ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 5, с. 745–765

УДК 517.977.56

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫМ ЭВОЛЮЦИОННЫМ УРАВНЕНИЕМ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2024 г. А.В. Чернов[1,*]

[1]*603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия*

**e-mail: chavnn@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.11.2023 г.
Переработанный вариант 16.01.2024 г.
Принята к публикации 31.01.2024 г.

Исследуется задача оптимального управления абстрактным полулинейным дифференциальным уравнением первого порядка по времени в гильбертовом пространстве, с неограниченным оператором и линейно входящим в правую часть управлением. Целевой функционал предполагается аддитивно разделенным по состоянию и управлению, при зависимости от состояния достаточно общего вида. Для этой задачи доказывается теорема существования оптимального управления, а также устанавливаются свойства множества оптимальных управлений. В связи с нелинейностью изучаемого уравнения, развиваются ранее полученные автором результаты о тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости (о тотально глобальной разрешимости) и об оценке решений для подобных уравнений. Указанная оценка оказывается существенной при проведении исследования. В качестве примеров рассматриваются нелинейное уравнение теплопроводности и нелинейное волновое уравнение. Библ. 22.

Ключевые слова: полулинейное эволюционное уравнение с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве, существование оптимального управления, нелинейное уравнение теплопроводности, нелинейное волновое уравнение.

DOI: 10.31857/S0044466924050055, **EDN**: YDLDOA

ВВЕДЕНИЕ

Краткий обзор основных подходов к исследованию проблемы существования оптимального управления в распределенных задачах оптимизации автором уже был представлен в его предыдущей работе по данной теме [1]. Чтобы не повторяться, кратко напомним лишь основные моменты, повлиявшие на мотивацию автора. Достаточно часто рассматривается ситуация, когда динамика управляемой системы допускает описание в виде операторного дифференциального уравнения, в частности, первого порядка по времени:

$$\frac{d\varphi}{dt} + (G\varphi)(t) = z(t), \quad t \in (0;T]; \quad \varphi(0) = a, \tag{1}$$

где на оператор G накладываются специальные условия (типа параболичности, монотонности, коэрцитивности, липшицевости, либо, скажем, линейности и ограниченности, и т.д. и т.п.), обеспечивающие разрешимость этого уравнения для любых z из заданного пространства, см., например, [2], [3, гл. 3], [4, chapter 5], [5]. При этом либо сама правая часть z трактуется как управление, либо она заменяется на выражение, линейно зависящее от управления (но не зависящее от переменной состояния). При замене z на управляемую нелинейность вида $f(.,\varphi,u)$ (не удовлетворяющую специальным требованиям типа тех, которые были отнесены выше к оператору G), с управлением $u \in U$ разрешимость управляемой системы $\forall\, u \in U$ становится негарантированной. В этом случае, как правило, переходят к рассмотрению пар «управление–состояние» (см., например, [6, 7]), а управляемую систему рассматривают как ограничение особого типа. Эта схема предполагает лишь целевые функционалы того или иного специального вида (как правило, суммы q-степеней L_q-норм), см., например, [3, 7] и непустоту множества допустимых пар; при этом обычно доказывается лишь сам по себе факт существования оптимального управления (о свойствах множества оптимальных управлений речь не идет) [7, гл. 1, § 7, § 8; гл. 4, § 1], [3, гл. 3, § 15; гл. 4, § 10], [4, §§ 4.4, 5.3], [5]. Другой стандартный путь — наложение условий (глобальной) липшицевости по переменной состояния на нелинейность $f(.,\varphi,u)$ и/или ее равномерной ограниченности, см., например, [2]. В работе [1] было предложено при исследовании проблемы существования оптимального управления использовать достаточные условия тотально глобальной разрешимости управляемой эволюционной системы. *Тотальное сохранение глобальной разрешимости* (ТСГР), или *тотально глобальная разрешимость* (ТГР) — это свойство управляемой системы сохранять глобальную[1] разрешимость для всех допустимых управлений. При наличии теорем о ТСГР и единственности глобального решения и выполнении их условий функционалы оптимизационной задачи выступают как функции, зависящие только от управлений, что позволяет опираться на соответствующие теоремы функционального анализа или их обобщения и тем самым, упрощать исследование и/или получать достаточно сильные результаты.

Собственно, в [1] рассматривалось операторное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве псевдопараболического типа, допускающее сведение к уравнению

$$\frac{d\varphi}{dt} + (G\varphi)(t) = \Phi\big(t, \varphi(t)\big) + b\big(t, u(t), \varphi(t)\big), \quad t \in (0; T]; \quad \varphi(0) = a, \tag{2}$$

с ограниченным линейным оператором G и функцией $b(t, u, \varphi)$, билинейной по (u, φ), при естественных предположениях относительно функции $\Phi(t, \varphi)$ (локальная липшицевость и локальная оценка роста по переменной состояния φ). В данной статье результаты [1] распространяются на случай неограниченного оператора G (но на этот раз действующего в гильбертовом пространстве). При этом слагаемое $\Phi\big(t, \varphi(t)\big)$ рассматривается в более общей форме $\Phi\big(t, \varphi(.)\big)$ как оператор от φ, вольтерровый в том смысле, что значения $\Phi\big(t, \varphi(.)\big)$ зависят лишь от значений $\varphi(s)$ при $s \in [0; t]$ и не зависят от значений $\varphi(s)$ при $s \in (t; T]$ для п.в. $t \in [0; T]$. Слагаемое $b(t, u, \varphi)$ допускает нелинейный характер зависимости от φ. Так же, как и в [1], доказывается теорема существования оптимального управления и устанавливаются свойства множества оптимальных управлений U_*. А именно, при сделанных предположениях доказывается, что U_* непусто и слабо компактно в пространстве управлений, и что всякая минимизирующая последовательность слабо сходится к этому множеству. В качестве примеров рассматриваются нелинейное уравнение теплопроводности и нелинейное волновое уравнение. Отметим наконец, что для понимания доказательств основных утверждений данной статьи необходимо иметь под рукой работу [1].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Пусть X — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[.,.]_X$, $G : X \to X$ — инфинитезимальный генератор (производящий оператор) сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \in [0; T]$, с областью определения $D(G) \subset X$, $z \in Z = L_2\big(0, T; X\big)$, $x_0 \in X$. Следуя [8, § 4.8], рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (абстрактного дифференциального уравнения в пространстве X):

$$x'(t) = Gx(t) + z(t), \quad t \in [0; T]; \quad x(0) = x_0. \tag{3}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.1. (см. [8, теорема 4.8.3]). *Для любых $z \in Z$, $x_0 \in X$ существует единственная функция $x : [0; T] \to X$ такая, что для всех $y \in D(G^*)$ функция $\big[x(t), y\big]_X$ абсолютно непрерывна на $[0; T]$,*

$$\frac{d}{dt}\big[x(t), y\big]_X = \big[x(t), G^* y\big]_X + \big[z(t), y\big]_X \quad \textit{п.в. } t \in [0; T],$$

$$\lim_{t\to 0}\big[x(t), y\big]_X = [x_0, y] \quad \forall\, y \in D(G^*).$$

Более того, справедлива формула

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)z(s)\,ds, \quad t \in [0; T]. \tag{4}$$

Лемма 1.2. (см. [8, следствие 4.8.1]). *Для любых $z \in Z$, $x_0 \in X$ существует единственная слабонепрерывная функция $x : [0; T] \to X$ такая, что для всех $y \in D(G^*)$ имеем*

$$\big[x(t), y\big]_X = [x_0, y]_X + \int_0^t \big[x(s), G^* y\big]_X\,ds + \int_0^t \big[z(s), y\big]_X\,ds,$$

[1] Глобальную разрешимость эволюционной системы мы понимаем как разрешимость на произвольно фиксированном промежутке времени.

и более того, эта функция представляется формулой (4).

Замечание 1.1. В [8] интеграл от функции со значениями в пространстве X понимается в смысле Петтиса; $L_2(0,T;X)$ определяется в [8, гл. 3, п.3.5] и понимается как пространство слабо измеримых функций $z : [0;T] \to X$, для которых функция $\|z(t)\|_X^2$ интегрируема по Лебегу; в [8, гл. 3, п.3.5] (чтобы не перегружать изложение, как там сказано) выкладки проводятся для случая сепарабельного пространства X — в этом случае измеримость функции $\|z(t)\|_X^2$ заведомо гарантируется. Но можно понимать пространство $L_2(0,T;X)$ и в обычном смысле — как пространство измеримых по Бохнеру (а следовательно, сильно измеримых) функций $z : [0;T] \to X$, для которых функция $\|z(t)\|_X^2$ интегрируема по Лебегу, поскольку это просто сужение пространства по сравнению с его трактовкой в [8, глава 3, п.3.5]. Функция $z : [0;T] \to X$ сильно измерима тогда и только тогда, когда она слабо измерима и почти сепарабельнозначна [9, глава 3, §1, теорема 3.5.3, с. 86]. Для сепарабельного пространства X понятия слабой измеримости и измеримости по Бохнеру совпадают [10, гл. 4, теорема 1.4]. Отметим, кстати, что из интегрируемости по Бохнеру следует интегрируемость по Петтису, с совпадением интегралов в том и другом смысле, [9, с. 94]. Условимся понимать обозначение $L_2(0,T;X)$ и ему подобные в обычном смысле.

Напомним, см., например, [9, глава III, § 1, п.3.2, с.72], [11, с. 96], что функция $x : [0;T] \to X$ (для, вообще говоря, линейного нормированного пространства X) называется *слабо непрерывной* (иногда говорят *деминепрерывной*), если для любого $y \in X^*$ функция $y\big[x(t)\big]$ непрерывна на $[0;T]$. Множество всех слабо непрерывных функций $x : [0;T] \to X$ будем обозначать $\mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$. Для дальнейшего важно, что норма $\big\|x(t)\big\|_X$ всякой функции $x \in \mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$ ограничена на $[0;T]$. С другой стороны, см., например, [10, гл. IV, теорема 1.9, с. 154], всякая функция $x \in \mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$ интегрируема по Бохнеру, следовательно, измерима по Бохнеру. Стало быть, $\mathbb{C}_w\big(0,T;X\big) \subset L_\infty\big(0,T;X\big)$.

Функцию $x(t)$, существование и единственность которой в множестве $\mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$ утверждается в леммах 1.1, 1.2, будем называть *слабым решением* задачи (3). Далее будем предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию.

Условие $\mathbf{G}_1$. Полугруппа $S(.)$ равномерно ограничена на промежутке $[0;T]$, т.е. $\big\|S(t)\big\| \leqslant M$ для всех $t \in [0;T]$.

Замечание 1.2. Для любой сильно непрерывной полугруппы $S(t)$ существуют константы $\omega \geqslant 0$, $R \geqslant 1$ такие, что выполняется условие на порядок роста: $\big\|S(t)\big\| \leqslant Re^{\omega t}\ \forall\, t \geqslant 0$, см. [12, § 1.2, theorem 2.2]. Поэтому условие $\mathbf{G}_1$ заведомо выполнено на любом конечном промежутке $[0;T]$ с константой $M = M(T) = Re^{\omega T}$.

Лемма 1.3. *Пусть* $A[z](t) = \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds$, $t \in [0;T]$, *— слабое решение задачи* (3) *при* $x_0 = 0$, $z \in Z$. *Тогда для п.в.* $t \in [0;T]$ *справедлива оценка* $\big\|A[z](t)\big\|_X \leqslant M\int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds$.

Доказательство. По свойствам интеграла Петтиса [8, с. 176] и в силу условия $\mathbf{G}_1$

$$\big\|A[z](t)\big\|_X \leqslant \int\limits_0^t \big\|S(t-s)\,z(s)\big\|_X\,ds \leqslant M\int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds.$$

Лемма доказана.

Будем предполагать заданными числа $T > 0$, $p \in [2;+\infty)$. Чтобы определить управляемую систему, сделаем следующие предположения.

Условие $\mathbf{F}_1$. Для всех $z \in E(T) = L_\infty(0,T;X)$ отображение $[0;T] \ni t \to \Phi\big(t,z(.)\big)$ принадлежит классу $L_2\big(0,T;X\big)$ и является вольтерровым в том смысле, что значения $\Phi\big(t,z(.)\big)$ зависят лишь от значений $z(s)$ при $s \in [0;t]$ для п.в. $t \in [0;T]$.

