

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ОДНОЙ ИЗ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2024 г. А. Р. Данилин^{1,*}¹ 620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Россия

*e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 27.11.2023 г.

Переработанный вариант 13.01.2024 г.

Принята к публикации 06.02.2024 г.

Рассматривается задача оптимального распределенного управления в плоской строго выпуклой области с гладкой границей и малым параметром при одной из старших производных эллиптического оператора. На границе области в этой задаче задано нулевое условие Дирихле, а управление аддитивно входит в неоднородность. В качестве множества допустимых управлений используется единичный шар в соответствующем пространстве функций, суммируемых с квадратом. Решения получающихся краевых задач рассматриваются в обобщенном смысле как элементы некоторого гильбертова пространства. В качестве критерия оптимальности выступает сумма квадрата нормы отклонения состояния от заданного и квадрата нормы управления с некоторым коэффициентом. Такая структура критерия оптимальности позволяет при необходимости усилить роль либо первого, либо второго слагаемого в этом критерии. В первом случае более важным является достижение заданного состояния, а во втором случае — минимизация ресурсных затрат. Подробно изучена асимптотика задачи, порожденная дифференциальным оператором второго порядка с малым коэффициентом при одной из старших производных, к которому прибавлен дифференциальный оператор нулевого порядка. Библ. 15.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

DOI: 10.31857/S0044466924050043, EDN: YDMIFK

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию асимптотики решения задачи оптимального распределенного управления (см. [1]) в плоской строго выпуклой области с гладкой границей и малым параметром при одной из старших производных эллиптического оператора. Такие операторы характерны для установившихся процессов теплопроводности и диффузии в слоистых средах, когда распространение тепла (диффузия) имеют существенно различные коэффициенты по перпендикулярным направлениям (в слое и при переходе в новый слой) (см. [2, гл. III, § 1, п. 3]).

Асимптотика решения задачи Дирихле для подобных эллиптических уравнений в подобных областях была исследована в [3], [4].

Исследование задач оптимального управления, определяемых уравнениями в частных производных, не теряет своей актуальности (см., например, [5]–[7] и библиографию в них).

Асимптотика распределенного управления для оператора с малым коэффициентом при операторе Лапласа и в существенно другой области рассматривалась в [8], [9], а в аналогичной области — в [10]. Регулярный случай подобной задачи рассмотрен в [11].

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная строго выпуклая область с гладкой границей $\Gamma := \partial\Omega$ (Ω — многообразие класса C^∞ с краем).

Рассматривается следующая задача распределенного управления (см. [1, гл. 2, § 2, (2.8)–(2.9)]):

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^6 \frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial y^2} + a(x, y) z_\varepsilon = f(x, y) - u_\varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad (1.1)$$

$$J(u) := \|z_\varepsilon - z_d\|^2 + \beta^{-1} \|u\|^2 \longrightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(1), \quad \text{где } \mathcal{U}(r) := \{u \in L_2(\Omega) : \|u\| \leq r\}. \quad (1.3)$$

Здесь $\beta > 0$, $H_0^1(\Omega)$ — соболевское пространство дифференцируемых функций, равных нулю на границе $\partial\Omega$ (см., например, [14]), $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2(\Omega)$,

$$f, z_d, a, \in C^\infty(\overline{\Omega_\delta}), \quad a(x, y) \geq \alpha^2 > 0 \text{ при } (x, y) \in \Omega, \quad (1.4)$$

где $\delta > 0$, а Ω_δ — δ -окрестность области Ω .

Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Отметим, что степень шесть малого параметра взята для технического удобства, чтобы не писать в дальнейшем дробных степеней этого параметра.

Решение уравнения (1.1) понимается в слабом смысле: для любого $v \in H_0^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\varepsilon^6 \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (a(x, y) z, v) = (f + u, v). \quad (1.5)$$

В силу (1.4) и (1.5) при всех малых $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$(\mathcal{L}_\varepsilon v, v) = \varepsilon^6 \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|^2 + (a(x, y) v, v) \geq \varepsilon^6 \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|^2 + \alpha^2 \|v\|^2 \geq \varepsilon^6 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

В этом случае единственное оптимальное управление $u_\varepsilon(\cdot)$ и соответствующее ему $z_\varepsilon(\cdot)$ характеризуются следующим образом: существует $p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ такое, что (см. [1, Гл. 2, § 2, (2.10)])

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon &= f(x, y) + u_\varepsilon, \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \\ \forall \tilde{v} \in \mathcal{U} \quad (p + \beta^{-1} u_\varepsilon, (\tilde{v} - u_\varepsilon)) &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Как показано в [15, лемма 1] в этом случае условие (1.6) эквивалентно следующему: существует $\lambda_\varepsilon > 0$ такое, что

$$(u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon) \wedge (\lambda_\varepsilon \in (0; \beta]) \wedge (\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| \leq 1) \wedge ((\beta - \lambda_\varepsilon) \cdot (1 - \lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\|) = 0). \quad (1.7)$$

Таким образом, исходная задача свелась к системе уравнений

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon = f(x, y), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad (1.8)$$

зависящей от положительного скалярного параметра λ_ε с дополнительным условием (1.7).

Отметим, что в силу (1.4) при любом $\lambda_\varepsilon > 0$ решения системы (1.8) бесконечно дифференцируемы в Ω .

Цель работы — изучить поведение z_ε , p_ε и λ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ и найти полное асимптотическое разложение указанных величин при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обратим внимание, несмотря на то что порядок уравнения $\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f$ в задаче Дирихле при $\varepsilon = 0$ не вырождается, эта задача при некоторых условиях на границу области $\partial\Omega$ может быть бисингулярной. В работах [3] и [4] показано, что это связано с порядком касания границы области Ω некоторых линейных многообразий. Для рассматриваемого оператора — это прямые, параллельные оси Oy . При порядке касания, равном 1, обычный ряд теории возмущений (внешнее разложение) является пригодным во всей области Ω и, тем самым, дает асимптотическое разложение решения z_ε .

Для рассматриваемой задачи оптимального управления ситуация усложняется за счет появления задачи Дирихле для системы уравнений (1.8) с подобными операторами и появлением дополнительного скалярного параметра $\lambda_\varepsilon > 0$, связанного с решением системы (1.8) соотношением (1.7).

Если ограничения на управления не по существу, то $\lambda_\varepsilon = \beta$ — известная константа, и нахождение асимптотического разложения z_ε и p_ε сводится к построению либо только внешнего разложения этой системы (регулярный случай — порядок касания указанных прямых равен 1), либо к методу согласования асимптотических разложений (см. [12], [13]), адаптированному для системы уравнений (сингулярный случай — порядок касания хотя бы одной прямой больше 1).

Однако даже в регулярном случае, когда ограничения на управления по существу, само внешнее разложение зависит от асимптотического разложения параметра λ_ϵ , и коэффициенты всех разложений z_ϵ , p_ϵ и λ_ϵ необходимо находить одновременно.

