

УДК 519.642

НОВЫЕ КОМПЬЮТЕРНО-ЭКОНОМИЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА¹⁾

© 2024 г. Г. А. Михайлов^{1,2,*}, И. Н. Медведев^{1,2,**}

¹630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6, ИВМ и МГ СО РАН, Россия

²630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, НГУ, Россия

*e-mail: gam@sccc.ru

**e-mail: min@osmf.sccc.ru

Поступила в редакцию 28.04.2023 г.

Переработанный вариант 28.04.2023 г.

Принята к публикации 19.10.2023 г.

Разработана новая сеточная аппроксимация однородного изотропного случайного поля с заданной средней корреляционной длиной. Эта аппроксимация строится путем разбиения координатного пространства на ансамбль кубиков, размер которых воспроизводит среднюю корреляционную длину при независимом выборе значения поля из заданного одномерного распределения в каждом элементе разбиения. Сформулирован также недавно предложенный авторами метод корреляционно-рандомизированного моделирования переноса частиц через случайную среду. Проведено сравнение точности и трудоемкости соответствующих алгоритмов метода Монте-Карло для решения задач о переносе гамма-квантов через случайную среду типа мозаики Вороного. Для проверки гипотезы о существенном влиянии одномерного распределения и корреляционного радиуса оптической плотности среды на перенос излучения были также проведены дополнительные расчеты для случайного пуассоновского “поля воздушных шаров” в воде. Дано обобщение сеточной аппроксимации на неизотропные случайные поля. Библ. 19. Фиг. 3. Табл. 4.

Ключевые слова: метод максимального сечения, стохастическая среда, сеточная аппроксимация, корреляционно-рандомизированные алгоритмы, корреляционная длина, перенос гамма-квантов, трудоемкость алгоритма.

DOI: 10.31857/S0044466924020118, EDN: YJCQUB

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Рассматривается процесс переноса частиц (квантов излучения), математическая модель которого определяется кинетическим уравнением типа (см. [1, 2])

$$(\omega, \text{grad}\Phi) + \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}')w(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}')d\mathbf{v}' + \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r} \in R^3$, $\mathbf{v} = v\omega$, ω — единичный вектор направления скорости, $v = |\mathbf{v}|$; $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — плотность потока частиц-квантов излучения; $\Sigma(\mathbf{r}, v)$ — полное макроскопическое сечение ослабления; $\Sigma_s(\mathbf{r}, v)$ — макроскопическое сечение рассеяния; $\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — плотность распределения частиц в источнике; $w(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{r})$ — индикатриса рассеяния кванта в точке $(\mathbf{r}, \mathbf{v}')$. Для решения задач переноса численно-статистически моделируется [3],[2] цепь Маркова столкновений частицы с элементами вещества, свободный пробег l между которыми распределен с плотностью

$$f(l) = \Sigma(\mathbf{r}(l), v)\exp(-\tau(l)),$$

где $\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}' + l\omega$, а $\tau(l) = \int_0^l \Sigma(\mathbf{r}(t), v)dt$ (см. [3],[2]). Если $\Sigma \equiv \text{const}$, то пробег можно моделировать по формуле $l = (-\ln \alpha) / \Sigma$, где α — случайное число, равномерно распределенное в интервале $(0, 1)$. Если

¹⁾ Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН № 0251-2022-0002.

же плотность среды существенно меняется, то может быть полезным метод максимального сечения (выравнивания, дельта-рассеяния) (см. [4]–[6]). Этот метод основан на том, что в уравнении (1) $\Sigma(\mathbf{r}, v)$ заменяется на $\Sigma_{\max}(v) \geq \Sigma(\mathbf{r}, v)$ и $\Sigma_s(v', \mathbf{r})w(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{r})$ на

$$\Sigma_s(\mathbf{r}, v')w(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{r}) + [\Sigma_{\max}(v') - \Sigma(\mathbf{r}, v')] \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}').$$

В соответствующей стохастической модели длины пробегов моделируются для коэффициента ослабления $\Sigma_{\max}(v)$, в точке столкновения \mathbf{r} с вероятностью $(\Sigma_{\max}(v) - \Sigma(\mathbf{r}, v)) / \Sigma_{\max}(v)$ скорость не изменяется, а с вероятностью

$$\Sigma(\mathbf{r}, v) / \Sigma_{\max}(v) \quad (2)$$

реализуется физическое столкновение с условными вероятностями Σ_s / Σ , $(\Sigma - \Sigma_s) / \Sigma$ рассеяния и поглощения. Адекватность метода следует также из известного сохранения свойства пуассоновости при случайном прореживании пуассоновского потока столкновений [6].

1.2. Метод максимального сечения часто применяется для решения стохастических задач теории переноса со случайным полем плотности среды $\rho(\mathbf{r})$, которое для простоты изложения в основном будем предполагать изотропным с нормированной корреляционной функцией $k(t)$ и корреляционным радиусом

$$L = \int_0^{\infty} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'(l)) dl = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} K(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \omega l) d\omega dl, \quad (3)$$

где $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'(l))$ — коэффициент корреляции между $\rho(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r}'(l))$ для $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(l)| = l$, ω — изотропный единичный вектор.

При этом

$$\Sigma(\mathbf{r}, v) = \rho(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}, v) \text{ и } \Sigma_s(\mathbf{r}, v) = \rho(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r}, v),$$

где $\sigma(\mathbf{r}, v)$, $\sigma_s(\mathbf{r}, v)$ — эффективные микроскопические сечения ослабления и рассеяния, которым соответствует нормированная индикатриса рассеяния $w(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{r})$. Для решения стохастических задач теории переноса эффективен “метод двойной рандомизации” [7], в котором для каждой реализации среды моделируется одна или несколько (для уменьшения трудоемкости) траекторий частиц и на этой основе строятся несмещенные оценки линейных функционалов, например осредненной по реализациям среды вероятности прохождения. Трудоемкость (сложность) такого алгоритма может быть очень большой и даже неограниченной при $L \rightarrow 0$, например, для “мозаичных” моделей $\rho(\mathbf{r})$, пуассоновских, Вороного и т.п. (см., например, [8]–[10]). В связи с этим в работе [11] был сформулирован несложный корреляционно рандомизированный алгоритм (КР-алгоритм) для оценки влияния стохастичности поля ρ на перенос частиц, эвристически основанный на том факте, что вероятность прохождения в значительной степени определяются корреляционной длиной L и одномерным распределением поля ρ [8].

1.3. Формулировка КР-алгоритма. Сформулируем теперь КР-алгоритм, который определяется пунктами $\mathcal{CR}1$, $\mathcal{CR}2$.

$\mathcal{CR}1$) В процессе переноса пробег из \mathbf{r}' в \mathbf{r} моделируется по формуле $l = -\ln \alpha / \Sigma_{\max}(v)$.

$\mathcal{CR}2$) Если $l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < L$, то в алгоритме максимального сечения фиксируется $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}')$, иначе значение $\rho(\mathbf{r})$ выбирается случайно из одномерного распределения поля ρ .