Условие $\mathbf{F}_2$. Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая с квадратом по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $r \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $\xi,\eta \in E = E(T)$, $\|\xi\|_E$, $\|\eta\|_E \leqslant r$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем

$$\big\|\Phi(t,\xi) - \Phi(t,\eta)\big\|_X \leqslant \mathcal{N}(t,r)\,\big\|\xi - \eta\big\|_{L_\infty(0,t;X)}.$$

Условие $\mathbf{F}_3$. Существует функция $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу с квадратом по t такая, что $\Big\|\Phi(t,\xi)\Big\|_X \leqslant \mathcal{N}_1(t,r)$ для всех $r > 0$, $\xi \in E(t) = L_\infty(0,t;X)$, $\|\xi\|_{E(t)} \leqslant r$, п.в. $t \in [0;T]$.

Замечание 1.3. По поводу условия $\mathbf{F}_2$ заметим, что функция $\psi(t) = \left\|\xi - \eta\right\|_{L_\infty(0,t;X)}$ является неубывающей и ограниченной. Согласно [13, глава VIII, § 1, теорема 1, с. 192], множество точек разрыва такой функции не более, чем счетно. Иначе говоря, функция $\psi(t)$ непрерывна почти всюду. Стало быть, она интегрируема по Риману [13, глава V, § 4, теорема 2, с. 125], а тем самым, и по Лебегу [13, глава V, § 4, теорема 3, с. 125], и во всяком случае измерима. А в силу ограниченности, $\psi \in L_\infty[0;T]$.

В качестве множества допустимых управлений далее будет выступать выпуклое, замкнутое и ограниченное множество U в пространстве $L_p(0,T;Y)$, где Y — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, $p \geqslant 2$. Пусть, наконец, задана функция $b(t,v,x) : [0;T] \times Y \times X \to X$, измеримая по $t \in [0;T]$, линейная по $v \in Y$ и удовлетворяющая следующим условиям.

Условие $\mathbf{B}_1$. При каждом $u \in U$ оператор суперпозиции $b\big(.,u(.),x(.)\big)$ осуществляет отображение $L_\infty(0,T;X) \to L_2(0,T;X)$.

Условие $\mathbf{B}_2$. Существует функция $\mathcal{N}_2(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу со степенью $\widetilde{p} = \dfrac{2p}{p-2}$, такая, что при при п.в. $t \in [0;T]$, $x \in X$, $\|x\|_X \leqslant r$, выполняется оценка

$$\left\|b(t,v,x)\right\|_X \leqslant \mathcal{N}_2(t,r)\,\|v\|_Y \quad \forall\, v \in Y.$$

Условие $\mathbf{B}_3$. Существует функция $\mathcal{N}_3 = \mathcal{N}_3(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая с квадратом по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $r \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $u \in U$, $\xi,\eta \in E = E(T)$, $\|\xi\|_E$, $\|\eta\|_E \leqslant r$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем

$$\left\|b\big(t,u(t),\xi(t)\big) - b\big(t,u(t),\eta(t)\big)\right\|_X \leqslant \mathcal{N}_3(t,r)\left\|\xi - \eta\right\|_{L_\infty(0,t;X)}.$$

Для $u \in U$ будем рассматривать управляемую задачу вида

$$\varphi'(t) = G\varphi(t) + \Phi\big(t,\varphi(.)\big) + b\big(t,u(t),\varphi(t)\big),\ t \in [0;T];\ \varphi(0) = \varphi_0. \tag{5}$$

Слабое решение задачи (5) на $[0;T]$ понимаем как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна:

$$\varphi(t) = \theta(t) + A\Big[\Phi\big(.,\varphi(.)\big) + b\big(.,u(.),\varphi(.)\big)\Big](t), \quad t \in [0;T]; \quad \varphi \in E, \tag{6}$$

при $\theta(t) = S(t)\varphi_0$, $E = E(T) = L_\infty(0,T;X)$, $\theta \in \mathbb{C}_w\big(0,T;X\big) \subset E$. Ясно, что всякое решение $\varphi \in E$ в соответствии со свойствами оператора правой части принадлежит также и пространству $\mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$.

2. ПОСТАНОВКА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\gamma(t) = \sup\limits_{u \in U}\left\|u(t)\right\|_Y$, $\widetilde{\mathcal{N}}_1(t,r) = M\big\{\mathcal{N}_1(t,r) + \mathcal{N}_2(t,r)\gamma(t)\big\}$, см. условия $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{B}_2$; $\nu(t) \geqslant \left\|S(t)x_0\right\|_{L_\infty(0,t;X)}$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены сделанные выше предположения, $\gamma(.) \in L_p[0;T]$, $\nu(.) \in L_\infty[0;T]$, и кроме того, функции $\mathcal{N}_1(t,r)$, $\mathcal{N}_2(t,r)$ локально липшицевы по $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *существует $T_0 \in (0;+\infty]$ такое, что при всех $T \in (0;T_0)$ задача Коши*

$$\frac{d\beta}{dt} = \widetilde{\mathcal{N}}_1\big(t,\nu(t) + \beta(t)\big), \quad t \in (0;T]; \quad \beta(0) = 0, \tag{7}$$

имеет абсолютно непрерывное решение $\beta \in \mathbf{AC}[0;T]$, понимаемое в смысле п.в.;

б) *для любых $T \in (0;T_0)$, $u \in U$ задача* (5) *имеет решение $\varphi[u] \in \mathbf{C}_w(0,T;X)$, удовлетворяющее оценке $\left\|\varphi[u](t)\right\|_X \leqslant \left\|S(t)x_0\right\|_X + \beta(t)$ для п.в. $t \in [0;T]$, и это решение единственно.*

Доказательство теоремы 2.1 см. в разд. 3.

Теорема 2.1 гарантирует, что управляемая задача (5) разрешима для всех допустимых управлений на *одном и том же* отрезке $[0;T]$, т.е. на данном отрезке имеет смысл постановка задачи оптимального управления. В этом и есть значение теоремы 2.1. При отсутствии теоремы 2.1 горизонт существования решения будет зависеть от выбора конкретного управления, и будет непонятно, как выбирать общий для всех управлений отрезок существования решения $[0;T]$.

Замечание 2.1. Если просто постулировать разрешимость задачи (7) для любого $T \in (0; T_0)$, то требование локальной липшицевости функций $\mathcal{N}_1(t,r)$, $\mathcal{N}_2(t,r)$ по $r \in \mathbb{R}_+$ в условиях теоремы можно опустить (для корректности суперпозиции достаточно непрерывности). Указанную разрешимость можно устанавливать различными способами. Подробные пояснения по этому вопросу см. в [1].

Далее везде будем считать условия теоремы 2.1 выполненными. Поставим задачу оптимизации. Пусть задан непрерывный функционал $I_0 : L_\infty(0,T;X) \to \mathbb{R}$, ограниченный на ограниченных множествах, $J_0[u] = I_0\big(\varphi[u]\big)$, $u \in U$. Для произвольно заданного $\alpha \geqslant 0$ будем исследовать задачу

$$J_\alpha[u] = J_0[u] + \frac{1}{2}\alpha\|u\|^2_{L_p(0,T;Y)} \to \min_{u\in U}.$$

Пусть $J^*_\alpha = \inf\limits_{u\in U} J_\alpha[u]$, $U_* = \big\{u \in U : \ J_\alpha[u] = J^*_\alpha\big\}$.

Теорема 2.2. *Множество U слабо компактно в $L_p(0,T;Y)$.*

Доказательство теоремы 2.2 см. в [1, теорема 1.2].

Теорема 2.3. *Функционал $J_0[u]$, а следовательно, и $J_\alpha[u]$, ограничен на множестве U.*

Доказательство теоремы 2.3 вытекает непосредственно из теоремы 2.1 и ограниченности функционала I_0 на ограниченных множествах в пространстве $L_\infty(0,T;X)$.

Вопрос существования оптимального управления в поставленной задаче оптимизации будем исследовать отдельно для двух основных различных случаев в разд. 4 и 6. Там же будут сформулированы и доказаны соответствующие теоремы.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Общие замечания по вопросу тотально глобальной разрешимости управляемых операторных уравнений (и распределенных систем, в частности) см. в работе [1]. Следующее утверждение известно как лемма Гронуолла.

Лемма 3.1. *Пусть на $[0;T]$ заданы: $f \in L^+_\infty[0;T]$ и $g \geqslant 0$ — вещественная неубывающая функция. Если имеет место неравенство*

$$f(t) \leqslant g(t) + c\int_0^t f(s)\,ds \quad \textit{для п.в. } t \in [0;T], \quad c \geqslant 0,$$

то $f(t) \leqslant e^{ct}g(t)$ для п.в. $t \in [0;T]$.

Обозначим для краткости $f(t,x,u) = \Phi(t,x) + b(t,u,x)$. Непосредственно из предположений $\mathbf{F}_1$–$\mathbf{F}_3$, $\mathbf{B}_1$–$\mathbf{B}_3$ получаем, что функция f удовлетворяет следующим условиям.

Условие $\mathbf{R}_1$. Для всех $u \in U$, $z \in E(T) = L_\infty(0,T;X)$ отображение $[0;T] \ni t \to f\big(t, z(.), u(t)\big)$ принадлежит классу $L_2\big(0,T;X\big)$ и является вольтерровым по z в том смысле, что значения $f\big(t,z(.),u(t)\big)$ зависят лишь от значений $z(s)$ при $s \in [0;t]$ для п.в. $t \in [0;T]$.

Условие $\mathbf{R}_2$. Существует функция $\widehat{\mathcal{N}}_1(t,r) = \mathcal{N}_1(t,r) + \mathcal{N}_2(t,r)\gamma(t) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу с квадратом по t такая, что $\Big\|f\big(t,\xi,u(t)\big)\Big\|_X \leqslant \widehat{\mathcal{N}}_1(t,r)\ \forall\, r > 0$, $\xi \in E(t) = L_\infty(0,t;X)$, $\|\xi\|_{E(t)} \leqslant r$, $u \in U$, п.в. $t \in [0;T]$.

Условие $\mathbf{R}_3$. Существует функция $\widehat{\mathcal{N}}_2(t,r) = \mathcal{N}(t,r) + \mathcal{N}_3(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая с квадратом по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $r \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall\, u \in U$, $\xi, \eta \in E = E(T)$, $\|\xi\|_E$, $\|\eta\|_E \leqslant r$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем $\big\|f\big(t,\xi,u(t)\big) - f\big(t,\eta,u(t)\big)\big\|_X \leqslant \widehat{\mathcal{N}}_2(t,r)\,\big\|\xi - \eta\big\|_{L_\infty(0,t;X)}$.

Лемма 3.2. *Каковы бы ни были $T > 0$, $u \in U$, задача* (5) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, от противного, что управлению $u \in U$ отвечают два решения φ_1, φ_2 задачи (5). Это означает, что

$$\varphi_i(t) = S(t)\varphi_0 + \int_0^t S(t-s)f\big(s,\varphi_i,u(s)\big)\,ds, \quad i = 1,2, \quad t \in [0;T].$$

Пусть $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, $r = \max\limits_{i=1,2}\|\varphi_i\|_E$, $\sigma = \big\|\widehat{\mathcal{N}}_2(.,r)\big\|_{L_2}$. Пользуясь условиями $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{R}_3$, получаем

$$M^{-1}\big\|\psi(t)\big\|_X \leqslant \int_0^t \Big\|f\big(s,\varphi_1,u(s)\big) - f\big(s,\varphi_2,u(s)\big)\Big\|_X\,ds \leqslant \int_0^t \widehat{\mathcal{N}}_2(s,r)\,\|\psi\|_{L_\infty(0,s;X)}\,ds \leqslant \sigma\sqrt{\int_0^t \|\psi\|^2_{L_\infty(0,s;X)}\,ds}.$$

Поскольку правая часть не убывает по $t \in [0;T]$, то ясно, что

$$\|\psi\|^2_{L_\infty(0,t;X)} \leqslant M^2\sigma^2 \int\limits_0^t \|\psi\|^2_{L_\infty(0,s;X)}\,ds.$$

По лемме 3.1 (Гронуолла), $\|\psi\|^2_{L_\infty(0,T;X)} = 0$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть при* $\nu \equiv 0$ *задача Коши* (7) *имеет решение* $\beta(t)$; $\varphi_0 = 0$. *Тогда* $\forall\, u \in U$ *задача* (5) *имеет решение, удовлетворяющее оценке* $\big\|\varphi(t)\big\|_X \leqslant \beta(t)$, $t \in [0;T]$.

