

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ СЕТИ ТОЧЕК НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ¹⁾

© 2024 г. И. Э. Степанова^{1,*} Д. В. Лукьяненко², И. И. Колотов²,
А. В. Щепетилов², А. Г. Ягола², А. Н. Левашов²

¹119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия

²123995 Москва, ул. Большая Грузинская, 10, стр. 1, Ин-т физики Земли им. О.Ю. Шмидта, Россия

*e-mail: tet@ifz.ru

Поступила в редакцию 28.06.2023 г.

Переработанный вариант 20.10.2023 г.

Принята к публикации 20.11.2023 г.

В статье рассматривается вопрос об однозначной разрешимости систем линейных алгебраических уравнений, к решению которых сводятся многие обратные задачи геофизики в результате дискретизации после применения метода интегральных уравнений или интегральных представлений. Приводятся примеры вырожденных и невырожденных систем разных размерностей, возникающих при обработке магнитометрических и гравиметрических данных экспериментальных наблюдений. Делаются выводы о способах построения оптимальной сетки точек экспериментальных наблюдений. Библ. 14. Фиг. 2.

Ключевые слова: вырожденные системы линейных алгебраических уравнений, интегральные представления, однозначная разрешимость, определитель Коши.

DOI: 10.31857/S0044466924030032, EDN: XHHVTN

ВВЕДЕНИЕ

При интерпретации геофизических данных часто применяются методы, базирующиеся на различных интегральных представлениях магнитного и гравитационного полей [1–6]. Представления полезных сигналов в виде свертки известной функции с подлежащей определению поверхностной, объемной и даже линейной плотностью распределения масс, магнитных диполей и т.п. позволяют редуцировать обратные задачи геофизики по поиску параметров геологической среды к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с приближенно заданной матрицей и правыми частями [1]. В наших предыдущих работах [7,8] были рассмотрены проблемы единственности решения СЛАУ с симметрическими положительно полуопределенными матрицами в локальном и региональном вариантах, а также сформулированы критерии вырожденности СЛАУ, возникающих при использовании метода интегральных уравнений [4, 5].

1. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ В МЕТОДЕ S-АППРОКСИМАЦИЙ. ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ

Если известны компоненты магнитного или гравитационного поля (например, первая производная потенциала по z на некотором рельефе и вторые производные гравитационного потенциала), то можно представить потенциал поля в виде суммы простого и двойного слоев, распределенных на скольких горизонтальных плоскостях, расположенных ниже заданного рельефа. Если систему координат выбрать так, чтобы дневная поверхность (поверхность Земли в локальном варианте метода S-аппроксимаций, см. [4–5, 9–13]) описывалась уравнением $z=0$, то потенциал записывается в виде [8]:

$$V(M) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{l,l}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}} + \quad (1)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках госзадания ИФЗ РАН.

$$+ \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi_1, \xi_2)(z - H_l) d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^3},$$

$$M = (x, y, z), \hat{x} = (x, y), \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2).$$

Тогда производная по z потенциала V , взятая с обратным знаком, будет иметь вид:

$$-\frac{\partial V}{\partial z}(M) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,l}(\xi)(z - H_l) z d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^3} +$$

$$+ \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi) \left(2(z - H_l)^2 - (x - \xi_1)^2 - (y - \xi_2)^2 \right) d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^5}, \quad M = (x, y, z). \quad (2)$$

Вторая производная потенциала (например, производные по z и по x) может быть выражена следующим интегралом:

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}(M) = 3 \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,l}(\xi)(x - \xi_1)(z - H_l) d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^5} +$$

$$+ 3 \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi)(x - \xi_1) \left((x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 - 4(z - H_l)^2 \right) d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^7}, \quad M = (x, y, z). \quad (3)$$

Функции $\rho_{1,l}, \rho_{2,l}$ неизвестны. Предположим, что компоненты поля заданы в конечном множестве точек M_i , $M_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Обозначим подынтегральную функцию в первом слагаемом для l -го слоя в (2) в точке M_i через $Q_{1,l}^{(i)}$, а во втором слагаемом – через $Q_{2,l}^{(i)}$. Тогда получим:

$$-\frac{\partial V(M_i)}{\partial z} \equiv f_i = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_{1,l}(\hat{\xi}) Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}(\hat{\xi}) Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

На практике компоненты поля всегда определяются с некоторой погрешностью δ , поэтому в качестве входной информации выступают значения $f_{i,\delta}$. С помощью постановки вариационной задачи

$$\Omega(\rho) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_{1,l}^2(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}^2(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi} = \min_{\rho}, \quad (5)$$

$$f_{i,\delta} - \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_{1,l}(\hat{\xi}) Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}(\hat{\xi}) Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

