)(z)| + \sup_{z_1 \neq z_2, z_j \in D} \frac{|(\rho_{\mu-\lambda}\phi)(z_1) - (\rho_{\mu-\lambda}\phi)(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}.$$

Соответствующее пространство $C_\lambda^{1,\mu}(\widehat{D}, \infty)$ дифференцируемых определяется индуктивно по n и состоит из всех функций $\phi \in C^n(D)$, для которых

$$\phi \in C_\lambda^{n-1,\mu}(\widehat{D}, \infty), \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in C_{\lambda-1}^{n-1,\mu}(\widehat{D}, \infty).$$

Эти пространства банаховы и являются частным случаем более общих весовых пространств, подробно изученных в [18]. Полученное семейство $(C_{\lambda}^{n,\mu})$ монотонно убывает (в смысле вложения банаховых пространств) по параметру μ и возрастает по λ . При этом операция умножения как билинейное отображение ограничена $C_{\lambda_1}^{n,\mu} \times C_{\lambda_2}^{n,\mu} \rightarrow C_{\lambda_1+\lambda_2}^{n,\mu}$. При $\lambda = 0$ пространство $C_0^{n,\mu}$ является банаховой алгеброй по умножению. Важно отметить, что при любом $\varepsilon > 0$ вложение

$$C_{\lambda-\varepsilon}^{1,\mu}(\widehat{D}, \infty) \subseteq C_{\lambda}^{\mu}(\widehat{D}, \infty) \quad (4.1)$$

компактно.

Для бесконечной области D теоремы 2.1–2.3 сохраняют свою силу при некоторых изменениях. Аналог теоремы 2.3 формулируется следующим образом.

Теорема 4.1. Пусть область D бесконечна и ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$.

Тогда при $0 < \delta < 1$ оператор

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_D [\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta)] f(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in D, \quad (4.2)$$

ограничен $C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_{\delta}^{2,\mu}(\overline{D}, \infty)$, $0 < \mu < \nu$, и служит правым обратным к оператору L в (1.11), т.е. функция $u = Tf$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в области D .

Доказательство требуется только для первого утверждения. Из выражения (2.25) функции ω видно, что при фиксированном z разность $\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$ на бесконечности, так что для $f \in C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty)$ интеграл (4.2) имеет смысл. При этом частные производные даются формулами

$$\frac{\partial(Tf)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_D \omega_1(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad \frac{\partial(Tf)}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \int_D \omega_2(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad (4.3)$$

с нечетными однородными степени -1 ядрами

$$\omega_1(z) = -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \omega_2(z) = -\frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

На основании теоремы 3.11.2 из [18] операторы T_j ограничены $C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_{\delta-1}^{\mu}(\overline{D}, \infty)$. Совместно с теоремой 2.10.1 из [18] отсюда заключаем, что оператор T ограничен $C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_{\delta}^{\mu}(\overline{D}, \infty)$. В рассматриваемом случае эта теорема применима, поскольку для $F = \{\infty\}$ условие конуса в граничной точке $\tau = \infty$ очевидным образом выполнено.

Из теоремы следует, что любая функция $u \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$ единственным образом представима в виде (3.4), где $\psi \in C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty)$ и $u^0 \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$ является решением однородного уравнения $Lu = 0$. По отношению к этому классу аналогом теоремы 3.2 служит следующий результат.

Теорема 4.2. Пусть область D бесконечна и ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, состоящим из m компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, и $0 < \delta < 1$, $0 < \mu < \nu$.

Тогда существуют такие $l \times l$ -матрицы-функции $u_1, \dots, u_m$ из класса $C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$, столбцы которых удовлетворяют уравнению $Lu = 0$, что любое решение u этого уравнения в данном классе единственным образом представимо в виде

$$u = u_1 \xi_1 + \dots + u_m \xi_m + \xi_{m+1} + \operatorname{Re}(bI\varphi), \quad \xi_j \in \mathbb{R}^l,$$

где вещественная l -вектор-функция $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (4.4)$$

Доказательство основывается на соответствующем аналоге теоремы 3.1 для бесконечной области. Он состоит в том, что любое решение $u \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$ уравнения $Lu = 0$ единственным образом представимо в виде

$$u = u_1 \xi_1 + \dots + u_m \xi_m + \xi_{m+1} + \operatorname{Re}(b\varphi), \quad \xi_j \in \mathbb{R}^l, \quad (4.5)$$

с некоторой J -аналитической функцией $\varphi \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D})$, которая в окрестности ∞ ведет себя как $O(|z|^{-1})$. Доказательство этого факта осуществляется совершенно аналогично теореме 3.1 с той разницей, что

ветвление многозначной сопряженной функции v к решению u системы (1.11) осуществляется вдоль всех компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Остается принять во внимание, что согласно [20] функция ϕ в (4.5) единственным образом представима в виде интеграла типа Коши $I\phi$ с вещественной плотностью $\phi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$, удовлетворяющей условиям (4.4).

Обратимся к смешанно-контактной задаче в составной бесконечной области D . Теорема 4.1 показывает, что ее решение естественно искать в классе

$$C_{L,\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty) = \left\{ u \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty) \cap C^2(D), \quad Lu \in C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty) \right\}, \quad 0 < \delta < 1, \quad (4.6)$$

На основании теоремы 4.1 относительно соответствующей нормы это пространство банахово.

