ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 5, с. 699–712

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.72

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИОННО-АВТОКОМПЕНСАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ СИГНАЛОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НЕКОРРЕКТНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Ю. Г. Булычев[1,*]

[1]344000 Ростов-на-Дону, пр-т Соколова, 96, АО «Всероссийский НИИ “Градиент”», Россия
*e-mail: ProfBulychev@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.
Переработанный вариант 20.12.2023 г.
Принята к публикации 06.02.2024 г.

Развивается численно-аналитический метод решения задачи оптимального распознавания совокупности возможных сигналов, наблюдаемых в виде аддитивной смеси, содержащей не только флуктуационную погрешность наблюдений (с неизвестным статистическим законом распределения), но и сингулярную помеху (с параметрической неопределенностью). Он позволяет не только обнаруживать сигналы, присутствующие в смеси, но и оценивать их параметры, в рамках заданного критерия качества и сопутствующих ограничений. Предлагаемый метод, реализованный на идее обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания значений линейных функционалов, обеспечивает декомпозицию вычислительной процедуры и автокомпенсацию сингулярной помехи, не прибегая к традиционному расширению пространства состояний. Для параметрического конечномерного представления сигналов и помехи используются линейные спектральные разложения в заданных функциональных базисах, для описания погрешности наблюдений достаточно знания лишь ее корреляционной матрицы. Анализируются случайные и методические погрешности, приводится иллюстративный пример. Библ. 35.

Ключевые слова: уравнение наблюдения, флуктуационная погрешность, сингулярная помеха, корреляционная матрица ошибок измерений, метод множителей Лагранжа, некорректное наблюдение, сингулярная помеха, оптимальное оценивание, условия несмещенности и инвариантности, декомпозиция, автокомпенсация, вычислительные алгоритмы распознавания.

DOI: 10.31857/S0044466924050011, **EDN**: YDNZJY

ВВЕДЕНИЕ

В различных областях человеческой деятельности (передача сообщений, локация, навигация, связь, радиотехническая разведка, радиоастрономия, техническая и медицинская диагностика, информационная безопасность и многих др.) возникает необходимость распознавания совокупности сигналов из заданного ансамбля с помощью различных информационно-измерительных систем. Под распознаванием понимается решение задач, связанных с оцениванием, обнаружением, различением и разрешением сигналов при различных уровнях априорной неопределенности (см., например, [1]–[23]).

Традиционно любая из задач распознавания решается в рамках статистического подхода (см. [1]–[12]), предполагающего знание соответствующих плотностей вероятности, функций распределения и отношений правдоподобия с учетом существенных и несущественных параметров и, как правило, вычисления порогов сравнения (для выбора оптимальных решений применительно к множеству возможных гипотез). При наличии априорной статистической информации осуществляется усреднение данных плотностей, функций и отношений по указанным параметрам, а при ее отсутствии используется процедура расширения пространства состояний, сопровождающаяся предварительной оценкой этих параметров по результатам наблюдений. В условиях значительной статистической неопределенности вводятся в рассмотрение классы возможных распределений, а при наличии априорной информации о вероятностях возможных альтернатив и возможных рисках (от применения тех или иных решений) вводятся байесовские решающие правила (см., например, [10], [13]). При наличии сведений о весах измерений, которые зависят от характеристик сенсоров, обработка данных может осуществляться в рамках оптимизационного подхода (см. [14]). Очевидно, что в условиях указанной неопределенности возможности получения таких сведений зачастую весьма ограничены.

В настоящее время весьма плодотворно развиваются адаптивные методы распознавания сигналов применительно к интеллектуальным системам обработки и анализа многомерной информации (см., например, [11], [12], [15]–[21]), которые используют процедуры фильтрации, кластеризации, нечеткого представления данных, аппроксимации на основе нейронных сетей и др. Однако известные проблемы, связанные со сходимостью и ее скоростью, сложностью разбиения на классы и выбором оптимальных параметров кластеризации, обучаемостью, наличием достаточной базы знаний и др., не позволяют применять такие методы для условий существенной неопределенности и жестких требований к оперативности некоторых классов информационно-измерительных систем. Данные проблемы еще более усугубляются, если в наблюдениях присутствует сингулярная помеха с большим числом степеней свободы (речь идет о помехе, которая имеет конечномерное параметрическое представление в заданном функциональном пространстве и может иметь на интервале наблюдения точки разрыва первого рода). В этом случае требуется предварительная оценка всех параметров такой помехи. В ряде работ такую помеху еще называют динамической или сигналоподобной, а сами наблюдения некорректными.

Существует широкий круг задач распознавания сигналов, для которых рассмотренные выше подходы к распознаванию сигналов трудно реализуемы, особенно применительно к классу информационно-измерительных систем, которые должны функционировать в реальном времени и условиях существенной неопределенности (в том числе, и с некорректными наблюдениями при минимуме заданных статистических данных). Для задач оценивания с указанными ограничениями широко применяется метод наименьших квадратов (МНК), оперирующий лишь с известной корреляционной матрицей ошибок наблюдений и обеспечивающий, в соответствии с известной теоремой Гаусса-Маркова, построение наилучшей линейной оценки (см. [23]). Одним из классических подходов к решению задачи распознавания для указанных систем может служить расширенный МНК (РМНК), который основан на расширении пространства состояний и предполагает включение в общий вектор оцениваемых параметров не только искомых спектральных коэффициентов линейных разложений сигналов, но и аналогичных коэффициентов сингулярной помехи. Известно (см. [22], [23]), что применение РМНК на практике зачастую приводит к эффекту “размазывания точности”, который наиболее выражен в многомерных задачах оценивания, оперирующих с плохо обусловленными матрицами. Кроме того, такое расширение приводит к существенному росту вычислительных затрат и, как следствие, к снижению оперативности вычислений.

В [24], [25] развита автокомпенсационная параллельная процедура обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания (ОИНО) значений линейных функционалов, которая является альтернативой РМНК и позволяет строить алгоритмы оптимального оценивания параметров одного сигнала в условиях некорректных наблюдений. Данная процедура, основанная на декомпозиции, не требует расширения и обеспечивает автокомпенсацию сингулярной помехи, не прибегая к оцениванию ее спектральных коэффициентов, а также позволяет организовать параллельные вычисления. Показан существенный вычислительный эффект.

В настоящей статье идея ОИНО получила дальнейшее развитие, направленное на решение гораздо более сложных задач, связанных с распознаванием совокупности сигналов в некорректных условиях наблюдения, при минимуме статистических данных о погрешности наблюдений. При этом термин “автокомпенсация” рассматривается в более широком смысле, поскольку каждый сигнал в уравнении наблюдения по отношению к другому сигналу этого же уравнения рассматривается как помеховый. Метод ориентирован на параллельные вычисления с учетом достигаемой декомпозиции разрабатываемых алгоритмов распознавания сигналов. Достижения в области таких вычислений позволяют добиться обработки наблюдений в реальном времени (см. [26]–[29]).

В статье не используются стохастические сигналы, например, марковские, которые характерны для теории линейной и нелинейной фильтраций, оперирующей с большим объемом достоверной статистической информации и приводящей во многих случаях к построению алгоритмов текущего оценивания с плохой сходимостью и(или) длительными переходными процессами, что не соответствует классу рассматриваемых ниже информационно-измерительных систем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу распознавания сигналов из заданного ансамбля $\{s_i(t)\}_{i=1}^{K}$, наблюдаемых в виде аддитивной смеси

$$h(t) = \sum_{i=1}^{K} q_i s_i(t) + \theta(t) + \xi(t), \quad q_i \in \{0, 1\}, \quad t \in [0, T], \tag{1.1}$$

где t — непрерывное время, K — число возможных сигналов ансамбля, $\theta(t)$ — сингулярная помеха, $\xi(t)$ — флуктуационная погрешность, q_i — параметр, характеризующий отсутствие ($q_i = 0$) или присутствие ($q_i = 1$) сигнала $s_i(t)$ в смеси.

При $K = 1$ имеем задачу обнаружения одного сигнала, если в (1.1) при $K > 1$ присутствует только один сигнал, то речь идет о задаче различения, а при наличии в (1.1) любого числа сигналов — о задаче разрешения. Сюда входят частные случаи: $q_i = 0\ \forall i = \overline{1,K}$ (когда все сигналы ансамбля отсутствуют) и $q_i = 1\ \forall i = \overline{1,K}$ (когда все сигналы ансамбля присутствуют).