В работе [11] доказаны общие теоремы о предельной задаче, об априорных оценках и теоремы аппроксимации, показывающие, что для нахождения асимптотических разложений z_ϵ , p_ϵ и λ_ϵ достаточно построить формальное асимптотическое решение (ФАР) (см., например, [12, гл. I, § 1], [13, § 27, (27.3)]) системы (1.8) с соотношением (1.7).

Кроме того, там был рассмотрен регулярный случай (когда порядок касания обеих указанных прямых равен 1).

В настоящей работе рассматривается сингулярный случай, когда порядок касания одной из прямых равен 3, а порядок касания второй (для упрощения выкладок) равен 1.

2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Замечание 1. Разрешимость указанных в этом разделе задач и приведенные факты об их решениях доказаны в [11].

Наряду с (1.8) рассмотрим также систему вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\epsilon z_{\epsilon,\lambda} + \lambda p_{\epsilon,\lambda} &= f_{\epsilon,1}(x, y), \quad \mathcal{L}_\epsilon p_{\epsilon,\lambda} - z_{\epsilon,\lambda} = f_{\epsilon,2}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ z &= 0, p = 0, (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\lambda > 0$.

При $f_{\epsilon,1} = f$ и $f_{\epsilon,2} = -z_d$ решение системы (2.1) будем обозначать: $z_{\epsilon,\lambda,d}$, $p_{\epsilon,\lambda,d}$.

Замечание 2. Отметим, что если $\beta \|p_{\epsilon,\beta,d}\| \leq 1$, то $z_{\epsilon,\beta,d} = z_\epsilon$ и $p_{\epsilon,\beta,d} = p_\epsilon$, а ограничения на управление не по существу.

Предельной для (2.1) будет задача

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 z_{0,\lambda} + \lambda p_{0,\lambda} &= f_{0,1}(x, y), \quad \mathcal{L}_0 p_{0,\lambda} - z_{0,\lambda} = f_{0,2}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ z &= 0, p = 0, (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где оператор $\mathcal{L}_0$ получается из $\mathcal{L}_\epsilon$, если положить формально $\epsilon = 0$:

$$\mathcal{L}_0 v := -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a(x, y)v.$$

Поскольку область Ω строго выпукла, то существуют точки $M_i = (x_i, y_i) \in \Gamma$, $i = 1, 2$, в которых уравнение касательной к Γ имеет вид $x = x_i$ соответственно. Точки M_i разбивают границу Γ на две части Γ_j : нижнюю ($j = 1$) и верхнюю ($j = 2$). Обе эти части являются графиками функций $\varphi_j(x)$, $x \in [x_1; x_2]$. При этом

$$\varphi_j(x) \in C([x_1; x_2]) \cap C^\infty(x_1; x_2), \quad \varphi_j(x_i) = y_i, \quad \varphi'_j(x_i - (-1)^i 0) = \infty. \quad (2.3)$$

В окрестностях точек M_i существует еще одна параметризация границы Γ : $x = \psi_i(y)$ соответственно. Отметим, что ψ_1 — выпуклая ($\psi''_1 \geq 0$), а ψ_2 — вогнутая ($\psi''_2 \leq 0$) функции и $\psi_i(x_i) = 0$. При выполнении условий (1.4), (2.3) и $f_{\epsilon,1}, f_{\epsilon,2}, f_{0,1}, f_{0,2} \in C^\infty(\bar{\Omega}_d)$ задачи (2.1) и (2.2) разрешимы единственным образом, их решения бесконечно дифференцируемы в $\bar{\Omega} \setminus \{M_1, M_2\}$ и

$$\|z_{\epsilon,\lambda,d} - z_{0,\lambda,d}\| \rightarrow 0, \quad \|p_{\epsilon,\lambda,d} - p_{0,\lambda,d}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому, если

$$\beta \|p_{0,\beta,d}\| < 1, \quad (2.4)$$

то $\lambda_\epsilon = \beta$ при всех малых $\epsilon > 0$, т.е. ограничения на управление в задаче (1.1)–(1.3) не по существу, и $\|z_\epsilon - z_{0,\beta,d}\| \rightarrow 0$, $\|p_\epsilon - p_{0,\beta,d}\| \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$, если $\beta \|p_{0,\beta,d}\| > 1$, то при всех малых $\epsilon > 0$ ограничения на управление в задаче (1.1)–(1.3) по существу и

$$\lambda_\epsilon \|p_\epsilon\| = 1 \quad (2.5)$$

при всех таких ϵ .

При выполнении условий

$$\mathcal{L}_0 z_d \neq f \text{ и } \beta \|p_{0,\beta,d}\| > 1 \quad (2.6)$$

существует единственное $\lambda_0 \in (0, \beta)$ такое, что

$$\lambda_0 \|p_{0,\lambda_0,d}\| = 1 \text{ и } \lambda_\epsilon \rightarrow \lambda_0, \quad \|z_\epsilon - z_{0,\lambda_0,d}\| \rightarrow 0, \quad \|p_\epsilon - p_{0,\lambda_0,d}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

3. ВНЕШНЕЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

В отличие от [10], поскольку при $\varepsilon = 0$ система (1.8) остается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, гладко зависящей от параметра x , то с помощью внешнего разложения удастся удовлетворить граничным условиям без пограничного экспоненциально убывающего пограничного слоя.

Внешнее разложение для z_ε и p_ε и разложение для λ_ε ищем в виде

$$z_{\text{out}} := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(x, y), \quad p_{\text{out}} := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x, y), \quad \Lambda := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k. \quad (3.1)$$

Подставим ряды (3.1) в систему (1.8) и приравняем слагаемые одинакового порядка малости. В результате получим уравнения, связывающие между собой z_k , p_k и λ_k :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 z_0 + \lambda_0 p_0 &= f(x, y), & \mathcal{L}_0 p_0 - z_0 &= -z_d(x, y), \\ \mathcal{L}_0 z_k + \lambda_0 p_k + \lambda_k p_0 &= F_{1,k}, & \mathcal{L}_0 p_k - z_k &= F_{2,k}, & k \geq 1, \\ z_k|_\Gamma &= 0 = p_k|_\Gamma, & & & k \geq 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$F_{1,k} = b_k \frac{\partial^2 z_k}{\partial x^2} - \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_l p_{k-l}, \quad F_{2,k} = b_k \frac{\partial^2 p_{k-1}}{\partial x^2},$$

и $b_k = 0$ при k не кратном 6.

Отметим, что система (3.2) имеет единственное решение при любом заданном наборе $\{\lambda_k\}$. Однако в системе (3.2) никак не учтено дополнительное условие (1.7).

Итак, внешнее разложение (при заданном наборе $\{\lambda_k\}$) построено. Оно по построению является ФАР задачи (1.8) (с заданным рядом Λ из (3.1)) в тех подобластях области Ω , где ряды для z_ε и p_ε из (3.1) не теряют своей асимптотичности.