находим, что искомые функции должны иметь вид [4, 5, 9]:

$$\rho_{1,l}^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_{1,l}(\hat{\xi}, \lambda), \quad \rho_{2,l}^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_{2,l}(\hat{\xi}, \lambda),$$

$$\tilde{\rho}_{1,l}(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}), \quad \tilde{\rho}_{2,l}(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi}), \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (7)$$

Таким образом, приходим к следующей системе линейных уравнений:

$$A\lambda = f_{\delta}, \quad (8)$$

элементы матрицы которой в нашем случае имеют вид

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) Q_{1,l}^{(j)}(\hat{\xi}) + Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi}) Q_{2,l}^{(j)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (9)$$

Элементы a_{ij} матрицы A при использовании интегральных представлений (2) и (3) могут быть вычислены явно с помощью интеграла Пуассона. Например, в случае представления вертикальной компоненты гравитационного поля получим выражения:

$$a_{ij} = 2\pi \sum_{l=1}^L \left[\frac{z_i + z_j - 2H_l}{\left(\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right)^3} - \frac{(z_i + z_j - 2H_l) \left(9 \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right] - 6(z_i + z_j - 2H_l)^2 \right)}{\left(\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right)^7} \right], \quad (10)$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N.$$

По найденным из решения системы (8)–(10) множителям λ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, можно далее определить высшие производные потенциала, выполнить аналитическое продолжение гравитационного поля и т.д. Для приложений очень важно иметь возможность пересчета значений поля на некоторую регулярную сеть наблюдений. В настоящей работе акцент делается на построении такой сети наблюдений, чтобы матрица системы (8) была невырожденной.

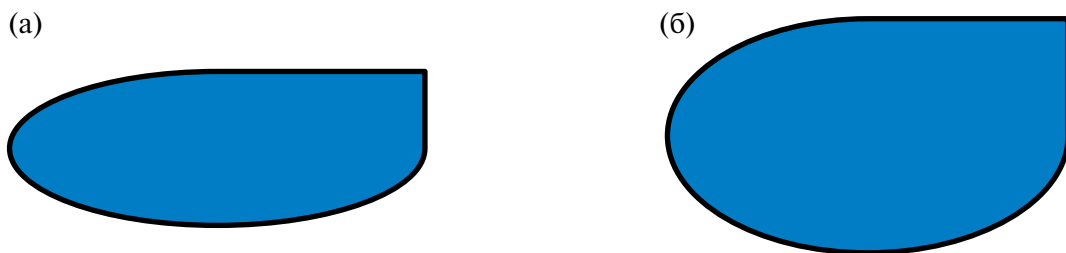
Если какая-либо высшая производная гравитационного потенциала аппроксимируется потенциалом простого слоя, распределенного на одной или нескольких горизонтальных плоскостях, то матрица системы (8)–(10) принимает вид

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4(z_1 + H)^2} & \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2 \right)^{3/2}} \dots & \frac{z_1 + z_N + 2H}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2 \right)^{3/2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{z_1 + z_N + 2H}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2 \right)^{3/2}} & \frac{z_2 + z_N + 2H}{\left((z_2 + z_N + 2H)^2 + r_{2N}^2 \right)^{3/2}} \dots & \frac{1}{4(z_N + H)^2} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Матрица системы (11) симметрическая, все ее элементы, как легко видеть, неотрицательные.

В [8] доказана теорема о том, что матрица системы (8)–(10) при представлении поля с помощью потенциала простого слоя имеет ранг не меньше двух; таким образом, для двух различных точек наблюдения система является невырожденной, а также аналогичная теорема при применении потенциалов двойного слоя для представления элементов гравитационного и магнитного полей.

В [8] приведены два примера однозначной разрешимости системы (8)–(10) при $N = 3$ и $N = 4$. Попытаемся обобщить результаты, полученные ранее, на случай, когда точки наблюдения расположены



Фиг. 1. Проекция областей расположения двух групп точек наблюдения на горизонтальную плоскость.

группами, расстояния между проекциями точек в каждой группе намного меньше, чем расстояния между представителями различных групп (см. фиг. 1).