Таким образом, КР-алгоритм строится путем рандомизации алгоритма максимального сечения с учетом значения L . Эвристически ясно, что этот алгоритм в случае анизотропного рассеяния в значительной степени соответствует корреляционной функции, близкой к “ступеньке” $k_0(t) = 1$ при $0 \leq t \leq L$. Как показывают приведенные выше эвристические соображения, а также модельные исследования и численные эксперименты, такой алгоритм дает удовлетворительные результаты для анизотропного рассеяния при достаточно малых значениях L ($L < 0.4 / \Sigma_{\max}$), когда стандартное моделирование слишком трудоемко. При этом значение L в алгоритме можно корректировать (особенно в одномерном случае) на основе упрощенных тестовых задач [12]. Ясно, что трудоемкость КР-алгоритма ограничена при $L \rightarrow 0$ и его можно использовать для оценки соответствующей скорости сходимости в стохастических задачах переноса даже в неограниченных областях. Отметим, что в случае неанизотропного однородного поля ρ

можно также использовать КР-алгоритм, заменив L на $L(\omega), \omega = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. В заключение разд. 2 заметим, что КР-алгоритм при $L = 0$ реализует моделирование траекторий в осредненной среде, т.е. для $\rho(\mathbf{r}) \equiv E\rho$. Это получается непосредственно из (2) по формуле полной вероятности.

1.4. Усовершенствованный КР-алгоритм (ФКРА). Далее предполагается, что нормированная корреляционная функция $k(t)$ поля $\rho(\mathbf{r})$ неотрицательна: $k(t) \geq 0$. Можно полагать, что КР-алгоритм реализует выполнение равенства $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}')$ в алгоритме выравнивания с вероятностью $k_0(l) = 1$ при $l \leq L$, где $l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Это дает основание для рассмотрения функционального корреляционно-рандомизированного алгоритма (ФКРА), который по аналогии с КР-алгоритмом (КРА) строится следующим образом:

FCR1) Пробег l из \mathbf{r}' в \mathbf{r} моделируется по формуле $l = -\ln \alpha / \Sigma_{\max}$.

FCR2) Реализуется случайное число α_1 ; если $\alpha_1 < k(l)$, то $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}')$, иначе $\rho(\mathbf{r})$ выбирается из одномерного распределения поля ρ .

Однако для построения ФКРА требуется оценка корреляционной функции $k(t)$ в целом, а для КРА достаточно каким-либо образом определить лишь значение L , т.е. корреляционный масштаб среды.

Для ФКРА выполняется соотношение

$$E[\rho(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}(l))|l] = k(l)E\rho^2 + [1 - k(l)](E\rho)^2 = k(l) \cdot D\rho.$$

Следовательно, коэффициент корреляции между \mathbf{r}' и $\mathbf{r}(l)$ при фиксированном l равен $k(l)$. По-видимому, это означает, что ФКРА обеспечивает хорошую точность оценки среднего числа столкновений в заданной области. Впрочем, это предположение требует дополнительного исследования.

В заключение этого раздела отметим, что корреляционно-рандомизированные алгоритмы, в отличие от алгоритмов двойной рандомизации, дают возможность исследовать прохождение частиц через бесконечно протяженный слой вещества и тем самым погрешность оценок, возникающую при замене такого слоя на “брусек” (см. далее разд. 4).

2. НОВАЯ КОМПЬЮТЕРНО-ЭКОНОМИЧНАЯ СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ $\rho_h(\mathbf{r})$ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ $\rho(\mathbf{r})$

2.1. Основанный на рандомизации алгоритма максимального сечения КР-алгоритм реализует вычислительную аппроксимацию процесса переноса. Он весьма экономичен, так как не требует реализации поля $\rho(\mathbf{r})$ в целом и двойной рандомизации (см. разд. 1). Однако этот алгоритм в основном эффективен для существенно анизотропного рассеяния при условии $L < 0.4 / \Sigma_{\max}$ [12]. Недостатком КРА является также невозможность оценки физически значимой величины дисперсии $D(\zeta | \rho)$ за исключением бернуллиевой оценки с малым параметром $p = E\zeta$ (см. далее п. св. 5.3).

Эти соображения определили мотивацию разработки компьютерно-экономичной сеточной аппроксимации поля плотности $\rho_h(\mathbf{r})$, которая фактически представляет геометрически детерминированную стохастическую мозаику, аналогичную полю Вороного и в определенном смысле аппроксимирующую его. Мозаика Вороного строится на основе базового пуассоновского точечного потока $\{\mathbf{r}_i\}, i = 0, 1, 2, 3, \dots$, интенсивности λ_p , определяющего разбиение пространства R^3 на ячейки $\{S\}$, каждая из которых является множеством точек, наиболее близких к одной из точек потока. Геометрические свойства такого разбиения детально изучены, например, в [9]. Элементы разбиения являются выпуклыми многогранниками, и поэтому величина (3) вследствие однородности поля ρ преобразуется к виду

$$L = \frac{1}{4\pi} \int l_S(\mathbf{r}, \omega) d\omega \approx 0.459\lambda_p^{-1/3}, \tag{4}$$

где $\forall \mathbf{r} \in S, l_S(\mathbf{r}, \omega)$ — расстояние от точки \mathbf{r} до границы элемента S вдоль направления ω .

Отметим, что в работе [13] было показано и в дальнейшем дополнительно проверено расчетами, что нормированная корреляционная функция $k_L(t)$ поля Вороного хорошо аппроксимируется экспонентой

$$k_L(t) \approx e^{-t/L}. \tag{5}$$

Формула (5) позволяет строить приближенный ФКР-алгоритм, уточняющий КРА (см. далее п. св. 5.2)

2.2. Новая сеточная аппроксимация (сеточная мозаика) $\rho_h(\mathbf{r})$ строится на основе разбиения пространства R^3 прямоугольной сеткой, т.е. на кубики $\{S_h\}$ со стороной h . Для каждого элемента S_h

независимо реализуется случайное значение ρ соответственно заданному одномерному распределению поля $\rho(\mathbf{r})$. Эффективное значение $L = l_h$ поля $\rho_h(\mathbf{r})$ строится по аналогии с (4) путем равномерного осреднения корреляционной длины в этом поле:

$$l_h = \frac{h^{-3}}{4\pi} \int_{S_h} \int l_{S_h}(\mathbf{r}, \omega) d\mathbf{r} d\omega. \quad (6)$$

Ясно, что выполняются равенства

$$L = l_h = h l_1, \quad h = L / l_1, \quad (7)$$

причем достаточно точные вычисления дали значение

$$l_1 = 0.44831$$

с погрешностью, не превышающей 0.00001.

Трудоёмкость (сложность) мозаики $\rho_h(\mathbf{r})$ существенно меньше трудоёмкости мозаики Вороного, так как для определения значения $\rho_h(\mathbf{r})$ не требуется перебора значений ρ , определенных на начальном этапе двойной рандомизации для всех элементов сетки. Номер элемента прямоугольной сетки, в которой находится точка $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ определяется очевидным образом с помощью стандартной встроеной функции вычисления целой части (например, $\text{floor}(x_i / h)$ в C++).

