

УДК 517.955.8 + 519.633

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ В СЛУЧАЕ МНОГИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ¹⁾

© 2024 г. А. В. Нестеров^{1,*}

¹117997 Москва, Стремянный пер., 36, Российский экономический университет
им. Г. В. Плеханова, Россия

*e-mail: andrenerstov@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.10.2023 г.

Переработанный вариант 12.11.2023 г.

Принята к публикации 17.11.2023 г.

Строится формальное асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малыми нелинейностями и диффузией в случае многих пространственных переменных. При принятых на данные задачи условиях, главный член асимптотики описывается многомерным обобщенным уравнением Бюргерса–Кортевега–де Фриза. При выполнении ряда условий приведена оценка остаточного члена по невязке. Библ. 8.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотическое разложение, обобщенное многомерное уравнение Бюргерса–Кортевега–де Фриза.

DOI: 10.31857/S0044466924030128, EDN: XFWMYE

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Строится асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малой нелинейностью и диффузионными слагаемыми

$$\varepsilon^2 \left(U_t + \sum_{i=1}^m D_i(p) U_{x_i} \right) = L_p U + \varepsilon F(U, p) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_{i,p} U_{x_i x_i}, \quad (1)$$

$$|x_i| < \infty, \quad 1 \leq i \leq m, \quad t > 0,$$

$$U(\bar{x}, 0, p) = \omega(\bar{x} \varepsilon^{-1}, p). \quad (2)$$

Здесь $U(\bar{x}, t, p)$ — решение, зависящее от времени, пространственных переменных и переменной p , $0 < \varepsilon < 1$ — малый положительный параметр, $D_i(p)$ — непрерывные по переменной p функции, $F(U, p)$ достаточно гладкая, $\omega(\bar{z}, p)$ быстро убывает вместе со всеми своими производными при $\|\bar{z}\| \rightarrow \infty$:

$$|\omega^{(k)}(\bar{z}, p)| < C e^{-\kappa \|\bar{z}\|^2} \quad \forall \bar{z}, C, \kappa > 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

константы C, κ могут зависеть от номера k . Операторы коэффициентов диффузионного обмена $B_{i,p}$ описывают диффузионные потоки по пространственным переменным x_i (первый индекс относится к пространственным переменным, второй указывает, что операторы $B_{i,p}$ действуют по переменной p).

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания в сфере научной деятельности на тему «Модели, методы и алгоритмы искусственного интеллекта в задачах экономики для анализа и стилизации многомерных данных, прогнозирования временных рядов и проектирования рекомендательных систем», номер проекта FSSW-2023-0004.

На данные задачи наложим условия.

I. Оператор L_p имеет счетное количество простых собственных значений λ_i , $i=0,1,\dots$, которым отвечает полная система собственных функций h_i . Оператор L_p имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda_0=0$, которому отвечает собственная функция h_0 , собственная функция h^*_0 есть собственная функция сопряженного оператора L^* , отвечающая нулевому собственному значению; остальные ненулевые собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части: $\operatorname{Re} \lambda < -\kappa < 0$.

II. $(F(Z, p), h^*_0) = 0$.

III. Операторы B^*_i имеют нулевые собственные значения, которым отвечают собственные функции h^*_0 : $B^*_i h^*_0 = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$.

IV. $(h_0, h^*_0) \neq 0$. Ниже положим $(h_0, h^*_0) = 1$.

Легко показать, что из условий I–III следует закон сохранения

$$\int_{R^m} (U, h^*_0) d\bar{x} = \text{const.} \quad (4)$$

Начальные условия (2), имеющие вид асимптотически узкой «шапочки», выбраны таким образом для того, чтобы исследовать асимпотику решения в наиболее интересных зонах больших градиентов начальных условий.

Настоящая работа является продолжением работ [1]–[3]. Основная цель настоящей работы – получение формального асимптотического разложения решения (ФАР, АР) задачи (1), (2) по малому параметру и определение задач, описывающих главный член разложения, представляющий в прикладных областях основной интерес.

Асимптотическое разложение (АР) решения начальной задачи строится методом пограничных функций (см. [4]) и имеет вид

$$\begin{aligned} U(\bar{x}, t, p) &= \bar{U}(\bar{x}, t, p) + S(\zeta, t, p) + \Pi(\xi, \tau, p) + R_N = \\ &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \left(\bar{u}_i(\bar{x}, t, p) + s_i(\zeta, t, p) + \pi_i(\xi, \tau, p) \right) + R_N = U_N + R_N. \end{aligned} \quad (5)$$

Вид переменных $\bar{\zeta}, \bar{\xi}, \tau$ описан ниже. Порядок разложения N определяется гладкостью входных данных.