Для элементов смеси (1.1) используем следующие линейные конечномерные модели:

$$s_i(t) = A_i^{\mathrm{T}} \Psi_i(t), \tag{1.2}$$

$$\theta(t) = B^{\mathrm{T}} \Omega(t), \tag{1.3}$$

где $A_i = \left[a_{im}, m = \overline{1, M_i}\right]^{\mathrm{T}}$ и $B = \left[b_j, j = \overline{1,J}\right]^{\mathrm{T}}$ — неизвестные коэффициенты, $\Psi_i(t) = \left[\psi_{im}(t), m = \overline{1, M_i}\right]^{\mathrm{T}}$ и $\Omega(t) = \left[\omega_j(t), j = \overline{1,J}\right]^{\mathrm{T}}$ — заданные базисные функции.

При необходимости упомянутые задачи распознавания сигналов требуют еще оценки векторных параметров A_i и B. В нашем случае относительно статистических характеристик этих параметров никаких предположений не делается.

В дальнейшем будем использовать наиболее распространенное на практике векторное уравнение наблюдения для дискретного времени

$$H = \sum_{i=1}^{K} q_i S_i + \Theta + \Xi, \tag{1.4}$$

где $H = \left[h_n, n = \overline{1,N}\right]^{\mathrm{T}}$, $S_i = \left[s_{in}, n = \overline{1,N}\right]^{\mathrm{T}}$, $\Theta = \left[\theta_n, n = \overline{1,N}\right]^{\mathrm{T}}$, $\Xi = \left[\xi_n, n = \overline{1,N}\right]^{\mathrm{T}}$, $h_n = h(t_n)$, $s_{in} = s_i(t_n)$, $\theta_n = \theta(t_n)$, $\xi_n = \xi(t_n)$.

Полагаем, что погрешность Ξ характеризуется нулевым математическим ожиданием и соответствующей корреляционной матрицей K^{Ξ}. Закон распределения для погрешности Ξ далее не используется (по аналогии с МНК из [23]).

Для дискретного времени имеем

$$S_i = \Psi_i A_i, \tag{1.5}$$

$$\Theta = \Omega B, \tag{1.6}$$

где $\Psi_i = \left[\psi_{imn}, n = \overline{1,N}, m = \overline{1,M_i}\right]$ — базисная матрица сигнала S_i, $\psi_{imn} = \psi_{im}(t_n)$, $\Omega = \left[\omega_{jn}, n = \overline{1,N}, j = \overline{1,J}\right]$ — базисная матрица помехи Θ, $\omega_{jn} = \omega_j(t_n)$.

Также полагаем, что расширенный функциональный базис $\{\Psi_1(t), \ldots, \Psi_K(t), \Omega(t)\}$ линейно независим на сетке узлов $\{t_n\}_{n=1}^{N}$ (по аналогии с [24], [25]).

В самом общем случае задача распознавания сигналов предполагает оптимальное обнаружение каждого сигнала $s_i(t)$ из заданного ансамбля (т.е. вынесение оценки q_i^* для параметра q_i) и, в случае его обнаружения, нахождение оценки A_i^* для вектора A_i и оценки B^* для вектора B (если задача оценивания должна решаться). В таких условиях (многоальтернативных решений) возможно семейство гипотез $\varGamma_l$, $l \in \{1, \ldots, L\}$ (где $L = 2^K$), характеризующих все возможные варианты присутствия и отсутствия сигналов ансамбля в смеси (1.1). Под $\varGamma^0 \in \{\varGamma_1, \ldots, \varGamma_L\}$ далее понимается истинная гипотеза.

Каждой гипотезе $\varGamma_l$ можно поставить в соответствие модельное наблюдение

$$H_l = \sum_{i=1}^{K_L} S_{il} + \Theta + \Xi, \quad l \in \{1, \ldots, L\}, \quad S_{il} \in \{S_1, \ldots, S_K\}, \tag{1.7}$$

где K_l — количество сигналов ансамбля, присутствующих в смеси согласно $\varGamma_l$.

С учетом (1.7) задача распознавания в рамках РМНК решается с использованием расширенного вектора спектральных коэффициентов $W_l = \left[A_{1l}^{\mathrm{T}}, \ldots, A_{K_l l}^{\mathrm{T}}, B^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ и критерия минимума квадратичной формы $\chi^{\text{рмнк}}(W_l)$:

$$\left(l^*, W_{l^*}\right) = \arg\min_{l, W_l} \chi^{\text{рмнк}}(W_l) = \arg\min_{l, W_l} \left[\Delta^{\text{рмнк}}(W_l)\right]^{\mathrm{T}} (K^{\Xi})^{-1} \Delta^{\text{рмнк}}(W_l), \tag{1.8}$$

где $\Delta^{\text{рмнк}}(W_l) = H - H^{\text{рмнк}}(W_l)$ — невязка.

Критерий (1.8) позволяет обеспечить минимизацию с учетом невязок $\Delta^{\text{рмнк}}(W_l)$ и весовой матрицы $(K^{\Xi})^{-1}$, при этом под W_{l^*} понимается оценка для W_l применительно к оптимальной гипотезе $\varGamma_{l^*}$, $l^* \in \{1, \ldots, L\}$.

Очевидно, что размерность такой задачи достаточно высока, и при работе с плохо обусловленными матрицами погрешности оценивания могут существенно превосходить методическую погрешность и обесценивать результаты оптимальной обработки наблюдений (это наглядно продемонстрировано в иллюстративном примере). Кроме того, критерий (1.8) не предусматривает возможности распараллеливания вычислительной процедуры.

Преодолеть недостатки РМНК во многом удается, если использовать модифицированную процедуру ОИНО, ориентированную на задачу распознавания сигналов. Для этого, применительно к фиксированному значению k, запишем наблюдение (1.7) в двух формах:

$$H_l = \begin{cases} S_{kl} + X_{kl} + \Xi, & k \in \{1, \ldots, K_l\}, \\ \Theta + X_l + \Xi, \end{cases} \tag{1.9}$$

где $S_{kl} = S_{kl}(A_{kl})$, $X_l = X_l(A_l)$, $A_L = \left[A_{1l}^{\mathrm{T}}, \ldots, A_{1K_l}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$,

$$X_{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{K_l} S_{il} + \Theta, \quad X_l = \sum_{i=1}^{K_L} S_{il}.$$

Первая форма позволяет рассматривать X_{kl} как составляющую, мешающую оцениванию полезного сигнала S_{kl}, а вторая форма позволяет рассматривать X_l как составляющую, мешающую оцениванию помехи Θ.

Далее нам потребуются матрицы оптимального линейного оценивания $P_{kl}^S = \left[p_{krnl}^S, r = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}\right]$, $P_{kl}^A = \left[p_{kmnl}^A, m = \overline{1, M_{kl}}, n = \overline{1, N}\right]$ и $P_l^\Theta = \left[p_{rnl}^\Theta, r = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}\right]$, $P_l^B = \left[p_{jnl}^B, j = \overline{1, J}, n = \overline{1, N}\right]$ для формирования оптимальных оценок (на основе ОИНО для фиксированного значения l) применительно к сигналу S_{kl} и вектору A_{kl} его спектральных коэффициентов, а также к помехе Θ и вектору B ее спектральных коэффициентов

$$S_{kl}^* = P_{kl}^S H_l, \quad A_{kl}^* = P_{kl}^A H_l, \quad k = \overline{1, K_l}, \quad \Theta_l^* = P_l^\Theta H_l, \quad B_l^* = P_l^B H_l.$$

Матрицы P_{kl}^S, P_{kl}^A и P_l^Θ, P_l^B для гипотезы Γ_l должны обеспечивать выполнение следующих равенств:

$$\begin{aligned} H_{kl}^S &= P_{kl}^S H_l = P_{kl}^S S_{kl} + P_{kl}^S X_{kl} + P_{kl}^S \Xi = S_{kl} + \Xi_{kl}^S, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ H_{kl}^A &= P_{kl}^A H_l = P_{kl}^A S_{kl} + P_{kl}^A X_{kl} + P_{kl}^A \Xi = A_{kl} + \Xi_{kl}^A, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ H_l^\Theta &= P_l^\Theta H_l = P_l^\Theta \Theta + P_l^\Theta X_l + P_l^\Theta \Xi = \Theta + \Xi_l^\Theta, \\ H_l^B &= P_l^B H_l = P_l^B \Theta + P_l^B X_l + P_l^B \Xi = B + \Xi_l^B, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\Xi_{kl}^S = P_{kl}^S \Xi$ и $\Xi_l^\Theta = P_l^\Theta \Xi$ — шумы с нулевыми математическими ожиданиями

$$\begin{aligned} &M\{\Xi_{kl}^S\} = M\{P_{kl}^S \Xi\} = P_{kl}^S M\{\Xi\} = [0]_{N \times 1}, \quad M\{\Xi_{kl}^A\} = M\{P_{kl}^A \Xi\} = P_{kl}^A M\{\Xi\} = [0]_{M_{kl} \times 1}, \\ &M\{\Xi_l^\Theta\} = M\{P_l^\Theta \Xi\} = P_l^\Theta M\{\Xi\} = [0]_{N \times 1}, \quad M\{\Xi_l^B\} = M\{P_l^B \Xi\} = P_l^B M\{\Xi\} = [0]_{J \times 1} \end{aligned}$$

(здесь $M\{\cdot\}$ — символ математического ожидания, $[0]_{N \times 1}$ и $[0]_{M_{kl} \times 1}$ — нулевые вектор-столбцы соответствующей размерности, которая указывается квадратными скобками с нижними индексами).