Доказательство. Пусть $\sigma = \|\beta\|_{\mathbf{C}[0;T]}$. Зафиксируем произвольно $u \in U$. Нам достаточно доказать разрешимость уравнения

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t S(t-s) f\big(s,\varphi,u(s)\big)\,ds, \quad t \in [0;T]; \quad \varphi \in L_\infty(0,T;X). \tag{8}$$

Выберем разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $\max\limits_{i=\overline{1,k}} |t_i - t_{i-1}| < \delta$, где число $\delta > 0$ определяется исходя из условия (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега):

$$M \int\limits_h \widehat{\mathcal{N}}_2(s,\sigma)\,ds < \frac{1}{2} \quad \text{для измеримых } h \subset [0;T], \quad \operatorname{mes} h \leqslant \delta.$$

Докажем разрешимость уравнения (8) на $[0;t_1]$. Для $i = \overline{1,k}$ определим множества $W_i = \big\{\varphi \in E(t_i) = L_\infty(0,t_i;X) : \ \big\|\varphi(t)\big\|_X \leqslant \beta(t),\ t \in [0;t_i]\big\}$ и операторы $\mathcal{F}_i : W_i \to L_\infty(0,t_i;X)$ формулой

$$\mathcal{F}_i[\varphi](t) = \int\limits_0^t S(t-s) f\big(s,\varphi,u(s)\big)\,ds, \quad t \in [0;t_i].$$

Заметим, что функция β неубывающая, так как $\beta' \geqslant 0$. Стало быть,

$$\big\|\varphi(s)\big\|_X \leqslant \beta(s) \leqslant \beta(t) \quad \text{п.в. } s \in [0;t],$$

и таким образом, $\big\|\varphi\big\|_{L_\infty(0,t;X)} \leqslant \beta(t)$ п.в. $t \in [0;t_i]$, $\forall\,\varphi \in W_i$; $i = \overline{1,k}$. Поэтому для любого $\varphi \in W_1$, пользуясь условиями $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, получаем

$$\big\|\mathcal{F}_1[\varphi](t)\big\|_X \leqslant M \int\limits_0^t \Big\|f\big(s,\varphi,u(s)\big)\Big\|_X\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t M\widehat{\mathcal{N}}_1\big(s,\beta(s)\big)\,ds = \int\limits_0^t \widetilde{\mathcal{N}}_1\big(s,\beta(s)\big)\,ds = \beta(t) \quad \text{п.в. } t \in [0;t_1],$$

согласно определению функции $\beta(.)$ как решения задачи (7). Стало быть, $\mathcal{F}_1 : W_1 \to W_1$. Докажем сжимаемость оператора $\mathcal{F}_1$ на множестве W_1. Действуя совершенно аналогично тому, как это было при доказательстве леммы 3.2, для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in W_1$ получаем оценку

$$\big\|\mathcal{F}_1[\varphi_1](t) - \mathcal{F}_1[\varphi_2](t)\big\|_X \leqslant M \int\limits_0^{t_1} \widehat{\mathcal{N}}_2(s,\sigma)\,ds\,\big\|\varphi_1 - \varphi_2\big\|_{L_\infty(0,t_1;X)}.$$

Используя условие на мелкость разбиения, заключаем, что

$$\big\|\mathcal{F}_1[\varphi_1] - \mathcal{F}_1[\varphi_2]\big\|_{L_\infty(0,t_1;X)} \leqslant \frac{1}{2}\big\|\varphi_1 - \varphi_2\big\|_{L_\infty(0,t_1;X)}.$$

Это означает, что оператор $\mathcal{F}_1$ является сжимающим на множестве W_1. И согласно принципу сжимающих отображений существует единственное $\varphi = \varphi_1 \in W_1$: $\varphi_1 = \mathcal{F}_1[\varphi_1]$, т.е. уравнение (8) разрешимо на $[0;t_1]$.

Действуя по индукции, предположим, что разрешимость уравнения (8) на $[0;t_{i-1}]$ уже доказана, и соответствующее решение $\varphi_{i-1} \in W_{i-1}$. Определим множество

$$W_{i-1,i} = \big\{\varphi \in E(t_i) : \ \varphi\,\big|_{[0;t_{i-1}]} = \varphi_{i-1}; \ \big\|\varphi(t)\big\|_X \leqslant \beta(t),\ t \in (t_{i-1};t_i]\big\}.$$

Очевидно, что $W_{i-1,i} \subset W_i$. Поэтому совершенно аналогично тому, как это было сделано для $[0;t_1]$, устанавливается, что $\mathcal{F}_i : W_{i-1,i} \to W_i$. При этом очевидно, что $\mathcal{F}_i[\varphi]\,\big|_{[0;t_{i-1}]} = \mathcal{F}_{i-1}[\varphi_{i-1}] = \varphi_{i-1}$ для всех $\varphi \in W_{i-1,i}$. Стало быть, $\mathcal{F}_i : W_{i-1,i} \to W_{i-1,i}$. Докажем сжимаемость оператора $\mathcal{F}_i$ на $W_{i-1,i}$. Для произвольных $\psi_1, \psi_2 \in W_{i-1,i}$ имеем $\mathcal{F}_i[\psi_j](t) = \varphi_{i-1}(t)$ при $t \in [0;t_{i-1}]$, $j = 1, 2$. Если же $t \in (t_{i-1};t_i]$, то

$$\big\|\mathcal{F}_i[\psi_1](t) - \mathcal{F}_i[\psi_2](t)\big\|_X \leqslant M \int\limits_0^{t_{i-1}} \Big\|f\big(s, \varphi_{i-1}, u(s)\big) - f\big(s, \varphi_{i-1}, u(s)\big)\Big\|_{E(t_{i-1})} +$$

$$+M \int\limits_{t_{i-1}}^{t} \Big\|f\big(s, \psi_1, u(s)\big) - f\big(s, \psi_2, u(s)\big)\Big\|_{E(t_i)} \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \widehat{\mathcal{N}}_2(s, \sigma)\, ds\, \big\|\psi_1 - \psi_2\big\|_{L_\infty(0,t_i;X)} \leqslant \frac{1}{2}\, \big\|\psi_1 - \psi_2\big\|_{L_\infty(0,t_i;X)}.$$

Это означает, что оператор $\mathcal{F}_i$ является сжимающим на множестве $W_{i-1,i}$. И согласно принципу сжимающих отображений существует единственное $\varphi = \varphi_i \in W_{i-1,i} \subset W_i$: $\varphi_i = \mathcal{F}_i[\varphi_i]$, т.е. уравнение (8) разрешимо на $[0;t_i]$. По индукции делаем вывод, что уравнение (8) разрешимо на множестве W_k. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Что касается утверждения а), отметим, что при сделанных предположениях относительно функции $\widetilde{\mathcal{N}}_1(t,r)$ задача (7) разрешима локально (это хорошо известный классический факт; в [14, теорема 5] он доказывается даже в более общей постановке, когда речь идет об абсолютно непрерывных функциях со значениями в банахом пространстве). Займемся далее доказательством утверждения б) при произвольно фиксированном $T \in (0;T_0)$. Нам требуется доказать разрешимость уравнения

$$\varphi(t) = S(t)\varphi_0 + \int\limits_0^t S(t-s) f\big(s, \varphi, u(s)\big)\, ds, \quad t \in [0;T]; \quad \varphi \in L_\infty(0,T;X). \tag{9}$$

Заменой $\psi(t) = \varphi(t) - S(t)\varphi_0$ это уравнение сводится к виду (8). Тогда по лемме 3.3 уравнение (9) имеет решение вида $\varphi(t) = S(t)\varphi_0 + \psi(t)$, где $\psi(t)$ — решение аналога (8). Учитывая представление

$$f\big(t, \varphi, u(t)\big) = f\big(t, S(.)\varphi_0 + \psi, u(t)\big) = \widetilde{f}\big(t, \psi, u(t)\big),$$

для функции $\widetilde{f}$ выполняется аналог условия $\mathbf{R}_2$ при замене функции $\widehat{\mathcal{N}}_1(t,r)$ на функцию $\widehat{\mathcal{N}}_1'(t,r) = \widehat{\mathcal{N}}_1\big(t, \nu(t) + r\big)$, $\nu(t) \geqslant \big\|S(.)\varphi_0\big\|_{L_\infty(0,t;X)}$. Это означает, что $\big\|\psi(t)\big\|_X \leqslant \beta(t)$, где $\beta(.)$ — решение задачи (7). И соответственно, $\big\|\varphi(t)\big\|_X \leqslant \big\|S(t)\varphi_0\big\|_X + \beta(t)$. Единственность решения уравнения (9) доказана в лемме 3.2. Теорема 2.1 доказана.

4. СЛУЧАЙ АППРОКСИМАТИВНОЙ КОМПАКТНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе будем считать выполненным следующее предположение.

Условие $\mathbf{W}_1$. Существуют $\widetilde{x}_0 \in X$, всюду плотное множество $\widetilde{Z} \subset Z = L_2(0,T;X)$ и пространство W, компактно вложенное в $L_q(0,T;H)$, $H \supset X$ непрерывно и плотно, $q \in (1,\infty)$, такие, что для всех $z \in \widetilde{Z}$ и $x_0 = \widetilde{x}_0$ задача (3) имеет решение $x = x[z] \in W$; и более того, $\big\|x[z]\big\|_W \leqslant \mathcal{N}_0(\sigma)$ для всех $z \in \widetilde{Z}$, $\|z\|_Z \leqslant \sigma$, где $\mathcal{N}_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — некоторая неубывающая функция.

Условие $\mathbf{W}_1$ естественно назвать *условием аппроксимативной компактности* множества решений задачи (3). В той или иной конкретной ситуации зачастую оказывается, что уже существуют известные результаты (в том числе классические), обеспечивающие выполнение предположения $\mathbf{W}_1$. См. на этот счет примеры в разд. 7. Кроме того, в следующем разделе мы обсудим общие достаточные условия выполнения предположения $\mathbf{W}_1$. Сделаем также следующие предположения.

Условие $\mathbf{F}_0$. Оператор $\Phi\big(., z(.)\big) : L_q(0,T;H) \to L_1(0,T;H)$ определен и непрерывен; и имеет место отображение
$\Phi\big(., z(.)\big) : L_\infty(0,T;H) \cap L_q(0,T;X) \to L_2(0,T;X)$.

Условие $\mathbf{B}_0$. Существует неубывающая функция $\mathcal{N}_3 = \mathcal{N}_3(r) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\xi, \eta \in \widetilde{E}(T) \cap \cap L_q(0,T;X)$, $\widetilde{E}(T) = L_\infty(0,T;H)$, $\|\xi\|_{\widetilde{E}}, \|\eta\|_{\widetilde{E}} \leqslant r$, $u \in U$, имеем:

$$\left\|b(t,u,\xi) - b(t,u,\eta)\right\|_{L_1(0,T;H)} \leqslant \mathcal{N}_3(r) \left\|\xi - \eta\right\|_{L_q(0,T;H)}.$$

Условие $\mathbf{B}_2'$. Условие $\mathbf{B}_2$ выполняется в следующей усиленной форме. При каждом $u \in U$ оператор суперпозиции $b\big(.,u(.),x(.)\big)$ осуществляет отображение $L_\infty(0,T;H) \cap L_q(0,T;X) \to L_2(0,T;X)$. Более того, существует функция $\mathcal{N}_2'(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу со степенью $\widetilde{p} = \dfrac{2p}{p-2}$, такая, что при при п.в. $t \in [0;T]$, $x \in X$, $\|x\|_H \leqslant r$, выполняется оценка

$$\left\|b(t,v,x)\right\|_X \leqslant \mathcal{N}_2'(t,r)\,\|v\|_Y \quad \forall\, v \in Y.$$

Лемма 4.1. *Пусть* $\{z_m\}$ *— ограниченная последовательность в пространстве* Z, $\{x_m\}$ *— последовательность соответствующих решений задачи* (3) *при* $z = z_m$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{x_{m_k}\}$ *сходящаяся в пространстве* $L_q(0,T;H)$.