Для краткости записи в тех случаях, когда это не вызывает неоднозначности при прочтении, в формулах зависимость от параметра p может быть опущена.

В соответствии с погранслоинным методом А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова (см. [4]) нелинейная функция $F(U)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} F(U) &= F(\bar{U} + S + \Pi + R) = F(\bar{U}) + \\ &+ (F(\bar{U} + S) - F(\bar{U})) + (F(\bar{U} + \Pi) - F(\bar{U})) + \\ &+ (F(\bar{U} + S + \Pi + R) - F(\bar{U} + S) - F(\bar{U} + \Pi) + F(\bar{U})) = \\ &= \bar{F} + SF + \Pi F + RF. \end{aligned} \quad (6)$$

В представлениях (5) и (6) $\bar{U}$ играет вспомогательную роль.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

Наличие нулевого собственного значения у оператора L_p относит сингулярно возмущенное уравнение (1) к так называемому критическому случаю (см. [4]). Построение АР для решения аналогичных задач подробно описано в работах [1]–[3], поэтому многие выкладки ниже опущены.

2.1. Построение регулярной части AP

Регулярная часть AP решения задачи (1) при условиях (2) равна нулю, но для дальнейшего изложения необходимо выписать задачу, из которой определяется главное слагаемое регулярной части:

$$\bar{U}(\bar{x}, t, p) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(\bar{x}, t, p). \quad (7)$$

Опуская выкладки, аналогичные выкладкам в работах [1]–[3], сразу выпишем форму главного члена $\bar{u}_0(x, t, p) = h(p)u_0(x, t)$ и уравнение, которому подчиняется функция $u_0(\bar{x}, t)$:

$$u_{0,t} + \sum_{i=1}^m V_i u_{0,x_i} = 0, \quad (8)$$

где

$$V_i = (D_i(p)h_0, h_0^*) / (h_0, h_0^*). \quad (9)$$

Полученные выражения для коэффициентов V_i существенны для дальнейших построений.

При начальных условиях, зависящих только от растянутых переменных $\bar{x} / \varepsilon$, начальные условия для u_0 имеют вид $u_0(\bar{x}, 0, p) = 0$, поэтому $u_0(\bar{x}, t, p) \equiv 0 \forall \bar{x}, t, p$, все остальные u_i тоже равны нулю. Соответственно этому, $\bar{U} = 0$ и представление (6) принимает вид

$$\begin{aligned} F(U) &= F(S + \Pi + R) = F(S) + F(\Pi) + \\ &+ (F(S + \Pi + R) - F(S) - F(\Pi)) = SF + \Pi F + RF. \end{aligned}$$

2.2. Построение функции S

Функция S , зависящая от растянутых переменных $\bar{\zeta}, t$, строится в виде

$$S(\bar{\zeta}, t, p) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i s_i(\bar{\zeta}, t, p), \quad \zeta_i = (x_i - V_i t) / \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m, \quad (10)$$

где V_i определяются формулами (9). Функция S есть решение уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(S_t + \sum_{i=1}^m D_i(p) S_{x_i} \right) &= L_p S + \varepsilon S F + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m S B_{i,p} S_{x_i x_i}, \\ |\bar{\zeta}| &< \infty, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Переходя к переменным $(\bar{\zeta}, t)$ и принимая во внимание $\bar{U} = 0$, получаем уравнение для определения $S(\bar{\zeta}, t, p)$

$$\varepsilon^2 S_t + \varepsilon \sum_{i=1}^m (D_i(p) - V_i) S_{\zeta_i} = A S + \varepsilon F(S, p) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_{i,p} S_{\zeta_i \zeta_i}. \quad (12)$$

Подставляя (10) в (12) (см. [4]), получаем соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : L_p s_0 &= 0, \\ \varepsilon^1 : L_p s_1 &= \tilde{S}_1, \\ \varepsilon^2 : L_p s_2 &= s_{0,t} + \tilde{S}_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{S}_1 &= \sum_{i=1}^m (D_i(p) - V_i) s_{0,\zeta_i} - F(s_0, p) - \sum_{i=1}^m B_{i,p} s_{0,\zeta_i \zeta_i}, \\ \tilde{S}_2 &= \sum_{i=1}^m (D_i(p) - V_i) s_{1,\zeta_i} - F'_u(s_0, p) s_1 - \sum_{i=1}^m B_{i,p} s_{1,\zeta_i \zeta_i}, \\ &\dots\end{aligned}$$