Пример 1. Число точек наблюдений $N = 3M$. Если число точек наблюдения равно трем, то матрица системы (8)–(10) для потенциала простого слоя приобретает вид

$$A_{33} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix},$$

$$a = \frac{1}{4(z_1 + H)^2} = \frac{1}{4(z_2 + H)^2} = \frac{1}{4(z_3 + H)^2};$$

$$b = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2\right)^{3/2}} = \frac{z_1 + z_3 + 2H}{\left((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{z_2 + z_3 + 2H}{\left((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2\right)^{3/2}}. \quad (12)$$

Такие соотношения между элементами матрицы возможны, если координаты z всех трех точек наблюдения одинаковы, а сами точки расположены в вершинах равностороннего треугольника на соответствующей плоскости. При выполнении указанных условий все три точки лежат на поверхности в трехмерном пространстве, описываемой уравнением

$$\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = C = \text{const} > 0. \quad (13)$$

В [8] доказано, что в данном частном случае трехмерной системы уравнений решение определяется однозначно. Если разделить точки наблюдения на группы по три точки в каждой и принять, что z -координаты в каждой такой подсистеме у всех элементов одинаковы, то матрица (12) приобретает вид

$$A_{3N3N} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & \dots B_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

$$a = \frac{1}{4(z_1 + H)^2} = \frac{1}{4(z_2 + H)^2} = \frac{1}{4(z_3 + H)^2};$$

$$b = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2\right)^{3/2}} = \frac{z_1 + z_3 + 2H}{\left((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2\right)^{3/2}} = C =$$

$$= \frac{z_2 + z_3 + 2H}{\left((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2\right)^{3/2}}; c_{i1} = \frac{z_i + z_4 + 2H}{\left((z_i + z_4 + 2H)^2 + r_{i4}^2\right)^{3/2}},$$

$$c_{i2} = \frac{z_i + z_5 + 2H}{\left((z_i + z_5 + 2H)^2 + r_{i5}^2\right)^{3/2}}, c_{i3} = \frac{z_i + z_6 + 2H}{\left((z_i + z_6 + 2H)^2 + r_{i6}^2\right)^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

В (14) блоки B_{ij} и A_{ii} , $i, j = 1, \dots, N$, имеют вид, аналогичный A_{11} , B_{12} . Элементы блоков B_{ij} по модулю существенно меньше, чем элементы диагональных блоков, поэтому можно выбрать такое расположение точек наблюдения, что определитель всей матрицы будет отличен от нуля, если отличны от нуля определители диагональных подматриц, поскольку [14] определитель блочно-диагональной матрицы с нулевыми внедиагональными блоками равен произведению определителей диагональных блоков. В нашем случае внедиагональные блоки будут вносить пренебрежимо малый вклад в определитель матрицы всей системы (размерность которой — $3N$), а сам по себе определитель является непрерывной функцией элементов матрицы. Можно также вспомнить известное утверждение о блочных матрицах [14]:

$$\det \begin{bmatrix} A & B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix} = \det A \cdot \det [C - B_1 A^{-1} B_2]. \quad (15)$$

В (15) латинскими буквами обозначены блочные матрицы. Если элементы внедиагональных блоков матрицы (15) много меньше, чем элементы диагональных (по модулю), то определитель второго множителя в (15) мало отличается от определителя блока C (поскольку в произведении трех матриц будут фигурировать элементы, по меньшей мере, второго порядка малости по сравнению с элементами матрицы C). Для более строгого обоснования справедливости нашего утверждения напомним, что определитель суммы двух матриц A и B равен сумме определителей матриц, состоящих из всех возможных комбинаций столбцов матрицы A и матрицы B . Если столбцы матрицы B представляют собой столбцы матрицы A , умноженные на малое число ε , то можно написать

$$\det(A + B) = \det A \cdot \sum_{k=0}^N C_N^k \varepsilon^k = \det A \cdot (1 + \varepsilon)^N, \quad C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

Таким образом, определитель матрицы $A+B$ будет не слишком сильно отличаться от определителя A , если ε достаточно мало.

Пример 2. Число точек наблюдений $N = 4M$. Рассмотрим сначала, как и в работе [8], систему (8)–(10) для четырех точек наблюдения при аппроксимации элементов поля с помощью потенциала простого слоя. Матрица системы имеет в этом случае вид

$$A_{44} = \begin{bmatrix} a & c & d_1 & d_2 \\ c & b & d_3 & d_4 \\ d_1 & d_3 & a_1 & c_1 \\ d_2 & d_4 & c_1 & b_1 \end{bmatrix},$$

$$a = \frac{1}{4(z_1 + H)^2}; c = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2\right)^{3/2}};$$

$$b = \frac{1}{4(z_2 + H)^2}; a_1 = \frac{1}{4(z_3 + H)^2};$$

$$b_1 = \frac{1}{4(z_4 + H)^2}; c_1 = \frac{z_3 + z_4 + 2H}{\left((z_3 + z_4 + 2H)^2 + r_{34}^2\right)^{3/2}};$$

$$d_1 = \frac{z_1 + z_3 + 2H}{\left((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2\right)^{3/2}}; d_2 = \frac{z_1 + z_4 + 2H}{\left((z_1 + z_4 + 2H)^2 + r_{14}^2\right)^{3/2}};$$

$$d_3 = \frac{z_2 + z_3 + 2H}{\left((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2\right)^{3/2}}; d_4 = \frac{z_2 + z_4 + 2H}{\left((z_2 + z_4 + 2H)^2 + r_{24}^2\right)^{3/2}}.$$