Кроме того, для корреляционных матриц $K_{kl}^{\Xi S}$, $K_{kl}^{\Xi A}$ и $K_l^{\Xi\Theta}$, $K_l^{\Xi B}$ случайных векторов Ξ_{kl}^S, Ξ_{kl}^A и Ξ_l^Θ, Ξ_l^B должны обеспечиваться соответствующие условия минимума

$$\begin{aligned} &Sp K_{kl}^{\Xi S} \to \min_{P_{kl}^S}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ &Sp K_{kl}^{\Xi A} \to \min_{P_{kl}^A}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ &Sp K_l^{\Xi\Theta} \to \min_{P_l^\Theta}, \\ &Sp K_l^{\Xi B} \to \min_{P_l^B}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где под Sp понимается оператор нахождения следа матрицы.

Формула (1.10) отражает свойства несмещенности (по отношению к параметрам полезных сигналов и сингулярной помехи)

$$\begin{aligned} &P_{kl}^{S} S_{kl} = S_{kl}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ &P_{kl}^{A} S_{kl} = A_{kl}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ &P_{l}^{\Theta} \Theta = \Theta, \\ &P_{l}^{B} \Theta = B, \end{aligned} \tag{1.12}$$

а также инвариантности (по отношению к мешающим составляющим X_{kl} и X_l)

$$\begin{aligned} &P_{kl}^{S} X_{kl} = [0]_{N\times 1}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ &P_{kl}^{A} X_{kl} = [0]_{M_{kl}\times 1}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ &P_{l}^{\Theta} X_l = [0]_{N\times 1}, \\ &P_{l}^{B} X_l = [0]_{J\times 1}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Если матрицы P_{kl}^{S}, P_{kl}^{A} и P_{l}^{Θ}, P_{l}^{B} применять непосредственно к наблюдению (1.4), то получаем набор оптимальных оценок всех параметров задачи распознавания сигналов для фиксированного значения l:

$$\begin{aligned} &S_{kl}^{*} = P_{kl}^{S} H = \sum_{i=1}^{K} q_i P_{kl}^{S} S_i + P_{kl}^{S}\Theta + \Xi_{kl}^{S}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ &A_{kl}^{*} = P_{kl}^{A} H = \sum_{i=1}^{K} q_i P_{kl}^{A} S_i + P_{kl}^{A}\Theta + \Xi_{kl}^{A}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ &\Theta_{l}^{*} = P_{l}^{\Theta} H = \sum_{i=1}^{K} q_i P_{l}^{\Theta} S_i + P_{l}^{\Theta}\Theta + \Xi_{l}^{\Theta}, \\ &B_{l}^{*} = P_{l}^{B} H = \sum_{i=1}^{K} q_i P_{l}^{B} S_i + P_{l}^{B}\Theta + \Xi_{l}^{B}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

В отличие от РМНК оценки параметров сигналов и помехи (1.14), формируемые в рамках ОИНО, осуществляются раздельно, что позволяет организовать параллельные вычисления, кроме того, выполнение условий инвариантности позволяет существенно снизить размерность обращаемых матриц (по аналогии с [24], [25]). Это хорошо продемонстрировано далее в иллюстративном примере.

Для истинной гипотезы Γ^0 с номером $l^0 \in \{1, 2, \ldots, L\}$, учитывая (1.12)–(1.14), получим

$$\begin{aligned} &S_{kl^0}^{*} = P_{kl^0}^{S} H = q_k S_k + \Xi_{kl^0}^{S}, \quad k = \overline{1, K_{l^0}}, \\ &A_{kl^0}^{*} = P_{kl^0}^{A} H = q_k A_k + \Xi_{kl^0}^{A}, \quad k = \overline{1, K_{l^0}}, \\ &\Theta_{l^0}^{*} = P_{l^0}^{\Theta} H = \Theta + \Xi_{l^0}^{\Theta}, \\ &B_{l^0}^{*} = P_{l^0}^{B} H = B + \Xi_{l^0}^{B}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Если Γ_l не соответствует истинной гипотезе Γ^0, то условия (1.12) и (1.13) нарушаются, что приводит к невязке

$$\Delta^{\text{оино}}(l) = H - H^{\text{оино}}\big(S_l^{*}, \Theta_l^{*}\big) = H - \sum_{i=1}^{K_L} S_{il}^{*} - \Theta_l^{*},$$

где $S_l^{*} = \big[(S_{il}^{*})^{\mathrm{T}}, i = \overline{1, K_l}\big]^{\mathrm{T}}$.

В этом случае задача распознавания в рамках ОИНО решается на основе критерия минимума квадратичной формы:

$$(l^{*}) = \arg\min_{l} \chi^{\text{оино}}(l) = \arg\min_{l} \big[\Delta^{\text{оино}}(l)\big]^{\mathrm{T}} \Big(K^{\Xi}\Big)^{-1} \Delta^{\text{оино}}(l), \tag{1.16}$$

при этом результирующие оценки параметров сигналов и сингулярной помехи находятся как $S_{l^*}^{*} = S_{l=l^*}^{*}$, $A_{l^*}^{*} = A_{l=l^*}^{*}$ и $\Theta_{l^*}^{*} = \Theta_{l=l^*}^{*}$, $B_{l^*}^{*} = B_{l=l^*}^{*}$, где $A_l^{*} = \big[(A_{kl}^{*})^{\mathrm{T}}, k = \overline{1, K_l}\big]^{\mathrm{T}}$.

Формулы (1.1)–(1.16) полностью задают все модели, ограничения и критерии, необходимые для разработки нового метода разрешения сигналов в условиях существенной априорной неопределенности, а также его сравнения с РМНК. Требуется: построить матрицы P_{kl}^{S}, P_{kl}^{A} и P_{l}^{Θ}, P_{l}^{B} для фиксированного l; с учетом построенных матриц и принятого критерия оптимальности в декомпозированном виде решить задачу оптимального распознавания сигналов без традиционного расширения пространства состояний в условиях минимума априорной статистической информации (используя лишь матрицу K^{Ξ}), обеспечив автокомпенсацию сингулярной помехи и параллельную обработку наблюдений; привести формулы для случайных и методических ошибок результирующего оценивания; сравнить разработанный метод с РМНК в плане вычислительной эффективности; продемонстрировать возможность его сравнения с известными статистическими методами распознавания сигналов; привести иллюстративный пример, подтверждающий преимущества разработанного метода по сравнению с РМНК.

2. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ОПТИМАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО АВТОКОМПЕНСАЦИОННО-ДЕКОМПОЗИЦИОННОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Предположим сначала, что в смеси (1.1) присутствуют все K сигналов ансамбля, т.е. $q_1 = \dots = q_K = 1$ (в этом случае индекс l можно опустить). Тогда решение задачи распознавания можно искать в классе линейных оценок в виде K параллельных алгоритмов вычислений:

$$A_k^* = P_k^A H, \quad k = \overline{1, K}, \tag{2.1}$$

где A_k^* — оценка вектора A_k, $P_k^A = \left[p_{kmn}^A, m = \overline{1, M}, n = \overline{1, N}\right]$ — матрица неизвестных весовых коэффициентов оптимального оценивания.

Корреляционная матрица ошибок оценивания на основе (2.1) находится по правилу

$$K_k^A = P_k^A K^{\Xi} \left(P_k^A\right)^{\mathrm{T}}, \quad k = \overline{1, K}. \tag{2.2}$$

Критерий качества, необходимый для нахождения P_k^A, соответствует минимизации следа матрицы SpK_k^A (см. (1.11)). Кроме того, должны выполняться сопутствующие условия несмещенности (1.12) и инвариантности (1.13).