В отличие от [11] в дальнейшем будем предполагать, что

$$x_1 = y_1 = 0, \quad \psi_1(y) = y^4 \text{ при } 0 < x < \delta_0 \text{ и некотором малом } \delta_0, \text{ а } \psi_2''(y_2) < 0. \quad (3.3)$$

Отметим, что эти ряды пригодны во всей области Ω , за исключением малой окрестности точки M_1 .

Покажем, что эти ряды в малой окрестности точки M_1 теряют свой асимптотический характер. Для этого исследуем асимптотику функций z_k и p_k при $(x, y) \rightarrow M_1$.

Нахождение асимптотики коэффициентов внешнего разложения будем вести по схеме работы [3] с необходимыми изменениями, связанными с решением системы уравнений (в [3] исследовалась асимптотика коэффициентов внешнего разложения для одного уравнения). Кроме этого для дальнейшего нам потребуется уточнение вида разложений из [3].

При выполнении условия (3.3) функции φ_j , определяющие Γ_j , при $0 < x < \delta_0$ имеют следующий вид:

$$\varphi_j(x) = (-)^j \sqrt[4]{x}. \quad (3.4)$$

Как и в [3] рассмотрим функции вида $x^{m/4} P(\omega(x, y))$, $(x, y) \in \Omega$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\omega(x, y) := y/\sqrt[4]{x}$, а P — полином. Функции такого вида будем обозначать $R_m(x, y)$ (возможно с дополнительными индексами). Число m естественно назвать *порядком* такой функции. Если полином P есть четная (нечетная функция) т.е. все степени ω в P четные (нечетные), то такой полином будем обозначать $P(\omega; 1)$ ($P(\omega; -1)$). Соответственно будем использовать обозначения

$$R_m(x, y; i) := x^{m/4} P(\omega; i) \text{ и } \mathcal{R}_m^+(x, y; i) := \sum_{s=0}^{\infty} R_{m+s}(x, y; i \cdot (-1)^s).$$

Замечание 3. При использовании обозначения $\mathcal{R}_m^+(x, y; i)$ не исключается случай, что некоторые слагаемые в сумме равны нулю (включая и начальные, или даже все). Тем самым, содержательно запись $f \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_m^+(x, y; i)$ говорит о том, что у функции f асимптотика в нуле не хуже, чем $x^{m/4}$. В частности, функцию, тождественно равную нулю, при необходимости можно считать имеющей асимптотику вида $\mathcal{R}_m^+(x, y; i)$ для нужного нам порядка m .

Отметим простейшие свойства функций $R_m(x, y; i)$:

$$\begin{aligned} x^m y^n &= x^{(4m-n)/4} \left(\frac{y}{\sqrt[4]{x}} \right)^n = R_{4m-n}(x, y; (-1)^n), \\ R_m(x, y; i) \cdot R_n(x, y; j) &= R_{m+n}(x, y; i \cdot j), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} R_m(x, y; i) &= R_{m-8}(x, y; i), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} R_m(x, y; i) = R_{m-2}(x, y; i), \\ \int_{-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} R_m(x, y; i) dy &= \gamma_{m,i} x^{(m+1)/4}, \text{ причем } \gamma_{m,-1} = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Кроме того, если при $(x + |y|) \rightarrow 0$

$$f(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} x^n y^m, \text{ то } f(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_0^+(x, y; 1). \quad (3.6)$$

Как показано в [3, следствие 1], единственное решение задачи

$$\mathcal{L}_{0,0} Z := -\frac{\partial^2}{\partial y^2} Z = R_m(x, y; i), \quad Z(-\sqrt[4]{x}) = 0 = Z(\sqrt[4]{x}) \quad (3.7)$$

имеет вид $Z = R_{m+2}(x, y; i)$.

В частности, если $R_0(x, y; 1) = 1$, то $Z = 1/2(y^2 - \sqrt{x}) = R_2(x, y; 1)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (1.4) и (3.4) и $\lambda > 0$ — некоторое число. Тогда решение системы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 z + \lambda p &= f_1(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{m,1}(x, y; i), \quad \mathcal{L}_0 p - z = f_1(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{m,2}(x, y; i), \\ z|_{\Gamma} &= 0 = p|_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

имеет при $(x + |y|) \rightarrow 0$ асимптотику вида

$$z(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{m+2,z}^+(x, y; i), \quad p(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{m+2,p}^+(x, y; i).$$

Это асимптотическое представление можно дифференцировать сколько угодно раз.

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу (3.6)

$$a(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{0,a}^+(x, y; 1).$$

Будем искать асимптотику функций z и p в виде

$$z(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{s=0}^{\infty} R_{m(s),1}(x, y; i_{m(s)}), \quad p(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{s=0}^{\infty} R_{n(s),2}(x, y; i_{n(s)})$$

с помощью стандартной процедуры: подставив это представление в систему (3.8) и приравнявая слагаемые с наименьшим порядком:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{L}_0 (R_{m(s),1}(x, y; i_{m(s)})) + \lambda \sum_{s=0}^{\infty} R_{n(s),2}(x, y; i_{n(s)}) &= \sum_{s=0}^{\infty} R_{m+s,1}(x, y; i(-1)^s), \\ \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{L}_0 (R_{n(s),2}(x, y; i_{n(s)})) - \sum_{s=0}^{\infty} R_{m(s),1}(x, y; i_{m(s)}) &= \sum_{s=0}^{\infty} R_{m+s,2}(x, y; i(-1)^s). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Поскольку в силу (3.7) и (3.5)

$$\mathcal{L}_0 (R_m(x, y; i)) = \mathcal{L}_{0,0} R_m(x, y; i) + R_m(x, y; i) \mathcal{R}_{0,a}^+(x, y; 1) = R_{m-2}(x, y; i) + \mathcal{R}_{m,a}^+(x, y; i),$$

то в (3.9) наименьшие порядки равны $m(0) - 2$, $n(0) - 2$ и m . Поэтому $R_{m(0),1}(x, y; i_{m(0)})$ и $R_{n(0),2}(x, y; i_{n(0)})$ есть решения задач вида (3.7):

$$\mathcal{L}_{0,0} R_{m(0),1}(x, y; i_{m(0)}) = R_{m,1}(x, y; i), \quad \mathcal{L}_{0,0} R_{n(0),2}(x, y; i_{n(0)}) = R_{m,2}(x, y; i).$$

Тем самым, в силу (3.7) $m(0) = m + 2 = n(0)$, $i_{m(0)} = i = i_{n(0)}$ и $R_{m(0),1}(x, y; i_{m(0)}) = R_{m+2,z}(x, y; i)$, а $R_{n(0),1}(x, y; i_{n(0)}) = R_{m+2,p}(x, y; i)$.