Доказательство. Выберем последовательность $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Поскольку множество $\widetilde{Z}$ всюду плотно в Z, для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется $\widetilde{z}_m \in \widetilde{Z}$ такое, что $\|z_m - \widetilde{z}_m\|_Z < \varepsilon_m$. Сравним соответствующие решения задачи (3) при $x_0 = \widetilde{x}_0$: $\overline{x}_m(t) = S(t)\widetilde{x}_0 + A[z_m](t)$, $\widetilde{x}_m(t) = S(t)\widetilde{x}_0 + A[\widetilde{z}_m](t)$, $A[z](t) = \int_0^t S(t-s)z(s)\,ds$. В силу условия $\mathbf{G}_1$ имеем

$$\left\|\overline{x}_m(t) - \widetilde{x}_m(t)\right\|_X \leqslant M\|z_m - \widetilde{z}_m\|_{L_1} \leqslant M\sqrt{T}\|z_m - \widetilde{z}_m\|_Z \leqslant M\sqrt{T}\varepsilon_m \equiv \gamma_m;$$

$$\|\overline{x}_m - \widetilde{x}_m\|_{L_\infty(0,T;X)} \leqslant \gamma_m \quad \Rightarrow \quad \|\overline{x}_m - \widetilde{x}_m\|_{L_\infty(0,T;H)} \leqslant c\gamma_m \equiv \delta_m,$$

где c — константа непрерывного вложения $X \subset H$. Согласно условию $\mathbf{W}_1$, $\widetilde{x}_m \in W$ для всех $m \in \mathbb{N}$. По условию, $\|z_m\|_Z \leqslant \sigma_1\ \forall\, m \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности рассуждений, считаем, что $\varepsilon_m \leqslant 1\ \forall\, m \in \mathbb{N}$. Тогда $\|\widetilde{z}_m\|_Z \leqslant \leq 1 + \sigma_1 = \sigma\ \forall\, m \in \mathbb{N}$. Вновь по условию $\mathbf{W}_1$, $\|\widetilde{x}_m\|_W \leqslant \mathcal{N}_0(\sigma)$. Тогда, учитывая компактное вложение $W \subset \subset L_q(0,T;H)$, существует сходящаяся подпоследовательность $\widetilde{x}_{m_k} \to \widetilde{x}$ в $L_q(0,T;H)$. Рассмотрим

$$\|\overline{x}_{m_k} - \widetilde{x}\|_{L_q} \leqslant \|\overline{x}_{m_k} - \widetilde{x}_{m_k}\|_{L_q} + \|\widetilde{x}_{m_k} - \widetilde{x}\|_{L_q} \leqslant T^{1/q}\delta_{m_k} + \|\widetilde{x}_{m_k} - \widetilde{x}\|_{L_q} \to 0.$$

Итак, $\overline{x}_{m_k} \to \widetilde{x}$ в $L_q(0,T;H)$. Для произвольного $x_0 \in X$ обозначим через

$$x_m(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)z_m(s)\,ds = S(t)x_0 - S(t)\widetilde{x}_0 + \overline{x}_m(t)$$

решение $x[z_m]$ задачи (3). По доказанному, очевидно, что $x_{m_k} \to \overline{x}$ в $L_q(0,T;H)$, где $\overline{x}(t) = S(t)x_0 - S(t)\widetilde{x}_0 + \widetilde{x}(t)$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть* $u_m \rightharpoonup u$, $\{u_m\} \subset U$, *и по теореме* 2.2, $u \in U$; $\varphi_m = \varphi[u_m]$, *причем последовательность* $\{\varphi_m\}$ *ограничена в* $L_\infty(0,T;X)$. *Тогда существует подпоследовательность* $\varphi_{m_k} \to \varphi[u]$ *в* $L_q(0,T;H)$.

Доказательство. Будем считать, что

$$\|\varphi_m\|_{L_\infty(0,T;X)} \leqslant \sigma, \quad \|u_m\|_{L_p(0,T;Y)} \leqslant \sigma \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Положим $z_m = \Phi\big(.,\varphi_m(.)\big)$, $\zeta_m = b\big(.,u_m(.),\varphi_m(.)\big) + z_m(.)$. По условиям $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{B}_1$, $z_m \in L_2(0,T;X)$, $\zeta_m \in \in L_2(0,T;X)$. Согласно условию $\mathbf{F}_3$ имеем

$$\left\|z_m(s)\right\|_X \leqslant \mathcal{N}_1(s,\sigma), \quad \text{п.в. } s \in [0;T]; \quad \mathcal{N}_1(.,\sigma) \in L_2[0;T].$$

Таким образом, $\|z_m\|_{L_2} \leqslant \sigma_1 = \left\|\mathcal{N}_1(.,\sigma)\right\|_{L_2}$. И аналогично, по условию $\mathbf{B}_2$ имеем $\left\|b\big(s,u_m(s),\varphi_m(s)\big)\right\|_X \leqslant \leq \mathcal{N}_2(s,\sigma)\left\|u_m(s)\right\|_Y$. Следовательно,

$$\left\|b\big(.,u_m(.),\varphi_m(.)\big)\right\|_{L_2} \leqslant \left\|\mathcal{N}_2(.,\sigma)\right\|_{L_{\widetilde{p}}[0;T]}\|u_m\|_{L_p(0,T;Y)} \leqslant \sigma_2,$$

где $\sigma_2 = \sigma\left\|\mathcal{N}_2(.,\sigma)\right\|_{L_{\widetilde{p}}[0;T]}$. Таким образом, $\|\zeta_m\|_{L_2} \leqslant \sigma_1 + \sigma_2$.

Так как $L_q(0,T;X)$ — рефлексивное банахово пространство (в случае $q = 2$ гильбертово) [10, гл. IV, § 1, теоремы 1.13, 1.14, замечания 1.10, 1.11, с. 159–163]), замкнутый шар в $L_q(0,T;X)$ слабо компактен [15, с. 51, теорема 4]. Стало быть, существует подпоследовательность $\varphi_{m_k} \rightharpoonup \overline{\varphi}$ в $L_q(0,T;X)$. Без ограничения общности рассуждений, примем, что $\varphi_m \rightharpoonup \overline{\varphi}$ в $L_q(0,T;X)$. Поскольку $X \subset H$ непрерывно и плотно, то $H^* \subset X^* = X$, и соответственно, $\big(L_q(0,T;H)\big)^* = L_{q'}(0,T;H^*) \subset L_{q'}(0,T;X) = \big(L_q(0,T;X)\big)^*$. Отсюда ясно, что $\varphi_m \rightharpoonup \overline{\varphi}$ в $L_q(0,T;H)$.

По лемме 4.1, найдется подпоследовательность $\varphi_{m_k} \to \varphi$ в $L_q(0,T;H)$. Без ограничения общности рассуждений, будем считать, что $\varphi_m \to \varphi$ в $L_q(0,T;H)$. Поскольку из сильной сходимости следует слабая, а слабый предел определяется однозначно [16, утверждение 2.22, с. 17], заключаем, что $\overline{\varphi} = \varphi$. Таким образом, $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в $L_q(0,T;X)$, $\varphi_m \to \varphi$ в $L_q(0,T;H)$.

Поскольку из сходимости в $L_q[0;T]$ следует сходимость по мере [17, теорема VIII.5.1, с. 210], а из нее по теореме Ф. Рисса [17, теорема VI.5.3, с. 142] — существование подпоследовательности, сходящейся п.в., можем считать, с точностью до перехода к подпоследовательности, что

$$\big\|\varphi(t)\big\|_H \leqslant \lim_{m\to\infty}\big\|\varphi(t)-\varphi_m(t)\big\|_H + \big\|\varphi_m(t)\big\|_H \leqslant c\sigma,$$

где c — константа непрерывного вложения $X \subset H$.

Итак, $\varphi \in L_\infty(0,T;H) \cap L_q(0,T;X)$. По условию $\mathbf{F}_0$ получаем, что $z_m \to z = \Phi\big(.,\varphi(.)\big)$ в $L_1(0,T;H)$, и при этом $z \in L_2(0,T;X)$. Рассмотрим

$$\varphi_m(t) = S(t)\varphi_0 + \int\limits_0^t S(t-s)z_m(s)\,ds + \int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u_m(s),\varphi_m(s)\big)\,ds.$$

при фиксированном $t \in [0;T]$. По условиям $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ $\forall\omega \in X$ функционал

$$g_t[u] = \big[\xi[u](t),\omega\big], \quad \xi[u](t) = \int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u(s),\varphi(s)\big)\,ds$$

является линейным и непрерывным в $L_p(0,T;Y)$. Поэтому, переходя к пределу, получаем $\lim\limits_{m\to\infty}\big[\xi[u_m](t),\omega\big] = \big[\xi[u](t),\omega\big]$. Иначе говоря,

$$\big[\xi[u_m](t)-\xi[u](t),\omega(t)\big] \to 0 \quad \forall\omega \in L_{q'}(0,T;X), \quad t \in [0;T].$$

Это предел в смысле п.в., а следовательно, и предел сходимости по мере. Тогда, учитывая равномерную поточечную ограниченность функций

$$\Big|\big[\xi[u_m](t)-\xi[u](t),\omega(t)\big]\Big| \leqslant 2M\sigma\sqrt{T}\big\|\mathcal{N}_2'(.,c\sigma)\big\|_{L_{\widetilde{p}}[0;T]}\big\|\omega(t)\big\|_X,$$

см. условие $\mathbf{B}_2'$, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [17, теорема VII.3.1, с. 166], получаем

$$\int\limits_0^T \big[\xi[u_m](t)-\xi[u](t),\omega(t)\big]\,dt \to 0 \quad \forall\omega \in L_{q'}(0,T;X).$$

Иначе говоря, $\xi[u_m] \rightharpoonup \xi[u]$ в $L_q(0,T;X)$. Следовательно, $\xi[u_m] \rightharpoonup \xi[u]$ в $L_q(0,T;H)$. Рассмотрим

$$P_m(t) = \int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u_m(s),\varphi_m(s)\big)\,ds - \int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u(s),\varphi(s)\big)\,ds.$$

Ясно, что $P_m(t) = f_m(t) + \xi[u_m](t) - \xi[u](t)$, где

$$f_m(t) = \int\limits_0^t S(t-s)\Big\{b\big(s,u_m(s),\varphi_m(s)\big) - b\big(s,u_m(s),\varphi(s)\big)\Big\}\,ds.$$

Непосредственно из условия $\mathbf{B}_0$ получаем

$$\big\|f_m(t)\big\|_H \leqslant M\big\|b(t,u_m,\varphi_m)-b(t,u_m,\varphi)\big\|_{L_1(0,T;H)} \leqslant M\mathcal{N}_3(c\sigma)\,\big\|\varphi_m-\varphi\big\|_{L_q(0,T;H)} \to 0.$$

Таким образом, $\|f_m\|_{L_\infty(0,T;H)} \leqslant M\mathcal{N}_3(c\sigma)\,\|\varphi_m - \varphi\|_{L_q(0,T;H)} \to 0$. Следовательно, $f_m \to 0$ в $L_q(0,T;H)$, а значит, $f_m \rightharpoonup 0$ в $L_q(0,T;H)$. Соответственно, $P_m \rightharpoonup 0$ в $L_q(0,T;H)$. Аналогично, в силу условия $\mathbf{F}_0$ получаем $Q_m \to 0$ в $L_q(0,T;H)$, а значит, $Q_m \rightharpoonup 0$ в $L_q(0,T;H)$, где

$$Q_m(t) = \int\limits_0^t S(t-s)\Phi\big(s,\varphi_m(s)\big)\,ds - \int\limits_0^t S(t-s)\Phi\big(s,\varphi(s)\big)\,ds.$$

Из полученных соотношений вытекает, что $\varphi_m \rightharpoonup \widetilde{\varphi}$ в $L_q(0,T;H)$, где

$$\widetilde{\varphi}(t) = S(t)\varphi_0 + \int\limits_0^t S(t-s)\Phi\big(s,\varphi(s)\big)\,ds + \int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u(s),\varphi(s)\big)\,ds.$$

Однако выше уже было показано, что $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в $L_q(0,T;H)$. И поскольку слабый предел существует только один, заключаем, что $\widetilde{\varphi} = \varphi$. А это, в свою очередь означает, что выполняется тождество

$$\varphi(t) = S(t)\varphi_0 + \int\limits_0^t S(t-s)\Phi\big(s,\varphi(s)\big)\,ds + \int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u(s),\varphi(s)\big)\,ds,$$

причем функция $\zeta(s) = \Phi\big(s,\varphi(s)\big) + b\big(s,u(s),\varphi(s)\big)$ принадлежит пространству $L_2(0,T;X)$, откуда вытекает, что $\varphi = \widetilde{\varphi} \in \mathbf{C}_w(0,T;X)$. Стало быть, $\varphi = \varphi[u]$. Итак, с точностью до перехода к подпоследовательности, $\varphi_m \rightharpoonup \varphi[u]$ в $L_q(0,T;X)$, $\varphi_m \to \varphi[u]$ в $L_q(0,T;H)$. Лемма доказана.

Далее будем предполагать, что функционал I_0 непрерывен на пространстве $L_q(0,T;H)$. Отсюда и из леммы 4.2 вытекает, что при $u_m \rightharpoonup u$, $\{u_m\} \subset U$ существует подпоследовательность такая, что $J_0[u_{m_k}] \to J_0[u]$.

Теорема 4.1. *Функционал $J_0[u]$ слабо непрерывен на множестве U. Функционал $J_\alpha[u]$ слабо полунепрерывен снизу на множестве U.*

Доказательство практически дословно воспроизводит доказательство [1, теорема 1.4], с тем лишь отличием, что вместо ссылки на [1, лемма 4.1] следует использовать ссылку на лемму 4.2.