Выберем координаты точек наблюдения так, чтобы элементы матрицы A_{44} , обозначенные через $d_i, i = 1, \dots, 4$, были одинаковыми. Ранее мы показали, как этого можно добиться, принимая во внимание свойства функции, связывающей z -координаты точек наблюдений с расстоянием между проекциями этих точек на горизонтальную плоскость (см. [8]). Решение системы (8)–(10) в случае 4 точек наблюдения, расположенных на одной горизонтальной плоскости в вершинах ромба, определяется однозначно. Так же, как и в примере 1, перейдем к блочно-диагональной матрице для системы $4M$ точек наблюдения. Покажем, как можно осуществить подобный переход путем последовательного увеличения числа пунктов измерений.

Предположим, что нам даны 8 точек наблюдений, и матрица системы имеет вид

$$\begin{aligned}
A_{88} &= \begin{bmatrix} A_{44} & B_{44} \\ B_{44} & C_{44} \end{bmatrix}, A_{44} = \begin{bmatrix} a & c & d_1 & d_2 \\ c & b & d_3 & d_4 \\ d_1 & d_3 & a_1 & c_1 \\ d_2 & d_4 & c_1 & b_1 \end{bmatrix}, \\
a &= \frac{1}{4(z_1 + H)^2}; c = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2\right)^{3/2}}; \\
b &= \frac{1}{4(z_2 + H)^2}; a_1 = \frac{1}{4(z_3 + H)^2}; \\
b_1 &= \frac{1}{4(z_4 + H)^2}; c_1 = \frac{z_3 + z_4 + 2H}{\left((z_3 + z_4 + 2H)^2 + r_{34}^2\right)^{3/2}}; \\
d_1 &= \frac{z_1 + z_3 + 2H}{\left((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2\right)^{3/2}}; d_2 = \frac{z_1 + z_4 + 2H}{\left((z_1 + z_4 + 2H)^2 + r_{14}^2\right)^{3/2}}; \\
d_3 &= \frac{z_2 + z_3 + 2H}{\left((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2\right)^{3/2}}; d_4 = \frac{z_2 + z_4 + 2H}{\left((z_2 + z_4 + 2H)^2 + r_{24}^2\right)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Матрицы B_{44} и C_{44} — такие 4×4 — матрицы, что определитель всей матрицы A_{88} отличен от нуля. Этого можно добиться следующим образом.

Сначала выбираем такие четыре точки, чтобы определитель четырехмерной матрицы A_{44} не был равен нулю, а затем учитываем справедливость выражения [14]:

$$\det \begin{bmatrix} A_{44} & B_{44} \\ B_{44} & C_{44} \end{bmatrix} = \det A_{44} \cdot \det [C_{44} - B_{44} A_{44}^{-1} B_{44}].$$

Координаты четырех точек «второй очереди» можно задать так, чтобы расстояния между ними и точками «первой очереди» были существенно больше, чем расстояния между точками, принадлежащими каждой группе в отдельности. Тогда определитель второго множителя будет также отличен от нуля. Далее действуем так же, как и в примере 1.

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. В случае $N = 3M$ и $N = 4M$ (N — число точек наблюдений, M — натуральное число) существуют такие конфигурации сети наблюдений, что матрица системы (8)–(10) является невырожденной.

Пример 3. Случай произвольного N . Допустим теперь, что точки наблюдения расположены таким образом, что выполняется достаточное условие невырожденности матрицы [14]:

$$|d_{ii}| > \sum_{j \neq i}^N |d_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, N \Rightarrow \det D \neq 0. \tag{18}$$

Слева в (18) стоят модули диагональных элементов некоторой матрицы, а справа — сумма модулей элементов каждой строки в отдельности.