Для нахождения матрицы P_k^A преобразуем (1.9) к следующему виду:

$$H = S_k + X_k + \Xi = S_k + Y_k C_k + \Xi, \tag{2.3}$$

где $X_k = \left[x_{kn}, n = \overline{1, N}\right]^{\mathrm{T}}$,

$Y_k = \left[\Psi_1 \vdots \dots \vdots \Psi_{k-1} \vdots \dots \vdots \Psi_{k+1} \vdots \dots \vdots \Psi_K \vdots \Omega\right]$ — матрица размером $N \times \left(\overline{M}_k + J\right)$,

$C_k = \left[A_1^{\mathrm{T}} \vdots \dots \vdots A_{k-1}^{\mathrm{T}} \vdots \dots \vdots A_{k+1}^{\mathrm{T}} \vdots \dots \vdots A_K^{\mathrm{T}} \vdots B^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор размером $\left(\overline{M}_k + J\right) \times 1$,

$\overline{M}_k = M_1 + \dots + M_{k-1} + M_{k+1} + \dots + M_K$.

Применительно к рассматриваемому случаю условия несмещенности и инвариантности (с учетом (1.12), (1.13) и (2.3)) можно записать так:

$$P_k^A \Psi_k - [E]_{M_k \times M_k} = [0]_{M_k \times M_k}, \tag{2.4}$$

$$P_k^A Y_k = [0]_{M_k \times \left(\overline{M}_k + J\right)}, \tag{2.5}$$

где $[0]_{M_k \times M_k}$ и $[E]_{M_k \times M_k}$ — нулевая и единичная матрицы соответственно, $[\cdot]_{M_k \times M_k}$ — обозначение размерности матрицы, стоящей в квадратных скобках (такое обозначение используется далее по всей статье).

Для дальнейшего изложения потребуется вектор $P_{km}^A = \left[P_{kmn}^A, n = \overline{1, N}\right]^{\mathrm{T}}$ который состоит из элементов m-й строки матрицы P_k^A. Он позволяет найти скалярную оценку a_{km}^* коэффициента a_{km} для фиксированных значений k и m. Очевидно, что выполняются условия несмещенности $\left(P_{km}^A\right)^{\mathrm{T}} S_k = a_{km}$ и инвариантности $\left(P_{km}^A\right)^{\mathrm{T}} X_k = 0$. Или, по аналогии с (2.4) и (2.5), имеем

$$\left(P_{km}^A\right)^{\mathrm{T}} \Psi_k - E_{km}^{\mathrm{T}} = [0]_{1 \times M_k}, \tag{2.6}$$

$$Y_k^{\mathrm{T}} P_{km}^A = [0]_{\left(\overline{M}_{kl} + J\right) \times 1}, \tag{2.7}$$

где E_{km} — вектор-столбец, состоящий из нулей, но на m-й позиции стоит единица.

Задачу оптимального оценивания коэффициента a_{km} будем решать методом множителей Лагранжа путем нахождения экстремума следующей функции:

$$F\left(P_{km}^{A}, \gamma_{km}, \eta_{km}\right) = \left(P_{km}^{A}\right)^{\mathrm{T}} K^{\Xi} P_{km}^{A} + \gamma_{km}^{\mathrm{T}} Y_k^{\mathrm{T}} P_{km}^{A} + \left[\left(P_{km}^{A}\right)^{\mathrm{T}} \Psi_k - E_{km}^{\mathrm{T}}\right] \eta_{km}, \tag{2.8}$$

$\gamma_{km} = \left[\gamma_{kmn}, n = \overline{1, \overline{M}_k + J}\right]^{\mathrm{T}}$ и $\eta_{km} = \left[\eta_{kmn}, n = \overline{1, M_k}\right]^{\mathrm{T}}$ — векторные множители Лагранжа, соответствующие условиям несмещенности (2.6) и инвариантности (2.7).

Дифференцируя функцию (2.8) по всем аргументам, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
\partial F/\partial P_{km}^{A} &= 2K^{\Xi} P_{km}^{A} + Y_k \gamma_{km} + \Psi_k \eta_{km} = [0]_{N \times 1},\\
\partial F/\partial \gamma_{km} &= Y_k^{\mathrm{T}} P_{km}^{A} = [0]_{\left(\overline{M}_k + J\right) \times 1},\\
\partial F/\partial \eta_{km} &= \Psi_k^{\mathrm{T}} P_{km}^{A} - E_{km} = [0]_{M_k \times 1},
\end{aligned}$$

Введем следующие матрицы:

$$V_k = \left(K^{\Xi}\right)^{-1} \Psi_k,\ \overline{V}_k = \left(K^{\Xi}\right)^{-1} Y_k,\ \boldsymbol{\Phi}_k = \Psi_k^{\mathrm{T}} V_k,\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k = Y_k^{\mathrm{T}} \overline{V}_k,\ Z_k = Y_k^{\mathrm{T}} V_k,\ \bar{Z}_k = \Psi_k^{\mathrm{T}} \overline{V}_k.$$

С учетом полученной системы уравнений и принятых обозначений находим строку весовых коэффициентов

$$P_{km}^{A} = 2^{-1}\left(V_k \eta_{km} - \overline{V}_k \gamma_{km}\right). \tag{2.9}$$

Умножая левую и правую части (2.9) слева на матрицу Y_k^{T} и учитывая условие инвариантности (2.7), после несложных преобразований находим

$$\gamma_{km} = \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} Z_k \eta_{km}. \tag{2.10}$$

Аналогичным умножением (2.9) на матрицу Ψ_k^{T} и учитывая условие несмещенности (2.6) получаем

$$\eta_{km} = 2\boldsymbol{\Phi}_k\left(E_{km} + 2^{-1} \bar{Z}_k \gamma_{km}\right). \tag{2.11}$$

Разрешая (2.10) и (2.11) относительно γ_{km} и η_{km}, имеем

$$\gamma_{km} = 2\bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} Z_k\left([E]_{M_k \times M_k} - \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \bar{Z}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} Z_k\right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} E_{km}, \tag{2.12}$$

$$\eta_{km} = 2\left([E]_{M_k \times M_k} - \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \bar{Z}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} Z_k\right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} E_{km}. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.12) и (2.13) в (2.9), получаем

$$P_{km}^{A} = \left(V_k - \overline{V}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} Z_k\right)\left([E]_{M_k \times M_k} - \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \bar{Z}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} Z_k\right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} E_{km}. \tag{2.14}$$

Вводя обозначение $\Lambda_k = [E]_{N \times N} - \overline{V}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} Y_k^{T}$, формулу (2.14) запишем в следующем компактном виде:

$$P_{km}^{A} = \Lambda_k V_k \left(\Psi_k^{\mathrm{T}} \Lambda_k V_k\right)^{-1} E_{km}. \tag{2.15}$$

С учетом (2.15) скалярная оценка a_{km}^{*} коэффициента a_{km} находится так:

$$a_{km}^{*} = H^{\mathrm{T}} P_{km}^{A} = H^{\mathrm{T}} \Lambda_k V_k \left(\Psi_k^{\mathrm{T}} \Lambda_k V_k\right)^{-1} E_{km}. \tag{2.16}$$

Переходя от скалярного коэффициента a_{km} к вектору A_k с учетом (2.15) получаем матрицу оптимального оценивания

$$P_k^{A} = \left[\Lambda_k V_k \left(\Psi_k^{\mathrm{T}} \Lambda_k V_k\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}, \quad k = \overline{1, K}. \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (2.1), находим искомые оценки

$$A_k^{*} = P_k^{A} H = \left[\Lambda_k V_k \left(\Psi_k^{\mathrm{T}} \Lambda_k V_k\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}} H, \quad k = \overline{1, K}. \tag{2.18}$$

В свою очередь, матрицу оптимального оценивания сигналов S_{kl} находим как

$$P_k^{S} = \Psi_k P_k^{A}, \tag{2.19}$$

а саму оценку в виде

$$S_k^* = \Psi_k A_k^* = \Psi_k \Big[\Lambda_k V_k \big(\Psi_k^{\mathrm{T}} \Lambda_k V_k\big)^{-1}\Big]^{\mathrm{T}} H, \quad k = \overline{1, K}. \tag{2.20}$$

Оценки (2.18) и (2.20) являются оптимальными в смысле несмещенности, эффективности (обеспечивают минимальную дисперсию) и инвариантности (по отношению к результирующей сингулярной помехе).