3. МИНИМИЗАЦИЯ ТРУДОЕМКОСТИ АЛГОРИТМА И ОЦЕНКА ПРАТИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОГРЕШНОСТИ

Известно (см., например, [2]), что трудоёмкость алгоритма метода Монте-Карло определяется величиной $S(\zeta) = T_\zeta D\zeta$, где T_ζ — среднее время моделирования на ЭВМ для получения одного выборочного значения ζ . Представленные ниже расчеты для стохастической среды с мозаикой Вороного и ее сеточной аппроксимации были проведены простым вариантом “метода двойной рандомизации” (см. п. св. 1.2), в котором для каждой реализации плотности $\rho(\mathbf{r})$ моделировалась одна траектория частицы. Если для каждой реализации плотности моделировать m условно-независимых траекторий частиц, то согласно “формуле полной дисперсии” (см., например, [2]), величину $D\zeta_m$ можно представить в виде

$$D = D\zeta_m = D_0 + \frac{D_1}{m}, \quad (8)$$

$$D_0 = DE(\zeta | \rho), \quad D_1 = ED(\zeta | \rho),$$

где D_0 — физически значимая дисперсия оценки по флуктуациям поля ρ , а D_1 — среднее значение условной дисперсии по траекториям Ω для фиксированной реализации поля ρ . Отметим, что здесь D — “элементарная” дисперсия (на одну траекторию). Выполняется очевидное соотношение для среднего времени реализации оценки ζ_m

$$T_{\zeta_m} = T_0 + m T_1, \quad (9)$$

где T_0 — среднее время, затрачиваемое на реализацию случайного поля, а T_1 — среднее время, затрачиваемое на моделирование одной случайной траектории ζ . Величина трудоёмкости $S(\zeta_m)$ в этом случае, как функция от m , имеет минимум в точке (см., например [2])

$$m_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{T_0 D_1}{T_1 D_0}} \quad \text{и} \quad S(\zeta_{m_{\text{opt}}}) = (\sqrt{T_0 D_0} + \sqrt{T_1 D_1})^2. \quad (10)$$

Если ζ — “бернулльева” оценка для малой вероятности $p = E\zeta$, то

$$D_1 = ED(\zeta | \rho) = Ep(\rho)[1 - p(\rho)] \approx p = \\ = E\zeta \text{ и } D_0 \approx D\zeta_m - E\zeta / m.$$

Значение m_{opt} можно оценить, сделав два предварительных расчета для $m = 1$ и $m > 1$, подставив полученные значения для $D\zeta_1, D\zeta_m$ в (8) и найдя решение системы из 2-х линейных уравнений для D_0, D_1 . В этой системе можно использовать в качестве D дисперсию среднего значения ζ_m , так как в (9) фигурирует отношение D_1 / D_0 . Аналогичным способом определяются значения T_0, T_1 из (9) для полученных из расчетов значений T_{ζ_1}, T_{ζ_k} . Отметим еще раз, что D_0 — физически значимая дисперсия при условии, что D элементарна.

4. ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА О ПРОХОЖДЕНИИ ГАММА-КВАНТОВ СКВОЗЬ СТОХАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

4.1. В качестве исходной стохастической среды рассмотрим мозаику Вороного в “бруске”

$$\mathbf{V}_H = [0, X_{max}] \times [0, Y_{max}] \times [0, H] \in R^3$$

и будем полагать, что элементы такого разбиения (выпуклые многогранники) случайно заполнены водой с заданной вероятностью ρ или воздухом с заданной вероятностью $1 - \rho$. Известно (см., например, [8]), что при моделировании пуассоновского потока точек в ограниченной области случайное поле типа мозаики Вороного не является однородным и изотропным, поэтому пуассоновский поток следует моделировать в области большего размера, чтобы мозаичное поле было близко к однородному и изотропному. На основе предварительных расчетов [8] было решено использовать брусок объема:

$$\mathbf{V}_{H,2L} = [-2L, X_{max} + 2L] \times [-2L, Y_{max} + 2L] \times [-2L, H + 2L].$$

Использование “бруска” связано с невозможностью реализации поля $\rho(r)$ в неограниченной области. Отметим, что сравнение вероятностей прохождения квантов через слой и “брусок” было реализовано в [12] с помощью КР-алгоритма.

Моделирование мозаичного поля Вороного в $\mathbf{V}_{H,2L}$ строилось в два этапа. Сначала реализовывалось пуассоновское число η случайных точек $\{\mathbf{r}_i\}$ согласно параметру $\lambda_p (X_{max} + 4L)(Y_{max} + 4L)(H + 4L)$, где λ_p — интенсивность пуассоновского точечного потока. Далее координаты точек $\{\mathbf{r}_i\}, i = 1, 2, \dots, \eta$, выбирались независимо и равномерно в области $\mathbf{V}_{H,2L}$, а случайный выбор вещества (вода или воздух) в каждой ячейке S_i , построенной около точки \mathbf{r}_i , независимо разыгрывался с вероятностью ρ и $1 - \rho$ соответственно. Здесь стоит отметить, что вероятность ρ определяет среднюю “геометрическую” плотность смеси в области $\mathbf{V}_{H,2L}$.

Пусть в центре основания бруска \mathbf{V}_H в точке $(50, 50, 0)$ расположен точечный источник, испускающий гамма-кванты в направлении ω_0 , перпендикулярном плоскости XY , с начальной энергией 1 Мэв. Полагаем, что вне бруска \mathbf{V}_H находится абсолютное “черное” подпространство, поглощающее выходящее гамма-излучение. Определим в качестве основных функционалов -

- вероятность $P(\text{up})$ прохождения гамма-квантов через верхнюю площадку бруска \mathbf{V}_{100} ($z = H = 100$ см);
- вероятность $P(\text{down})$ вылета гамма-квантов через нижнюю площадку бруска \mathbf{V}_{100} ($z = 0$ см).

Дополнительно в проведенных расчетах подсчитывались средние значения энергии $E(\text{up}_{Det}), E(\text{down}_{Det})$ частиц регистрируемых в плоских детекторах, расположенных на верхней ($z = H = 100$ см) и нижней ($z = 0$ см) площадках бруска \mathbf{V}_H в квадратах $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$.

4.2. Остановимся теперь на использовании физической модели переноса гамма-квантов с учетом комптоновского рассеяния и поглощения в результате фотоэффекта в среде M (здесь вода или воздух). Микроскопическое сечение комптоновского рассеяния определяются выражением [14], [15]

$$\tilde{\Sigma}(\tilde{E}) = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1 + \tilde{E}}{\tilde{E}^3} \left[\frac{2\tilde{E}(1 + \tilde{E})}{1 + 2\tilde{E}} - \ln(1 + 2\tilde{E}) \right] + \frac{1}{2\tilde{E}} \ln(1 + 2\tilde{E}) - \frac{1 + 3\tilde{E}}{(1 + 2\tilde{E})^2} \right\},$$

где r_e — классический радиус электрона. Здесь \tilde{E} — безразмерная энергия гамма-кванта, т.е. энергия в электрон-вольтах, поделенная на $m_e c^2$, где m_e — масса покоя электрона, а c^2 — скорость света. Макроскопическое сечение комптоновского рассеяния задается соотношением

$$\Sigma_k(E) = \rho_m N_A \frac{Z}{A} \tilde{\Sigma}(\tilde{E}), \quad (11)$$

где ρ_m — плотность среды, N_A — число Авогадро, Z и A — число электронов и молекулярный вес среды. Значения макроскопического сечения поглощения $\sigma_c(E)$ в процессе расчета можно вычислять на основе табличных данных (см., например [14]) с использованием линейной интерполяции. Отметим, что введение в число параметров процесса переноса энергии E формально меняет уравнение 1.