Подставив найденные слагаемые в (3.9), получим равенства

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{L}_0(R_{m(s),1}(x, y; i_{m(s)})) + \lambda \sum_{s=1}^{\infty} R_{m+2,p}(x, y; i) + \lambda \sum_{s=1}^{\infty} R_{n(s),2}(x, y; i_{n(s)}) = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} R_{m+s,1}(x, y; i(-1)^s), \\ \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{L}_0(R_{n(s),1}(x, y; i_{n(s)})) - R_{m+2,z}(x, y; i) - \sum_{s=0}^{\infty} R_{m(s),1}(x, y; i_{m(s)}) = \\ = \sum_{s=1}^{\infty} R_{m+s,2}(x, y; i(-1)^s). \end{aligned}$$

Теперь равенство элементов наименьшего порядка выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}_{0,0}R_{m(1),1}(x, y; i_{m(1)}) = R_{m+1,1}(x, y; -i), \quad \mathcal{L}_{0,0}R_{n(1),2}(x, y; i_{n(1)}) = R_{m,2}(x, y; -i),$$

откуда получаем

$$R_{m(1),1}(x, y; i_{m(1)}) = R_{m+3,z}(x, y; -i), \text{ а } R_{n(1),1}(x, y; i_{n(1)}) = R_{m+3,p}(x, y; -i).$$

Далее, применяя метод математической индукции, получим асимптотические ряды указанного в лемме вида для z и p , дающие асимптотическое разложение при $(x + |y|) \rightarrow 0$ функций z и p , что следует из теорем об аппроксимации (см. [11]).

Возможность почленного дифференцирования этих асимптотических разложений доказывается стандартно, так как вид построенных рядов не меняется после почленного дифференцирования (см., например, [12, гл. IV, §3, лемма 3.1]). Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.4) и (3.3). Тогда для любого набора $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ с $\lambda_0 > 0$ решение системы (3.2) имеет при $(x + |y|) \rightarrow 0$ асимптотику вида

$$\begin{aligned} z_{6m+r}(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \begin{cases} \mathcal{R}_{2-6m,z}^+(x, y; 1), & r = 0, \\ \mathcal{R}_{4-6m,z}^+(x, y; 1), & r = \overline{1, 5}, \end{cases} \\ p_{6m+r}(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \begin{cases} \mathcal{R}_{2-6m,p}^+(x, y; 1), & r = 0, \\ \mathcal{R}_{4-6m,p}^+(x, y; 1), & r = \overline{1, 5}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Это асимптотическое представление можно дифференцировать сколько угодно раз.

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу (3.6)

$$f(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{0,f}^+(x, y; 1), \quad -z_d(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{0,d}^+(x, y; 1).$$

По лемме 1 получим $z_0 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{2,z,0}^+(x, y; 1)$, $p_0 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{2,p,0}^+(x, y; 1)$.

Для z_1 и p_1 получим уравнения с правыми частями

$$F_{1,1}(x, y) = -\lambda_1 p_0 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{2,1,z}^+(x, y; 1), \quad F_{1,2}(x, y) = 0 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{2,1,p}^+(x, y; 1).$$

Применив лемму 1, получим $z_1 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{4,z,1}^+(x, y; 1)$, $p_1 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{4,p,1}^+(x, y; 1)$.

Для z_2 и p_2 правые части имеют вид

$$F_{2,1}(x, y) = -\lambda_2 p_0 - \lambda_1 p_1 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{2,1,z}^+(x, y; 1), \quad F_{2,2}(x, y) = 0 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{2,1,p}^+(x, y; 1).$$

И, тем самым, опять $z_2 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{4,z,2}^+(x, y; 1)$, $p_2 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{4,p,2}^+(x, y; 1)$.

Для z_6 и p_6 ситуация меняется, поскольку

$$F_{6,1}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} z_0 - \sum_{s=1}^6 \lambda_s p_{6-s} \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{-6,1,z}^+(x, y; 1), \quad F_{6,2}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_0 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{-6,1,p}^+(x, y; 1).$$

Поэтому $z_6 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{-4,z,6}^+(x, y; 1)$, $p_6 \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{-4,p,6}^+(x, y; 1)$.

Далее применяем метод математической индукции. Теорема 1 доказана.

Для одного уравнения аналогичный результат получен в [3, теорема 2].

Замечание 4. Отметим, что порядки особенностей асимптотик, указанные в теореме, могут быть сильно завышены. Так, например, если $\lambda_1 = 0$, то $z_1 = 0$ и $p_1 = 0$. С другой стороны, если $z_{d,0,0} \neq 0$, то p_6 действительно имеет в нуле особенность порядка x^{-1} .

Таким образом, внешнее разложение имеет при $(x + |y|) \rightarrow 0$ нарастающие особенности в асимптотике коэффициентов разложения, что говорит о бисингулярности рассматриваемой задачи.

Отметим, что внешнее разложения не теряет асимптотичности (и, тем самым, “вполне пригодно”) в области $\Omega_{\varepsilon,\gamma} := \{(x, y) \in \Omega : x > \varepsilon^\gamma\}$ при $\gamma \in (0; 4)$.

4. ВНУТРЕННЕЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

В связи с тем, что внешнее разложение непригодно в малой окрестности точки M_1 , необходимо в окрестностях этой точки рассмотреть новое — *внутреннее* — разложение в растянутых переменных.

В окрестности точки M_1 введем новые растянутые переменные, подобно тому, как это было сделано в [3, п. 1.2]: $x = \varepsilon^4 \xi$, $y = \varepsilon \eta$.

В этих переменных функции $V_\varepsilon(\xi, \eta) := z_\varepsilon(\varepsilon^4 \xi, \varepsilon \eta)$, $W_\varepsilon(\xi, \eta) := p_\varepsilon(\varepsilon^4 \xi, \varepsilon \eta)$ будут удовлетворять системе

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} V_\varepsilon - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} V_\varepsilon + \varepsilon^2 a(\varepsilon^4 \xi, \varepsilon \eta) V_\varepsilon + \varepsilon^2 \lambda_\varepsilon W_\varepsilon &= \varepsilon^2 f(\varepsilon^4 \xi, \varepsilon \eta), \\ -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} W_\varepsilon - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} W_\varepsilon + \varepsilon^2 a(\varepsilon^4 \xi, \varepsilon \eta) W_\varepsilon - \varepsilon^2 V_\varepsilon &= -\varepsilon^2 z_d(\varepsilon^4 \xi, \varepsilon \eta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

в области (см. (3.3)) $0 < \xi < \delta_1 \varepsilon^{-4}$, $|\eta| < \sqrt[4]{\xi}$, где δ_1 — некоторая константа $\delta_1 < \delta_0$, и граничным условиям

$$V_\varepsilon(\xi, -\sqrt[4]{\xi}) = 0 = V_\varepsilon(\xi, \sqrt[4]{\xi}), \quad W_\varepsilon(\xi, -\sqrt[4]{\xi}) = 0 = W_\varepsilon(\xi, \sqrt[4]{\xi}). \quad (4.2)$$

Теперь надо построить внутреннее разложение при $(\xi^2 + \eta^2) \rightarrow +\infty$ для функций V_ε и W_ε , согласованное с внешним разложением при $(x + |y|) \rightarrow 0$ для z_ε и p_ε (см., например, [12, (0.9)], [13, § 28, (28.21)]). Для получения вида такого внутреннего разложения надо переразложить внешнее разложение через новые переменные.