Определение [15, гл. 1, § 1, определение 6, с. 49]. Пусть E — банахово пространство. Говорят, что последовательность $\{u_m\} \subset E$ *сходится к множеству U слабо в E*, если $\{u_m\}$ имеет хотя бы одну слабо сходящуюся подпоследовательность, причем все точки v, являющиеся слабым пределом какой-либо подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$, принадлежат U.

Непосредственно из теорем 2.1–2.3, 4.1 и [15, гл. 1, § 1, теорема 2, с. 49] вытекает

Следствие 1. Множество U_* непусто и слабо компактно в пространстве $L_p(0,T;Y)$, и более того, всякая минимизирующая последовательность слабо сходится к множеству U_* в $L_p(0,T;Y)$.

Отдельно рассмотрим следующий, практически достаточно интересный случай. Пусть $X = X^+ \times X^-$, где X^+, X^- — гильбертовы пространства. Соответственно, всякий элемент $x \in X$ будем представлять в виде $x = (x^+, x^-)$. Известно, что скалярное произведение

$$[x,y] = [x^+,y^+]_+ + [x^-,y^-]_-,$$

где $[.,.]_+$, $[.,.]_-$ — скалярные произведения соответственно в X^+, X^-. Для $\varphi \in L_q(0,T;X)$ будем использовать аналогичное представление: $\varphi(t) = \big(\varphi^+(t), \varphi^-(t)\big)$, где $\varphi^+ \in L_q(0,T;X^+)$, $\varphi^- \in L_q(0,T;X^-)$. Соответственно,

$$\big(L_q(0,T;X)\big)^* = L_{q'}(0,T;X^*) = L_{q'}(0,T;(X^+)^*) \times L_{q'}(0,T;(X^-)^*) =$$
$$= L_{q'}(0,T;X^+) \times L_{q'}(0,T;X^-).$$

Предположим, что функции Φ и b таковы, что

$$\Phi(.,\varphi) = \Phi(.,\varphi^+), \quad b(.,u,x) = b(.,u,x^+).$$

Соответственно, и правая часть в задаче (3) представляется в виде $z = (z^+, z^-) \in L_2(0,T;X^+) \times L_2(0,T;X^-)$. Мы будем предполагать для простоты, что $\Phi^+ \equiv 0$, $b^+ \equiv 0$ (можно рассмотреть более общий случай, когда они просто не зависят от переменной состояния). Соответственно, при рассмотрении задачи (3) в качестве вспомогательной можно считать, что $z^+ = 0$. В этой ситуации предположение $\mathbf{W}_1$ можно, оставаясь в достаточно содержательных рамках, ослабить следующим образом.

Условие $\mathbf{V}_1$. Существуют элемент $\widetilde{x}_0 \in X$, всюду плотное множество $\widetilde{Z} \subset Z^- = L_2(0,T;X^-)$, банахово пространство $H \supset X^+$ непрерывно и плотно, $q \in (1,\infty)$ такие, что множество первых («положительных») компонент решений задачи (3) $\left\{x^+[(0,z^-)] : \ z^- \in \widetilde{Z}, \ \|z^-\|_{Z^-} \leqslant \sigma\right\}$ при $x_0 = \widetilde{x}_0$ для любого $\sigma > 0$ предкомпактно в $L_q(0,T;H)$.

Соответствующая модификация условий на функции Φ и b производится тривиальным образом. Лемма 4.1 заменяется следующей.

Лемма 4.3. *Пусть* $\{z_m = (0, z_m^-)\}$ *— ограниченная последовательность в пространстве* Z*,* $\{x_m\}$ *— последовательность соответствующих решений задачи* (3) *при* $z = z_m$*. Тогда существует подпоследовательность* $\{x_{m_k}^+\}$ *сходящаяся в пространстве* $L_q(0,T;H)$*.*

Доказательство получается очевидной компиляцией из доказательства леммы 4.1.

Лемма 4.2 заменяется следующей.

Лемма 4.4. *Пусть* $u_m \rightharpoonup u$*,* $\{u_m\} \subset U$*, и по теореме* 2.2*,* $u \in U$*;* $\varphi_m = \varphi[u_m]$*, причем последовательность* $\{\varphi_m\}$ *ограничена в пространстве* $L_\infty(0,T;X)$*. Тогда существует подпоследовательность* φ_{m_k} *такая, что* $\varphi_{m_k}^+ \to \varphi^+[u]$ *в* $L_q(0,T;H)$*,* $\varphi_{m_k} \rightharpoonup \varphi[u]$ *в* $L_q(0,T;X)$*.*

Доказательство получается очевидной компиляцией из доказательства леммы 4.2.

Если теперь предположить, что $J_0[u] = I_0\big[\varphi^+[u]\big]$ и что функционал I_0 непрерывен на пространстве $L_q(0,T;H)$, то теорема 4.1 и ее следствие останутся справедливыми.

5. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ТРЕБОВАНИЯ АППРОКСИМАТИВНОЙ КОМПАКТНОСТИ

Пусть V — произвольное банахово пространство. Напомним следующее определение [18, chapter 7, comment 1, p. 197]. Неограниченный линейный оператор $B : D(B) \subset V \to V$ называется m-аккретивным (m-accretive), если $\overline{D(B)} = V$ и $\forall\lambda > 0$ оператор $I+\lambda B$ осуществляет биекцию $D(B) \to V$, причем $\big\|(I+\lambda B)^{-1}\big\| \leqslant 1$.

Лемма 5.1. *Пусть* $S(t)$ *— сильно непрерывная полугруппа сжатий в* V*,* $z \in \mathbf{C}^1(0,T;V)$*. Тогда существует плотное подмножество* $V' \subset V$*,* $V' \ni 0$*, такое, что для всех* $x_0 \in V'$ *функция*

$$x(t) = S(t)x_0 + \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds \tag{10}$$

такова, что

$$x \in \mathbf{C}^1(0,T;V) \cap \mathbf{C}(0,T;V'). \tag{11}$$

Доказательство. Как указано в [18, chapter 7, comment 1, p. 197], для полугруппы $S(t)$ существует единственный m-аккретивный оператор B такой, что $S(t) = S_B(t)$. Здесь $S_B(t)$ — это отображение $D(B) \ni x_0 \to x[x_0]$, распространенное по непрерывности на все V, где $x[x_0]$ — сильное решение однородной задачи

$$\frac{dx}{dt} + Bx(t) = 0, \ t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0,$$

существующее в силу теоремы Хилле–Иосиды (Hille–Yosida) [18, chapter 7, theorem 7.8]. В соответствии с теоремой Хилле–Иосиды в неоднородном случае [18, chapter 7, theorem 7.10, p. 198], для оператора B существует единственное решение неоднородной задачи (при условиях леммы, $V' = D(B)$):

$$\frac{dx}{dt} + Bx(t) = z(t), \ t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0,$$

удовлетворяющее условию (11), и это решение определяется формулой (10). В силу линейности оператора B, $0 \in D(B)$. Лемма доказана.

Если заметить, что (10) — это слабое решение задачи (3), то непосредственно из леммы 5.1 вытекает

Лемма 5.2. *Пусть* G *— инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы сжатий,* $z \in \mathbf{C}^1(0,T;X)$*. Тогда существует всюду плотное в* X *подмножество* $X' \ni 0$ *такое, что* $\forall\, x_0 \in X'$ *слабое решение задачи* (3) *обладает свойством* (11)*, и, стало быть, является сильным решением.*

Далее мы везде считаем, что G — генератор сильно непрерывной полугруппы сжатий (достаточно, чтобы $(-G)$ был максимальным монотонным оператором). Сделаем следующее предположение.

Условие $\mathbf{W}_2$. Существует подмножество $Z' \subset \mathbf{C}^1(0,T;X)$, плотное по норме пространства $L_2(0,T;X)$ такое, что для всех решений $x = x[z]$ задачи (3) при $x_0 = 0$, $z \in Z'$ (а по лемме 5.2 это, фактически, сильные решения) имеем

$$x \in \mathbf{C}^1\big(0,T;D(G)\big), \quad G\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\,Gx \tag{12}$$

(тем самым, предполагается, что производная справа существует и непрерывна).

Замечание 5.1. Если G — некоторый дифференциальный оператор, то условие (12) означает всего лишь равенство смешанных производных (для обобщенных производных это, очевидно, имеет место).

Напомним следующее определение [18, § 7.4, p. 193]. Неограниченный линейный оператор $G : D(G) \subset X \to X$, $\overline{D(G)} = X$, называется *самосопряженным*, если $D(G^*) = D(G)$, $G^* = G$.

Отметим, что всякий самосопряженный оператор является симметричным: $[Gx,y] = [x,Gy]$ для всех $x,y \in D(G)$. Если оператор $(-G)$ — максимальный монотонный, то для самосопряженности достаточно его симметричности [18, proposition 7.6]. Сделаем еще одно предположение.

Условие $\mathbf{W}_3$. Оператор G самосопряженный; оператор $(-G)$ — максимальный монотонный.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены предположения* $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$; $z \in Z'$, $x = x[z]$ — *решение задачи* (3) *при* $x_0 = 0$. *Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\|Gx\|_{L_2(0,T;X)} \leqslant \|z\|_{L_2(0,T;X)}, \quad \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{L_2(0,T;X)} \leqslant 2\|z\|_{L_2(0,T;X)}.$$

Доказательство. В соответствии с леммой 5.2 x имеет непрерывную сильную производную, причем выполнены соотношения (11), (12). Поэтому справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\,[x,y] = [x,G^*y] + [z,y] = [Gx,y] + [z,y] \quad \forall\, y \in D(G^*) = D(G).$$

Поскольку $\overline{D(G)} = X$, это равенство справедливо и для всех $y \in X$, откуда вытекает, что [19, доказательство леммы 2.2]

$$\frac{dx}{dt} = Gx + z. \tag{13}$$

Домножая (13) скалярно на Gx, получаем

$$[x',Gx] = [Gx,Gx] + [z,Gx], \quad t \in [0;T]. \tag{14}$$

Для сильной производной справедливо тождество [19, доказательство лемм 2.2, 2.3]:

$$\frac{d}{dt}\,[x,Gx] = [x',Gx] + \left[x, \frac{d}{dt}Gx\right],$$

и с учетом предположений $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$ имеем

$$\frac{d}{dt}\,[x,Gx] = [x',Gx] + [x,Gx'] = 2[x',Gx].$$

Подставляя в (14), получаем

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,[x,Gx] = \|Gx\|_X^2 + [z,Gx].$$

Интегрируя полученное тождество на $[0;T]$, имеем

$$\int\limits_0^T \|Gx\|_X^2\,dt = -\int\limits_0^T [z,Gx]\,dt + \frac{1}{2}\big[x(T),Gx(T)\big],$$

учитывая, что $x(0) = x_0 = 0$. В силу монотонности оператора $(-G)$, получим

$$\big[x(T),Gx(T)\big] = -\big[-Gx(T),x(T)\big] \leqslant 0.$$

Таким образом, по неравенствам Коши–Буняковского и Гельдера, имеем

$$\|Gx\|^2_{L_2(0,T;X)} = \int\limits_0^T \|Gx\|^2_X\,dt \leqslant \int\limits_0^T \big|[z,Gx]\big|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \|z\|_X\,\|Gx\|_X\,dt \leqslant \|z\|_{L_2(0,T;X)}\|Gx\|_{L_2(0,T;X)}.$$

Стало быть, $\|Gx\|_{L_2(0,T;X)} \leqslant \|z\|_{L_2(0,T;X)}$. Теперь, в силу (13), можем оценить

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{L_2(0,T;X)} \leqslant \|Gx\|_{L_2(0,T;X)} + \|z\|_{L_2(0,T;X)} \leqslant 2\|z\|_{L_2(0,T;X)}.$$

Лемма доказана.

Замечание 5.2. Мы рассмотрели случай $x_0 = 0$. Если же $x_0 \neq 0$, то можно сделать замену: $y = x - x_0$. Тогда получим

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} = Gx + z = Gy + z + Gx_0, \quad y(0) = 0.$$

Тем самым, справедлива оценка

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{L_2(0,T;X)} = \left\|\frac{dy}{dt}\right\|_{L_2(0,T;X)} \leqslant 2\|z + Gx_0\|_{L_2(0,T;X)}.$$

Следующее утверждение — это известная теорема Лионса–Темама (J.L.Lions–R.Temam), см., например, [20, гл. 1, теорема 5.1, с. 70, включая ее доказательство].