Траектория гамма-кванта реализуется по следующей схеме.

- 0) Выбор начальной точки соответственно плотности распределения источника $\pi(x)$.
- 1) Моделирование случайной длины свободного пробега l согласно по формуле $l = (\ln \alpha) / \Sigma(E)$.
- 2) Проверка вылета частицы из среды M .
- 3) Пересчет координат радиус-вектора \mathbf{r} нового положения частицы $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \omega l$.
- 4) Вычисление нового значения энергии E' . Известно [15], что если гамма-квант с безразмерной энергией E рассеивается в результате комптон-эффекта, то индикатриса рассеяния $g(E, E')$ пропорциональна функции

$$f(E, E') = \frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} + \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E'} \right) \left(2 + \frac{1}{E} - \frac{1}{E'} \right),$$

$$E(1 + 2E)^{-1} < E' < E.$$

Это выражение непосредственно следует из формулы Клейна-Нишины для дифференциального сечения комптоновского рассеяния. Здесь и далее символом α мы будем обозначать случайное число, равномерно распределенное в интервале $(0, 1)$. Случайную величину E' здесь можно моделировать с помощью простого варианта метода исключения [15]:

а) реализуем $E_0 = E(1 + 2E\alpha_1)(1 + 2E)^{-1}$;

б) если $\alpha_2[1 + 2E + (1 + 2E)^{-1}] > f(E_0, E)$, то снова выполняется п. а) и т.д., иначе $E' = E_0$.

Этот алгоритм вытекает из неравенства $f(E, E') \leq 1 + 2E + (1 + 2E)^{-1}$.

5) Выбор случайного типа столкновения: комптоновское рассеяние или поглощение с вероятностями $q_k(E') = \Sigma_k(E') / \Sigma(E')$ и $\Sigma_c(E') / \Sigma(E')$ соответственно.

б) В случае комптоновского рассеяния частицы — пересчет величины косинуса угла рассеяния между старым $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ и новым $\omega' = (\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ направлениями пробега [16], [15]

$$\mu(\omega, \omega') = 1 - \frac{1}{E'} + \frac{1}{E}.$$

Далее реализуется моделирование азимутального угла рассеяния θ по формуле $\theta = 2\pi\alpha$ и пересчет координат нового вектора направления ω' по стандартным формулам (см., например, [2], [15]).

7) Переход на п. 1 для дальнейшего моделирования.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧИ

5.1. Для заданных значений

$$X_{\max} = Y_{\max} = H = 100 \text{ см}, \rho = 0.9 \text{ и } \lambda_p = 0.00005, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.015$$

были реализованы три схемы моделирования переноса гамма излучения через брусок \mathbf{V}_{100} . Первое и наиболее трудоемкое прямое моделирование (Direct) случайной траектории гамма-кванта в рассматриваемой стохастически неоднородной среде для построения “бернулиевой” несмещенной оценки осуществлялась в два этапа. Сначала строилась реализация поля Вороного по изложенному выше рандомизированному алгоритму в области $\mathbf{V}_{H, 2L}$, а потом, для такой реализации поля моделировалась случайная траектория гамма-кванта по изложенной выше общей схеме моделирования (см. п. св. 4.2) с сечениями

из [14]. Поскольку в задачах переноса гамма-излучения сечения среды и примесей зависят от энергии E , то здесь и далее мы полагаем $\Sigma = \Sigma(E)$. В рассматриваемой стохастической задаче переноса гамма-квантов со случайным полем плотности среды для моделирования случайной длины свободного пробега использовался метод максимального сечения (см.п. св. 1.2), а после очередного случайного пробега проводилась проверка, в какую из ячеек попала частица. Именно на такую проверку и реализацию поля Вороного тратилось существенное время прямого моделирования для каждой траектории уже при $\lambda_p \geq 0.001$ (см. табл. 1).

Во второй схеме была реализована новая сеточная аппроксимация (сеточная мозаика) области (см.п. 2.2). Исходный “брусоч” V_H был разбит на кубики S_h так, что количество кубиков для каждой реализации составляло (см. соотношение (7))

$$\frac{X_{\max} Y_{\max} H}{h^3} = \frac{X_{\max} Y_{\max} H l_1^3}{L^3} = 0.93 \lambda_p X_{\max} Y_{\max} H,$$

а случайный выбор типа вещества в каждом кубике S_h независимо “разыгрывался” с вероятностью p (вода) и $1 - p$ (воздух) соответственно. Пусть N_V это среднее число центров ячеек мозаики Вороного внутри V_H . В данном случае $X_{\max} = Y_{\max} = H = 100$ см и имеет место соответствие, представленное в табл. 1

Таблица 1. Значения корреляционного радиуса L , среднего числа центров ячеек N_V мозаики Вороного и качества кубиков сеточной мозаики $0.93 \lambda_p X_{\max} Y_{\max} H_{\max}$ в зависимости от λ_p .

λ_p	0.00005	0.0001	0.001	0.01	0.015
L	12.46	9.89	4.59	2.13	1.86
N_V	168.19	271.79	1658.12	12780.6	18605.7
$0.93 \lambda_p X_{\max} Y_{\max} H_{\max}$	46.5	93	930	9300	13950

В третьей схеме моделирования перенос гамма-квантов в среде определялся КР-алгоритмом (см. п. 1.3), в котором значение L определялось выражением (4).

5.2. Введем следующие обозначения для относительных погрешностей $\delta_{\text{Grid}} G(\cdot)$, $\delta_{\text{CR}} G(\cdot)$ оценок функционала $G(\cdot)$ при использовании сеточной аппроксимации и КР-алгоритма соответственно:

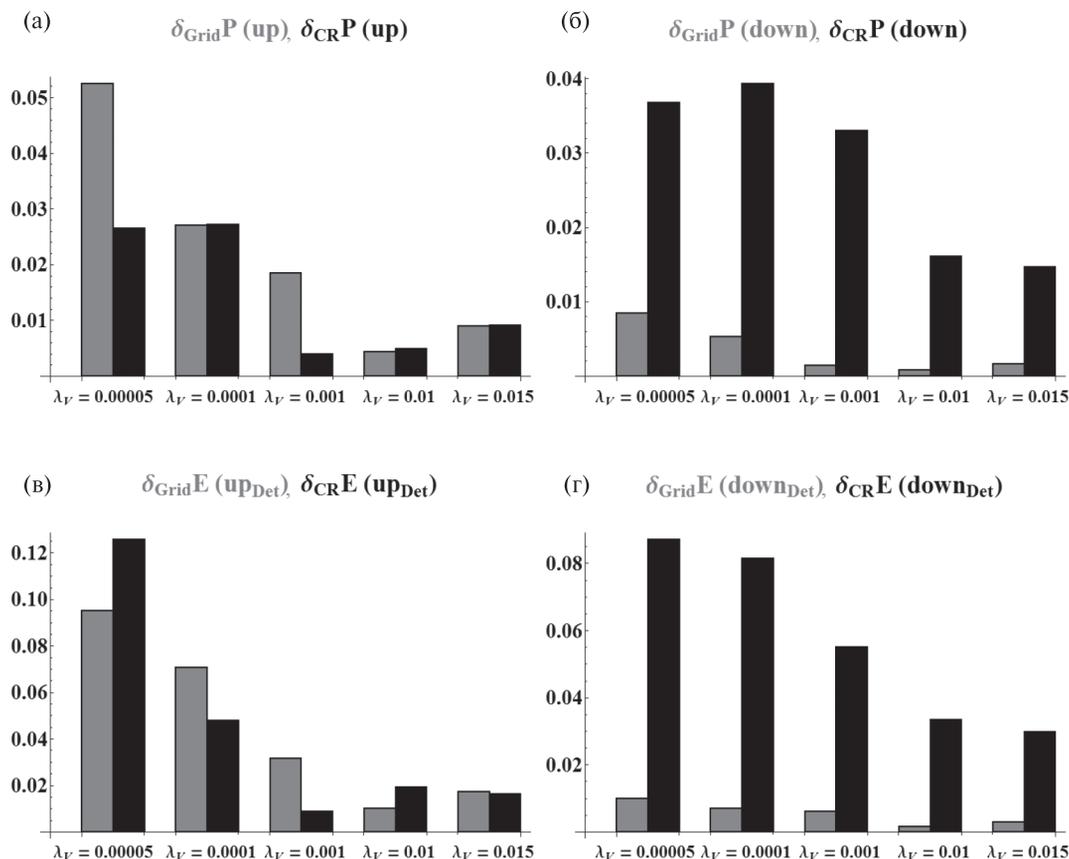
$$\delta_{\text{Grid}} G(\cdot) = \frac{|G_{\text{Direct}}(\cdot) - G_{\text{Grid}}(\cdot)|}{G_{\text{Direct}}(\cdot)},$$

$$\delta_{\text{CR}} G(\cdot) = \frac{|G_{\text{Direct}}(\cdot) - G_{\text{CR}}(\cdot)|}{G_{\text{Direct}}(\cdot)},$$

относительно $G_{\text{Direct}}(\cdot)$ — “точной” оценки, полученной для стохастической среды с мозаикой Вороного. На фиг. 1 представлены графически значения относительных погрешностей функционалов

$$P(\text{up}), P(\text{down}), E(\text{up}_{\text{Det}}), E(\text{down}_{\text{Det}}) \tag{12}$$

для $\lambda_p = 0.00005, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.015$ и начальной энергии 1 Мэв. Для представленных оценок моделировалось 10^8 траекторий гамма-квантов, причем относительные среднеквадратические статистические погрешности определенных функционалов (12), полученные с использованием алгоритмов Direct, Grid, CR составили менее 0.005, что дает крайне незначительную погрешность в масштабе столбцов фиг. 1. Серым цветом отмечены относительные погрешности функционалов, полученные с использованием сеточной мозаики (Grid), а черным — КР-алгоритмом (CR). Как видно из фиг. 1, при использовании сеточной аппроксимации (Grid) погрешности оценок функционалов $P(\text{down}), E(\text{down}_{\text{Det}})$ меньше 1% и в 4–10 раз меньше соответствующих значений погрешностей функционалов, полученных при использовании КР-алгоритма (CR). При этом значения погрешностей оценок функционалов $P(\text{up}), E(\text{up}_{\text{Det}})$, полученных при использовании сеточной аппроксимации и КР-алгоритма несущественно отличаются друг от друга и, следовательно, КР-алгоритм существенно выигрывает по трудоемкости согласно табл. 3 (Точечный источник с начальной энергией 1 Мэв).

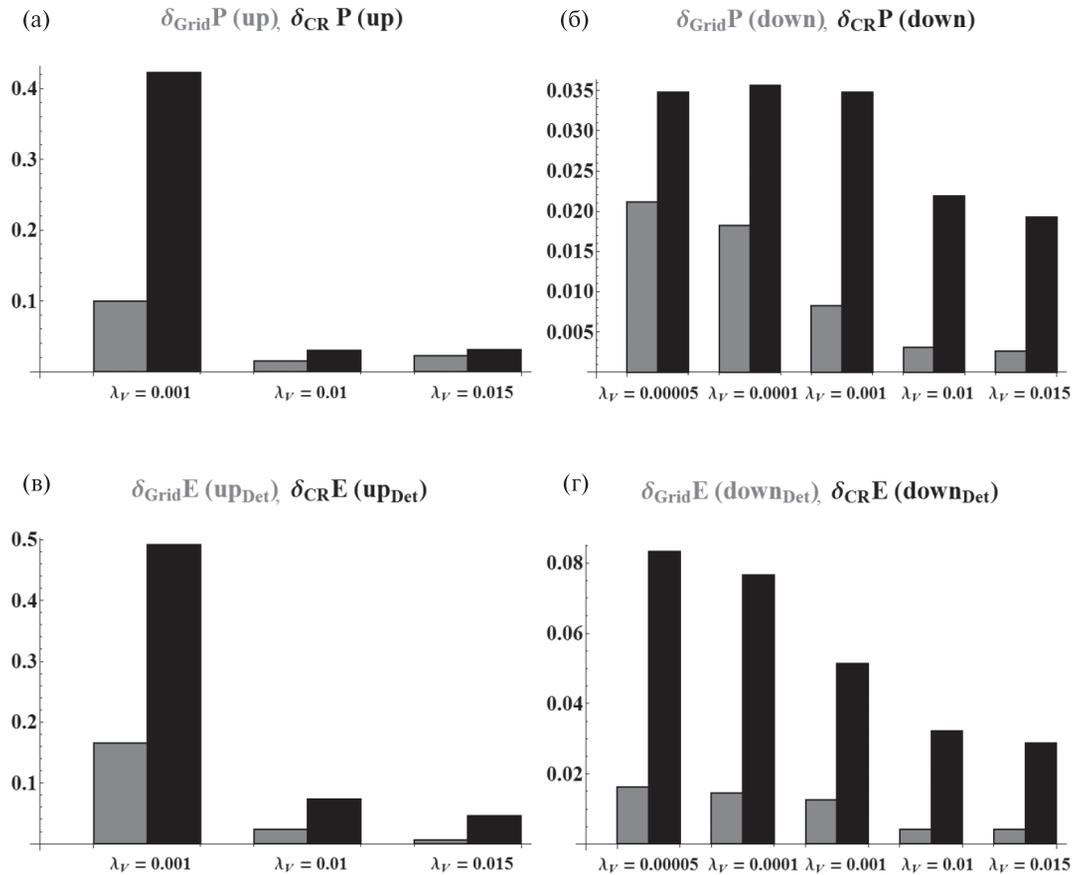


Фиг 1. Значения относительных погрешностей функционалов $P(\text{up})$, $P(\text{down})$, $E(\text{up}_{\text{Det}})$, $E(\text{down}_{\text{Det}})$, полученные с использованием приближенных алгоритмов (Grid, CR). Точечный источник с начальной энергией 1 МэВ.