Для решения ряда задач распознавания сигналов, помимо матриц P_k^A и P_k^S, возникает необходимость построения матриц P^B и P^Θ оптимального оценивания параметров помехи с соблюдением условий несмещенности и инвариантности (по аналогии с (2.6) и (2.7)). Теперь вместо Y_{kl} и C_{kl} строятся матрицы Y_k^Θ и C_k^Θ с учетом того, что при нахождении оценок B^* и Θ^* все полезные сигналы рассматриваются как мешающие составляющие. Формулы для матриц P^B, P^Θ и оценок B^*, Θ^* записываются по аналогии с (2.17), (2.18) и (2.19), (2.20). Для задач распознавания с учетом возможных гипотез $\mathit{\Gamma}_l$ строится семейство матриц P_k^A, P_k^S и P_k^B, P_k^Θ оптимального оценивания для всех значений l.

Рассмотренных в данном разделе матриц оценивания необходимо и достаточно для решения широкого круга задач, связанных с распознаванием сигналов, в условиях существенной априорной неопределенности. В следующем разделе рассматриваются наиболее распространенные задачи распознавания: оценивание (известно какие сигналы в наблюдении присутствуют и требуется только оценить их параметры); обнаружение (надо установить присутствует ли в наблюдении полезный сигнал); различение (в наблюдении присутствует только один сигнал из заданного ансамбля, и надо установить какой именно); разрешение (в наблюдении могут присутствовать те или иные сигналы ансамбля, и надо установить какие). Кроме того, задачи обнаружения, различения и разрешения могут сопровождаться оцениванием параметров сигналов и помехи.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ СИГНАЛОВ

3.1. Алгоритм оценивания сигналов 1

Пусть в смеси (1.1) присутствуют все сигналы ансамбля, т.е. $q_1 = \dots = q_K = 1$. Требуется дать оценку всех коэффициентов A_k и самих сигналов S_k, не прибегая к оценке коэффициента B помехи Θ, т.е. без расширения пространства состояний. В данной задаче гипотезы не используются, поэтому индекс l опускаем.

Шаг 1.1. Строим матрицы P_k^A весовых коэффициентов.

Шаг 1.2. Находим оценки $A_k^* = P_k^A H$ векторных коэффициентов A_k, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 1.3. Строим матрицы $P_k^S = \Psi_k P_k^A$, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 1.4. Находим оценки $S_k^* = P_k^S H$ самих сигналов S_k, $k = \overline{1, K}$.

3.2. Алгоритм оценивания сигналов и помехи 2

Пусть в смеси (1.1) присутствуют все сигналы ансамбля, т.е. $q_1 = \dots = q_K = 1$. Требуется дать оценки всех коэффициентов A_k и самих сигналов S_k, а также оценки коэффициента B и самой помехи Θ. В данной задаче гипотезы не используются, поэтому индекс опускаем.

Шаг 2.1. Строим матрицы P_k^A, P_k^S и P^B, P^Θ.

Шаг 2.2. Находим результирующие оценки A_k^*, S_k^* и B^*, Θ^*.

3.3. Алгоритм совместного обнаружения-оценивания 3

В этом случае $K = 1$, $L = 2$, и, следовательно, можно записать $H = qS + \Theta + \Xi$, т.е. в зависимости от значения коэффициента q возможны две гипотезы ($\mathit{\Gamma}_1$, если $q = 0$ и $\mathit{\Gamma}_2$, если $q = 1$). Надо дать оценку $l^* \in \{1, 2\}$ для параметра $l \in \{1, 2\}$, а также построить оценки A_l^*, S_l^* и B_l^*, Θ_l^*. В этом случае индекс k можно опустить.

Шаг 3.1. Строим матрицы $P_{l=1}^A$, $P_{l=2}^A$ и $P_{l=1}^S$, $P_{l=2}^S$ для гипотез $\mathit{\Gamma}_1$ и $\mathit{\Gamma}_2$ соответственно.

Шаг 3.2. Находим частные оценки $A_{l=1}^*$, $S_{l=1}^*$ (для гипотезы $\mathit{\Gamma}_1$) и $A_{l=2}^*$, $S_{l=2}^*$ (для гипотезы $\mathit{\Gamma}_2$).

Шаг 3.3. Строим матрицы $P_{l=1}^B$, $P_{l=1}^\Theta$ и $P_{l=2}^B$, $P_{l=2}^\Theta$ для гипотез $\mathit{\Gamma}_1$ и $\mathit{\Gamma}_2$ соответственно.

Шаг 3.4. Находим частные оценки $B_{l=1}^*$, $\Theta_{l=1}^*$ и $B_{l=2}^*$, $\Theta_{l=2}^*$.

Шаг 3.5. Находим невязки $\Delta^{\text{оино}}(l) = H - S_l^* - \Theta_l^*$ и номер наилучшей гипотезы с использованием критерия

$$l^* = \arg\min_l \chi^{\text{оино}}(l) = \arg\min_l \left[\Delta^{\text{оино}}(l)\right]^{\mathrm{T}} \left(K^\Xi\right)^{-1} \Delta^{\text{оино}}(l), \quad l^* \in \{1, 2\}.$$

Шаг 3.6. Находим результирующие оценки $A_{l^*}^*$, $S_{l^*}^*$ и $B_{l^*}^*$, $\Theta_{l^*}^*$.

3.4. Алгоритм совместного различения и оценивания параметров сигналов и помехи 4

В этом случае K произвольное, $L = K$, $H = S_l + \Theta + \Xi$, $l \in \{1, 2, \ldots, L\}$. Надо установить, какой сигнал из заданного ансамбля $\{S_1, S_2, \ldots, S_L\}$ присутствует в наблюдении, т.е. вынести оценку $l^* \in \{1, 2, \ldots, L\}$ для параметра l а также построить оценки $A^*_{l^*}$, $S^*_{l^*}$ и $B^*_{l^*}$, $\Theta^*_{l^*}$. В этом случае индекс k опускаем.

Шаг 4.1. Строим матрицы P^A_l, P^S_l и P^B_l, P^Θ_l для всех гипотез Γ_l.

Шаг 4.2. Находим частные оценки A^*_l, S^*_l и B^*_l, Θ^*_l для всех гипотез Γ_l.

Шаг 4.3. Находим невязки $\Delta^{\text{оино}}(l) = H - S^*_l - \Theta^*_l$ для всех гипотез Γ_l.

Шаг 4.4. Находим номер наилучшей гипотезы с использованием следующего критерия:

$$l^* = \arg\min_l \chi^{\text{оино}}(l) = \arg\min_l \left[\Delta^{\text{оино}}(l)\right]^{\mathrm{T}} \left(K^\Xi\right)^{-1} \Delta^{\text{оино}}(l).$$

Шаг 4.5. Находим результирующие оценки $A^*_{l^*}$, $S^*_{l^*}$ и $B^*_{l^*}$, $\Theta^*_{l^*}$ для гипотезы Γ_{l^*}.

3.5. Алгоритм совместного разрешения и оценивания параметров сигналов и помехи 5

Рассматривается общий случай (1.1).

Шаг 5.1. Строим матрицы P^A_{kl}, P^S_{kl} и P^B_l, P^Θ_l для всех гипотез Γ_l и k.

Шаг 5.2. Находим частные оценки A^*_{kl}, S^*_{kl} и B^*_l, Θ^*_l для всех гипотез Γ_l и k.

Шаг 5.3. Находим невязки $\Delta^{\text{оино}}(l) = H - \sum_{k=1}^{K_l} S^*_{kl} - \Theta^*_l$ для всех гипотез Γ_l.

Шаг 5.4. Находим номер наилучшей гипотезы с использованием следующего критерия:

$$l^* = \arg\min_l \chi^{\text{оино}}(l) = \arg\min_l \left[\Delta^{\text{оино}}(l)\right]^{\mathrm{T}} \left(K^\Xi\right)^{-1} \Delta^{\text{оино}}(l).$$

Шаг 5.5. Находим результирующие оценки $A^*_{kl^*}$, $S^*_{kl^*}$ (где $k = \overline{1, K_{l^*}}$) и $B^*_{l^*}$, $\Theta^*_{l^*}$ для гипотезы Γ_{l^*}.

Замечание. Использованные в алгоритмах критерии оптимизации обеспечивают минимизацию влияния друг на друга соседних сигналов ансамбля, автокомпенсацию сингулярной помехи и сглаживание шума (потенциально сравнимое с возможностями РМНК).

Рассмотренные алгоритмы лишь иллюстрируют некоторые возможности развиваемого метода. Возможны и другие постановки задачи распознавания сигналов в условиях неопределенности с учетом особенностей назначения и применения рассматриваемой информационно-измерительной системы. Очевидно, что предложенный метод можно комплексировать и с традиционными вероятностными подходами в зависимости от условий функционирования системы.