Отметим, что если $x = \varepsilon^4 \xi$, а $y = \varepsilon \eta$, то

$$R_m(x, y; i) = x^{m/4} P(\omega(x, y); i) = \varepsilon \xi^{m/4} P(\tilde{\omega}(\xi, \eta); i) = \varepsilon^m R_m(\xi, \eta; i), \quad (4.3)$$

где $\tilde{\omega}(\xi, \eta) = \xi / \sqrt[4]{\eta}$.

Для асимптотических разложений при $(\xi^2 + \eta^2) \rightarrow +\infty$ будем использовать обозначение

$$\mathcal{R}_m^-(\xi, \eta; i) := \sum_{s=0}^{\infty} R_{m-s}(\xi, \eta; i \cdot (-1)^s).$$

Перераскладывая внешнее разложение (см. (3.10)) через новые переменные, получим

$$\begin{aligned} z_\varepsilon &\stackrel{\text{as}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{6m} \left(\sum_{s=0}^{\infty} R_{2-6m+s,z}(x, y; (-1)^s) + \sum_{j=1}^5 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^j R_{4-6m+s,z}(x, y; (-1)^s) \right) \stackrel{(4.3)}{=} \\ &\stackrel{(4.3)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{6m} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{2-6m+s} R_{2-6m+s,z}(\xi, \eta; (-1)^s) + \sum_{j=1}^5 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{j+4-6m+s} R_{4-6m+s,z}(\xi, \eta; (-1)^s) \right) = \\ &= \varepsilon^2 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left(\sum_{m=0}^{\infty} R_{2-6m+s,z}(\xi, \eta; (-1)^s) + \sum_{j=1}^5 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{j+2} R_{4-6m+s,z}(\xi, \eta; (-1)^s) \right) = \\ &= \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathcal{R}_{n+2,z}^-(\xi, \eta; (-1)^n). \end{aligned}$$

Аналогично

$$p_\varepsilon \stackrel{\text{as}}{=} \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathcal{R}_{n+2,p}^-(\xi, \eta; (-1)^n).$$

Замечание 5. Отметим, что порядки особенностей асимптотик, указанные в предыдущих формулах, могут быть сильно завышены. Так, в частности,

$$\mathcal{R}_{2,z}^-(\xi, \eta; 1) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} R_{2-6\sigma}(\xi, \eta; 1).$$

Таким образом, внутреннее разложение функций будем искать в виде

$$z_{in} := V(\xi, \eta) = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n V_n(\xi, \eta), \quad p_{in} := W(\xi, \eta) = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n W_n(\xi, \eta) \quad (4.4)$$

с дополнительным условием; при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$

$$V_n(\xi, \eta) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{n+2,z}^-(\xi, \eta; (-1)^n), \quad W_n(\xi, \eta) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{n+2,p}^-(\xi, \eta; (-1)^n), \quad (4.5)$$

где $\mathcal{R}_{n+2,z}^-(\xi, \eta; (-1)^n)$ и $\mathcal{R}_{n+2,p}^-(\xi, \eta; (-1)^n)$ — известные, построенные по внешнему разложению асимптотические ряды.

Подставим ряды (3.1) в систему (4.1) и приравняем слагаемые одинакового порядка малости. В результате для определения функций V_n и W_n получим систему уравнений в неограниченной области $\tilde{\Omega} := \{(\xi, \eta) : \xi > 0, |\eta| < \sqrt[4]{\xi}\}$:

$$\begin{aligned} \Delta V_0 &= -f_{0,0}, & \Delta W_0 &= -z_{d,0,0}, \\ \Delta V_1 &= -f_{0,1}\eta, & \Delta W_1 &= -z_{d,0,1}\eta, \\ \Delta V_n &= H_{n,1}, & \Delta W_n &= H_{n,2}, \quad n > 1, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $H_{n,1}$ и $H_{n,2}$ вычисляются рекуррентно по предыдущим V_j, W_j, λ_k и коэффициентам асимптотических разложений в нуле известных функций a, f и z_d , в частности,

$$H_{2,1} = -f_{0,2}\eta^2 - a_{0,0}V_0 - \lambda_0 W_0, \quad H_{2,2} = -z_{d,0,2}\eta^2 - a_{0,0}W_0 + V_0.$$

При этом в силу (4.2) нам нужны решения системы, удовлетворяющие граничным условиям

$$V_n(\xi, -\sqrt[4]{\xi}) = 0 = V_n(\xi, \sqrt[4]{\xi}), \quad W_n(\xi, -\sqrt[4]{\xi}) = 0 = W_n(\xi, \sqrt[4]{\xi}), \quad n \geq 0, \quad (4.7)$$

и условиям поведения на бесконечности (4.5).

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1.4) и $\{\lambda_k\}$ — заданная последовательность. Тогда существуют функции $V_n(\xi, \eta), W_n(\xi, \eta) \in C^\infty(\tilde{\Omega})$ такие, что они являются решениями системы (4.6) в области $\tilde{\Omega}$ и удовлетворяют условиям (4.7) и (4.5).

Доказательство. Поскольку при каждом n рассматриваемая система распадается на два независимых уравнения одинакового вида, то существование нужных решений можно получить, следуя доказательству теоремы 3.1 из [12, гл. IV, § 3]. Теорема 2 доказана.

Отметим, что построенные ряды не теряют своей асимптотичности при $x < \varepsilon^\gamma$, где $\gamma > 0$, т.е. области асимптотичности внешнего и внутреннего разложений пересекаются. Отсюда следует (см., например, доказательство теоремы 1.4 из [12, гл. IV, § 1]), что внешнее разложение есть асимптотическое разложение функций $z_{\varepsilon,\Lambda}$ и $p_{\varepsilon,\Lambda}$ (решение системы (1.8) при разложении λ_ε в ряд Λ из (3.1) с заданными $\{\lambda_k\}$) в области $\Omega_{1,\mu}$, а внутреннее — асимптотическое разложение этих же функций в области $\Omega_{2,\mu}$, где

$$\Omega_{1,\mu} := \{(x, y) \in \Omega, 0 < x < \mu\}, \quad \Omega_{2,\mu} := \{(x, y) \in \Omega, x > \mu\}, \quad \mu = \varepsilon^\gamma, \quad \gamma \in (0; 4). \quad (4.8)$$

Замечание 6. При рассмотрении внутреннего разложения в области $\Omega_{1,\mu}$ необходимо вернуться к переменным x и y :

$$\begin{aligned} z_{in} &= V\left(\frac{x}{\varepsilon^4}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n V_n\left(\frac{x}{\varepsilon^4}, \frac{y}{\varepsilon}\right), \\ p_{in} &= W\left(\frac{x}{\varepsilon^4}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n W_n\left(\frac{x}{\varepsilon^4}, \frac{y}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

5. ПОЛНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ

Итак, при фиксированном наборе $\{\lambda_k\}$ построены согласованные внешние и внутренние ФАР системы (1.8). Эти разложения аппроксимируют решения системы в областях $\Omega_{1,\mu}$ и $\Omega_{1,\mu}$ соответственно.