Рассмотрим диагональные и внедиагональные элементы матрицы (8):

$$a = \frac{1}{4(z_i + H)^2}; \quad c = \frac{z_i + z_j + 2H}{\left((z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2\right)^{3/2}}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Если вертикальные координаты всех точек одинаковы, то достаточное условие невырожденности матрицы (18) будет выполнено в том случае, когда

$$r_{ij}^2 \geq \left((N-1)^{2/3} - 1\right) \cdot (z+H)^2, z_i \equiv z; i, j = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Итак, верна

Теорема 2. При выполнении условия (19) решение системы (8)–(10) определяется однозначно.

Замечание. Как показывает практика интерпретации реальных геофизических данных, условие (19) является чрезмерно строгим. Расстояние между двумя соседними точками наблюдения на плоскости может быть даже меньше, чем расстояние от этой плоскости до ближайшего источника. Матрица системы получается невырожденной. При выполнении регуляризованного разложения Холецкого этой матрицы параметр регуляризации оказывается очень малым по сравнению с максимальным диагональным элементом (напомним, что элементы матрицы (8) – неотрицательные). Таким образом, достаточное условие невырожденности системы (19) имеет не слишком большую значимость для решения обратных задач гравимангниторазведки.

Пример 4. Поверхность уровня гармонической функции. Рассмотрим систему (8)–(10) для произвольного числа точек наблюдений M и предположим, что точки наблюдения находятся на поверхности уровня гармонической функции, равной в каждой точке вертикальной компоненте гравитационного потенциала:

$$C = \frac{z_i + z_j + 2H}{\left((z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2\right)^{3/2}}, i, j = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Исследуем вопрос однозначной разрешимости системы (8)–(10) в этом случае.

Если z -координаты точек наблюдения известны, то из (20) следует, что расстояния между проекциями точек на плоскости можно найти по следующей формуле:

$$r_{ij}^2 = \left(\frac{z_i + z_j + 2H}{C}\right)^{2/3} - (z_i + z_j + 2H)^2, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (21)$$

В (21) предполагается, что поле создается только одним простым слоем, расположенным на глубине H . Пусть матрица СЛАУ имеет следующий вид:

$$A_{NN} = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_{22} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & a_{N-1N-1} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

На диагонали матрицы стоят не равные единице (а в остальном – произвольные) вещественные числа. Внедиагональные элементы имеют одно и то же значение, равное 1 (единицу можно заменить любой константой, не совпадающей ни с одним из значений диагональных элементов).

Теорема 3. Определитель матрицы равен

$$\det A_{NN} = \left(a_{11} + \sum_{j=2}^N \frac{a_{11} - 1}{a_{jj} - 1}\right) \times (a_{22} - 1) \cdot (a_{33} - 1) \cdot (a_{NN} - 1). \quad (23)$$

Доказательство. Вычтем первый столбец из всех последующих, а затем вычтем линейную комбинацию столбцов, начиная со второго, из первого столбца. Тогда определитель примет следующий вид:

$$\det A_{NN} = \begin{vmatrix} a_{11} - \sum_{j=2}^N \frac{1 - a_{11}}{a_{jj} - 1} & 1 - a_{11} & \dots & 1 - a_{11} \\ 0 & a_{22} - 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{N-1N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}.$$

Перемножение диагональных элементов приводит нас к утверждению теоремы.

Доказанная нами теорема 3 может быть полезна при построении сети точек наблюдений, которая гарантировала бы невырожденность соответствующей СЛАУ при интерпретации гравитационных и магнитных данных. А именно, следует смоделировать такую сеть, чтобы точки наблюдения находились на поверхности уровня некоторой гармонической функции, значениями которой в этих точках являются элементы матрицы СЛАУ. Однако не все так просто, как кажется на первый взгляд. Проблема построения сети заключается в том, что элементы матрицы – это не совсем абстрактные вещественные числа. Элементы СЛАУ содержат в себе информацию о расстояниях между точками сети наблюдений как в трехмерном пространстве, так и на плоскости (тогда рассматриваются проекции соответствующих точек). Поэтому «в лоб» применять формулу (21) для нахождения расстояний между проекциями точек на плоскости, если известны z -координаты этих точек, нельзя: необходимо сформулировать некоторую вариационную задачу, решение которой позволило бы достичь минимального отклонения координат реальных точек от расчетных. Кроме того, диагональные элементы матрицы должны быть все либо больше внедиагональных, либо меньше. Если сумма в первом сомножителе (23) знакопеременная, то определитель может при некоторых значениях диагональных элементов обращаться в нуль. Для того чтобы избежать такой ситуации, следует строить оптимальную сеть наблюдений таким образом, чтобы определитель в (23) был гарантированно отличен от нуля.