Необходимость обработки наблюдений для множества гипотез приводит к необходимости организации 2^L каналов параллельных вычислений. Для современных информационно-измерительных систем, ориентированных на режим функционирования в реальном времени, предлагаемый метод может оказаться весьма перспективным.

4. К АНАЛИЗУ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПОЗНАВАНИЯ

В силу линейности предлагаемого метода существенно упрощается нахождение корреляционных матриц ошибок оценивания. Так, с учетом (2.17) и (2.18) находим выражение для корреляционной матрицы оценки

$$K^A_{kl^*} = \left[\Lambda_{kl^*} V_{kl^*} \left(\Psi^{\mathrm{T}}_{kl^*} \Lambda_{kl^*} V_{kl^*}\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}} K^\Xi \left[\Lambda_{kl^*} V_{kl^*} \left(\Psi^{\mathrm{T}}_{kl^*} \Lambda_{kl^*} V_{kl^*}\right)^{-1}\right], \quad k = \overline{1, K_{l^*}}. \tag{4.1}$$

Выражение (4.1) позволяет в каждом конкретном случае оценить потенциальные возможности метода с учетом требований, задаваемых к системе. По аналогии с (4.1) можно записать математические формулы для корреляционных матриц $K^S_{kl^*}$, $K^B_{l^*}$ и $K^\Theta_{l^*}$, характеризующих точности оценивания не только отсчетов сигналов и их спектральных коэффициентов, но и сингулярной помехи. Дисперсии ошибок оценивания скалярных координат a_{km} вектора A_k и отсчетов s_{kn} сигнала S_k находятся так:

$$\left(\sigma^A_{kml^*}\right)^2 = \left(P^A_{kml^*}\right)^{\mathrm{T}} K^\Xi P^A_{kml^*}, \quad m = \overline{1, M_{kl^*}},$$
$$\left(\sigma^S_{knl^*}\right)^2 = \left(P^S_{knl^*}\right)^{\mathrm{T}} K^\Xi P^S_{knl^*}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Для оценки характеристик обнаружения, различения и разрешения сигналов, а также возможности сравнения развитого и известных методов, достаточно задаться наиболее подходящим (для рассматриваемых условий наблюдения) законом распределения флуктуационных погрешностей (как правило, гауссовским), а также при необходимости некоторыми априорными вероятностями (например, появления полезных сигналов в наблюдении) и значениями рисков от неправильных решений. Это позволяет исследовать характеристики метода в рамках известных статистических подходов (см. [1], [2], [4], [5], [10]), для чего строятся соответствующие функции правдоподобия и на их основе находятся значения наиболее важных (для конкретной задачи) линейных функционалов (например, вероятностей ложной тревоги, правильного обнаружения и т.д.).

Анализ выражений (2.14) и (2.17) показывает, что в развиваемом методе требуется обращение матрицы $\bar{\Phi}_{kl}$ размером $\left(\overline{M}_{kl}+J\right)\times\left(\overline{M}_{kl}+J\right)$, а также матрицы $\Psi_{kl}^{\mathrm{T}}\Lambda_{kl}V_{kl}$ размером $M_{kl}\times M_{kl}$. Применительно к РМНК для фиксированного k предполагается обращение матрицы большего размера $\left(M_{1l}+\dots+M_{K_l l}+J\right)\times\left(M_{1l}+\dots\right.$ $\left.\dots+M_{K_l l}+J\right)$. Очевидно, что при плохой обусловленности обращаемых матриц предлагаемый метод может оказаться весьма эффективным в вычислительном плане.

Пусть модельное уравнение наблюдения имеет вид

$$H_l=(S_{kl}+\Delta S_{kl})+(X_{kl}+\Delta X_{kl})+\Xi,$$

где ΔS_{kl} и ΔX_{kl} — добавки к сигналу и помехе, обусловленные учетом “хвостов” используемых функциональных рядов.

В этом случае для оценки a_{kml}^* (вычисленной без учета этих добавок) имеем

$$a_{kml}^*=P_{kml}^{\mathrm{T}}H_l=P_{kml}^{\mathrm{T}}(S_{kl}+\Delta S_{kl})+P_{kml}^{\mathrm{T}}(X_{kl}+\Delta X_{kl})+P_{kml}^{\mathrm{T}}\Xi,$$

Соответственно для истинного значения a_{kml} справедливо представление

$$a_{kml}=(P_{kml}+\Delta P_{kml})^{\mathrm{T}}(S_{kl}+\Delta S_{kl})+(P_{kml}+\Delta P_{kml})^{\mathrm{T}}(X_{kl}+\Delta X_{kl}),$$

где ΔP_{kml} — добавка к столбцу весовых коэффициентов, необходимая для учета указанных “хвостов”.

Если использовать символ математического ожидания $M\{\cdot\}$, то в качестве среднего значения методической ошибки можно принять величину

$$\Delta_{kml}=M\{a_{kml}-a_{kml}^*\}=\Delta P_{kml}^{\mathrm{T}}(S_{kl}+\Delta S_{kl})+\Delta P_{kml}^{\mathrm{T}}(X_{kl}+\Delta X_{kl}), \tag{4.2}$$

где учтено, что $M\{\Xi\}=0$.

Используя (4.2) совместно с (4.1), можно подобрать необходимые параметры развиваемого метода, обеспечивающие минимизацию результирующей ошибки оценивания в каждом конкретном случае.

Необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи оценивания по аналогии с [24], [25] требуют невырожденности и соблюдения некоторых ограничений на ранги ряда матриц. Выполнение заданных условий на практике обеспечивается рациональным выбором используемых функциональных базисов, числа степеней свободы в моделях сигналов и сингулярной помехи, а также заданием соответствующих условий наблюдения. Все эти вопросы относятся к планированию вычислительного эксперимента и далее не рассматриваются, поскольку требуют отдельных исследований в каждом конкретном случае.

Для оценки вычислительной эффективности развитого метода достаточно воспользоваться результатами работы [24], в которой демонстрируется возможность реализации процедуры ОИНО на основе распределенной обработки данных. В качестве показателя вычислительной эффективности метода можно принять время, затрачиваемое на получение искомых оценок. Данное время определяется быстродействием распределенной среды, общим числом операций, необходимых при реализации метода, и способом программирования. В [24] показано, что поскольку процедура ОИНО не требует расширения пространства состояний, то реализуемые на ее основе методы оценивания позволяют достичь значительного выигрыша в вычислительной эффективности. В [24] также дана количественная оценка достигаемого выигрыша на конкретном примере.

5. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 1 (для алгоритма 1). Пусть в смеси (1.1) присутствуют все сигналы ансамбля, т.е. $q_1=\dots=q_k=1$. Требуется дать оценку всех коэффициентов A_k и самих сигналов S_k, не прибегая к оценке коэффициента B помехи Θ, т.е. без расширения пространства состояний. В данной задаче гипотезы не используются, поэтому индекс l опускаем.

Пример искусственно выбран таким, чтобы он был достаточно простым и, в то же время, наглядно демонстрировал достигаемый вычислительный эффект развиваемого метода по сравнению с РМНК. Для этой цели использованы исходные данные, приводящие к задаче оценивания параметров сигналов с плохо обусловленными матрицами. Пусть $K=2$, $H=S_1+S_2+\Theta+\Xi$, где $A_1=[a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}]^{\mathrm{T}}$, $\Psi_1(t)=[1,t^2,t^3,t^5]^{\mathrm{T}}$, $M_1=4$,

$S_1 = A_1^{\mathrm{T}}\Psi_1$, $A_2 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}]^{\mathrm{T}}$, $\Psi_2(t) = [t, t^4, t^6]^{\mathrm{T}}$, $M_2 = 3$, $S_2 = A_2^{\mathrm{T}}\Psi_2$, $B = [b_1, b_2]^{\mathrm{T}}$, $\Omega(t) = \big[\omega_1(t), \omega_2(t)\big]^{\mathrm{T}}$, $J = 2$,

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^5 \\ 1 & t_2^2 & t_2^3 & t_2^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N^2 & t_N^3 & t_N^5 \end{bmatrix}, \ \Psi_2 = \begin{bmatrix} t_1 & t_1^4 & t_1^6 \\ t_2 & t_2^4 & t_2^6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_N & t_N^4 & t_N^6 \end{bmatrix}, \ \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1(t_1) & \omega_2(t_1) \\ \omega_1(t_2) & \omega_2(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \omega_1(t_N) & \omega_2(t_N) \end{bmatrix}, \ X_1 = Y_1C_1, \ \ X_2 = Y_2C_2,$$

$Y_1 = [\Psi_2 \vdots \Omega]$ — матрица размером $N \times 5$, $Y_2 = [\Psi_1 \vdots \Omega]$ — матрица размером $N \times 6$,
$C_1 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_1, b_2]^{\mathrm{T}}$, $C_2 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1, b_2]^{\mathrm{T}}$.