При этом условия (1.4) здесь заменяются на

$$\Gamma \in C^{1,\nu}; \quad a_1, a_2 \in C_{-1-\varepsilon}^{\mu}(\widehat{D}, \infty), a_0 \in C_{-2-\varepsilon}^{\mu}(\widehat{D}, \infty), \quad 0 < \mu < \nu < 1,$$

с некоторым малым $\varepsilon > 0$.

Теорема 4.3. Пусть составная область D бесконечна и в дополнение к (4.7) выполнены условия (3.2).

Тогда смешанно-контактная задача (1.7), (1.8) для уравнения (1.1) фредгольмова в классе (4.6) и ее индекс равен l .

Доказательство с некоторыми незначительными изменениями осуществляется по той же схеме, что и теорема 3.1. Одна из связных компонент $D^1, \dots, D^n$ составной области D (пусть для определенности D^n) бесконечна, а остальные компоненты D^s конечны. Как и в случае конечной области, исходя из определения (4.2), теорема 4.1 распространяется на составную область. Применяя к конечным областям $D^1, \dots, D^{n-1}$ теорему 3.2 и к бесконечной области D^n теорему 4.2, общее решение $u^0 \in C^{1,\mu}(\widehat{D}, \infty)$ уравнения (1.11) в составной области D представим в виде (3.8), (3.9), где m нужно заменить на $m+1$. Как и при доказательстве теоремы 3.1 подстановка представления (3.4), (3.8) в уравнение (1.1) дает соотношение (3.10).

Следует отметить, что аналогично случаю конечной области фигурирующий в этом соотношении оператор $L^0 T$ компактен в пространстве $C_{\delta-2}^{\mu}(\widehat{D}, \infty)$. В самом деле, его можно записать в виде

$$L^0 T \psi = a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_0 T,$$

где интегральные операторы T_j определяются правой частью (4.3). Как отмечено при доказательстве теоремы 4.1, операторы T_j ограничены $C_{\delta-2}^{\mu} \rightarrow C_{\delta-1}^{\mu}$. Поскольку вложения (4.1) компактны, эти операторы T_j компактны $C_{\delta-2}^{\mu} \rightarrow C_{\delta-1+\varepsilon}^{\mu}$. С учетом (4.7) отсюда следует компактность операторов $a_j T_j$ в пространстве $C_{\delta-2}^{\mu}$. Случай оператора $a_0 T$ рассматривается аналогично.

Дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 3.1 проходят без изменений и редуцируют задачу к эквивалентной системе операторных уравнений (3.20), (3.22) с той разницей, что здесь ξ принадлежит пространству $(\mathbb{R}^l)^{m+1}$, что дает значение l индекса этой системы.

Отметим в заключение случай, когда роль бесконечной области D играет дополнение к контуру Γ . В этом случае внешний контур Γ^+ отсутствует и Γ совпадает с Γ^0 . Соответственно имеем чисто контактную задачу с краевыми условиями (1.8), так что в (3.2) остается только первое условие. Это условие всегда выполнено для эллиптической системы с постоянными старшими коэффициентами. Однако, как показывает пример в конце разд. 3, это условие может быть нарушено для систем с кусочно-постоянными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными. // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. № 6. С. 153–154.
2. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
3. Солдатов А. П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2003. Т. 39. № 5. С. 674–686.
4. Товмасын Н. Е. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. С. 995–997.

5. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.
6. Солдатов А. П. Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 6. С. 734–745.
7. Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1951. Т. 29. № 3. С. 615–676.
8. Солдатов А. П., Митин С. П. Об одном классе сильно эллиптических систем // Дифференц. ур-ния. 1997. Т. 33. № 8. С. 1118–1122.
9. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.
10. Товмасын Н. Е. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 1966. Т. 1. С. 3–23.
11. Товмасын Н. Е. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 1966. Т. 2. С. 163–171.
12. Солдатов А. П. Задача Неймана для эллиптических систем на плоскости // Современная математика. Фундаментальные направления, 2013. Т. 48. С. 120–133.
13. Soldatov A. P. On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane, More progresses in analysis // Proceedings of the 5th International ISAAC Congress, Catania, Italy, 25–30 July 2005. Ed. H. Begehr and oth. World Scientific. 2009. V. 2. P. 1171–1184.
14. Douglis A. A. A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pure Appl. Math. 1953. V. 6. P. 259–289.
15. Soldatov A. P. Hyperanalytic functions // J. Math. Sciences. 2004. V. 17.
16. Gilbert R. P., Wendland W. L. Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1975. V. 73A. P. 317–371.
17. Hile G. N. Function theory for a class of elliptic systems in the plane // J. Diff. Eq. 1979. V. 32 (3). P. 369–387.
18. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63. С. 1–189.
19. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.: Наука, 1968.
20. Солдатов А. П. Интегральное представление функций, аналитических по Дуглису // Вестник СамГУ – Естественнонауч. серия. 2008. № 8/1 (67). С. 225–234.
21. Солдатов А. П. О фундаментальной матрице решений плоской анизотропной теории упругости // Дифференц. ур-ния. 2023. Т. 59. № 5. С. 635–641.
22. Отелбаев М., Солдатов А. П. Интегральные представления вектор-функций, основанные на параметризации эллиптических систем первого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 1. С. 90–99.
23. Солдатов А. П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР (сер. матем.). 1991. Т. 55. № 5. С. 1070–1100.
24. Пале Р. Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.