Пример 5. Случай кососимметрических матриц. В тех случаях, когда необходимо построить математические модели высших производных гравитационного или магнитного потенциала (см. формулу (3)), матрица системы линейных алгебраических уравнений оказывается кососимметрической. На диагонали стоят нули, а внедиагональные элементы «при отражении от главной диагонали» меняют знак. Если элементы матрицы (8) продифференцировать по x_i , например, то мы как раз и получим описанную выше систему линейных алгебраических уравнений с кососимметрической матрицей.

Необходимо отметить, что метод линейных интегральных представлений позволяет находить пространственное распределение производных потенциала любых порядков по определенным из решения всего одной СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений), записанной для известных из наблюдений значений какой-либо компоненты гравитационного или магнитного поля. Но если попытаться верифицировать, если можно так выразиться, найденное распределение некоторой производной потенциала, то мы придем к необходимости отыскания решения СЛАУ с кососимметрической матрицей.

Докажем следующую теорему.

Теорема 4. Определитель матрицы

$$A_{NN} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

равен 1 в случае четного N и нулю в противном случае.

Доказательство. Вычтем первый столбец из последующих, а затем – последнюю строку из всех остальных. Получим матрицу

$$A_{NN} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & \dots & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -2 & -2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Разложим определитель матрицы (25) по первому столбцу.

Алгебраическое дополнение последнего элемента этого столбца равно:

$$\Delta_{N1} = (-1)^{N-1}.$$

Поэтому определитель всей матрицы равен $\det A_{NN} = (-1)^{N-1+N+1} = 1$.

Если число точек наблюдений четное, то определитель равен 1, в противном случае он равен нулю.

Таким образом, мы имеем невырожденную четномерную кососимметрическую систему в том случае, когда точки наблюдения находятся на поверхности уровня функции, задающей значения второй производной потенциала, например:

$$C = \frac{(x_i - x_j)(z_i + z_j + 2H)}{\left[\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i + z_j + 2H)^2} \right]^5}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Как и ранее, H — это глубина залегания эквивалентных источников, распределенных на плоскости (простого слоя, см. (2) и (3)).

Перейдем теперь к случаю представления элементов гравитационного и магнитного полей в виде потенциала двойного слоя.

Матрица системы (8) приобретает следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{16(z_1 + H)^4} & \dots & \frac{(z_1 + z_N + 2H) \cdot (6(z_1 + z_N + 2H)^2 - 9r_{1N}^2)}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2 \right)^{7/2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(z_1 + z_N + 2H) \cdot (6(z_1 + z_N + 2H)^2 - 9r_{1N}^2)}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2 \right)^{7/2}} & \dots & \frac{6}{16(z_N + H)^4} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Если применить теоремы 2 и 3, то мы получим невырожденную матрицу СЛАУ. Теорема 2 утверждает, что матрица (26) будет иметь отличный от нуля определитель, если выполняется следующее условие:

$$r_{ij}^2 \geq \left((N-1)^{2/7} - 1 \right) \cdot (z + H)^2, \quad z_i \equiv z; i, j = 1, \dots, N. \quad (27)$$

Для того чтобы оказаться в условиях теоремы 3, нам нужно задать значения элементов полей в точках, расположенных на поверхности уровня гармонической функции, описываемой выражением

$$\frac{(z_i + z_j + 2H) \cdot (6(z_i + z_j + 2H)^2 - 9r_{ij}^2)}{\left((z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2 \right)^{7/2}} = C = \text{const.} \quad (28)$$

В (28) H — глубина залегания двойного слоя.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СЕТИ ТОЧЕК

Применим теперь результаты исследований однозначной разрешимости различных СЛАУ, к которым редуцируются линейные обратные задачи гравимагниторазведки, для разработки стратегии выбора такой сети наблюдений, которая обеспечивала бы высокую точность решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии за счет невырожденности матрицы.

При «конструировании» сети наблюдений можно пойти двумя путями.

Первый из них заключается в том, чтобы по заданному набору проекций точек на горизонтальной плоскости подобрать такие координаты вдоль вертикальной оси, чтобы точки наблюдения оказались на поверхности уровня некоторой гармонической функции или, в худшем случае, в приемлемой близости от нее. Рассмотрим функционал, определенный на всевозможных наборах z -координат точек:

$$\Phi[Z] \equiv \sum_{i,j}^N \left(r_{ij}^2 - f_{ij}(Z) \right)^2, \quad (29)$$

$$f_{ij} = \left(\frac{(z_i + z_j + 2H)}{C} \right)^{2/3} - (z_i + z_j + 2H)^2, \quad i, j = 1 \dots N.$$

Поставим вариационную задачу: найти Z^*

$$Z^* : \min_Z \Phi[Z] + \alpha \Omega[Z], Z = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T, \Phi[Z] = \sum_{i,j}^N \left(r_{ij}^2 - f_{ij}(Z) \right)^2, \quad (30)$$

$$f_{ij} = \left(\frac{(z_i + z_j + 2H)}{C} \right)^{2/3} - (z_i + z_j + 2H)^2, \quad i, j = 1 \dots N, \quad \Omega[Z] = \sum_{i=1}^N z_i^2.$$

Минимум в задаче (30) можно искать одним из градиентных методов [2,3].