При формировании уравнения наблюдения полагалось $a_{11} = 10^3$, $a_{12} = 50$, $a_{13} = 10$, $a_{14} = 3$. $a_{21} = -2\times 10^3$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = 1$, $K^{\Xi} = \mathrm{diag}\big[\sigma_n^2, n = \overline{1, N}\big]$, $\sigma_n^2 = \sigma^2 = 4 \times 10^{-2}$, $t_{n+1} - t_n = 0.5$, $N = 300$. Рассматривается пример с большой по объему выборкой, обеспечивающей хорошее сглаживание шума наблюдения.

Мерой качества оценивания (в процентах) служит величина $\delta a_{km} = 10^2|a_{km}^* - a_{km}|/|\bar{a}_{km}^*|$, где $\bar{a}_{km}^* = \max\{a_{km}^*, |a_{km}|\}$. Сингулярная помеха задавалась в виде линейной комбинации из двух базисных функций

$$\theta(t, b_1, b_2) = b_1\omega_1(t) + b_2\omega_2(t) = b_1\sin(\alpha_1 t) + b_2\sin(\alpha_2 t),$$

где α_1 и α_2 — произвольные числа.

Параметры помехи выбирались случайным образом (их конкретные значения не принципиальны, поскольку в данном методе достигается полная автокомпенсация помехи при любых значениях параметров).

Все расчеты проводились с точностью до 15-ти разрядов путем усреднения результатов, полученных в ходе тысячи экспериментов. Применительно к развиваемому методу получены следующие оценки для координат векторов $\delta A_1 = \big[\delta a_{1m}, m = \overline{1, 4}\big]^{\mathrm{T}}$ и $\delta A_2 = \big[\delta a_{2m}, m = \overline{1, 3}\big]^{\mathrm{T}}$:

$$\delta a_{11} = 1.585, \quad \delta a_{12} = 0.621, \quad \delta a_{13} = 0.082, \quad \delta a_{14} = 1.967 \times 10^{-5},$$
$$\delta a_{21} = 1.643 \times 10^{-4}, \quad \delta a_{22} = 1.409 \times 10^{-7}, \quad \delta a_{23} = 2.756 \times 10^{-11}.$$

В свою очередь, для РМНК

$$\delta a_{11} = 43.053, \quad \delta a_{12} = 24.902, \quad \delta a_{13} = 2.686, \quad \delta a_{14} = 0.138,$$
$$\delta a_{21} = 2.968 \times 10^{-3}, \quad \delta a_{22} = 2.906 \times 10^{-6}, \quad \delta a_{23} = 3.846 \times 10^{-10}.$$

Видим, что достигается существенный выигрыш по точности, а оценки для РМНК (в рассматриваемых условиях) оказываются малопригодными.

Сравнительный анализ показывает, что разработанный метод позволяет также существенно снизить вычислительную погрешность оценивания, что обусловлено декомпозицией и снижением размерности вычислительной процедуры. В ходе расчетов с использованием евклидовой нормы определялись числа обусловленности (ν_1 и ν_2) обращаемых матриц $\Psi_1^{\mathrm{T}}\Lambda_1 V_1$ и $\Psi_2^{\mathrm{T}}\Lambda_2 V_2$, а также число ν обусловленности соответствующей объединенной матрицы РМНК. В итоге $\nu_1 = 5.283 \times 10^{15}$, $\nu_2 = 1.276 \times 10^{14}$ и $\nu = 4.537 \times 10^{26}$.

Кроме того, подсчитывалось количество сложений и умножений, необходимых для реализации РМНК и разработанного метода. Относительный вычислительный выигрыш составил 1.35 раза, что также подтверждает эффективность нового метода.

В ходе численного эксперимента рассчитывались корреляционные матрицы K_1^A и K_2^A (по аналогии с (5.1)). В целях сокращения записей приводятся лишь диагональные элементы этих матриц:

$$\big(\sigma_{11}^A\big)^2 = 0.031, \quad \big(\sigma_{12}^A\big)^2 = 3.631 \times 10^{-6}, \quad \big(\sigma_{13}^A\big)^2 = 2.306 \times 10^{-9}, \quad \big(\sigma_{14}^A\big)^2 = 0,$$
$$\big(\sigma_{21}^A\big)^2 = 2.287 \times 10^{-5}, \quad \big(\sigma_{22}^A\big)^2 = 0, \quad \big(\sigma_{23}^A\big)^2 = 0.$$

В тоже время для РМНК

$$\big(\sigma_{11}^A\big)^2 = 0.755, \quad \big(\sigma_{12}^A\big)^2 = 7.002 \times 10^{-4}, \quad \big(\sigma_{13}^A\big)^2 = 1.236 \times 10^{-6}, \quad \big(\sigma_{14}^A\big)^2 = 4.781 \times 10^{-14},$$
$$\big(\sigma_{21}^A\big)^2 = 0.073 \times 10^{-6}, \quad \big(\sigma_{22}^A\big)^2 = 5.096 \times 10^{-10}, \quad \big(\sigma_{23}^A\big)^2 = 0.$$

Поскольку оба сравниваемых метода являются линейными и оптимальными, то дисперсии ошибок оценивания не должны отличаться (если не учитывать погрешностей вычислений), т.е. методы наследуют одну и ту же потенциальную точность оценивания. Однако, как показывают расчеты, в силу указанных выше причин оценки дисперсий для разработанного метода существенно меньше аналогичных оценок для РМНК. Это также связано с тем, что погрешности вычислений по заданным формулам существенно зависят от размерности обращаемых плохо обусловленных матриц.

Пример 2 (для алгоритма совместного обнаружения и оценивания 3, когда $K = 1$ и $L = 2$). В этом примере с целью большей наглядности рассмотрим малую по объему выборку, но с малым уровнем шума наблюдения. Принимаем $T = 4$, $M_1 = 1$, $\psi_1(t) \equiv 1\, \forall t \in [0, 4]$ т.е. сигнал $s_1(t) = s(t) = a_{11} = a$ рассматривается как константа. Сингулярная помеха, для случая $J = 2$, представляется как кусочно-линейная функция $\Theta(t) = b_1\omega_1(t) + b_2\omega_2(t)$ с разрывом первого рода в точке $t = 2$, где $\omega_1(t) \equiv t\, \forall t \in [0, 2]$ и $\omega_1(t) \equiv 0\, \forall t \in (2, 4]$, $\omega_2(t) \equiv 0\, \forall t \in [0, 2)$ и $\omega_2(t) \equiv t\, \forall t \in [2, 4]$. Надо дать оценку $l^* \in \{1, 2\}$ для параметра $l \in \{1, 2\}$, а также построить соответствующие оценки параметров сигнала и помехи.

Поскольку $K = 1$, $M_1 = M = 1$ и $\overline{M}_{1l} = \overline{M}_l = 0$, то матрицы в (2.3) выглядят так:

$$\Psi_1 = \Psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ t_2 & 0 \\ 0 & t_3 \\ 0 & t_4 \end{bmatrix}, \quad Y_1 = Y = \Omega = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ t_2 & 0 \\ 0 & t_3 \\ 0 & t_4 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad X_1 = X = \begin{bmatrix} b_1 t_1 \\ b_1 t_2 \\ b_2 t_3 \\ b_2 t_4 \end{bmatrix}.$$

Формируя уравнение наблюдения $H = q_1 S_1 + \Theta + \Xi = qS + \Theta + \Xi$, примем, что $q = 1$, $a = 10$, $b_1 = -2$ и $b_2 = 4$, шум Ξ считаем нормальным процессом с нулевым математическим ожиданием, некоррелированными отсчетами и дисперсией $\sigma^2 = 10^{-2}$. Для простоты все величины полагаем безразмерными. Усреднение результатов осуществлялось по 100 экспериментам.

После выполнения всех шагов алгоритма 3 получены следующие результаты: $l^* = 1$ (для всех экспериментов) — оценка для номера наилучшей гипотезы (соответствует $q = 1$, т.е. сигнал обнаружен во всех случаях), $a^* = 10.039$ — результирующая оценка сигнала (относительная погрешность $\delta a = 0.4\%$), $a^* = 15.586$ — аналогичная результирующая оценка сигнала для РМНК (относительная погрешность $\delta a = 56\%$), $\Theta^*_{l^*} = [-2.004, -4.007, 12.085, 16.133]^{\mathrm{T}}$ — результирующая оценка сингулярной помехи (относительная погрешность $\delta\Theta = [0.199\%, 0.174\%, 0.703\%, 0.824\%]^{\mathrm{T}}$), $\Upsilon^* = 1.354$ — относительный показатель вычислительной эффективности в сравнении с РМНК (в разах, с учетом операций сложения и умножения).