Лемма 5.4. *Пусть V, V' — рефлексивные банаховы пространства, H — банахово пространство, $V \subset H$ компактно, $H \subset V'$ непрерывно, $p, q \in (1; +\infty)$. Тогда пространство*

$$W = \big\{z \in L_q(0,T;V):\ z' \in L_p(0,T;V')\big\}$$

с нормой $\|z\|_W = \|z\|_{L_q(0,T;V)} + \|z'\|_{L_p(0,T;V')}$ является рефлексивным банаховым пространством, непрерывно вложенным в $\mathbf{C}(0,T;V')$ и компактно вложенным в $L_q(0,T;H)$.

Считая далее выполненными предположения $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$, положим $W = W[0;T]$ — множество решений $x = x[z]$ задачи (3), отвечающих всевозможным $z \in Z'$ при $x_0 = 0$. В соответствии с леммами 5.2, 5.3 справедливо вложение

$$W \subset W' = \big\{x \in \mathbf{C}^1(0,T;X):\ x' \in L_2(0,T;X)\big\}.$$

Предположим, что $X \subset H$ компактно, где H — рефлексивное банахово пространство. Выберем произвольно $q \in (1;\infty)$. Тогда, очевидно, имеет место непрерывное вложение

$$W \subset W'_q = \big\{x \in L_q(0,T;X):\ x' \in L_2(0,T;H)\big\}.$$

Применяя лемму 5.4 при $V = X$, $V' = H$, получаем, что $W'_q \subset L_q(0,T;H)$ компактно. Более того, согласно лемме 5.3, при $\|z\|_{L_2(0,T;X)} \leqslant \sigma$ справедлива оценка

$$\big\|x[z]\big\|_{W'_q} = \|x\|_{L_q(0,T;X)} + \|x'\|_{L_2(0,T;H)} \leqslant \|x\|_{L_q(0,T;X)} + c\|x'\|_{L_2(0,T;X)} \leqslant$$

$$\leqslant (T^{1/q}M\sqrt{T} + 2c)\sigma \equiv \mathcal{N}_0(\sigma).$$

Теперь для того, чтобы доказать выполнение предположения $\mathbf{W}_1$, осталось лишь установить плотность вложения $\mathbf{C}^1(0,T;X)$ в пространство $L_2(0,T;X)$, и потребовать также плотность вложения $X \subset H$.

Лемма 5.5. *Пространство $\mathbf{C}^1(0,T;X)$ плотно в $L_p(0,T;X)$ для любого $p \in [1;\infty)$.*

Доказательство. В соответствии с [10, гл. IV, § 1.3, лемма 1.3, с. 156], множество ступенчатых функций плотно в $L_p(0,T;X)$. Поэтому нам достаточно доказать, что любую ступенчатую функцию можно сколь угодно точно в метрике $L_p(0,T;X)$ приблизить функцией из $\mathbf{C}^1(0,T;X)$. Выберем произвольную ступенчатую функцию:

$$y(t) = x_i \in X,\ t \in [t_{i-1};t_i),\ i = \overline{1,k},$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, а также произвольное число $\varepsilon > 0$ и (пока неопределенное) число $\delta > 0$. Для каждого $i = \overline{1, k-1}$ выберем непрерывно дифференцируемую функцию $\lambda_i(t)$ на $[t_i - \delta; t_i + \delta]$ со значениями в $[0; 1]$, исходя из условий

$$\lambda_i(t_i - \delta) = \lambda_i'(t_i - \delta) = 0,\ \lambda_i(t_i + \delta) = 1,\ \lambda_i'(t_i + \delta) = 0.$$

Можно взять, например,

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2\delta}\,(t - t_i - \delta)\right)\right).$$

Определим функцию

$$z_\delta(t) = \begin{cases} x_i + \lambda_i(t)(x_{i+1} - x_i), & t \in [t_i - \delta; t_i + \delta),\ i = \overline{1, k-1}, \\ x_i, & t \in [t_{i-1} + \delta; t_i - \delta),\ i = \overline{2, k-1}, \\ x_1, & t \in [0; t_1 - \delta), \\ x_k, & t \in [t_{k-1} + \delta; T], \end{cases}$$

т.е.

$$z_\delta(t) = \begin{cases} x_i + \lambda_i(t)(x_{i+1} - x_i), & t \in [t_i - \delta; t_i + \delta),\ i = \overline{1, k-1}, \\ y(t) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что существует непрерывная сильная производная

$$z_\delta'(t) = \begin{cases} \lambda_i'(t)(x_{i+1} - x_i), & t \in [t_i - \delta; t_i + \delta),\ i = \overline{1, k-1}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, $z_\delta \in \mathbf{C}^1(0, T; X)$. Оценим

$$\|y - z_\delta\|^p_{L_p(0,T;X)} = \sum_{i=1}^{k-1} \int\limits_{t_i-\delta}^{t_i+\delta} \left\|y(t) - z_\delta(t)\right\|_X^p dt \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \int\limits_{t_i-\delta}^{t_i+\delta} \left\|x_{i+1} - x_i\right\|_X^p dt.$$

Выбирая число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ из условия $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \int\limits_{t_i-\delta}^{t_i+\delta} \left\|x_{i+1} - x_i\right\|_X^p dt < \varepsilon^p$, получаем $\|y - z_\delta\|_{L_p(0,T;X)} < \varepsilon$. Лемма доказана.

Замечание 5.3. При соответствующем выборе вещественных функций $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, k-1}$, точно так же доказывается плотность вложения $\mathbf{C}^m(0, T; X)$ в $L_p(0, T; X)$, $m \in \mathbb{N}$.

Таким образом, из лемм 5.2–5.5 вытекает

Теорема 5.1. *Пусть H — рефлексивное банахово пространство, $X \subset H$ компактно и плотно, $q \in (1, \infty)$, и выполнены предположения $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$. Тогда выполнено предположение $\mathbf{W}_1$.*

При проверке рефлексивности, сепарабельности и компактного вложения конкретных пространств полезны следующие две леммы. Первая — это один из вариантов теоремы Реллиха–Кондрашова, [21, § I.11.5, с. 106].

Лемма 5.6. *Если $1 < p < \infty$, $n \geqslant \ell p$, $q < \dfrac{np}{n - \ell p}$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ представляет объединение конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно своего шара, то вложение $W_p^\ell(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ компактно.*

О других вариантах см., например, [10, гл. II, § 1, лемма 1.28], [22, § 3.5, с. 82]. Во втором собраны известные свойства пространств Соболева [22, § 2.2, теорема 2.4, с. 30].

Лемма 5.7. *Пространство $W_p^\ell(\Omega)$ банахово при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рефлексивно при $1 < p < \infty$, сепарабельно при $1 \leqslant p < \infty$ и гильбертово при $p = 2$ относительно скалярного произведения $(x, y) = \sum\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant \ell} (D^\alpha x, D^\alpha y)$.*

6. СЛУЧАЙ НАРУШЕНИЯ ТРЕБОВАНИЯ АППРОКСИМАТИВНОЙ КОМПАКТНОСТИ

В данном случае приходится накладывать аналог требования аппроксимативной компактности на множество допустимых управлений. А именно, в этом разделе будем предполагать, что заданы: сепарабельное рефлексивное банахово пространство Y, компактно вложенное в рефлексивное банахово пространство H; пространство

$$W = \left\{u \in L_p(0, T; Y) : u' \in L_q(0, T; H)\right\}, \quad q \in (1, \infty),$$

$$\|u\|_W = \|u\|_{L_p(0,T;Y)} + \|u'\|_{L_q(0,T;H)},$$

с производной u' (по $t \in [0;T]$), понимаемой в смысле распределений; ограниченное и выпуклое подмножество $\widetilde{U} \subset W$. В качестве множества допустимых управлений U будет выступать замыкание множества $\widetilde{U}$ по норме $L_p(0,T;Y)$. По сути дела, это означает, что (для существования оптимального управления) допустимые управления должны быть хотя бы аппроксимативно достаточно гладкими (первого порядка). Учитывая, что оператор G у нас неограничен, а уравнение будет исследоваться нелинейное и при этом ничего не известно о компактных свойствах множества решений, вряд ли стоит сильно удивляться этому обстоятельству. Очевидно, что множество U будет выпуклым, замкнутым и ограниченным в пространстве $L_p(0,T;Y)$.

Далее будем считать выполненными следующие предположения.

Условие $\widetilde{\mathbf{B}}_2$. Условие $\mathbf{B}_2$ выполняется в следующей усиленной форме. Существует функция $\mathcal{N}_2'(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу со степенью $\widetilde{p} = \dfrac{2p}{p-2}$ такая, что при при п.в. $t \in [0;T]$, $x \in X$, $\|x\|_X \leqslant r$, выполняется оценка

$$\big\|b(t,v,x)\big\|_X \leqslant \mathcal{N}_2'(t,r)\,\|v\|_H \quad \forall\, v \in Y.$$

Лемма 6.1. *Пусть* $\varphi_m = \varphi[u_m]$, $\{u_m\} \subset U$. *Тогда существует подпоследовательность* $\varphi_{m_k} \to \varphi$ *в* $L_\infty(0,T;X)$.

Доказательство. Выберем числовую последовательность $\varepsilon_m \to 0$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$, пользуясь плотностью вложения $\widetilde{U} \subset U$ в пространстве $L_p(0,T;Y)$, найдем $\widetilde{u}_m \in \widetilde{U}$ такое, что $\|u_m - \widetilde{u}_m\|_{L_p(0,T;Y)} < \varepsilon_m$. Положим $\widetilde{\varphi}_m = \varphi[\widetilde{u}_m]$. Поскольку $\widetilde{U} \subset U$, то согласно теореме 2.1, последовательности $\{\varphi_m\}$, $\{\widetilde{\varphi}_m\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;X)$. Поэтому можно считать, что

$$\|u_m\|_{L_p(0,T;Y)} \leqslant \sigma, \quad \|\widetilde{u}_m\|_{L_p(0,T;Y)} \leqslant \sigma,$$
$$\|\varphi_m\|_{L_\infty(0,T;X)} \leqslant \sigma, \quad \|\widetilde{\varphi}_m\|_{L_\infty(0,T;X)} \leqslant \sigma \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим

$$(\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m)(t) = \int\limits_0^t S(t-s)\Big[\Phi\big(s,\varphi_m(s)\big) - \Phi\big(s,\widetilde{\varphi}_m(s)\big)\Big]\,ds +$$
$$+ \int\limits_0^t S(t-s)\Big[b\big(s,u_m(s),\varphi_m(s)\big) - b\big(s,\widetilde{u}_m(s),\widetilde{\varphi}_m(s)\big)\Big]\,ds.$$

Добавляя и вычитая под вторым интегралом $b\big(s,\widetilde{u}_m(s),\varphi_m(s)\big)$ и пользуясь предположениями $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, получаем

$$M^{-1}\big\|(\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m)(t)\big\|_X \leqslant \int\limits_0^t \Big\|\Phi\big(s,\varphi_m(s)\big) - \Phi\big(s,\widetilde{\varphi}_m(s)\big)\Big\|_X\,ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \Big\|b\big(s,u_m(s) - \widetilde{u}_m(s),\varphi_m(s)\big)\Big\|_X\,ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \Big\|b\big(s,\widetilde{u}_m(s),\varphi_m(s)\big) - b\big(s,\widetilde{u}_m(s),\widetilde{\varphi}_m(s)\big)\Big\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \big\|\mathcal{N}(.,\sigma)\big\|_{L_2}\sqrt{\int\limits_0^t \|\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m\|^2_{L_\infty(0,s;X)}\,ds} + \big\|\mathcal{N}_2(.,\sigma)\big\|_{L_{p'}}\|u_m - \widetilde{u}_m\|_{L_p(0,T;Y)} +$$
$$+ \big\|\mathcal{N}_3(.,\sigma)\big\|_{L_2}\sqrt{\int\limits_0^t \|\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m\|^2_{L_\infty(0,s;X)}\,ds}.$$

Пусть

$$\gamma_1 = \big\|\mathcal{N}(.,\sigma)\big\|_{L_2} + \big\|\mathcal{N}_3(.,\sigma)\big\|_{L_2},\ \gamma_2 = \big\|\mathcal{N}_2(.,\sigma)\big\|_{L_{p'}},\ \gamma = M\,\max\{\gamma_1,\gamma_2\}.$$

Используя очевидное неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, получаем

$$\big\|(\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m)(t)\big\|_X^2 \leqslant 2\gamma^2 \left\{ \int\limits_0^t \|\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m\|^2_{L_\infty(0,s;X)}\, ds + \varepsilon_m^2 \right\}.$$

Поскольку выражение справа не убывает по $t \in [0;T]$, то ясно, что для функции $f_m(t) = \|\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m\|^2_{L_\infty(0,t;X)}$ справедлива оценка

$$f_m(t) \leqslant 2\gamma^2\varepsilon_m^2 + 2\gamma^2 \int\limits_0^t f_m(s)\, ds.$$