1. Пусть выполнено условие (2.4). В этом случае $\lambda_\varepsilon = \beta$ и, тем самым, $\lambda_0 = \beta$, $\lambda_k = 0$ при $k > 0$. Поэтому построенные для таких λ_k согласованные внешнее и внутреннее разложения будут ФАР всей задачи, и тем самым справедлива теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (1.4), (3.3) и (2.4). Тогда внешнее разложение (3.1) с $\lambda_0 = \beta$, $\lambda_k = 0$ при $k > 0$ и согласованное с ним внутреннее разложение (4.4) есть асимптотическое разложение решения задачи (1.8) с $\lambda_\varepsilon = \beta$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ в областях (4.8) соответственно.

2. Пусть выполнено условие (2.6). В этом случае условие (2.5) с разложением λ_ε в силу (3.1) для произвольного набора $\{\lambda_k\}$, вообще говоря, не выполнено. В силу (2.7) известно только λ_0 . В этом случае построение внешнего и внутреннего разложений необходимо вести совместно с определением величин $\{\lambda_k\}$, $k > 0$. Эти числа можно найти из асимптотического равенства, порожденного равенством (2.5) и разложениями (3.1) и (4.4). Зафиксируем начальный набор $\{\lambda_k\}$, $k > 0$, и найдем соответствующую ему асимптотику величины $\lambda_\varepsilon^2 \|p_\varepsilon\|^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ через p_k и W_n .

Для нахождения такой асимптотики воспользуемся методом *вспомогательного параметра* (см., например, [8], [13, § 30, II, теорема 30.1]).

Пусть μ удовлетворяет условию из (4.8). Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon^2 \|p_\varepsilon\|^2 &= \lambda_\varepsilon^2 \int_0^\mu dx \int_{-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} p_\varepsilon^2(x, y) dy + \lambda_\varepsilon^2 \int_\mu^{x_2} dx \int_{-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} p_\varepsilon^2(x, y) dy \stackrel{\text{ас}}{=} \\ &= \left(\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \lambda_k \right)^2 \int_0^\mu dx \int_{-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} \varepsilon^4 \left(\sum_{n=0}^\infty \varepsilon^n W_n \left(\frac{x}{\varepsilon^4}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right)^2 dy + \\ &+ \left(\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \lambda_k \right)^2 \int_\mu^{x_2} dx \int_{-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} \left(\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k p_k(x, y) \right)^2 dy. \end{aligned}$$

Сделав в первом интеграле замену $x = \varepsilon^4 \xi$, $y = \varepsilon \eta$, получим асимптотическое равенство для нахождения коэффициентов λ_k :

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{\text{ас}}{=} \varepsilon^7 \left(\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \lambda_k \right)^2 \int_0^{\mu/\varepsilon^4} d\xi \int_{-\sqrt[4]{\xi}}^{\sqrt[4]{\xi}} \left(\sum_{n=0}^\infty \varepsilon^n W_n(\xi, \eta) \right)^2 d\eta + \\ &+ \left(\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \lambda_k \right)^2 \int_\mu^{x_2} dx \int_{-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} \left(\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k p_k(x, y) \right)^2 dy. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Поясним нахождение асимптотики получившихся слагаемых.

Во внешнем разложении надо из $p_k(x, y) p_l(x, y)$ вычесть неинтегрируемую по Ω часть асимптотики (слагаемые вида $R_m(x, y; j_m)$ с $m < 0$), а интеграл по $\Omega_{2,\mu}$ от получившейся части представить в виде разности интегралов по Ω и по $\Omega_{1,\mu}$. Это даст нам слагаемое вида $\varepsilon^{(k+l)} A_{k,l}$ и степенной (по $\mu^{1/4}$) асимптотический ряд $\varepsilon^{(k+l)} \mathcal{F}_1(\mu)$. Наконец, проинтегрировав вычтенную часть асимптотики, состоящую из слагаемых вида $x^{(k+l)/4} P(\omega(x, y); j_k \cdot j_l)$, по y получим сумму выражений

$$\varepsilon^{(k+l)} \int_\mu^{x_2} \gamma_{k,l} x^{(k+l+1)/4} dx,$$

которая в итоге дает сумму $\varepsilon^{(k+l)} A_{k,l,1} + \varepsilon^{(k+l)} \mathcal{F}_2(\mu)$.

Аналогичная процедура — вычитание неинтегрируемой по $\tilde{\Omega}$ части асимптотики (слагаемые вида $R_m(\xi, \eta; j_m)$ с $m > -2$). Замена интеграла от регуляризованной части по $\tilde{\Omega}_{1,\varepsilon,\mu}$ на разность интегралов по $\tilde{\Omega}$ и по $\tilde{\Omega}_{2,\varepsilon,\mu}$ с последующим интегрированием вычтенной части асимптотики по $\tilde{\Omega}_{1,\varepsilon,\mu}$ даст слагаемые вида $\varepsilon^m B_{k,l,1} + \varepsilon^m \mathcal{F}_3(\mu, \varepsilon)$.

Здесь

$$\tilde{\Omega}_{1,\varepsilon,\mu} := \{(\xi, \eta) : \xi \in (0; \mu/(\varepsilon^4)), |\eta| < \sqrt[4]{\xi}\}, \quad \tilde{\Omega}_{2,\varepsilon,\mu} := \{(\xi, \eta) : \xi > \mu/(\varepsilon^4), |\eta| < \sqrt[4]{\xi}\}.$$

При этом слагаемые, зависящие только от μ или от μ и ε вместе, при нахождении асимптотики можно не учитывать (они взаимно уничтожаются).

Покажем, что

$$\int_0^{\mu/(\varepsilon^4)} d\xi \int_{-\sqrt[4]{\xi}}^{\sqrt[4]{\xi}} W_n(\xi, \eta) W_m(\xi, \eta) d\eta = D_{n,m} + \mathcal{F}(\varepsilon, \mu), \quad (5.2)$$

где $D_{n,m}$ — константа.