Таблица 2. Значения относительных погрешностей оценок функционалов $P(\text{up})$, $P(\text{down})$, полученные с использованием приближенных алгоритмов (Grid, CR) при $\lambda_p = 0.00005, 0.00001, 0.001, 0.01, 0.015$. Точечный источник с начальной энергией 0.1 МэВ.

λ_p	$\delta_{\text{Grid}}P(\text{up})$	$\delta_{\text{CR}}P(\text{up})$	$\delta_{\text{FCR}}P(\text{up})$	$\delta_{\text{Grid}}P(\text{down})$	$\delta_{\text{CR}}P(\text{down})$	$\delta_{\text{FCR}}P(\text{down})$
0.00005	0.509	5.63	0.078	0.023	0.021	0.078
0.0001	0.285	5.75	0.025	0.018	0.035	0.041
0.001	0.099	0.423	0.078	0.008	0.008	0.008
0.01	0.015	0.024	0.030	0.003	0.021	0.019
0.015	0.023	0.031	0.005	0.002	0.019	0.069

Были проведены также аналогичные расчеты для источника с начальной энергией 0.1 МэВ. Полученные результаты представлены на фиг. 2 и в табл. 2. Как видно из фиг. 2, при использовании сеточной аппроксимации (Grid) полученные значения относительных погрешностей оценок функционалов $P(\text{up})$, $P(\text{down})$, $E(\text{up}_{\text{Det}})$, $E(\text{down}_{\text{Det}})$ существенно меньше соответствующих значений относительных погрешностей функционалов, полученных при использовании КР-алгоритма (CR). Более того, при $\lambda_p = 0.00005, 0.0001$ значения $\delta_{\text{Grid}}P(\text{up})$ оказались в 11–20 раз меньше соответствующих значений $\delta_{\text{CR}}P(\text{up})$ (выделенные жирным шрифтом в табл. 2). Как и в модельной задаче из [12] это связано с существенным нарушением условия $L < 0.4 / \Sigma_{\text{max}}(E)$ применимости КР-алгоритма (КРА) в данном варианте расчетов. Поэтому для приближенной оценки функционалов $P(\text{up})$, $P(\text{down})$ здесь был также реализован ФКР алгоритм (FCR) из п. св. 1.2 с корреляционной функцией 5. Как видно из табл. 2, при использовании ФКР алгоритма полученные значения относительных погрешностей оценок функционалов $P(\text{up})$, $P(\text{down})$ в целом существенно меньше соответствующих значений $\delta_{\text{CR}}P(\text{up})$, $\delta_{\text{CR}}P(\text{down})$



Фиг. 2. Значения относительных погрешностей оценок функционалов $P(\text{up})$, $P(\text{down})$, $E(\text{up}_{det})$, $E(\text{down}_{Det})$, полученные с использованием приближенных алгоритмов (Grid, CR). Точечный источник с начальной энергией 0.1 МэВ.

Таблица 3. Время (мин), затраченное на моделирование 10^8 траекторий гамма-квантов с использованием алгоритмов Direct, Grid, CR.

Точечный источник с начальной энергией 0.1 МэВ					
λ_p	0.00005	0.0001	0.001	0.01	0.015
Direct	30.1	45.4	255.6	1935.4	2791.6
Grid	6.4	7.2	28.9	265.3	385.3
CR	3.4	3.4	3.5	3.4	3.4
Точечный источник с начальной энергией 1 МэВ					
λ_p	0.00005	0.0001	0.001	0.01	0.015
Direct	40.1	60.4	334.5	2502.3	3590.2
Grid	9.1	9.8	33.5	278.3	403.5
CR	5.8	5.6	5.7	5.8	5.9

и сопоставимы со значениями $\delta_{Grid}P(\text{up}), \delta_{Grid}P(\text{down})$. Это связано с использованием в ФКР корреляционной функции, которая не требуется для построения сеточной аппроксимации. Интересно отметить, что в варианте с $E_0 = 1$ МэВ для функционалов $P(\cdot)$ при переходе от КРА к ФКРА погрешность практически не изменилась, так как здесь условие применимости КРА в основном выполнено.

Как было замечено ранее, при получении “точной” оценки для исходной стохастической среды с мозаикой Вороного существенное время моделирования траектории занимает реализация такого поля и проверка, в какую из ячеек и с какой примесью попала частица. Время реализации сеточной мозаики и определение номера прямоугольной сетки существенно меньше, а в КР-алгоритме приближенное случайное поле реализуется в каждой точке столкновения из одномерного распределения ρ . Это наглядно продемонстрировано в табл. 1, где представлено время (в минутах), затраченное на моделирование 10^8 траекторий гамма-квантов с использованием алгоритмов Direct, Grid, CR для оценки значений относительных погрешностей погрешностей функционалов $P(\text{up}), P(\text{down}), E(\text{up}_{\text{Det}}), E(\text{down}_{\text{Det}})$ (см. фиг. 1). Например, при $\lambda = 0.015 (L = 1.86)$ и мощности источника 0.1 Мэв, значения $\delta_{\text{Grid}} P(\text{up}), \delta_{\text{CR}} P(\text{up})$ практически совпадают, а трудоемкость алгоритма Direct (время расчета) в 7.2 раза больше соответствующего значения трудоемкости алгоритма Grid, которое, в свою очередь, в 113 раз больше значения трудоемкости алгоритма CR.

Замечание. В проведенных расчетах реализация сеточной мозаики была проведена согласно п. 2.2. При такой реализации для достаточно мелкой сетки существенное время моделирования тратится на реализацию независимых случайных начальных значений ρ во всех кубиках S_h . В таком случае можно значительно уменьшить время моделирования путем реализации случайных значений ρ лишь в тех кубиках, которые “посещает” моделируемая частица. Дополнительные расчеты показали, что время расчетов в алгоритме Grid при этом всего на 5–10% больше соответствующих значений времени для алгоритма CR (см. табл. 1) и практически ограничено при уменьшении корреляционного масштаба среды.

5.3. Рассмотрим теперь в качестве примера оптимизацию трудоемкости приближенной оценки $P_{\text{Grid}}(\text{down})$ при использовании сеточной аппроксимации для источника с начальной энергией 0.1 Мэв. Для $\lambda_p = 0.001$ были проведены предварительные расчеты путем моделирования 10^7 траекторий для $m = 1, 10$ и получены из (8) и (9) следующие оценки:

$$D_0 \approx 0.0052, \quad D_1 \approx 0.2297, \quad T_0 \approx 17.5156, \\ T_1 \approx 150.91, \quad m_{\text{opt}} = 17.515.$$

Поскольку полученное значение m_{opt} не является целым, то целесообразно воспользоваться несмещенной модификацией оценки ζ_m с ветвлением траектории, в которой после реализации поля моделируется $m = 17$ или $m = 18$ траекторий с вероятностями 1 – 0.515 и 0.515 соответственно. Именно такое распределение числа траекторий гарантирует минимальную среднеквадратичную погрешность в классе произвольных целочисленных распределений с фиксированным средним значением 17.515 (см. [17]). В разд. 3 была указана также приближенная: оценка $D_1 \approx p = P_{\text{Grid}}(\text{down}) = E\zeta_1 = 0.234996$; соответствующее приближенное оптимальное значение m_{opt} здесь составило 18.67.