Функция $f_m \in L_\infty[0;T]$, см. замечание 1.3. Тогда по лемме 3.1 получим

$$f_m(t) = \|\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m\|^2_{L_\infty(0,t;X)} \leqslant 2e^{2\gamma^2 t}\gamma^2\varepsilon_m^2 \leqslant 2e^{2\gamma^2 T}\gamma^2\varepsilon_m^2 \equiv \delta_m^2.$$

В частности, $\|\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m\|^2_{L_\infty(0,T;X)} \leqslant \delta_m^2 \to 0$ при $m \to \infty$. Поскольку согласно нашим исходным предположениям в этом разделе множество $\widetilde{U}$ содержится и ограничено в W, а пространство W по лемме 5.4 компактно вложено в $L_p(0,T;H)$, ясно, что у последовательности $\{\widetilde{u}_m\} \subset \widetilde{U}$ существует подпоследовательность, сходящаяся в $L_p(0,T;H)$. Без ограничения общности рассуждений, будем считать, что $\widetilde{u}_m \to \widetilde{u}$ в $L_p(0,T;H)$. Следовательно, $\|\widetilde{u}_m - \widetilde{u}_n\|_{L_p(0,T;H)} \to 0$ при $m,n \to \infty$. Повторяя почти дословно проведенные выше рассуждения, с тем лишь отличием, что вместо предположения $\mathbf{B}_2$, используется на этот раз предположение $\widetilde{\mathbf{B}}_2$, получаем оценку вида $\|\widetilde{\varphi}_m - \widetilde{\varphi}_n\|_{L_\infty(0,T;X)} \leqslant \gamma_3\|\widetilde{u}_m - \widetilde{u}_n\|_{L_p(0,T;H)}$. Таким образом, при $E = E(T) = L_\infty(0,T;X)$ имеем

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_E = \big\|(\varphi_m - \widetilde{\varphi}_m) + (\widetilde{\varphi}_m - \widetilde{\varphi}_n) + (\widetilde{\varphi}_n - \varphi_n)\big\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \delta_m + \gamma_3\|\widetilde{u}_m - \widetilde{u}_n\|_{L_p(0,T;H)} + \delta_n \to 0 \quad \text{при} \quad m,n \to \infty.$$

Это означает, что последовательность $\{\varphi_m\}$ фундаментальна в банаховом пространстве $L_\infty(0,T;X)$. Стало быть, сходится. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Пусть $u_m \rightharpoonup u$, $\{u_m\} \subset U$, и по теореме 2.2, $u \in U$; $\varphi_m = \varphi[u_m]$, причем по теореме 2.1, последовательность $\{\varphi_m\}$ ограничена в пространстве $L_\infty(0,T;X)$. Тогда существует подпоследовательность $\varphi_{m_k} \to \varphi[u]$ в $L_\infty(0,T;X)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольно $\varkappa \in (1;\infty)$. Будем считать, что $\|\varphi_m\|_{L_\infty(0,T;X)} \leqslant \sigma$, $\|u_m\|_{L_p(0,T;Y)} \leqslant \sigma\, \forall\, m \in \mathbb{N}$. Положим

$$z_m(.) = \Phi\big(., \varphi_m(.)\big) \in L_2(0,T;X),$$

$$\zeta_m(.) = b\big(., u_m(.), \varphi_m(.)\big) + z_m(.) \in L_2(0,T;X)$$

согласно условиям $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{B}_1$. По лемме 6.1, существует подпоследовательность $\varphi_{m_k} \to \varphi$ в $L_\infty(0,T;X)$. Далее, без ограничения общности рассуждений, будем считать, что $\varphi_m \to \varphi$ в $L_\infty(0,T;X)$. А стало быть, $\varphi_m \to \varphi$ в $L_\varkappa(0,T;X)$. Поскольку из сильной сходимости следует слабая, а слабый предел определяется однозначно [16, утверждение 2.22, с. 17], заключаем, что $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в $L_\varkappa(0,T;X)$. Заметим, что

$$\big\|\varphi(t)\big\|_X \leqslant \lim_{m\to\infty}\big\|\varphi(t) - \varphi_m(t)\big\|_X + \big\|\varphi_m(t)\big\|_X \leqslant \sigma \quad \Rightarrow \quad \|\varphi\|_{L_\infty(0,T;X)} \leqslant \sigma.$$

По условию $\mathbf{F}_2$, $z_m \to z = \Phi\big(., \varphi(.)\big)$ в $L_2(0,T;X)$. Рассмотрим

$$\varphi_m(t) = S(t)\varphi_0 + \int\limits_0^t S(t-s)z_m(s)\, ds + \int\limits_0^t S(t-s)b\big(s, u_m(s), \varphi_m(s)\big)\, ds$$

при фиксированном $t \in [0;T]$. По условиям $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ $\forall\, \omega \in X$ функционал

$$g_t[u] = \big[\xi[u](t), \omega\big], \quad \xi[u](t) = \int\limits_0^t S(t-s)b\big(s, u(s), \varphi(s)\big)\, ds$$

является линейным и непрерывным в $L_p(0,T;Y)$. Поэтому, переходя к пределу, получаем $\lim\limits_{m\to\infty}\big[\xi[u_m](t),\omega\big] = \big[\xi[u](t),\omega\big]$. Иначе говоря,

$$\big[\xi[u_m](t)-\xi[u](t),\omega(t)\big]\to 0 \quad \forall\omega\in L_{\varkappa'}(0,T;X), \quad t\in[0;T].$$

Это можно понимать как предел в смысле п.в., а следовательно, и как предел сходимости по мере. Тогда, учитывая равномерную поточечную ограниченность функций

$$\Big|\big[\xi[u_m](t)-\xi[u](t),\omega(t)\big]\Big| \leqslant 2M\sigma\sqrt{T}\big\|\mathcal{N}_2(.,\sigma)\big\|_{L_{\widetilde{p}}[0;T]}\big\|\omega(t)\big\|_X,$$

см. условие $\mathbf{B}_2$, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [17, теорема VII.3.1, с. 166], получаем

$$\int\limits_0^T\big[\xi[u_m](t)-\xi[u](t),\omega(t)\big]\,dt\to 0 \quad \forall\omega\in L_{\varkappa'}(0,T;X).$$

Иначе говоря, $\xi[u_m]\rightharpoonup\xi[u]$ в $L_\varkappa(0,T;X)$. Рассмотрим

$$P_m(t)=\int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u_m(s),\varphi_m(s)\big)\,ds-\int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u(s),\varphi(s)\big)\,ds.$$

Ясно, что $P_m(t)=f_m(t)+\xi[u_m](t)-\xi[u](t)$, где

$$f_m(t)=\int\limits_0^t S(t-s)\Big\{b\big(s,u_m(s),\varphi_m(s)\big)-b\big(s,u_m(s),\varphi(s)\big)\Big\}\,ds.$$

Непосредственно из условия $\mathbf{B}_3$ получаем

$$\big\|f_m(t)\big\|_X\leqslant M\big\|b(t,u_m,\varphi_m)-b(t,u_m,\varphi)\big\|_{L_1(0,T;X)}\leqslant$$
$$\leqslant M\big\|\mathcal{N}_3(.,\sigma)\big\|_{L_1}\big\|\varphi_m-\varphi\big\|_{L_\infty(0,T;X)}\to 0.$$

Таким образом, $\big\|f_m\big\|_{L_\infty(0,T;X)}\leqslant M\big\|\mathcal{N}_3(.,\sigma)\big\|_{L_1}\big\|\varphi_m-\varphi\big\|_{L_\infty(0,T;X)}\to 0$. Следовательно, $f_m\to 0$ в $L_\varkappa(0,T;X)$, а значит, $f_m\rightharpoonup 0$ в $L_\varkappa(0,T;X)$. Соответственно, $P_m\rightharpoonup 0$ в $L_\varkappa(0,T;X)$.

Аналогично, в силу условия $\mathbf{F}_2$ получаем $Q_m\to 0$ в $L_\varkappa(0,T;X)$, а значит, $Q_m\rightharpoonup 0$ в $L_\varkappa(0,T;X)$, где

$$Q_m(t)=\int\limits_0^t S(t-s)\Phi\big(s,\varphi_m(s)\big)\,ds-\int\limits_0^t S(t-s)\Phi\big(s,\varphi(s)\big)\,ds.$$

Из полученных соотношений вытекает, что $\varphi_m\rightharpoonup\widetilde{\varphi}$ в $L_\varkappa(0,T;X)$, где

$$\widetilde{\varphi}(t)=S(t)\varphi_0+\int\limits_0^t S(t-s)\Phi\big(s,\varphi(s)\big)\,ds+\int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u(s),\varphi(s)\big)\,ds.$$

Однако выше уже было показано, что $\varphi_m\rightharpoonup\varphi$ в $L_\varkappa(0,T;X)$. И поскольку слабый предел существует только один, заключаем, что $\widetilde{\varphi}=\varphi$. А это, в свою очередь означает, что выполняется тождество

$$\varphi(t)=S(t)\varphi_0+\int\limits_0^t S(t-s)\Phi\big(s,\varphi(s)\big)\,ds+\int\limits_0^t S(t-s)b\big(s,u(s),\varphi(s)\big)\,ds,$$

причем функция $\zeta(s)=\Phi\big(s,\varphi(s)\big)+b\big(s,u(s),\varphi(s)\big)$ принадлежит пространству $L_2(0,T;X)$, откуда вытекает, что $\varphi=\widetilde{\varphi}\in\mathbf{C}_w(0,T;X)$. Стало быть, $\varphi=\varphi[u]$. Итак, с точностью до перехода к подпоследовательности, $\varphi_m\rightharpoonup\varphi[u]$ в $L_\varkappa(0,T;X)$, $\varphi_m\to\varphi[u]$ в $L_\infty(0,T;X)$. Лемма доказана.

Далее будем предполагать, что функционал I_0 непрерывен на пространстве $L_\infty(0,T;X)$. Отсюда и из леммы 6.2 вытекает, что при $u_m\rightharpoonup u$, $\{u_m\}\subset U$ существует подпоследовательность такая, что $J_0[u_{m_k}]\to J_0[u]$.

Теорема 6.1. *Функционал $J_0[u]$ слабо непрерывен на множестве U. Функционал $J_\alpha[u]$ слабо полунепрерывен снизу на множестве U.*

Доказательство практически дословно воспроизводит доказательство [1, теорема 1.4], с тем лишь отличием, что вместо ссылки на [1, лемма 4.1] следует использовать ссылку на лемму 6.2.

Непосредственно из теорем 2.1–2.3, 6.1 и [15, гл. 1, § 1, теорема 2, с. 49] вытекает

Следствие 2. Множество U_* непусто и слабо компактно в пространстве $L_p(0,T;Y)$, и более того, всякая минимизирующая последовательность слабо сходится к множеству U_* в $L_p(0,T;Y)$.

7. ПРИМЕРЫ

Пусть $T>0$; $1\leqslant n\leqslant 3$; $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — открытое ограниченное множество. Следуя [6, (1.2),(1.3), с. 22–23], мы предполагаем, что его граница Γ регулярна (дважды непрерывно дифференцируема), причем Ω расположено локально с одной стороны от Γ. Положим $Q=\Omega\times(0;T]$, $\Sigma=\Gamma\times(0;T]$. Следуя [18], мы несколько усилим сделанные выше предположения, считая дополнительно, что Ω — это область класса $\mathbf{C}^\infty$ с ограниченной границей Γ. Отметим, что это соответствует также и предположениям [2].

7.1. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x,t):\overline{\Omega}\times[0;T]\to\mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\Delta\varphi=f(t,\varphi,u)=\Phi(t,\varphi)+b(t,\varphi,u),\quad (x,t)\in Q;\tag{15}$$

$$\varphi\,\big|_\Sigma=0;\quad \varphi(x,0)=\varphi_0(x),\quad x\in\Omega,\tag{16}$$

где $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа.

Прежде всего, чтобы указать и обосновать выбор функциональных пространств, рассмотрим линейную неуправляемую задачу: $f(t,\varphi,u)=z(t)$. Только после этого можно будет сформулировать (соответствующим образом согласованные) условия на выбор функций Φ, b, u.