Обозначим через $W_{n,m}^{\text{sing}}(\xi, \eta)$ неинтегрируемые в $\tilde{\Omega}$ особенности $W_n(\xi, \eta) W_m(\xi, \eta)$, а через $W_{n,m}^{\text{reg}}(\xi, \eta)$ “регуляризованное” вычитанием этих особенностей рассматриваемое произведение, и

$$W_{n,m}^{\text{sing}}(\xi) := \int_{-\sqrt[4]{\xi}}^{\sqrt[4]{\xi}} W_{n,m}^{\text{sing}}(\xi, \eta) d\eta, \quad W_{n,m}^{\text{reg}}(\xi) := \int_{-\sqrt[4]{\xi}}^{\sqrt[4]{\xi}} W_{n,m}^{\text{reg}}(\xi, \eta) d\eta.$$

Отметим, что $W_{n,m}^{\text{sing}}(\xi, \eta)$ есть линейная комбинация слагаемых вида

$$\xi^{(4+n+m-s-\sigma)/4} P_{n,m,s,\sigma}(\tilde{\omega}; (-1)^{4+n+m-s-\sigma}), \quad 4+n+m-s-\sigma < -5, \quad (5.3)$$

поэтому асимптотика на $+\infty$ у функции $W_{n,m}^{\text{reg}}(\xi)$ есть ряд по степеням $\xi^{-1/4}$, начинающийся с $\xi^{-3/2}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu/\varepsilon^4} d\xi \int_{-\sqrt[4]{\xi}}^{\sqrt[4]{\xi}} W_n(\xi, \eta) W_m(\xi, \eta) d\eta &= \int_0^1 W_{n,m}^{\text{reg}}(\xi) d\xi + \int_1^{+\infty} W_{n,m}^{\text{reg}}(\xi) d\xi + \int_{+\infty}^{\mu/\varepsilon^4} W_{n,m}^{\text{reg}}(\xi) d\xi + \\ &+ \int_1^{\mu/\varepsilon^4} W_{n,m}^{\text{sing}}(\xi) d\xi = D_{n,m,1} + D_{n,m,2} + \int_{+\infty}^{\mu/\varepsilon^4} W_{n,m}^{\text{reg}}(\xi) d\xi + \int_1^{\mu/\varepsilon^4} W_{n,m}^{\text{sing}}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Но оставшийся интеграл от $W_{n,m}^{\text{reg}}$ есть асимптотический ряд по степеням $(\varepsilon^4/\mu)^{-l}$ ($l > 5$), поэтому он имеет вид $\mathcal{F}_1(\varepsilon, \mu)$. Интеграл от $W_{n,m}^{\text{sing}}(\xi)$ есть конечная сумма слагаемых вида (см. (5.3))

$$\int_1^{\mu/\varepsilon^4} d\xi \int_{-\sqrt[4]{\xi}}^{\sqrt[4]{\xi}} \xi^{(4+n+m-s-\sigma)/4} P_{n,m,s,\sigma}(\tilde{\omega}; (-1)^{4+n+m-s-\sigma}) d\eta = \int_1^{\mu/\varepsilon^4} \xi^{(5+n+m-s-\sigma)/4} \gamma_{n,m,s,\sigma} d\xi.$$

При этом, если $4+n+m-s-\sigma = -4$, то $(n+m-s-\sigma)$ — нечетно и, значит, $\gamma_{n,m,s,\sigma} = 0$. Окончательно последний интеграл есть конечная сумма слагаемых $(\mu/\varepsilon^4)^{(9+n+m-s-\sigma)/4}$ и 1, т.е. равен $D_{n,m,2} + \mathcal{F}_2(\varepsilon, \mu)$, и, тем самым, справедливо равенство (5.2).

Отметим, что

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = a_0 b_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_0 b_n + a_n b_0 + c_{n,[0;n-1]}) \right),$$

где индекс $[0; n-1]$ говорит о том, что данное слагаемое зависит только от слагаемых перемножаемых рядов,

имеющих номера меньше n . Тем самым, асимптотическое равенство (5.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 1 \stackrel{\text{as}}{=} & \varepsilon^7 \lambda_0^2 \left[\int_0^{\mu/\varepsilon^4} d\xi \int_{-\sqrt[4]{\xi}}^{\sqrt[4]{\xi}} W_0^2(\xi, \eta) d\eta \right]_{\varepsilon} + \\
 & + \varepsilon^7 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varepsilon^k \int_0^{\mu/\varepsilon^4} d\xi \int_{-\sqrt[4]{\xi}}^{\sqrt[4]{\xi}} \left(2\lambda_0^2 W_0(\xi, \eta) W_k(\xi, \eta) + \right. \right. \\
 & + 2\lambda_0 \lambda_k V_0^2(\xi, \eta) + G_{k,[0;k-1],1}(\xi, \eta) \left. \right) d\eta \left. \right]_{\varepsilon} + \lambda_0^2 \left[\int_{\mu}^{x_2} dx \int_{-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} p_0^2(x, y) dy \right]_{\varepsilon} + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left[\int_{\mu}^{x_2} dx \int_{-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} \left(2\lambda_0^2 p_0(x, y) p_k(x, y) + \right. \right. \\
 & + 2\lambda_0 \lambda_k p_0^2(x, y) + G_{k,[0;k-1],2}(x, y) \left. \right) dy \left. \right]_{\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь через $[\cdot]_{\varepsilon}$ обозначены слагаемые, полученные указанной процедурой получения асимптотики методом вспомогательного параметра, зависящие только от ε . Отметим, что в данном случае это будут только константы.

Из последнего асимптотического равенства видно, что λ_k впервые появляется во внешнем разложении при ε^k , а во внутреннем — только при ε^{k+7} .

Как и в [10], удобно при $k > 0$ представить z_k и p_k в виде $z_k = \tilde{z}_k + \lambda_k \tilde{z}$, $p_k = \tilde{p}_k + \lambda_k \tilde{p}$, где $\tilde{z}_k, \tilde{p}_k$ — решение задачи

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0 \tilde{z}_k + \lambda_0 \tilde{p}_k &= \tilde{F}_{1,k,[0;k-1]}, \quad \mathcal{L}_0 \tilde{p}_k - \tilde{z}_k = \tilde{F}_{2,k,[0;k-1]}, \quad k \geq 1, \\
 \tilde{z}_k|_{\Gamma} &= 0 = \tilde{p}_k|_{\Gamma}, \quad k \geq 0,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

где функции $\tilde{F}_{1,k,[0;k-1]}$ и $\tilde{F}_{2,k,[0;k-1]}$ зависят только от предыдущих z_l, p_l и λ_l , $0 \leq l < k$, а $\tilde{z}, \tilde{p}$ — решение задачи

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0 \tilde{z} + \lambda_0 \tilde{p} + p_0 &= 0, \quad \mathcal{L}_0 \tilde{p} - \tilde{z} = 0, \quad k \geq 1, \\
 \tilde{z}_k|_{\Gamma} &= 0 = \tilde{p}_k|_{\Gamma}, \quad k \geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

В силу леммы 3.1 и теоремы 3.1 при $(x + |y|) \rightarrow 0$

$$\tilde{z}(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{4,\tilde{z}}^+(x, y; 1), \quad \tilde{p}(x, y) \stackrel{\text{as}}{=} \mathcal{R}_{4,\tilde{p}}^+(x, y; 1), \tag{5.7}$$

и, тем самым, как z_0 , так и p_0 , интегрируемы с квадратом по Ω .