Таблица 4. Значение величины трудоемкости $S(\zeta_m)$ для $m = 1, 10, 17.515, 50, 100$ ($m_{\text{opt}} = 17.515$) для оценки $P_{\text{Grid}}(\text{down})$. Точечный источник с начальной энергией 0.1 Мэв.

m	1	10	17.515	50	100
$D\zeta_m$	$2.349 \cdot 10^{-1}$	$2.818 \cdot 10^{-1}$	$1.873 \cdot 10^{-2}$	$9.799 \cdot 10^{-3}$	$7.503 \cdot 10^{-3}$
T_{ζ_m} (сек)	172	368	518	1218	2284
$S(\zeta_m)$	40.56	10.37	9.71	11.94	17.13

В табл. 4 представлены полученные в расчетах значения трудоемкости при $\lambda_p = 0.001$ для оценки $P(\text{down})$ с использованием сеточной аппроксимации при $m = 1, 10, 17.515, 50, 100$; видно, что минимальное значение $S(\zeta_m)$ составило **9.71** при $m = m_{\text{opt}} = 17.515$. Данные из табл. 1 показывают, что здесь использование оценок сеточной аппроксимации (CR) сравнительно с моделированием поля Вороного (Direct) сокращает трудоемкость примерно в 40 раз.

6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СРАВНИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ РАЗНОГО ТИПА

В работе [8] было замечено, что вероятность прохождения в значительной степени определяются корреляционной длиной L и одномерным распределением поля ρ . Рассмотрим следующую стохастическую модель среды, описанную в [18]. Предположим, что “брусоч” V_H заполнен смесью вещества W (вода)

и ансамблем шаров из воздуха $\mathbf{B}_{r_b}(r_i)$ радиуса r_b с центрами в точках $r_i, i = 0, 1, 2, \dots, \eta$. Таким образом, $\mathbf{V}_H = \mathbf{V}_W \cup \mathbf{V}_{\text{air}}$, где \mathbf{V}_{air} — часть области \mathbf{V}_H , заполненная, возможно пересекающимися, шарами из воздуха. Предположим, что координаты центров шаров образуют однородный пуассоновский ансамбль $R_\eta(\mathbf{V}_{H,r_b})$ в области

$$\mathbf{V}_{H,r_b} = [-r_b, X_{\max} + r_b] \times [-r_b, Y_{\max} + r_b] \times [-r_b, H + r_b]$$

с мерой интенсивности $\Lambda(\mathbf{V}_{H,r_b}) = \lambda_p * \text{Vol}(\mathbf{V}_{H,r_b})$, где $\text{Vol}(\mathbf{V}_{H,r_b}) = (X_{\max} + 2r_b)(Y_{\max} + 2r_b)(H + 2r_b)$. Для этой модели стохастической среды средняя "геометрическая" плотность $\rho(\mathbf{V}_H)$ смеси в бруске \mathbf{V}_H определяется через вероятность $P(\mathbf{r} \in \mathbf{V}_W)$ следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{V}_H) &= P(\mathbf{r} \in W) = P\left(R_\eta(\mathbf{V}_{H,r_b}) \subset \mathbf{V}_{H,r_b} \setminus \mathbf{B}_{r_b}\right) = \\ &= e^{-\Lambda(\mathbf{V}_{H,r_b}) \frac{4}{3}\pi r_b^3 / \text{Vol}(\mathbf{V}_{H,r_b})}. \end{aligned} \tag{13}$$

Для такого пуассоновского ансамбля шаров в бруске \mathbf{V}_{H,r_b} в работе [11] было найдено следующее выражение для корреляционной функции:

$$\begin{aligned} k_b(t) &= e^{-\Lambda V_b} \left(e^{V_d} - 1 \right) / \left(1 - e^{-\Lambda V_b} \right), \\ 0 \leq t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &\leq 2r_b, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$V_b = \frac{4}{3}\pi r_b^3, \text{ а } V_d = 2\frac{\pi d^2}{3}(3r_b - d), d = (2r_b - t) / 2,$$

есть объем общей части пересекающихся шаров радиуса r_b с центрами, отстоящими на расстоянии $t \leq 2r_b$, а $\Lambda = \Lambda(\mathbf{V}_{H,r_b}) / \text{Vol}(\mathbf{V}_{H,r_b})$. Полагая $k_b(t) = 0$ при $t > 2r_b$ для описанной модели с шарами можно определить корреляционную длину как

$$L_{\text{ball}}(r_b) = \int_0^\infty k_b(t) dt. \tag{15}$$

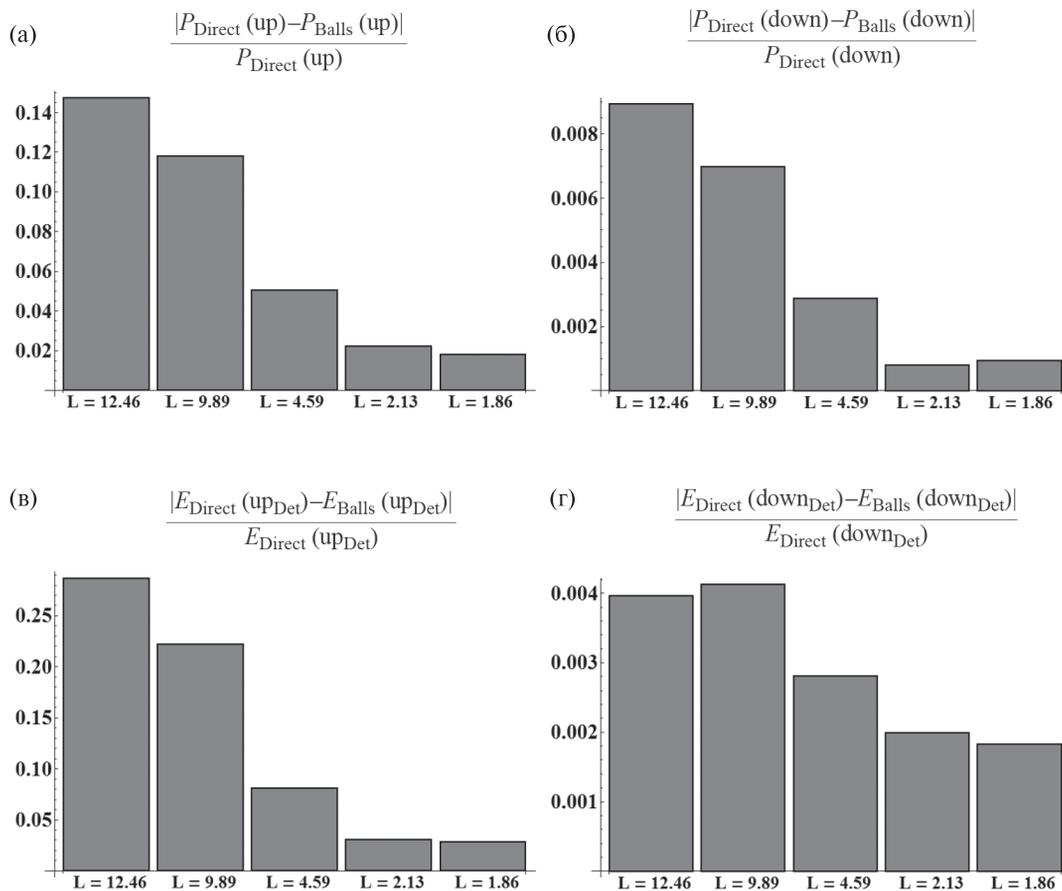
Была решена задача подбора параметров описанной выше стохастической модели среды с шарами так, чтобы величина $L_{\text{ball}}(r_b)$ совпала с корреляционным радиусом L (см. (4)) поля Вороного для заданных значений $\lambda_p = \lambda_{p_0}$ и $\rho(\mathbf{V}_H) = \rho_0$. Для этого было найдено численное значение $r_b = r_b(\lambda_{p_0})$ из равенства