Рассмотренные примеры подтверждает эффективность разработанного метода распознавания сигналов в условиях сингулярных помех наблюдения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый метод может эффективно сочетаться с алгоритмами ортогональных разложений (см. [30]) и решениями некорректных задач (см. [31], [32]). Возможность декомпозиции и распараллеливания вычислительных процедур позволяет более эффективно решать целый круг прикладных задач, связанных с параллельной обработкой измерений в различных областях. Полученные алгоритмы распознавания сигналов в условиях сингулярных помех несложно реализовать на специализированных ЭВМ, ориентированных на информационно-измерительные комплексы, предназначенные для функционирования в реальном времени.

Получены компактные аналитические выражения, позволяющие заранее, под конкретную прикладную задачу, подобрать необходимые модели сигналов и помех, а также количественные значения их параметров, при которых развитый метод обеспечит достижение своих потенциальных возможностей. Метод относится к классу линейных, поэтому все вычислительные процедуры сводятся к простейшим математическим операциям над векторами и матрицами, а также допускает возможность комбинирования с традиционными статистическими подходами к решению прикладных задач, связанных с оптимальной и квазиоптимальной обработкой наблюдений.

Полученные результаты можно применять и к классу динамических систем с измеряемым выходом, если воспользоваться известным комбинированным методом опорных интегральных кривых и обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания (см. [33]–[35]). В этом случае состояние и выход таких систем можно также представлять в виде конечной линейной оболочки заданного функционального базиса, если использовать заранее построенное семейство опорных кривых или поверхностей необходимого объема.

Кроме того, можно обобщить развитый метод на тот случай, когда используемый базис зависит от некоторых неизвестных параметров (например, временных задержек). Для решения задачи разрешения сигналов в этих условиях необходимо задавать сетку узлов в области изменения значений этих параметров и реализовывать рассмотренные выше вычислительные процедуры для каждого многомерного узла в отдельности с последующим выбором оптимального узла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Френкс Л.* Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1969.
2. *Ширман Я.Д.* Разрешение и сжатие сигналов. М.: Сов. радио, 1974.
3. *Богданович В.А., Вострецов А.Г.* Теория устойчивого обнаружения и оценивания сигналов. М.: Физматлит, 2004.
4. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех. М.: Радиотехника, 2014.
5. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
6. *Мельников В.В.* Безопасность информации в автоматизированных системах. Альтернативный подход // Защита информации. 2005. № 6. С. 40–45.
7. *Шувалов А.В.* Синтез и анализ компенсационного алгоритма подавления структурно детерминированных помех // Радиотехника. 2005. № 7. С. 43–49.
8. *Булычев Ю.Г., Манин А.П.* Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
9. *БулычевЮ.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В.* и др. Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов. М.: Машиностроение – Полет, 2016.
10. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
11. *Татузов А.Л.* Нейронные сети в задачах радиолокации. М.: Радиотехника, 2009.
12. *Иванов Н.М.* Адаптивные методы обнаружения и пеленгования сигналов // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61. № 10. С. 979–983.
13. *Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Григорьев В.А.* и др. Байесовское оценивание с последовательным отказом и учетом априорных знаний // Радиотехника и электроника. 2020. Т. 65. № 3. С. 257–266.
14. *Парфенов В.И., Калининский А.А.* Совместное обнаружение и классификация объектов при комплексировании решений, выносимых сенсорами в беспроводных сенсорных сетях // Радиотехника и электроника. 2020. Т. 65. № 3. С. 257–266.
15. *Абрамова Т.В., Ваганова Е.В., Горбачев С.В.* и др. Нейро-нечеткие методы в интеллектуальных системах обработки и анализа многомерной информации. Томск: Изд-во Томского ун-та, 2014.
16. *Бобырь М.В.* Проектирование нейронных и нечетких моделей в области вычислительной техники и систем управления. М.: Аграмак Медиа, 2018.
17. *Булычев Ю.Г.* Оптимизация кластерно-вариационного метода построения многопозиционной пеленгационной системы для условий априорной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 2023. № 4. С. 96–114.
18. *Zekavat S., Buehrer R.* Handbook of Position Location: Theory Practice and Advances. Second ed. Hoboken. New Jersey: Wiley-IEEE Press 2019. https://doi.org/10.1002/9781119434610.
19. *Zhao J., Renzhou G., Xudong D.* A new measurement association mapping strategy for DOA tracking // Digital Signal Processing. 2021. V. 118. P. 103–228. ISSN 1051-2004. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103228. (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200421002670).
20. *L. Peng, W. Wenhui, Q. Junda, Y. Congzhe, S. Zhenqiu.* Robust Generalized Labeled Multi-Bernoulli Filter and Smoother for Multiple Target Tracking using Variational Bayesian // KSII Transactions on Internet and Information Systems. 2022. V. 16. № 3. P. 908–928. https://doi.org/10.3837/tiis.2022.03.009.
21. *Wang X., Wang A., Wang D., Xiong Y., Liang B., Qi Y.* A modified Sage-Husa adaptive Kalman filter for state estimation of electric vehicle servo control system // Energy Rep. 2022. V. 8. № 5. P. 20–27. ISSN 2352-4847. https://doi.org/10.1016/j.egyr.2022.02.105 (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352484722003523).
22. *Леонов В.А., Поплавский Б.К.* Фильтрация ошибок измерений при оценивании линейного преобразования полезного сигнала // Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 163–170.
23. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.

24. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В.* Вычислительная схема инвариантно-несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.

25. *Булычев Ю.Г.* Применение методов опорных интегральных кривых и обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания для исследования многомерной динамической системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 7. С. 1151–1169.

26. *Ежова Н.А., Соколинский Л.Б.* Обзор моделей параллельных вычислений // Вестник ЮУрГУ. Серия "Вычислительная математика и информатика". 2019. Т. 8. № 3. С. 58–91.

27. *Иванов А.И., Шпилевая С.Г.* О квантовых параллельных вычислениях // Вестник Балтийского федер-го унив-та им. И. Канта. Серия «Физико-математические и технические науки». 2021. № 2. С. 95–99.

28. *Sutti C.* Lokal and global optimization by parallel algorithms for MIMD systems // Ann. of Operat. Res. 1984. V. 1.

29. *Price W.L.* Global optimization algorithms for a CAD workstation // J. Optimiz. Theory and Applic. 1987. V. 55. № 1.

30. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.

31. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

32. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во московского ун-та. 1989.

33. *Булычев Ю.Г.* Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 10. С. 1482–1490.

34. *Булычев Ю.Г.* Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 9. С. 1305–1319.

35. *Булычев Ю.Г.* Численно-аналитического интегрирование дифференциальных уравнений с использованием обобщенной интерполяции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 4. С. 520–532.

NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD OF DECOMPOSITION-AUTOCOMPENSATION FOR SOLVING THE SIGNAL RECOGNITION PROBLEM BASED ON INACCURATE OBSERVATIONS

Y. G. Bulychev*

JSC All-Russian Research Institute «Gradient», Sokolova Ave., 96, Rostov-on-Don, 344000, Russia
**e-mail: ProfBulychev@yandex.ru*

Received 10 November, 2023
Revised 20 December, 2023
Accepted 06 February, 2024

Abstract. A numerical-analytical method is developed to solve the problem of optimal recognition of a set of possible signals observed as an additive mixture containing not only a fluctuation observation error (with an unknown statistical distribution) but also a singular interference (with parametric uncertainty). The method allows for both the detection of signals present in the mixture and the estimation of their parameters within a specified quality criterion and associated constraints. The proposed method, based on the idea of generalized invariant-unbiased estimation of linear functional values, enables decomposition of the computational procedure and autocompensation of singular interference without resorting to the traditional expansion of the state space. Linear spectral decompositions in specified functional bases are used for the parametric finite-dimensional representation of signals and interference, while knowledge of the correlation matrix of the observation error is sufficient for error description. Random and systematic errors are analyzed, and an illustrative example is provided.

Keywords: observation equation, fluctuation error, singular interference, correlation matrix of measurement errors, Lagrange multiplier method, inaccurate observation, singular interference, optimal estimation, conditions of unbiasedness and invariance, decomposition, autocompensation, computational recognition algorithms.