Второй путь при проектировании оптимальных сетей можно описать следующим образом. Зададим три точки на горизонтальной плоскости так, чтобы они находились в вершинах равностороннего треугольника:

$$z_1 = z_2 = z_3, C = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left(\sqrt{(z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2} \right)^3}. \quad (31)$$

Далее будем добавлять к выбранным нами трем точкам последовательно по одному пункту наблюдений, учитывая, что каждый новый пункт должен находиться либо на поверхности уровня (31), либо вблизи нее. Четвертая точка не может лежать в той же горизонтальной плоскости, как это уже отмечалось ранее. Поэтому выберем z_4 так, чтобы выполнялись соотношения (см. теорему 3) и рассмотрим треугольник $A_2 A_3 A_4$:

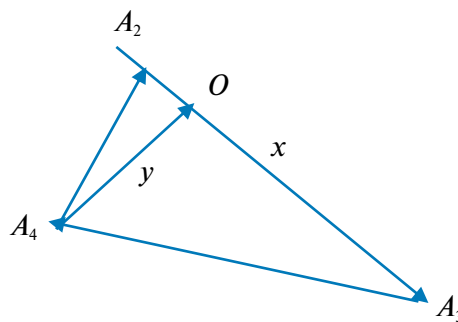
$$z_4 < z_1 \Rightarrow \frac{1}{z_4^2} > \frac{1}{z_1^2} > C.$$

Из рисунка легко установить, что выполняются следующие соотношения для расстояний между точками треугольника $A_2 A_3 A_4$:

$$y^2 = r_{34}^2 - x^2 = r_{24}^2 - (r_{23} - x)^2 \Rightarrow x = \frac{r_{24}^2 - r_{34}^2 - r_{23}^2}{2r_{23}}, \quad (32)$$

$$y^2 = r_{34}^2 - \left(\frac{r_{24}^2 - r_{34}^2 - r_{23}^2}{2r_{23}} \right)^2, \quad \overrightarrow{A_3 O} = \frac{(x_2 - x_3, y_2 - y_3)}{r_{23}} \cdot x,$$

$$\vec{r}_4 = \vec{r}_3 + \overrightarrow{A_3 O} + y \cdot \frac{(y_3 - y_2, x_3 - x_2)}{r_{23}}.$$



Фиг. 2. Схематическое изображение процесса добавления точки в оптимальную сеть.

В (32) через $r_i, i = 2, 3, 4$, обозначены радиус-векторы соответствующих точек в некоторой системе координат. Если мы задаем расстояния от четвертой точки до второй и третьей, то из (32) становится ясно, что четвертая точка может находиться только в двух положениях на плоскости, определяемых соотношениями (32) (по обе стороны от отрезка A_2A_3). Таким образом, расположение точки A_4 относительно A_1 не может быть произвольным и не обязательно должно быть справедливо равенство

$$r_{14}^2 = \left(\frac{z_1 + z_4 + 2H}{C} \right)^{2/3} - (z_1 + z_4 + 2H)^2. \quad (33)$$

Мы приходим к необходимости такого подбора параметров C и z_4 , чтобы расстояние между первой и четвертой точками, определяемое по (33), меньше всего отличалось от расстояния между этими точками, которое вычисляется с учетом фактического расположения четвертой точки из соотношений (32). Все остальные точки сети можно добавлять аналогичным образом, задавая их расстояния на плоскости (фактически, расстояния между их проекциями на исходную плоскость, которой принадлежат первые три точки) до двух предыдущих с номерами $i-1, i: r_{i-1,i+1}, r_{i,i+1}$. У нас на каждом таком шаге будет получаться треугольник $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и нам нужно будет выбирать $C, z_4, \dots, z_{i+1}$ так, чтобы соотношения (32) и (33) для всех пар точек не противоречили друг другу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод S -аппроксимаций позволяет построить за сравнительно короткое время аналитические аппроксимации элементов аномальных потенциальных полей в «первом приближении» по точности. Такая аппроксимация позволяет составить общее представление о природе источников, характере аномалии и уточнить геологическое строение Земли и планет Солнечной системы. Приведенные в настоящей статье теоремы позволяют проектировать оптимальные сети наблюдений, гарантирующие однозначную разрешимость СЛАУ, к которым редуцируются линейные обратные задачи геофизики, а также разрабатывать эффективные алгоритмы отбора спутниковых данных, которые с большой степенью надежности могут применяться при интерпретации разноточной и разнородной информации об источниках физических полей. Если выборки спутниковых данных не удовлетворяют критериям оптимальности сети наблюдений, то мы получаем плохо обусловленные СЛАУ большой и сверхбольшой размерности, и приближенные решения таких систем не могут использоваться для локализации источников аномалий и нахождения пространственного распределения различных элементов полей.