$$0.459\lambda_p^{-1/3} = \int_0^{2r_b} k_b(t) dt,$$

а потом, используя полученное значение $r_b(\lambda_{p_0})$, определено значение меры интенсивности $\Lambda(\mathbf{V}_{H,r_b})(r_b(\lambda_{p_0}))$ (параметр распределения Пуассона) из соотношения

$$\Lambda(\mathbf{V}_{H,r_b})(r_b(\lambda_{p_0})) = -\frac{\ln \rho * \text{Vol}(\mathbf{V}_{H,r_b}(\lambda_{p_0}))}{\frac{4}{3}\pi r_b^3(\lambda_{p_0})}.$$

На фиг. 3 графически представлены относительные разности функционалов $P(\text{up}), P(\text{down}), E(\text{up}_{\text{Det}}), E(\text{down}_{\text{Det}})$ полученные для поля Вороного (Direct) и стохастической модели среды с шарами (Balls) при $L = L_{\text{ball}}(r_b)$ для $L = 12.46, 9.89, 4.59, 2.13, 1.86$ путем моделирования 10^8 траекторий гамма-квантов. Из фиг. 3 видно, что для поля Вороного и соответствующей ($L = L_{\text{ball}}(r_b)$) модели среды с шарами относительные разности функционалов $P(\text{up}), P(\text{down}), E(\text{up}_{\text{Det}}), E(\text{down}_{\text{Det}})$ уменьшаются с ростом L и меньше 6% при $L \leq 4.59$.



Фиг. 3. Значения относительных разностей функционалов $P(\text{up})$, $P(\text{down})$, $E(\text{up}_{\text{Det}})$, $E(\text{down}_{\text{Det}})$, полученные для поля Вороного и стохастической модели среды с шарами при $L = L_{\text{ball}}(r_b)$ для $\lambda_p = 0.00005, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.015$. Точечный источник с начальной энергией 1 Мэв.

Рассмотрим теперь вкратце сеточную аппроксимацию неизотропного однородного случайного поля $\rho(\mathbf{r})$ с заданными корреляционными длинами L_x, L_y, L_z путем разбиения пространства R^3 на параллелепипеды со сторонами $(a_x, a_y, a_z) = \mathbf{a}$. Конкретную приближенную корреляционную длину, в частности, по оси Z при этом целесообразно определить формулой вида (4) с заменой $l_S(\mathbf{r}, \omega)$ на $l_S(\mathbf{r}, \omega) |\omega_z|$ (см., например, [19]). Остальные соотношения и алгоритм построения соответствующей оценки $\tilde{L}_z(\mathbf{a})$ обобщаются соответственно. В результате получается система из трех уравнений типа $\tilde{L}_z(\mathbf{a}) = L_z$, в качестве начального приближения решения которой естественно использовать $\mathbf{a}_0 = (L_x, L_y, L_z)$. Отметим, что если $L_z = \infty$, то и \tilde{L}_z бесконечно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
2. Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. [Engl. transl.: Springer-Verlag, 1980].
3. Спанье Дж., Гелбард З. Метод Монте-Карло и задачи теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972.
4. Coleman W. A. Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the techniques to radiation transport problems // J. Nucl. Sci. and Engng. 1968. V. 32. N 1. P. 76–81.
5. Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., Longworth S. Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry // Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems. 1965. V. 557. P. 2.

6. Михайлов Г. А., Аверина Т. А. Алгоритм “максимального сечения” в методе Монте-Карло // Докл. АН. 2009. Т. 428. № 2. С. 163–165.
7. Михайлов Г. А. Рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло для задач со случайными параметрами (метод “двойной рандомизации”) // Сиб. ж. вычисл. матем. 2019. Т. 22. № 2. С. 187–200.
8. Ambos A. Y., Mikhailov G. A. Numerically statistical simulation of the intensity field of the radiation transmitted through a random medium // Russian Journal of Numerical Analysis and Math. Modelling. 2018. V. 33. N 3. P. 161–171.
9. Larmier C., Zoia A., Malvagi F., Dumonteil E., Mazzolo A. Monte Carlo particle transport in random media: The effects of mixing statistics // J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2017. V. 196. P. 270–286.
10. Глазов Г. Н., Титов Г. А. Статистические характеристики коэффициента ослабления в разорванной облачности. I. Модель с шарами одинакового радиуса // Вопросы лазерного зондирования атмосферы. Новосибирск, 1976. С. 126–139.
11. Михайлов Г. А., Медведев И. Н. Новый корреляционно рандомизированный алгоритм оценки влияния стохастичности среды на перенос частиц // Доклады АН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 1. С. 55–58.
12. Medvedev I. N., Mikhailov G. A. New correlative randomized algorithms for statistical modelling of radiation transfer in stochastic medium // Russian Journal of Numerical Analysis and Math. Modelling. 2021. V. 36. N 4. P. 219–225.
13. Амбос А. Ю. Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и задачи переноса излучения // Сиб. журн. вычисл. матем. 2016. Т. 19. № 1. С. 19–32.
14. Сторм Э., Исразль Х. Сечения взаимодействия гамма-излучения (для энергий 0,001–100 МэВ и элементов с 1 по 100). М.: Атомиздат, 1973. 256 с.
15. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 296 с.
16. Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения. М.: Госатомиздат, 1963. 284 с.
17. Бреднихин С. А., Медведев И. Н., Михайлов Г. А. Оценка параметров критичности ветвящихся процессов методом Монте-Карло // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 362–374.
18. Medvedev I. N., Mikhailov G. A. Randomized exponential transformation algorithm for solving the stochastic problems of gamma-ray transport theory // Russian Journal of Numerical Analysis and Math. Modelling. 2020. V. 35. N 3. P. 153–162.
19. Medvedev Iia N. On the efficiency of using correlative randomized algorithms for solving problems of gamma radiation transfer in stochastic medium // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathem. Modelling. 2022. V. 37. N 4. P. 231–240.