В [18, sec.10.1] рассматривалась аналогичная задача при $f\equiv 0$. Следуя [18, sec.10.1], возьмем

$$\varphi(t)=\varphi(.,t),\quad X=L_2(\Omega),\quad G\varphi=\Delta\varphi,\quad D(G)=\mathbb{H}^2(\Omega)\cap\mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Таким образом, краевое условие встраивается в область определения $D(G)$. В итоге задача (15), (16) при $f==z=0$ переписывается в виде абстрактного дифференциального уравнения (3). Как показано в [18, sec.10.1], оператор $(-G)$ является максимальным монотонным, т.е. G есть инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы сжатий — условие $\mathbf{G}_1$ выполнено при $M=1$. Далее будем считать, что $n\in\overline{1,3}$. Если $f=z\in L_2(Q)=L_2(0,T;X)$, $\varphi_0=0$, то, как показано в [6], существует единственное решение задачи

$$\varphi=\varphi[z]\in L_2\big(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega)\big),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}\in L_2(Q),$$

причем, см. [6, (1.31)], имеет место оценка

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{L_2(Q)}\leqslant c\,\|z\|_{L_2(Q)}.$$

В соответствии с [22, § 3.5], $X'=\mathbb{H}^2(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ компактно при $q\in(1;\infty)$. Таким образом, имеет место вложение множества

$$\big\{\varphi[z]:\ z\in\mathbf{C}^1(0,T;X)\big\}\subset W=\big\{\varphi\in L_2(0,T;X'):\varphi'\in L_2(0,T;X)\big\},$$

где, согласно лемме 5.4, W компактно вложено в $L_2(0,T;X)$. Впрочем, за счет повышения гладкости функции z, см. замечание 5.3, можно взять

$$\big\{\varphi[z]:\ z\in\mathbf{C}^k(0,T;X')\big\}\subset W_q=\big\{\varphi\in L_q(0,T;X'):\varphi'\in L_2(0,T;X)\big\},$$

с компактным вложением $W_q\subset L_q(0,T;X)$, $q\in(2;\infty)$. В любом случае, оказывается, что условие $\mathbf{W}_1$ выполнено. Значит, можно пользоваться результатами разд. 4 при соответствующем выборе условий на функции Φ, b, u. А именно, будем считать, что заданы $T>0$, $p\in[2;+\infty)$, а также выпуклое, замкнутое, ограниченное множество U в пространстве $L_p(0,T;Y)$, где Y — сепарабельное рефлексивное банахово пространство; $u\in U$;

$X = L_2(\Omega)$. Соответственно, будем предполагать, что функция Φ удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$–$\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_0$; функция b — условиям $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}'_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_0$. По схеме, описанной в разд. 1, управляемая задача (16) может быть представлена в виде абстрактного дифференциального уравнения (5). Тем самым, применима теорема 2.1. А это, в свою очередь, позволяет нам утверждать существование числа $T_0 > 0$ такого, что для всех $T \in (0; T_0]$ и $u \in U$ управляемая задача (16) имеет единственное решение $\varphi = \varphi[u]$. Далее число $T \in (0; T_0]$ будем считать произвольно фиксированным.

Пусть задан непрерывный функционал $I_0 : L_\infty(0, T; X) \to \mathbb{R}$, ограниченный на ограниченных множествах, $J_0[u] = I_0\big(\varphi[u]\big)$, $u \in U$, где $\varphi[u]$ — решение задачи (16), отвечающее управлению u. Для произвольно заданного $\alpha \geqslant 0$ рассмотрим задачу оптимизации

$$J_\alpha[u] = J_0[u] + \frac{1}{2}\alpha\|u\|^2_{L_p(0,T;Y)} \to \min_{u\in U}. \tag{17}$$

Пусть $J^*_\alpha = \inf\limits_{u\in U} J_\alpha[u]$, $U_* = \big\{u \in U : \ J_\alpha[u] = J^*_\alpha\big\}$. Применяя теорему 4.1 и ее следствие, получаем, что справедлива

Теорема 7.1. *При сделанных предположениях множество U_* в задаче* (17) *непусто и слабо компактно в пространстве $L_p(0, T; Y)$, и более того, всякая минимизирующая последовательность слабо сходится к множеству U_* в $L_p(0, T; Y)$.*

7.2. Волновое уравнение

Рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x, t) : \overline{\Omega} \times [0; T] \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = g(t, \varphi, u) = \Phi_1(t, \varphi) + b_1(t, u, \varphi), \quad (x, t) \in Q; \tag{18}$$

$$\varphi\,\big|_\Sigma = 0; \tag{19}$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{21}$$

Так же, как и в предыдущем примере, условия на выбор функций Φ, b, u укажем позже. А предварительно рассмотрим случай $g(t, \varphi, u) = z^-(t)$. В [18, sec.10.3] рассматривалась аналогичная задача при $g \equiv 0$. Следуя [18, sec.10.3], перепишем уравнение (18) в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \psi, \ \frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\varphi + g(t, \varphi, u), \quad (x, t) \in Q. \tag{22}$$

Пусть $\eta = (\varphi, \psi)^*$ (здесь $*$ — знак транспонирования); $\eta(t) = \eta(., t)$. Тогда систему (22) можно переписать в виде:

$$\frac{d\eta}{dt} = G\eta + f(., \eta, u), \tag{23}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \ \eta = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \ f(t, \eta, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, \varphi, u) \end{pmatrix}.$$

Опять же следуя [18, sec.10.3], возьмем $X = X^+ \times X^- = \mathbb{H}^1_0(\Omega) \times L_2(\Omega)$;

$$D(G) = \big\{\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big\} \times \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Таким образом, краевое условие (19) встраивается в область определения $D(G)$. Как указано в [18, sec.10.3, remark 7, p. 338] со ссылкой на [18, corollary 9.19], в случае, когда множество Ω ограничено, можно использовать на $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ скалярное произведение $\int\limits_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \, dx$, а на $X = \mathbb{H}^1_0(\Omega) \times L_2(\Omega)$ скалярное произведение

$$[\eta_1, \eta_2]_X = \int\limits_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \, dx + \int\limits_\Omega \psi_1\psi_2 \, dx.$$

При этом оказывается, что оба оператора G и $(-G)$ являются максимальными монотонными. В частности, отсюда следует, что G — инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы сжатий. Следовательно, условие $\mathbf{G}_1$ выполнено при $M = 1$. Тем самым, можем использовать результаты разд. 1 для задачи

$$\eta'(t) = G\eta(t) + z(t), \quad t \in [0; T]; \quad \eta(0) = \eta_0, \tag{24}$$

вида (3) при указанном выше выборе пространства X и оператора G, а также $z \in L_2(0,T;X)$. При $g(t,\varphi,u) = z^-(t)$ задача (18)–(21) переписывается в виде (24) при $z = (0, z^-)$, $z^- \in L_2(Q)$.

Будем считать, что заданы $T > 0$, $p \in [2;+\infty)$, а также выпуклое, замкнутое, ограниченное множество U в пространстве $L_p(0,T;Y)$, где Y — сепарабельное рефлексивное банахово пространство; $u \in U$. Соответственно, будем предполагать, что функция Φ удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$–$\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_0$; функция b — условиям $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2'$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_0$, где $\eta = (\eta^+, \eta^-)^* = (\varphi, \psi)^*$,

$$\Phi(.,\eta) = \Phi(.,\eta^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_1(.,\eta^+) \end{pmatrix}, b(.,u,\eta) = b(.,u,\eta^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1(.,u,\eta^+) \end{pmatrix}.$$

По схеме, описанной в разд. 1, управляемая задача (18)–(21) может быть представлена в виде абстрактного дифференциального уравнения

$$\eta'(t) = G\eta(t) + \Phi\big(t,\eta(.)\big) + b\big(t,u(t),\eta(t)\big),\ t \in [0;T];\ \eta(0) = \eta_0 \tag{25}$$

вида (5). Тем самым, применима теорема 2.1. А это, в свою очередь, позволяет нам утверждать существование числа $T_0 > 0$ такого, что для всех $T \in (0;T_0]$ и $u \in U$ управляемая задача (25) (а тем самым, и задача (18)–(21)) имеет единственное решение $\eta = \eta[u]$. Далее число $T \in (0;T_0]$ будем считать произвольно фиксированным.

Заметим, что $\|f\|_X = \sqrt{[f,f]_X} = \big\|g(t,\varphi,u)\big\|_{L_2(\Omega)}$; $\eta^+ = \varphi \in X^+ = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset L_6(\Omega) = H$ компактно (при $n = 1,2,3$); $Z^- = L_2(0,T;X^-) = L_2(Q)$. Для решений $\eta = \eta[z]$ при $f \equiv z$, $\eta_0 = (0,0)^*$ имеет место оценка, см., например, [2]:

$$\|\eta^+ = \varphi\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} + \left\|\eta^- = \psi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\,\|z^-\|_{L_2(Q)}, \quad t \in [0;T].$$

Поэтому в соответствии с леммой 5.4 множество первых компонент решений вспомогательной задачи (при $f \equiv z$, $\eta_0 = (0,0)^*$)

$$\big\{\eta^+[(0,z^-)] :\ z^- \in Z^-,\ \|z^-\|_{Z^-} \leqslant \sigma\big\}$$

предкомпактно в $L_q(0,T;H)$ при любом $q \in (1;\infty)$. Таким образом, выполнено условие $\mathbf{V}_1$, и мы здесь находимся в ситуации, описанной в завершающей части разд. 4.

Пусть задан непрерывный функционал $I_0 : L_q(0,T;H) \to \mathbb{R}$, ограниченный на ограниченных множествах, $J_0[u] = I_0\big(\eta^+[u]\big) = I_0\big(\varphi[u]\big)$, $u \in U$, где $\eta[u]$ — решение задачи (25), отвечающее управлению u; соответственно, $\varphi[u]$ — решение задачи (18)–(21), отвечающее управлению u. Для произвольно заданного $\alpha \geqslant 0$ рассмотрим задачу оптимизации

$$J_\alpha[u] = J_0[u] + \frac{1}{2}\alpha\|u\|^2_{L_p(0,T;Y)} \to \min_{u \in U}. \tag{26}$$

Пусть $J_\alpha^* = \inf\limits_{u\in U} J_\alpha[u]$, $U_* = \big\{u \in U :\ J_\alpha[u] = J_\alpha^*\big\}$.

В соответствии с замечаниями из завершающей части разд. 4, справедлива

Теорема 7.2. *При сделанных предположениях множество U_* в задаче* (26) *непусто и слабо компактно в пространстве $L_p(0,T;Y)$, и более того, всякая минимизирующая последовательность слабо сходится к множеству U_* в $L_p(0,T;Y)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А.В. О существовании оптимального управления в задаче оптимизации младшего коэффициента полулинейного эволюционного уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 7. С. 1084–1099.

2. Ismayilova G.G. The problem of the optimal control with a lower coefficient for weakly nonlinear wave equation in the mixed problem // European journal of pure and applied mathematics 2020. Vol. 13. № 2. P. 314–322.

3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с.

4. Tröltzsch F. Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010. xv+399 p.

5. Bewley T., Temam R., Ziane M. Existence and uniqueness of optimal control to the Navier-Stokes equations // C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math. 2000. V. 330. № 11. P. 1007–1011.

6. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.

7. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. xii+352 с.

8. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 383 с.

9. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 830 с.

10. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.

11. Функциональный анализ / под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1979. 418 с.

12. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York etc.: Springer-Verlag, 1983. viii+279 p.

13. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

14. Чернов А.В. Операторные уравнения II рода: теоремы о существовании и единственности решения и о сохранении разрешимости // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 5. С. 656–668.

15. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.

16. Рыжиков В.В. Курс лекций по функциональному анализу. М.: МГУ, 2004. 24 с.

17. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973. 352 с.

18. Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. N.Y., Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2011. xiv+600 p.

19. Чернов А.В. О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации коэффициента уравнения глобальной электрической цепи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1586–1601.

20. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.

21. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.

22. Павлова М.Ф., Тимербаев М.Р. Пространства Соболева (теоремы вложения). Казань: КГУ, 2010. 123 с.

ON THE EXISTENCE OF OPTIMAL CONTROL FOR A SEMILINEAR EVOLUTION EQUATION WITH AN UNBOUNDED OPERATOR

A. V. Chernov*

N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Gagarin Ave. 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

**e-mail: chavnn@mail.ru*

Received 28 November, 2023

Revised 16 January, 2024

Accepted 31 January, 2024

Abstract. The paper studies the problem of optimal control for an abstract first-order semilinear differential equation in a Hilbert space, with an unbounded operator and a control linearly entering the right-hand side. The objective functional is assumed to be additively separable with respect to the state and control, with a fairly general dependence on the state. A theorem on the existence of an optimal control is proved for this problem, and properties of the set of optimal controls are established. Due to the nonlinearity of the equation under study, the author further develops previous results on total preservation of unique global solvability and solution estimates for similar equations. This estimate proves essential for the investigation. As examples, a nonlinear heat conduction equation and a nonlinear wave equation are considered.

Keywords: semilinear evolution equation with an unbounded operator in a Hilbert space, existence of optimal control, nonlinear heat conduction equation, nonlinear wave equation.