Авторы выражают глубокую благодарность А.С. Леонову за полезные рекомендации и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Salnikov A.M., Stepanova I.E., Gudkova T.V., Batov A.V.* Analytical modeling of the magnetic field of Mars from satellite data using modified S -approximations // *Doklady Earth Sciences*. 2021. Vol. 499. P. 575–579.
2. *Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Some methods for solving of 3D inverse problem of magnetometry // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. 2016. Vol. 4. No 3. P. 4–14.
3. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Yagola A.G., Wang Y.* Recovering the magnetic image of Mars from satellite observations // *J.of Imaging*. 2021. Vol. 7. No 11. P. 234.
4. *Страхов В.Н.* Геофизика и математика. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 64 с.
5. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S - аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // *Физ. Земли*. 2002. № 2. С. 3–19.
6. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S - аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // *Физ. Земли*. 2002. № 7. С. 3–12.
7. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Yagola A.G.* On the uniqueness of solutions to systems of linear algebraic equations resulting from the reduction of linear inverse problems of gravimetry and magnetometry: a local case // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, издательство Pleiades Publishing, Ltd (Road Town, United Kingdom). 2023. V. 63. No 9. P. 1588–1599.
8. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Shchepetilov A.V., Yagola A.G.* On the uniqueness of solution to systems of linear algebraic equations to which the inverse problems of gravimetry and magnetometry are reduced: a regional variant // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, издательство Pleiades Publishing, Ltd (Road Town, United Kingdom). 2023. V. 63. No 8. P. 1452–1465.

9. Ягола А.Г., Степанова И.Э., Ван Янфей, Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином, 2014. 214 с.
10. Stepanova I.E. On the S-approximation of the Earth's gravity field // *Inverse Problems in Science and Engng.* 2008. Vol. 16. No 5. P. 535–544.
11. Stepanova I.E. On the S-approximation of the Earth's gravity field. Regional version // *Inverse Problems in Science and Engng.* 2009. Vol. 16. No 5. P. 1095–1111.
12. Gudkova T.V., Stepanova I.E., Batov A.V. Density anomalies in subsurface layers of mars: model estimates for the site of the InSight mission seismometer // *Solar System Research volume.* 2020. Vol. 54. P. 15–19.
13. Степанова И.Э., Щепетилов А.В., Погорелов В.В., Михайлов П.С. Структурно-параметрический подход при построении цифровых моделей рельефа и гравитационного поля Земли с использованием аналитических S-аппроксимаций // *Геофизические процессы и биосфера.* 2020. Т.19. № 2. С. 107–116.
14. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Физматлит. 1996, 302 с.

ON THE CONSTRUCTION OF AN OPTIMAL NETWORK OF OBSERVATION POINTS WHEN SOLVING INVERSE LIN-EAR PROBLEMS OF GRAVIMETRY AND MAGNETOMETRY

I. E. Stepanova^{a,*}, D. V. Lukyanenko^b, I. I. Kolotov^b, A. V. Shchepetilov^b,
A. G. Yagola^b, A. N. Levashov^b

^a*Moscow State University, Leninskiye Gory, Moscow, 119991 Russia*

^b*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, ul. Bolshaya Gruzinskaya, 10, build. 1, Moscow, 123995 Russia*

*e-mail: tet@ifz.ru

Received 28 June, 2023

Revised 20 October, 2023

Accepted 20 November, 2023

Abstract. Unique solvability of systems of linear algebraic equations is studied to which many in-verse problems of geophysics are reduced as a result of discretization after applying the method of integral equations or integral representations. Examples of singular and nonsingular systems of vari-ous dimensions that arise when processing magnetometric and gravimetric data from experimental observations are discussed. Conclusions are drawn about methods for constructing an optimal net-work of experimental observation points.

Keywords: degenerate systems of linear algebraic equations, integral representations, single-valued solvability, Cauchy determinant.