При таком представлении уравнения для нахождения (правильных) λ_k принимают вид

$$2\lambda_k \lambda_0 \left(\|p_0\|^2 + \lambda_0 \langle p_0, \tilde{p} \rangle \right) = \tilde{h}_{k,[0;k-1]}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.8}$$

где $\tilde{h}_{k,[0;k-1]}$ — константы, уже известные к моменту решения этого уравнения.

В силу леммы 3 из [10] при выполнении условия (2.6) справедливо соотношение

$$\|p_0\|^2 + \lambda_0 \langle p_0, \tilde{p} \rangle > 0.$$

Опишем процедуру одновременного построения рядов (3.1) и согласованных с ними рядов (4.4).

Алгоритм согласования:

S1. Возьмем λ_0 из (2.7), а остальные λ_k положим равными нулю. Построим ряды (3.1) и согласованные с ними ряды (4.4), соответствующие данным λ_k . При этом однозначно определятся z_0 и p_0 .

S2. Из уравнения (5.8) для $k = 1$, в котором $\tilde{h}_{1,[0;0]}$ определяется только через z_0 и p_0 , найдем λ_1 и соответствующие этому λ_1 функции $z_{1,1}$ и $p_{1,1}$. После чего получим новые наборы $\{z_{k,1}\}$ и $\{p_{k,1}\}$ ($k > 1$). При этом уравнения для z_0 и p_0 (как и сами эти функции) не изменятся.

Новые функции $z_{1,1}$ и $p_{1,1}$ будут отличаться от старых $z_{1,0}$ и $p_{1,0}$ в силу (5.7) на слагаемые вида $\mathcal{R}_4^+(x, y; 1)$. При этом изменится и асимптотика при $(x + |y|) \rightarrow 0$ функций $\{z_{k,1}\}$ и $\{p_{k,1}\}$ ($k \geq 1$) и в силу условий согласования (4.5) изменится асимптотика при $(\xi^2 + \eta^2) \rightarrow +\infty$ и некоторых функций из внутреннего разложения.

Рассмотрим подробнее ситуацию изменения асимптотик коэффициентов внутреннего разложения при изменении старых $\epsilon^k z_k$ и $\epsilon^k p_k$ на величину $\epsilon^k \mathcal{R}_4^+(x, y; 1)$. Все предыдущие функции z_l и p_l ($l < k$) останутся неизменными, поскольку уравнения, их определяющие, не изменятся. Уравнения для V_l и W_l ($l < k$) тоже не изменятся. Покажем, что у этих функций V_l и W_l не изменятся и асимптотики при $(\xi^2 + \eta^2) \rightarrow +\infty$, продиктованные условиями согласования (4.5).

Поскольку при $(x + |y|) \rightarrow 0$ асимптотика добавленного слагаемого имеет вид $\mathcal{R}_4^+(x, y; 1)$, то при переходе к ξ и η ряд $\epsilon^k \mathcal{R}_4^+(x, y; 1)$ даст слагаемые вида $\epsilon^{k+4+s} \xi^{(k+4+s)/4} P_s$. Тем самым, изменятся асимптотики (4.5) лишь у функций V_n и W_n при $n \geq 4 + k + s \geq 4 + k$. Поэтому функции V_l и W_l , $l < n + 2$, не изменяются.

С3. Последовательно находя λ_k и корректируя уравнения и условия поведения при $(x + |y|) \rightarrow 0$ и $(\xi^2 + \eta^2) \rightarrow +\infty$, получаем окончательно коэффициенты всех рядов из (3.1) и (4.4). При этом внутреннее разложение будет согласовано с внешним, и будет выполняться (5.4).

Тем самым, и в этом случае справедлива итоговая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1.4), (3.3) и (2.6), а (3.1) и (4.4) — ряды, построенные по алгоритму согласования. Тогда внешнее и внутреннее разложения есть асимптотические разложение решения задачи (1.8) с дополнительным условием $\lambda_\epsilon \|p_\epsilon\| = 1$ при $\epsilon \rightarrow +0$ в областях (4.8) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972, 736 с.
3. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных // Тр. ИММ УрО РАН. 2003. Т. 9. № 1. С. 107–120.
4. Ильин А.М., Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 6. С. 109–126.
5. Casas Eduardo. A review on sparse solutions in optimal control of partial differential equations // SeMA J. 2017. V. 74. P. 319–344.
6. Lou H., Yong J. Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls // Math. Control Relat. Field. 2018. V. 8. № 1. P. 57–88.
7. Betz Livia M. Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. 2019. V. 57. № 6. P. 4033–4062.
8. Данилин А.Р. Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Матем. сб. 2000. Т. 191. №10. С. 3–12.
9. Данилин А.Р. Асимптотика решений системы сингулярных эллиптических уравнений в прямоугольнике // Матем. сб. 2003. Т. 194. №1. С. 31–60.
10. Данилин А.Р. Асимптотика решения сингулярной задачи оптимального распределённого управления с существенными ограничениями в выпуклой области // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 2. С. 256–268.
11. Данилин А.Р. Асимптотика решения задачи оптимального распределённого управления в выпуклой области с малым параметром при одной из старших производных // Уфимский матем. ж. 2023. Т. 15. № 2. С. 42–54.
12. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
13. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Наука, 1989. 248 с.
14. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
15. Данилин А.Р., Зорин А.П. Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 95–107.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO A BISINGULAR PROBLEM OF OPTIMAL DISTRIBUTED CONTROL IN A CONVEX DOMAIN WITH A SMALL PARAMETER IN ONE OF THE HIGHER DERIVATIVES

A. R. Danilin*

*N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
S. Kovalevskaya St. 16, Yekaterinburg, 620990, Russia*

**e-mail: dar@imm.uran.ru*

Received 27 November, 2023

Revised 13 January, 2024

Accepted 06 February, 2024

Abstract. The paper considers the problem of optimal distributed control in a strictly convex planar domain with a smooth boundary and a small parameter in one of the higher derivatives of the elliptic operator. In this problem, a zero Dirichlet boundary condition is imposed, and the control enters additively into the inhomogeneity. The set of admissible controls is the unit ball in the corresponding space of square-integrable functions. The solutions to the resulting boundary value problems are treated in the generalized sense as elements of a certain Hilbert space. The optimality criterion is the sum of the square of the norm of the state deviation from a given state and the square of the norm of the control, with a weighting coefficient. This structure of the optimality criterion allows either the first or the second term to be emphasized, depending on the need. In the first case, achieving the desired state is prioritized, while in the second case, minimizing resource costs becomes more important. The asymptotics of the problem are studied in detail, arising from a second-order differential operator with a small coefficient in one of the higher derivatives, to which a zero-order differential operator is added.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.