Из первого соотношения получаем

$$s_0(\bar{\zeta}, t, p) = \varphi_0(\bar{\zeta}, t) h_0(p). \quad (13)$$

Легко показать, что уравнение для s_I разрешимо в силу условий II и III, следовательно, s_I можно записать в виде

$$s_1(\bar{\zeta}, t) = \varphi_1(\bar{\zeta}, t) h_0(p) + G\tilde{S}_1. \quad (14)$$

В (13) и (14) $\varphi_0(\bar{\zeta}, t), \varphi_1(\bar{\zeta}, t)$ — пока не определенные функции, зависящие от переменных $(\bar{\zeta}, t)$, G — псевдообратный к L_p оператор. (Назовем линейный оператор G псевдообратным к оператору L , имеющему однократное нулевое собственное значение $\lambda = 0$, если решение уравнения $LY = F$ при выполнении условия $(F, h_0^*) = 0$ представимо в виде $Y = GF + Ch_0$, где C не зависит от p , h_0 — собственная функция сопряженного оператора L^* , отвечающая собственному значению $\lambda = 0$.)

Исключим с помощью (14) функцию φ_I из условия разрешимости уравнения для определения s_2 :

$$(s_{0,t} + \tilde{S}_2, h^*_{0}) = 0.$$

Подставляя сюда $s_0 = \varphi_0 h_0$, $\tilde{S}_2$, исключая s_I с помощью соотношения (14), принимая во внимание условия I–III и легко проверяемое равенство $((D_i(p) - V_j)h_0, h^*_{0}) = 0$, получаем замкнутое уравнение для определения φ_0 . Введем обозначения

$$\begin{aligned}\Psi_i &= (D_i(p) - V_i), \quad M_{ii} = (\Psi_i G \Psi_i h_0, h^*_{0}), \\ M_{ij} &= ((\Psi_i G \Psi_j h_0, h^*_{0}) + (\Psi_j G \Psi_i h_0, h^*_{0})) / 2, \\ F_{i,\text{eff}} &= -(\Psi_i G F(\varphi_0 h_0), h^*_{0}), \quad B_{ik,\text{eff}} = -(\Psi_k G B_i h_0, h^*_{0}).\end{aligned} \quad (15)$$

Тогда уравнение для определения φ_0 может быть записано в компактной форме

$$\begin{aligned}\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m (F_{i,\text{eff}}(\varphi_0))'_{\zeta_i} + \\ + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_k} = 0.\end{aligned} \quad (16)$$

Наложим условие диссипативности.

V. Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^m M_{ij} z_i z_j$ является отрицательно знакоопределенной (или полузнакоопределенной):

$$\sum_{i,j=1}^m M_{ij} z_i z_j \leq 0 \quad \forall \sum_{i=1}^m z_i^2 > 0.$$

Не затрагивая вопросы существования, единственности и свойств решений уравнения (16), формально построим остальные члены разложения (10).

Уравнения для остальных членов разложения (10) получаются стандартно (см. [4]). Опуская объемные выкладки, которые приведены, например, в [1],[2], вводя обозначение

$$F1_{i,\text{eff}} = (\Psi_i G F'(\varphi_0 h_0) h_0, h^*_{0}), \quad i > 0,$$

и принимая во внимание обозначения (15), введенные выше, запишем уравнение для определения φ_I :

$$\varphi_{1,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{1,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m (F_{1,\text{eff}} \varphi_1)_{\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{1,\zeta_i \zeta_k} = \Phi_1(\bar{\zeta}, t), \quad (17)$$

где Φ_j выражается через φ_0 . Отметим, что уравнение (17), в отличие от уравнения (16), линейное.

Уравнения для остальных членов разложения получаются аналогично и имеют аналогичный вид (с заменой индекса у φ и Φ с 1 на n , при этом Φ_n выражается через $\varphi_j, j < n$).

2.3. Построение функции Π

Построенная выше функция S ни в каком приближении не может удовлетворить начальным условиям. Для удовлетворения начальным условиям строится функция Π :

$$\Pi(\bar{\xi}, \tau, p) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \pi_i(\bar{\xi}, \tau, p), \quad \bar{\xi} = \bar{x} / \varepsilon, \quad \tau = t / \varepsilon^2, \quad (18)$$

Построение функции Π делается стандартно (см. [4]). Функция Π есть решение уравнения

$$\Pi_\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^m D_i(p) \Pi_{\xi_i} = L_p \Pi + \varepsilon \Pi F + \varepsilon \sum_{i=1}^m B_{i,p} \Pi_{\xi_i \xi_i}, \quad \|\bar{\xi}\| < \infty, \tau > 0, \quad (19)$$

совместно с функцией S должна удовлетворять начальным условиям и быть функцией погранслоя:

$$S(\bar{\zeta}, 0, p) + \Pi(\bar{\zeta}, 0, p) = \omega(\bar{x} \varepsilon^{-1}, p), \quad \Pi(\bar{\xi}, \tau, p) \rightarrow 0. \quad (20)$$

$\tau \rightarrow +\infty$

Построение уравнений, из которых определяются члены разложения (18), проводится стандартно (см. [4]), описано во многих работах и здесь не приводится.

Главный член разложения (18) есть решение уравнения

$$\pi_{0,\tau} = L_p \pi_0, \quad \|\bar{\xi}\| < \infty, \tau > 0. \quad (21)$$

Начальные условия для s_0 и π_0 ставятся совместно с условием $\pi_0 \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\pi_0|_{\tau=0} + s_0|_{t=0} = \omega(\bar{\xi}, p), \quad \pi_0(\bar{\xi}, \tau, p) \rightarrow 0. \quad (22)$$

$\tau \rightarrow +\infty$

В силу условия I на собственные значения оператора L_p и условия (20) функция π_0 имеет вид

$$\pi_0(\bar{\xi}, \tau, p) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\bar{\xi}) h_i(p) e^{\lambda_i \tau}. \quad (23)$$

Начальные условия для φ_0 и π_0 получаются из (22) и (23) с учетом $s_0 = h_0(p) \varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ и полноты системы собственных функций h_i :

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i(\bar{\xi}) h_i(p) + \varphi_0(\bar{\zeta}, 0) h_0(p) = \omega(\bar{\xi}, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(\bar{\xi}) h_i(p),$$

откуда однозначно находятся $\varphi_0(\bar{\zeta}, 0)$ и все $C_i, i=1, 2, \dots$:

$$\varphi_0(\bar{\zeta}, 0) = \omega_0(\bar{\zeta}), \quad C_i(\bar{\xi}) = \omega_i(\bar{\xi}) \quad \forall i \geq 1. \quad (24)$$

Начальные условия для $\varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ определены, функция π_0 построена в явном виде.

Остальные $\pi_i (i \geq 1)$ определяются из неоднородных уравнений

$$\pi_{i,\tau} = L_p \pi_i + P_i, \quad i \geq 1, \quad \|\bar{\xi}\| < \infty, \tau > 0. \quad (25)$$

Здесь P_i выражаются через $\pi_j, j < i$.

Начальные условия для функций φ_i и π_i ставятся совместно:

$$s_i(\bar{\xi}, 0, p) + \pi_i(\bar{\xi}, 0, p) = 0, \quad \pi_i(\bar{\xi}, \tau, p) \rightarrow 0 \quad \forall i > 0. \quad (26)$$

$\tau \rightarrow \infty$

Из (26) получаются начальные условия для φ_i и π_i по аналогии с [4].

Тем самым, построены задачи для определения всех членов АР (5).

3. ОЦЕНКА S- И П-ФУНКЦИЙ

3.1. Оценка S-функций

Авторам не удалось найти в литературе исчерпывающих результатов, касающихся вопросов существования, единственности и оценок решений начальных задач для уравнений типа (16). Для одномерных уравнений подобного вида ряд результатов приведен, например, в работах [5]–[7].

Ввиду этого обстоятельства, ниже придется оперировать с, по сути, непроверяемыми условиями на данные задачи.

Будем считать выполненными следующие условия 1 и 2.

Условие 1. Пусть выполнены условия I–V и функция $F(U, p)$, операторы L_p и $B_{i,p}$ таковы, что решение задачи (15), (23) существует и единственно на некотором промежутке $[0, T]$, и на этом промежутке выполняется оценка

$$|\varphi_0(x, t)| < C e^{-\kappa \varsigma^2} \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad C > 0, \kappa > 0, \quad (27)$$

где C и κ – положительные постоянные.

Условие 2. Решения всех задач (16), (26) до номера N существуют, единственны и удовлетворяют на том же промежутке оценке

$$|\varphi_i(x, t)| < C e^{-\kappa \varsigma^2} \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad \forall 1 \leq i \leq N, \quad C > 0, \kappa > 0. \quad (28)$$

3.2. Оценка П-функций

Из явного вида функции π_0 (23) и алгоритма построения функций π_i , $i=1, 2, \dots$, при выполнении условия I справедливы оценки

$$\|\pi_i(\bar{\xi}, \tau, p)\| < C \exp\left(-\kappa\left(\|\bar{\xi}\|^2 + \tau\right)\right), \quad \kappa > 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (29)$$

Доказательство элементарное и здесь не приводится.

4. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Ограничимся теоремой об оценке остаточного члена в АР (5) по невязке.

Будем считать выполненным следующее условие 3, непроверяемое непосредственно по данным задачи.

Условие 3. Пусть решение задачи (1), (2), существует и единственно на некотором промежутке $[0, T]$, где $T > 0$ не зависит от ε .

Оценка остаточного члена проводится по невязке.

Теорема. Если справедливы условия I–V и условия 1, 2, 3, то решение задачи (1), (2) представимо в виде

$$U(\bar{x}, t) = S_N(\bar{\xi}, t) + \Pi_N(\bar{\xi}, \tau) + R_{N+3} = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \left(s_i(\bar{\xi}, t) + \pi_i(\bar{\xi}, \tau) \right) + R_N = U_N + R_N,$$

где $S+\Pi$ есть построенное АР, и остаточный член удовлетворяет задаче Коши

$$\varepsilon^2 \left(R_t + \sum_{i=1}^m D_i(p) R_{x_i} \right) = L_p R + \varepsilon R F + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_i R_{x_i x_i} + r, \\ |\bar{x}| < \infty, t > 0, R(\bar{x}, 0) = 0, r = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Доказательство. Существование самой величины R следует из условия 3. Оценка $r = O(\varepsilon^{N+1})$ непосредственно вытекает из оценок (27)–(29) и алгоритма построения АР.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Отметим еще раз, что главный член АР (5)

$$U(\bar{x}, t, p) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \left(s_i(\bar{\zeta}, t, p) + \pi_i(\bar{\zeta}, \tau, p) \right) + R_N$$

при $t > t_0$, где $t_0 > 0$ – любое фиксированное (не зависящее от ε) число, имеет вид

$$s_0(\bar{\zeta}, t, p) = \varphi_0(\bar{\zeta}, t) h_0(p). \quad (30)$$

В представлении (30) $\varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ есть решение уравнения (15), которое в развернутой форме имеет вид

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m F'_{i,\text{eff}}(\varphi_0) \varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_k} = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) можно назвать обобщенным уравнением Бюргерса–Кортевега–де Фриза (см. [8]). Для квадратичной по переменной u функции $F(u, p)$ уравнение (31) становится прямым обобщением уравнения Бюргерса–Кортевега–де Фриза на многомерный случай:

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m k_i \varphi_0 \varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_k} = 0. \quad (32)$$

В случае одной пространственной переменной уравнение (32) отличается от уравнения Бюргерса–Кортевега–де Фриза (см. [8]) только коэффициентами.

2. Представляется интересным тот факт, что эволюция начального распределения (2), имеющего вид асимптотически узкой «шапочки», определяется уравнением (31) – уравнением в частных производных третьего порядка, в то время как исходное уравнение (1) содержит производные по пространственным переменным второго порядка.

3. При иной расстановке степеней малого параметра, а также при изменении условий на функцию F и на операторы L, B асимптотика решения может иметь иной вид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нестеров А.В. Об одном эффекте влияния малой взаимной диффузии на процессы переноса в многофазной среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 3. С. 519–528.
2. Заборский А.В., Нестеров А.В., Нечаев Д.Ю. Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с многими пространственными переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 137–145.
3. Заборский А.В., Нестеров А.В. Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малой диффузией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 87–95.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. С. 106.
5. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Асимптотика решения уравнения Уизема при больших временах // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 72.

6. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Об асимптотике при $t \rightarrow \infty$ решений нелинейных уравнений с диссипацией // Матем. заметки. 1989. Вып. 4. С. 118.
7. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега—де-Фриза—Бюргерса // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25. Вып. 1. С. 21.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 624.

ON ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED OPERATOR-DIFFERENTIAL TRANSPORT EQUATION WITH WEAK DIFFUSION IN THE CASE OF SEVERAL SPACE VARIABLES

A. V. Nesterov^{a,*}

^a*Plekhanov Russian University of Economics, 36 Stremyanny Lane, Moscow, 117997 Russia*

^{*}*e-mail: andrenerov@yandex.ru*

Received 10 October, 2023

Revised 12 November, 2023

Accepted 17 November, 2023

Abstract. A formal asymptotic expansion is constructed for the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed operator differential transport equation with small nonlinearities and weak diffusion in the case of several space variables. Under the conditions imposed on the data of the problem, the leading asymptotic term is described by the multidimensional generalized Burgers—Korteweg—de Vries equation. Under certain conditions, the remainder is estimated with respect to the residual.

Keywords: small parameter, singular perturbations, asymptotic expansion, generalized multidimensional Burgers—Korteweg—de Vries equation.